Series Numéricas y Series de Potencias

Conocimientos Previos

Para poder seguir adecuadamente este tema, se requiere que el alumno repase y ponga al día sus conocimientos en los siguientes contenidos:

- Desigualdades de números reales.
- Conceptos generales de funciones: dominio, cotas, crecimiento, …
- Conocimiento de las propiedades de las funciones elementales: polinómicas, racionales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y del valor absoluto.
- Cálculo de límites de funciones, indeterminaciones y regla de L'Hôpital.
- Sucesiones numéricas. Límite de una sucesión. Cálculo de límites de sucesiones.

Sumas infinitas

1 Definición

Dada una sucesión infinita de números reales (a_n) se denomina *serie numérica* a la suma de sus infinitos términos, se denota: $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

- A la expresión a_n se le llama **término general de la serie**.
- La **suma parcial enésima** de la serie es $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$
- El **resto enésimo de la serie** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es: $R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k}$

  Es fácil ver que: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S_n + R_n$

Dependiendo del carácter de la sucesión de sumas parciales se definirá el **carácter de la serie**. Si la sucesión (S_n) es

- convergente, entonces se dirá que la **serie** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es **convergente**. Además $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = S$, En este caso, S es la suma de la serie.
- divergente, entonces se dirá que la **serie** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es **divergente**.
- oscilante, entonces se dirá que la **serie** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es **oscilante**.

2 Series notables

Series geométricas: $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$, *siendo* $a \neq 0$ *el primer término de la serie y* r *la razón*

Se cumple:

- *Si* $|r| < 1$ *la serie converge y además* $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$. *En general* $\sum_{n=k}^{\infty} ar^n = \frac{a\ r^k}{1-r}$.
- *Si* $r \geq 1$ *la serie diverge.*
- *Si* $r \leq -1$ *la serie es oscilante.*

Series armónicas generalizadas: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ $p > 0$. *Se cumple:*

Si $0 < p \leq 1$ *la serie diverge* *Si* $p > 1$ *la serie converge.*

3 Condición necesaria de convergencia

TEOREMA: Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es convergente entonces* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

IMPORTANTE.- Se trata de una condición necesaria pero no suficiente. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ cumple la condición necesaria de convergencia y, sin embargo, es divergente.

4 Series de términos positivos: Criterios de convergencia

Las series de términos positivos son las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Criterio del cociente: Se considera la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *de términos positivos cumpliendo*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = L \quad \text{ó} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

Entonces

Si $L < 1$ *la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es convergente* *Si* $L > 1$ *la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es divergente*

Criterio de comparación. Se consideran las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *de términos positivos:*

- *Si* $a_n \leq b_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *y* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *es convergente, entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *también es convergente.*
- *Si* $a_n \leq b_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *y* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es divergente, entonces .. también es divergente.*

Criterio de comparación por paso al límite. Se consideran las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Entonces si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda \neq \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$ *ambas series tienen el mismo carácter*

5 Series alternadas. Criterios de convergencia

Las series alternadas son de una de las formas siguientes:

i) $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + ... \quad (a_n > 0)$$

ii) $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} a_n = -a_1 + a_2 - .... \quad (a_n > 0)$$

TEOREMA DE LEIBNIZ: La serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \ (a_n > 0)$ *converge si la sucesión* (a_n) *es monótona decreciente y se verifica* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

SUMA APROXIMADA: Si la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \ (a_n > 0)$ es convergente porque verifica las hipótesis del Teorema de Leibniz, el valor absoluto del resto enésimo se puede acotar fácilmente.

En efecto, como

$$R_n = S - S_n = (-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + ... = (-1)^n (a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - ...)$$

y la sucesión (a_n) es monótona decreciente el valor absoluto del resto enésimo es:

$$|R_n| = a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - ... = a_{n+1} - \underbrace{(a_{n+2} - a_{n+3})}_{\geq 0} - \underbrace{(a_{n+4} - a_{n+5})}_{\geq 0} ...$$

es decir,

$$\left|R_n\right| < a_{n+1}$$

Obsérvese que este error será:

- por exceso si el primer término despreciado es negativo
- por defecto si el primer término despreciado es positivo

6 Series de términos cualesquiera. Criterios de convergencia

Una serie de términos cualesquiera, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, es *absolutamente convergente* si la serie de sus valores absolutos es convergente, es decir, si $\sum_{n=1}^{\infty} \left|a_n\right|$ es convergente.

> *TEOREMA*: *Si una serie es absolutamente convergente entonces es convergente.*

Si una serie es convergente pero no es absolutamente convergente se denomina *condicionalmente convergente*.

SERIES DE POTENCIAS

7 Definición

Una expresión de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x-a\right)^n$ *recibe el nombre de* ***serie de potencias centrada en el punto*** a. *Una serie de potencias puede ser interpretada como una función de* x

$$f\left(x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x-a\right)^n$$

8 Radio e intervalo de convergencia

El dominio de la función $f\left(x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x-a\right)^n$ será el conjunto de valores de x donde la serie converge y el valor de $f\left(x\right)$ será precisamente la suma de la serie.

Nota: Es evidente que toda serie de potencias converge en el punto a

$$f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (a-a)^n = a_o$$

TEOREMA DE ABEL.

Se considera la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ *. Entonces se cumple una y solo una de las afirmaciones siguientes:*

- *La serie converge solo en el punto* a *.*
- *Existe un número* $R > 0$ *de forma que la serie converge en* $|x-a| < R$ *y no converge en* $|x-a| > R$ *.*
- *La serie converge para todo* $x \in \mathbb{R}$ *.*

IMPORTANTE: El teorema anterior afirma que la serie converge siempre en un intervalo de la forma $(a-R, a+R)$, considerando que en el caso a) el valor de R es cero y en el caso c) el valor de R es infinito. Al número R se le llama *radio de convergencia* y al intervalo $(a-R, a+R)$ *intervalo de convergencia*.

OBSERVACIÓN: Conviene observar que el teorema no dice nada sobre la convergencia en los extremos de dicho intervalo, pudiéndose dar el caso de que la serie converja en ambos extremos, en uno solo o en ninguno. Para determinar la convergencia en los extremos se deberá analizar la convergencia de la serie numérica que resulte.

9 Operaciones con series de potencias

Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ en $(-R, R)$ *entonces*

- en $(-R, R)$
- $f(kx) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n k^n x^n$ en $\left(-\frac{R}{|k|}, \frac{R}{|k|}\right)$
- $f(x^k) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{nk}$ en $\left(-\sqrt[k]{R}, \sqrt[k]{R}\right)$ siendo $k > 0$

10 Derivación e integración de una serie de potencias

El siguiente resultado permite desarrollar una función en serie de potencias a partir del desarrollo conocido de la función derivada o de su primitiva.

TEOREMA. Si la función f viene definida por una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ con radio de convergencia $R>0$ entonces

- *f es continua en todo punto interior al intervalo de convergencia.*
- *f es derivable en el intervalo de convergencia y su derivada $f'(x)$ puede obtenerse mediante la derivación término a término:*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}$$

siendo el radio de convergencia de la serie derivada también R.
- *f es integrable en el intervalo de convergencia y, además, se puede integrar término a término:*
- $\int f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int a_n (x-a)^n\,dx\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + C$ *siendo también R, el radio de convergencia de esta serie.*

Nota: Cuando se obtiene el desarrollo en serie de una función aplicando la propiedad de integración de otra serie de potencias conocida, el valor de la constante de integración, C, se determina sustituyendo $x=a$ en la función y en la serie integradas.

11 Serie de Taylor

Ahora estudiamos el problema de hallar el desarrollo en serie de potencias de una función $f(x)$ analizando qué condiciones debe cumplir $f(x)$ para que pueda encontrarse una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ que converja a dicha función.

Recordemos el Teorema de Taylor que permitía expresar el valor de una función mediante su polinomio de Taylor.

FÓRMULA DE TAYLOR: Si la función f es derivable $n+1$ veces en un intervalo $(a-R, a+R)$ y escribimos $f(x) = T_n(f;a) + R_n(x)$ siendo

$$T_n(f;a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k}(a)}{k!}(x-a)^k$$

el polinomio de Taylor de grado n de f en el punto a y $R_n(x)$ el resto del polinomio, entonces se cumple: $\lim_{x\to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0$

Considerando la expresión de Lagrange del resto se tendrá que la fórmula de Taylor se puede escribir de la forma

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{f^{(n+1}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

con t un punto intermedio entre a y x.

TEOREMA: Si la función f es infinitamente derivable en un intervalo I abierto centrado en a y si $R_n(x)$ es el resto de la fórmula de Taylor, entonces:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$$

La serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n$ se llama Serie de Taylor de la función $f(x)$. En el caso particular en que $a=0$, la serie se denomina Serie de MacLaurin de la función $f(x)$.

PROPIEDAD: Puede probarse que si existe una constante $k>0$ de forma que $\left|f^{(n}(x)\right|\le k$ para todo $n\ge 0$, $x\in I$ entonces $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n$

Recogemos en la siguiente tabla los desarrollos en serie de Taylor de algunas funciones elementales así como los valores de x para los que dicha serie converge.

Desarrollos en serie
$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots \quad \lvert x\rvert<\infty$
$\operatorname{sen}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots \quad \lvert x\rvert<\infty$
$\cos(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots \quad \lvert x\rvert<\infty$
$\log(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots \quad -1<x\le 1$
$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots \quad \lvert x\rvert<1$

Desarrollos en serie
$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=1-x+x^2-\ldots+(-1)^n x^n+\ldots \qquad \lvert x\rvert<1$
$(1+x)^k=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-n+1)}{n!}x^n=$ $=1+kx+\frac{k(k-1)}{2!}x^2+\ldots \qquad \lvert x\rvert<1 \qquad k\in\mathbb{R}$

Nota: El último desarrollo generaliza el Binomio de Newton a cualquier exponente real y se conoce con el nombre **serie binomial.**

Con frecuencia, resulta difícil encontrar la derivada enésima para muchas funciones, así como probar que el resto enésimo tiende a cero cuando n tiende a infinito. En consecuencia, para encontrar el desarrollo de una función en serie de potencias, es frecuente utilizar funciones de las que ya se conoce su desarrollo y luego integrar, derivar o realizar operaciones algebraicas.

Ejercicios propuestos

1 En cada uno de los casos siguientes nos dan la suma de los n primeros términos de una serie numérica. Estudiar el carácter de la serie y determinar, si es posible, la suma:

a) $S_n=\frac{2n^2+3}{n^2-n+2}$

b) $S_n=\frac{5n^2-3n+2}{n^2-1}$. Hallar también el término a_3 y el término general a_n.

c) $S_n=\frac{4n+1}{n+3}-\frac{1}{3}$. Hallar el término a_{20}

Solución: a) Serie convergente, suma = 2

b) Serie convergente, suma = 5; $a_3=-\frac{7}{12}$;

$$a_n=\frac{3n^2-17n+10}{(n^2-1)\cdot(n^2-2n)}$$

c) Serie convergente, suma = $4-\frac{1}{3}=\frac{11}{3}$,

$$a_{20}=\frac{1}{46}$$

2 Comprobar la condición necesaria de convergencia en las siguientes series:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^n}{n!}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^n}{n},\ b\in\mathbb{R}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}n^p,\ p\in\mathbb{R}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{3}\right)^n$

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ g) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2$

h) $\sum_{n=1}^{\infty}n^3$ i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n}$

Solución: a), d), e) y f) verifican la condición necesaria de convergencia; b) verifica la condición necesaria de convergencia $\Leftrightarrow \lvert b\rvert\le 1$; c) verifica la condición necesaria de convergencia $\Leftrightarrow p<0$; g), h), i) no verifican la condición necesaria de convergencia

3 Determinar la convergencia de las siguientes series utilizando algún criterio:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2^n+3^n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)}{n^2+3}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7n\cdot e^{2n+3}}{(5n+3)2^{n+1}}$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+\sqrt{n}}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n}{3 + \log n}$ (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{3n+2}{n+1}\right)$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+2)}$ (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n + e^n}$

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3\ tg\left(\frac{1}{n}\right)}$

Solución: (a) Convergente (b) Convegente
(c) Convergente (d) Convergente
(e) Divergente (f) Convergente
(g) Divergente (h) Divergente (i) Convergente
(j) Convergente (k) Convergente

4 Halla el radio y el campo de convergencia de las siguientes series de potencias y comprueba el resultado con Matlab:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{(n+1)^2}$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,(x-2)^n$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ d) $\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$

e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$ f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^{2n+1}}{n}$

Solución: a) $R = 1$, $x \in [-1,1]$; b) $R = 0$, $x = 2$; c) $R = \infty$, $x \in \mathbb{R}$; d) $R = \frac{1}{2}$, $x \in \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e) y f) El alumno puede encontrar las soluciones, en los tres primeros ejercicios del apartado *Encuentra el error* de la página: http://www.giematic.unican.es/index.php/series/material-interactivo

5 Desarrollar en serie de potencias de x, salvo en los apartados en los que se indique un valor de a distinto de 0 para centrar el desarrollo, las siguientes funciones, indicando el campo de validez del desarrollo en cada caso:

a) $f(x) = \frac{2}{x-3} - \frac{1}{1+x^2}$

b) $f(x) = \frac{2x+3}{(1-x)(2-x)}$

c) $f(x) = \frac{2+x}{1+2x+x^2}$

d) $f(x) = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2$

e) $f(x) = (x^2+1)e^{-x}$ $a = 2$

Nota: En el ejercicio d) se aconseja tener en cuenta que $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

Solución:

a) $f(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3^{n+1}} x^n + (-1)^n x^{2n}\right)$

converge $\forall x \in (-1,1)$

b) $f(x) = 5\sum_{n=0}^{\infty} x^n - \frac{7}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n$ converge $\forall x \in (-1,1)$

c) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+2) x^n$ $\forall x \in (-1,1)$

d) y e) El alumno puede encontrar las soluciones, respectivamente, en los ejercicios 3 y 4 que se encuentran en el apartado *Desarrollar en serie de potencias* de la página: http://www.giematic.unican.es/index.php/series/material-interactivo

6 (a) Desarrollar en serie de potencias de x la función $f(x) = e^{2x}$, hallando el término general mediante la derivada enésima de la función f, utilizando la fórmula de MacLaurin.
(b) Obtener el campo de convergencia de la serie de potencias del apartado anterior.
(c) Hallar el valor aproximado de $e^{-0,4}$, utilizando hasta el término de grado 2 de la serie de potencias anterior.
(d) Calcular una cota superior del valor absoluto del error cometido en la aproximación realizada, justificando previamente que la serie alternada utilizada verifica las condiciones del criterio de Leibniz.

Solución: a) $e^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!}$; b) converge $\forall x \in \mathbb{R}$; c) $e^{-0'4} \cong 0,68$;

d) $|Error| \leq \frac{(0,4)^3}{3!} = 0,010\overset{\frown}{6}$

7 Utilizando las propiedades de derivación e integración de las series de potencias, desarrollar en serie de potencias de x las funciones siguientes y estudiar el campo de convergencia de la serie en cada caso:

a) $f(x)=\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{2}\ x\right)$

b) $f\left(x\right)=\log\left(1+x^2\right)$ c) $f\left(x\right)=\left(1+x\right)^{-2}$

Solución:

a) $\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{2}x\right)=\sqrt{2}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n 2^n}{2n+1}x^{2n+1}$

converge para todo $x\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

b) $\log\left(1+x^2\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{n+1}x^{2n+2}$ converge para todo $x\in\left[-1,1\right]$

c) $\left(1+x\right)^{-2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\left(n+1\right)x^n$ converge para todo $x\in\left(-1,1\right)$

8 Dada la función $f\left(x\right)=\log\left(e+x\right)$ se pide:

a) Desarrollar $f\left(x\right)$ en serie de potencias de x. Estudiar de forma razonada el intervalo de convergencia de dicho desarrollo.

b) Basándonos en el apartado anterior, determinar la suma de la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$.

c) Calcular el valor aproximado de la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ que se obtiene cuando se toman los 6 primeros términos de dicho desarrollo. (El resultado se dará en forma de fracción simplificada al máximo).

d) Determinar el error cometido usando, como valor aproximado de la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$, el número de términos del apartado anterior.

Solución:

a) $\log\left(e+x\right)=1+\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\frac{x^{n+1}}{\left(n+1\right)e^{n+1}}$,

converge $\forall x\in\left(-e,e\right]$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}=-\log\left(2\right)$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}\cong-\frac{74}{120}=-0,61\overset{\frown}{6}$

d) $\left|Error\right|\leq\left|\frac{\left(-1\right)^7}{7}\right|=\frac{1}{7}=0,1428$

9 Dada la serie de potencias

$S\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-3}}{4n-3}$

a) Determina su campo de convergencia.

b) Encuentra la expresión de la suma S(x) para los valores de x del campo de convergencia utilizando derivación.

c) Como caso particular, calcula el valor de la suma numérica siguiente y comprueba el resultado con Matlab: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(4n-3\right)2^{4n-3}}$

d) Dibuja con Matlab las primeras cuatro sumas parciales de la serie de potencias en el intervalo (-0.9,0.9), así como la función suma S(x).

Nota: Para calcular $\int\frac{dx}{1-x^4}$ recuerda que debes descomponer en fracciones simples el integrando de la forma:

$$\frac{1}{1-x^4}=\frac{Ax+B}{1+x^2}+\frac{C}{1+x}+\frac{D}{1-x},$$

obteniendo $A=0$, $B=\frac{1}{2}$, $C=D=\frac{1}{4}$.

Solución: Solución: El alumno puede encontrar la solución en el ejercicio 1 que se encuentra en el apartado *Campo de convergencia* de la página: http://www.giematic.unican.es/index.php/series/material-interactivo

Test de autoevaluación

1 Las siguientes colecciones ordenadas de números pueden ser o no progresiones geométricas. En el caso de que lo sean, hallar la razón:

(a) $-4,-\frac{4}{3},-\frac{4}{9},-\frac{4}{27}$

(b) $2^{-3},2^{-2},2^{-1},1$

(c) $3,-3,3,-3$

(d) $-3,3\sqrt{2},-6,6\sqrt{2}$

A) (a) y (c) son progresiones geométricas, sus razones son -1/3 y -1, respectivamente.
B) Las cuatro son progresiones geométricas, sus razones son 1/3, 2, -1 y $-\sqrt{2}$, respectivamente.
C) (a), (b) y (d) son progresiones geométricas, sus razones son 1/3, 1/2 y $-\sqrt{2}$, respectivamente.
D) Ninguna de las anteriores.

2 En las series siguientes estudiar si se verifica la condición necesaria para la convergencia:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{3^n n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{e^n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log 2)^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} d_n = \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n}\cdot 8^{n+1}$$

A) Solamente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ verifican la condición necesaria para la convergencia.
B) Solamente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ verifican la condición necesaria para la convergencia.
C) Solamente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ verifican la condición necesaria para la convergencia.
D) Ninguna de las anteriores.

3 De las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ se sabe que las sucesiones de sus sumas parciales enésimas son: $S_n = 3+\frac{4n-5}{1+n}$ y $S_n = \frac{5n+1}{n+3}-\frac{1}{3}$, respectivamente. Se verifica:

A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente; $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente y la suma vale 5.
B) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son series divergentes.
C) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son series convergentes, siendo las sumas 7 y 14/3, respectivamente.
D) Ninguna de las anteriores.

4 La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ es:

A) Divergente porque la sucesión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ tiene límite 1.
B) Divergente porque la sucesión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ tiene por límite el número e.
C) Convergente, aplicando el criterio del cociente.
D) Ninguna de las anteriores.

5 Aplicando el criterio de Leibniz, se deduce que el carácter de la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{sen}\frac{1}{n}$ es:

A) Divergente.
B) Oscilante.
C) Convergente.
D) D) Ninguna de las anteriores.

6 S La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{-n}}{n}$ verifica:

A) $S \approx S_4$ con error menor que 0.001.
B) $S < S_4$.
C) Es divergente.
D) Ninguna de las anteriores.

7

Se considera la serie

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}}{n^{a}}$ $(a>0)$. Se puede afirmar que esta serie es :

A) Divergente para todo a.
B) Divergente si $a<1$.
C) Convergente si $a>-1$.
D) Ninguna de las anteriores.

8

Decir cuáles de las siguientes son series de potencias:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n}}{n^{2}+2}$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(n^{2}+2\right) x^{n}}$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1/2}}{n^{2}}$ (d) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^{n+1}$

A) Solamente (a) y (d) son series de potencias.
B) Solamente (a), (b) y (d) son series de potencias.
C) Solamente (a), (c) y (d) son series de potencias.
D)Ninguna de las anteriores.

Nota: El alumno puede encontrar las soluciones de esta pregunta en el *ejercicio inmediato nº1* del apartado de series de potencias, resuelto en la página web: http://www.giematic.unican.es/index.php/series/material-interactivo

9

El campo de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^{n} x^{n}}{\sqrt{n+1}}$ es:

A) $[-1,1]$.
B) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.
C) $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$.
D) Ninguna de las anteriores.

10

El desarrollo en serie de potencias de x para la función $f(x)=\frac{1}{(1-x)^{2}}$ se obtiene aplicando la propiedad de derivación de la serie geométrica que tiene como suma $S(x)=\frac{1}{1-x}$. Decir cuál es la afirmación correcta:

A) $\frac{1}{(1-x)^{2}}=\sum_{n=1}^{\infty} n\, x^{n-1}$, convergente $\forall x \in[-1,1]$.

B) $\frac{1}{(1-x)^{2}}=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$, convergente $\forall x \in(-1,1)$.

C) $\frac{1}{(1-x)^{2}}=\sum_{n=1}^{\infty} n\, x^{n-1}$, convergente $\forall x \in(-1,1)$.

D) Ninguna de las anteriores.

11

El desarrollo en serie de potencias de x para la función $f(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-2x}$ verifica:

A) $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^{n}+3 \cdot 2^{n}\right] \cdot x^{n}$, convergente $\forall x \in\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

B) $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^{n}+3 \cdot 2^{n}\right] \cdot x^{n}$, convergente $\forall x \in(-1,1)$.

C) $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[1+3 \cdot(-2)^{n}\right] \cdot x^{n}$, convergente $\forall x \in\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

D) Ninguna de las anteriores.

12

Sabiendo que el desarrollo en serie de potencias de la siguiente función $f(x)=\operatorname{arcsen}\left(\frac{2x}{1+x^{2}}\right)$ se obtiene integrando la serie geométrica cuya suma es $S(x)=\frac{2}{1+x^{2}}$. Calcular hasta qué grado n de los términos de la serie de $f(x)$ será necesario tomar para aproximar el valor de $\frac{\pi}{4}$ con un error en valor absoluto menor que 0'01.

A) Se debe tomar hasta el grado n=4.

B) Se debe tomar hasta el grado n=49.
C) Se debe tomar hasta el grado n=97.
D) Ninguna de las anteriores.

Soluciones del Test:

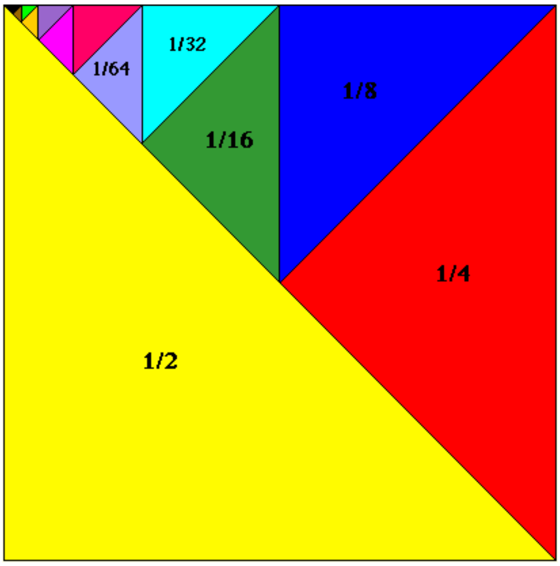
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B	A	C	B	C	B	B	A	C	C	D	B

Ejercicios resueltos

SERIES NUMÉRICAS. CONVERGENCIA

1 Imagina un cuadrado de lado unidad y considera la suma de las áreas coloreadas

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+....$$



¿Cuál es el valor de su suma?

Solución

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+....=1$$

2 Escribir el número $1/3$ como serie numérica.

Solución

se escribe en forma decimal periódico como $1/3=0,\widehat{3}$ donde se entiende que el 3 se repite infinitas veces. Es decir,

$$1/3=0,3+0,03+0,003+0,0003+....$$

que abreviadamente podemos poner como:

$$1/3=\sum_{n=1}^{\infty}\left[3\cdot\left(0,1\right)^{n}\right]$$

3 Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, se sabe que $S_n = \dfrac{3n+2}{4n-1}$.

a) ¿Se podría calcular la suma de la serie? En caso afirmativo indicar su valor.

b) ¿Cumple la condición necesaria de convergencia? Justificar la respuesta

Solución a)

Sí, la suma de la serie es ¾.

Solución b)

Como es convergente, debe cumplir la condición necesaria de convergencia.

4 Una serie tiene por suma parcial enésima $S_n = \dfrac{2n^2-1}{n+3}$. ¿Es una serie geométrica? ¿Es convergente? En caso afirmativo calcular la suma de la serie.

Solución

La serie es convergente y su suma es

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-1}{n+3}=2$$

No se trata de una serie geométrica, el término general de la serie es

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = \frac{2n^2-1}{n+3}-\frac{2\left(n-1\right)^2-1}{\left(n-1\right)+3}= \\ &= \frac{2n^2-1}{n+3}-\frac{2n^2-4n-3}{n+2}= \\ &= \frac{\cancel{2n^3}+4n^2-n-2\cancel{-2n^3}-6n^2+4n^2+12n+3n+9}{\left(n+3\right)\left(n+2\right)}=\frac{2n^2-14n+7}{\left(n+3\right)\left(n+2\right)} \end{aligned}$$

5 Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cumpliendo que $S_n = sen\left(\dfrac{1}{n}\right)\left(n+3\right)$ determinar el carácter de dicha serie obteniendo, si procede, el valor de la suma.

Solución

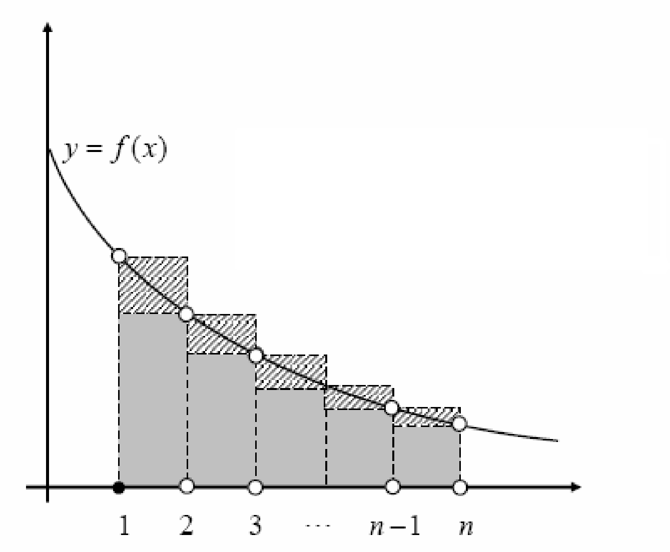
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} sen\left(\frac{1}{n}\right)\left(n+3\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{n}=1$$

La serie es convergente siendo su suma 1.

6 Determinar el carácter de la siguiente serie

Solución

Basta considerar que



$$\int_1^n f(x)dx < \sum_{k=1}^{n} f(k) < f(1) + \int_1^n f(x)\,dx$$

Considerando $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, una cota de la suma parcial enésima de la serie es

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x^2}dx = 1 + \left(-\frac{1}{n} + 1\right)$$

Entonces,

$$S_n \leq 2 - \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n \leq 2$$

y, por lo tanto, la suma parcial enésima de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente ya que una serie de términos positivos o es convergente o divergente.

7 Comprobar la condición necesaria de convergencia en las siguientes series:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-0.999}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^5}+2}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n}{n},\ b \in \mathbb{R}$ g) $\sum_{n=1}^{\infty} n^p,\ p \in \mathbb{R}$ h) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^n$ i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n}{n!},\ b \in \mathbb{R}$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{n}$ k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)}{2^n}$

Solución a)

$n^2 \to \infty$, por tanto, la serie es divergente.

Solución b)

$\left(\frac{4}{3}\right)^n \to \infty$, porque $\frac{4}{3} > 1$, por tanto la serie es divergente.

Solución c)

$\frac{n+2}{n} \to 1 \neq 0$, por tanto la serie es divergente.

Solución d)

$n^{-0.999} = \frac{1}{n^{0.999}} \to 0$, se cumple la condición necesaria de convergencia por tanto no se puede extraer ninguna conclusión con este criterio.

Solución e)

$\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^5}+2} \approx \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}} \to 0$, igual que en el caso anterior.

Solución f)

$\frac{b^n}{n} \to 0$, si $|b| \leq 1$, por lo tanto si $|b| > 1$ la serie es divergente.

Solución g)

$n^p \to 0$, si $p < 0$, por lo tanto si $p \geq 0$ la serie es divergente.

Solución h)

$\left(\frac{-1}{3}\right)^n \to 0$, porque $\left|-\frac{1}{3}\right| < 1$, por tanto se cumple la condición necesaria de convergencia y no se puede extraer ninguna conclusión con este criterio.

Solución i)

$\frac{b^n}{n!} \to 0$, para todo $b \in \mathbb{R}$, por tanto se cumple la condición necesaria de convergencia y no se puede extraer ninguna conclusión con este criterio.

Solución j)

$\operatorname{sen}\frac{1}{n} \to 0$, por tanto, se cumple la condición necesaria de convergencia y no se puede extraer ninguna conclusión con este criterio.

Solución k)

$\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) \to 0 \cdot e \cdot 1 \to 0$, igual que en el caso anterior.

8 Determinar el carácter de las siguientes series

a) $\sum_{n=1}^{\infty} arctg\left(\frac{2^n}{3^{2n+1}}\right)$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2+1}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}-1-\frac{1}{n}}{tg\left(\frac{3}{n^3}\right)}$

Solución a)

Para calcular el carácter de la serie basta tener en cuenta que

$$arctg\left(\frac{2^n}{3^{2n+1}}\right) \approx \frac{2^n}{3^{2n+1}} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{9}\right)^n$$

Aplicando el criterio de comparación las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} arctg\left(\frac{2^n}{3^{2n+1}}\right) \text{ y } \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{9}\right)^n$$

Tienen el mismo carácter. Como $\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{9}\right)^n$ es una serie geométrica de razón r=2/9 menor que uno la serie es convergente y, en consecuencia, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} arctg\left(\frac{2^n}{3^{2n+1}}\right)$ también.

Solución b)

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2+1}$ es de términos positivos. Aplicando el criterio de comparación por paso al límite se deduce que es convergente ya que tiene el mismo carácter que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ ya que se cumple:

- $\frac{n\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2+1} \approx \frac{n\,\frac{1}{n}\,\frac{1}{n}}{n^2} = \frac{1}{n^3}$
- la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ es convergente.

Solución c)

comprobamos que es divergente porque no se cumple la condición necesaria de convergencia

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{1/n}-1-\frac{1}{n}}{tg\left(\frac{3}{n^3}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2n^2}}{\frac{3}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} = \infty$$

Para este límite se ha utilizado las siguientes equivalencias

$$e^x \approx 1+x+\frac{x^2}{2!} \qquad tg(x)\approx x \qquad si\ x\to 0$$

$$e^{1/n}-1-\frac{1}{n}\approx\frac{1}{2n^2} \qquad tg\left(\frac{1}{n^3}\right)\approx\frac{1}{n^3}$$

9 Determina la certeza o falsedad de las siguientes afirmaciones **justificando la respuesta**:

a) La serie, cuya suma parcial enésima es $S_n = 1+\frac{(-1)^n}{n^2}$, se trata de una serie oscilante.

b) La suma de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{7(-4)^{2n}}$ es $\frac{9}{91}$.

Solución a)

No es oscilante, es convergente. Su suma es 1 porque $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{n^2}\right]=1$

Solución b

La suma de la serie geométrica es $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{7(-4)^{2n}}=\frac{3}{7}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4^2}\right)^n=\frac{3}{7}\frac{\frac{3}{4^2}}{1-\frac{3}{4^2}}=\frac{3}{7}\cdot\frac{3}{13}=\frac{9}{91}$

10 Determina si las siguientes series son convergentes:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n2^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}3\log\left(1+\frac{1}{3^n}\right) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{2^n\sqrt[3]{n}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+3}{n+2}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}3\frac{2^{2n-1}}{(-9)^n}$$

Solución a)

Aplicanco el criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+1}{(n+1)2^{n+1}}:\frac{n^2+1}{n2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+2n+2)n2^n}{(n+1)(n^2+1)2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+2n+2)n}{(n+1)(n^2+1)2}=\frac{1}{2}<1$$

Luego la serie es convergente

Solución b)

Es convergente por comparación con la serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{3^n}$.

$$3\log\left(1+\frac{1}{3^n}\right)\approx\frac{3}{3^n}=\frac{1}{3^{n-1}}$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{3^n}$ es convergente por tener razón 1/3 que es menor en valor absoluto a 1.

Solución c)

Es convergente por Leibniz. La serie es $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$. Se tiene que $a_n=\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ cumple:

- $\lim_{n\to\infty} a_n=0$
- $a_{n+1}<a_n$

Solución d)

No es convergente porque no cumple la condición necesaria de convergencia.

Solución e)

Es una serie geométrica de razón -4/9, por lo tanto, es convergente.

$$\sum_{n=1}^{\infty}3\frac{2^{2n-1}}{(-9)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2}\left(-\frac{4}{9}\right)^n=\frac{-\frac{3\cdot 2}{9}}{1+\frac{4}{9}}=\frac{-6}{13}$$

SERIES NUMÉRICAS. SUMA

11 Calcular la suma de las siguientes series:

a) $4+\pi-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{n^3+3n^2+2n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$ d) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{n+2}}{3^{2n-1}}$ e) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+2^n}{4\cdot 3^{2n+3}}$

Solución a)

Observamos que $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$ es una serie geométrica de primer término ¼ y razón ½ por lo que

$$4+\pi-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=4+\pi-\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2^2}}{1-\frac{1}{2}}=4+\pi$$

Solución b)

Descomponiendo en fracciones simples

$$\frac{3n+2}{n^3+3n^2+2n}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\frac{2}{n+2}$$

$$S_n=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)-\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{4}+\ldots+\frac{2}{n}+\frac{2}{n+1}+\frac{2}{n+2}\right)=$$
$$=\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n+1}\right)-\left(\frac{2}{n+1}+\frac{2}{n+2}\right)=2-\frac{1}{n+1}-\frac{2}{n+2}$$

$$S=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n+1}-\frac{2}{n+2}\right)=2$$

Solución c)

La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$ es divergente, ya que basta aplicar el criterio de comparación por paso al límite.

$$\log\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\approx\frac{n+1}{n+2}-1=\frac{-1}{n+2}\qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n+2}=-\infty$$

Además: $\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(\frac{n+1}{n+2}\right)=-\infty$

Solución d)

La serie $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{n+2}}{3^{2n-1}}$ es geométrica con razón r=2/9 menor que 1, por lo tanto, es convergente y su suma es

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4}{3^{-1}}\left(-\frac{2}{9}\right)^n=\frac{12\left(-\frac{2}{9}\right)^2}{1+\frac{2}{9}}=\frac{2^4}{3^3}:\frac{11}{3^2}=\frac{16}{33}$$

Solución e)

La serie es convergente por ser la suma de dos series convergentes

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+2^n}{4\cdot 3^{2n+3}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4\cdot 3^{2n+3}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{4\cdot 3^{2n+3}}=\frac{1}{4\cdot 3^3}\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{9^n}}_{\substack{geométrica\\ r=\frac{1}{9}}}+\frac{1}{4\cdot 3^3}\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{9}\right)^n}_{\substack{geométrica\\ r=\frac{2}{9}}}$$

$$=\frac{1}{4\cdot 3^3}\frac{1}{1-\frac{1}{9}}+\frac{1}{4\cdot 3^3}\frac{1}{1-\frac{2}{9}}=\frac{1}{2^5\cdot 3}+\frac{1}{4\cdot 3\cdot 7}$$

SERIES ALTERNADAS. SUMA APROXIMADA.

12 Determinar el carácter de las siguientes series y estudiar también su convergencia absoluta:

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2\log(n)}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+1}}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)}{n^2+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$

Solución a)

La serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2\log(n)}$ es una serie alternada convergente por el criterio de Leibnitz:

- $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2\log(n)}=0$
- $\{a_n\}$ es monótona decreciente:

$$\frac{1}{(n+1)^2\log(n+1)}<\frac{1}{n^2\log(n)}\underset{\substack{el\ logaritmo\\ es\ una\ función\\ creciente}}{\Leftrightarrow} n^2\log(n)<(n+1)^2\log(n+1)$$

Estudiamos ahora la convergencia absoluta, es decir, la convergencia de la serie: $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2\log(n)}$. Como $\log(2)n^2\le n^2\log(n)$ se tiene que

$$\frac{1}{n^2\log(n)}\le\frac{1}{\log(2)\cdot n^2}$$

y, por el criterio de comparación es convergente. Luego la serie es absolutamente convergente.

Solución b)

La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+1}}$ es una serie alternada convergente por el criterio de Leibnitz:

- $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}=0$
- $\{a_n\}$ es monótona decreciente:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)+1}}<\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\Leftrightarrow\sqrt[3]{n+1}<\sqrt[3]{n+2}$$

Estudiamos ahora la convergencia absoluta, es decir, la convergencia de la serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$. Como

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} \approx \frac{1}{n^{1/3}}$$

por el criterio de comparación es divergente. Luego la serie no converge absolutamente.

Solución c)

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n^2+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ es convergente por Leibniz,

- $a_n = \frac{1}{n^2+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$
- $a_n = \frac{1}{n^2+1}$ es monótona decreciente,

$$a_{n+1} < a_n \Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)^2+1} < \frac{1}{n^2+1} \Leftrightarrow n^2+1 < (n+1)^2+1$$

13 a) Aproximar la suma de la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4}$ cuando se considera la suma parcial enésima y S_{40} estimar el error en la aproximación.

b) ¿Cuántos términos es necesario sumar para garantizar que la suma parcial enésima de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4}$ aproxima al valor real de S con un error menor que 10^{-10} .

Solución a)

Como la serie alternada, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4}$ es convergente por Leibniz, se tendrá que una cota de la aproximación de S por S_{40} siendo

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} \qquad S_{40} = \sum_{n=1}^{40} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4}$$

será

$$\left|S - S_{40}\right| \le \frac{1}{41^4}$$

Calculando este valor con el ordenador la cota del error es $\pm 3.54 \cdot 10^{-7}$ y el valor aproximado $S \approx 0.9470326439$.

Para realizar estos cálculos con Matlab se pueden escribir las siguientes instrucciones:

```
>>n=1:40;
>>S40=sum((-1).^(n+1)./(n.^4))
```

```
>>cota=1/41^4
```

Solución b)

Si se quiere garantizar que el error de la aproximación sea menor que 10^{-10} basta elegir el número de términos n que cumpla

$$\frac{1}{n^4} < 10^{-10}.$$

Ya que en ese caso se tendría: $\left|S - S_n\right| \le \frac{1}{n^4} < 10^{-10}$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{1}{n^4} < 10^{-10} \Leftrightarrow n \ge \sqrt[4]{10^{10}} - 1 \approx 315.2$$

basta considerar un número de términos n verificando $n \ge 316$ para conseguir que el error sea menor que 10^{-10}.

14 Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\,2^n}$. Se pide:

a) Probar que es convergente.

b) Calcular S_4 y determinar el error que se comete al aproximar la suma de la serie utilizando esta suma parcial. ¿Es S_4 mayor o menor que la suma exacta?.

c) Calcular el valor de n necesario para aproximar la suma de la serie por S_n con error menor que 0.001.

Solución a)

Se trata de una serie alternada, comprobamos su convergencia utilizando el teorema de Leibniz:

- El término general de la serie de valores absolutos tiende a 0, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\,2^n} = 0$

- La sucesión de valores absolutos es monótona decreciente,

$$a_n \ge a_{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n2^n} \ge \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} \quad \Leftrightarrow \quad (n+1)2^{n+1} \ge n2^n \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad 2n+2 \ge n \quad \Leftrightarrow \quad n+2 \ge 0$$

La última desigualdad es cierta para todo n natural.

Por lo tanto, la serie alternada convergente porque verifica el teorema de Leibniz.

$$S_4 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 4} - \frac{1}{3\cdot 8} + \frac{1}{4\cdot 16} = -0\cdot 4010$$

El error es menor o igual que el primer término despreciado:

$$\left|error\right| \le a_5 \qquad \Rightarrow \qquad \left|error\right| \le \frac{1}{5\cdot 2^5} = 0\cdot 0063$$

Como el primer término despreciado se resta, el resto de la serie es negativo por lo que S_4 es mayor que la suma exacta ($S < S_4$).

Como $|error| \leq a_n$, tomando $a_n < 0.001$ se tendrá $|error| \leq 0.001$.

Por tanto sólo hay que resolver la desigualdad

$$\frac{1}{n2^n} < \frac{1}{1000} \quad \Leftrightarrow \quad n2^n > 1000 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq 8$$

DESARROLLO EN SERIE DE POTENCIAS

15 Calcular el dominio de la siguiente función $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n+1}(x-2)^n$

Solución

Se trata de calcular el campo de convergencia de la serie de potencias. Utilizando la convergencia absoluta, se tiene que como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4^{n+1}}{n+2}|x-2|^{n+1}}{\frac{4^n}{n+1}|x-2|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4(n+1)|x-2|}{(n+2)} = 4|x-2|$$

la serie será convergente si $|x-2| < \frac{1}{4}$.

- Para $x = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n+1}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ es divergente por ser la serie armónica.

- Para $x = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n+1}\left(-\frac{1}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ es convergente por Leibnitz (se deben comprobar las hipótesis del teorema).

El dominio de la función es $\left[\frac{7}{4}, \frac{9}{4}\right)$

16 Se considera la serie de números reales $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+2)}$ $\quad x \in \mathbb{R}$. Se pide:

a) Estudiar para qué valores de x es convergente dicha serie
b) Calcular su suma para x=1.

Solución a)

Como x es un número real estudiamos en primer lugar la convergencia absoluta, es decir la convergencia de la serie de los valores absolutos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n\left(n+2\right)} \qquad x \in \mathbb{R}$$

Aplicando a esta última serie el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)(n+3)}}{\dfrac{|x|^n}{n(n+2)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|\,n(n+2)}{(n+1)(n+3)} = |x|$$

- Si $|x|<1$ La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\left(n+2\right)}$ converge .
- Si $|x|>1$ La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\left(n+2\right)}$ diverge.
- Si x=1 , La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\left(n+2\right)}$ es convergente por el criterio de comparación por paso al límite sin más que compararla con $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
- Si x=-1 , La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-1\right)^n}{n\left(n+2\right)}$ es convergente por el criterio de Leibniz (la sucesión $a_n = \frac{1}{n\left(n+2\right)}$ es monótona decreciente y tiende a cero).

Solución b)

Calculamos la suma para x=1, es decir, el valor de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\left(n+2\right)}$, para ello descomponemos el término general de la serie en fracciones simples:

$$a_n = \frac{1}{n\left(n+2\right)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2} \quad \text{con} \quad A = \frac{1}{2},\ B = \frac{-1}{2}$$

La suma parcial enésima es:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)$$

Calculando su límite

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\left(n+2\right)} = \frac{3}{4}$$

17 Calcular el intervalo de convergencia de la serie $f\left(x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(x-1\right)^n}{n\left(n+1\right)\,3^n}$ y, si fuera posible, el valor de $f\left(4\right)$ y $f\left(6\right)$.

Solución

Utilizando el criterio del cociente se tendrá que las serie será convergente para los valores $x \in \mathbb{R}$ que cumplan que

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\dfrac{\left(x-1\right)^{n+1}}{\left(n+1\right)\left(n+2\right)\,3^{n+1}}\right|}{\left|\dfrac{\left(x-1\right)^{n}}{n\left(n+1\right)\,3^{n}}\right|} < 1$$

Calculando el límite

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(n+1\right)\,3^n \left|x-1\right|^{n+1}}{\left(n+1\right)\left(n+2\right)\,3^{n+1}\left|x-1\right|^{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\,\left|x-1\right|}{\left(n+2\right)\,3} = \frac{1}{3}\left|x-1\right|$$

$$\frac{1}{3}\left|x-1\right| < 1 \Leftrightarrow \left|x-1\right| < 3 \Leftrightarrow x \in \left(-2,4\right)$$

El radio de convergencia es 3.

Valor en x=6

El valor $f\left(6\right)$ no puede calcularse porque el Teorema de Abel indica que en el conjunto $\left(-\infty,-2\right)\cup\left(4,\infty\right)$ la serie no converge. Sin embargo, este Teorema no establece si la serie puede converger en los puntos x=-2 y x=4.

Valor en x=4

Para ver si converge en x=4 consideramos la serie $f\left(4\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(4-1\right)^n}{n\left(n+1\right)\,3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\left(n+1\right)}$

y por comparación con la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ se puede concluir que es convergente.

Para calcular su suma tenemos en cuenta que

$$a_n = \frac{1}{n\left(n+1\right)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Luego,

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n =$$
$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 \Rightarrow f(4) = 1$$

18

Se considera la función $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^{2n+3}}$. Determinar:

a) El dominio de la función $f(x)$.

b) Escribir el código Octave/Matlab para representar la función derivada y su aproximación considerando los 10 primeros términos de su desarrollo.

Solución a)

Esta función es una serie de potencias geométrica $f(x) = \frac{1}{3^3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{9}\right)^n = \frac{\frac{1}{3^3}}{1-\frac{x}{9}} = \frac{1}{3(9-x)}$

que es convergentes si $\left|\frac{x}{9}\right| < 1 \Rightarrow |x| < 9$. Luego su dominio es $(-9,9)$.

Solución b)

Dentro de su intervalo de convergencia la derivada de la función es

$$f'(x) = \frac{1}{3^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{9^n} = \frac{1}{3}(9-x)^{-2}$$

Código Octave/Matlab para representar la función

```
x=-8.9:0.3:8.9;
g=1./(3*(9-x).^2);
plot(x,g,'*r')
hold on
suma=0;
for k=1:10
    ter=k*x.^(k-1)/9^k;
    suma=suma+ter;
end
plot(x,suma,'og')
hold off
```

19

Calcula el desarrollo en serie de potencias de la función $f(x) = \frac{1}{-x^2 + 3x - 2}$ indicando su campo de convergencia.

Solución

Descomponiendo en fracciones simples

$$f(x)=\frac{1}{x^2+x-2}=\frac{1/3}{x-1}-\frac{1/3}{2+x}$$

Utilizando el desarrollo de la serie geométrica se tendrá:

$$f(x)=-\frac{1}{3}\frac{1}{1-x}-\frac{1}{6}\frac{1}{1+\frac{x}{2}}=\underbrace{-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}x^n}_{si\ |x|<1}-\underbrace{\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^n}_{si\ \left|\frac{x}{2}\right|<1}\qquad si\ |x|<1$$

20 Determinar el desarrollo en serie de potencias de las siguientes funciones en los puntos que se indica señalando su campo de convergencia:

a) $f(x)=\dfrac{5x-1}{x^2-x-2}\qquad a=0$ b) $f(x)=\operatorname{arctg}(x),\qquad a=0$

c) $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}\qquad a=0$ d) $f(x)=\dfrac{1}{x}\qquad a=1$

e) $f(x)=\dfrac{2+x}{1+2x+x^2}\qquad a=0$ f) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}\qquad a=0$

g) $f(x)=\log(1+x)\qquad a=0$ h) $f(x)=\dfrac{1+x}{(1-x)^3}\qquad a=0$

i) $f(x)=\dfrac{5x+3}{(2+x)(-1+3x)}\qquad a=0$ j) $g(x)=\log\left(\dfrac{1-x}{2+6x}\right)\qquad a=0$

Solución a)

$$x^2-x-2=0\quad\rightarrow\quad x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\begin{cases}x=2\\x=-1\end{cases}\quad\rightarrow\quad x^2-x-2=(x-2)(x+1)$$

Descomponemos en fracciones simples

$$\frac{5x-1}{x^2-x-2}=\frac{5x-1}{(x+1)(x-2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}=\frac{A(x-2)+B(x+1)}{(x+1)(x-2)}$$
$$\rightarrow\quad 5x-1=A(x-2)+B(x+1)$$

dando valores a x,

$$\begin{cases}para\quad x=-1:\quad -6=A(-3)\quad\rightarrow\quad A=2\\para\quad x=2:\quad 9=B(3)\quad\rightarrow\quad B=3\end{cases}$$

Por tanto, $$\frac{5x-1}{x^2-x-2}=\frac{5x-1}{(x+1)(x-2)}=\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-2}$$

Desarrollamos cada una de las fracciones

- $$\frac{2}{x+1}=\frac{2}{1-(-x)}=2\left(1-x+x^2-x^3+\ldots\right)=2\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n x^n$$

  Serie geométrica de razón –x; converge si y solo si

  $$\left|-x\right|<1 \quad\Rightarrow\quad \left|x\right|<1 \quad\Rightarrow\quad x\in\left(-1,1\right).$$

- $$\frac{3}{x-2}=\frac{-3}{2-x}=\frac{-3/2}{1-\left(x/2\right)}=-\frac{3}{2}\left(1+\frac{x}{2}+\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^3+\ldots\right)=-\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}$$

  Serie geométrica de razón $\frac{x}{2}$; converge si y solo si

  $$\left|\frac{x}{2}\right|<1 \quad\Rightarrow\quad \left|x\right|<2 \quad\Rightarrow\quad x\in\left(-2,2\right)$$

El desarrollo completo será

$$f\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[2\left(-1\right)^n-\frac{3}{2^{n+1}}\right]x^n,$$

que converge en el intervalo intersección de los dos, es decir $\forall\, x\in\left(-1,1\right)$.

Solución b)

$$f\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n x^{2n+1}}{2n+1} \qquad \left|x\right|\le 1$$

Solución c)

Integramos la función $\frac{1}{\left(1-x\right)^2}$, resultando $g\left(x\right)=\int\frac{1}{\left(1-x\right)^2}dx=\frac{1}{1-x}+C$.

Desarrollamos $g\left(x\right)$ en serie de potencias de x y tendremos

$$g\left(x\right)=\frac{1}{1-x}+C=\left(1+x+x^2+x^3+\ldots\right)+C=\sum_{n=0}^{\infty}x^n+C$$

$\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ es una serie geométrica de razón x, que converge si y sólo si $\left|x\right|<1 \quad\Rightarrow\quad x\in\left(-1,1\right)$.

Para obtener el desarrollo en serie de $f\left(x\right)$ derivamos término a término el desarrollo de $g\left(x\right)$ y obtenemos

$$f\left(x\right)=g'\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+1\right)x^n$$

Al derivar desaparece el primer sumando porque es la derivada de una constante, en consecuencia comenzamos a sumar en n=1; después hemos vuelto a expresar el sumatorio comenzando en n=0.

La serie obtenida para $f(x)$ converge como mínimo $\forall\, x \in (-1,1)$. Estudiamos la convergencia en los extremos:

- Para $x=-1:$ $f(-1)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-1)^n$; la serie no cumple la condición necesaria de convergencia porque no existe el límite $\lim_{n\to\infty}(n+1)(-1)^n$
- Para $x=1:$ $f(1)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1) \to \infty$; la serie diverge.

En conclusión, resulta $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n\,,\quad \forall x\in(-1,1)$

Solución d)

Hallamos la derivada enésima en el punto *x=1*

$$
\begin{aligned}
&f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}\ ; \quad f(1)=1\\
&f'(x)=(-1)\cdot x^{-2}\ ; \quad f'(1)=-1\\
&f''(x)=(-1)\cdot(-2)\cdot x^{-3}\ ; \quad f''(1)=2\cdot 1\\
&f'''(x)=(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot x^{-4}\ ; \quad f''(1)=-3\cdot 2\cdot 1\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&f^{(n}(x)=(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdots(-n)\,x^{-(n+1)}=(-1)^n\,n!\,x^{-(n+1)};\quad f^{(n}(1)=(-1)^n\,n!
\end{aligned}
$$

El desarrollo en serie de Taylor será

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n}(1)}{n!}(x-1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n$$

Calculamos el intervalo de convergencia aplicando el criterio del cociente a la serie en valor absoluto, así

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|(-1)^{n+1}(x-1)^{n+1}\right|}{\left|(-1)^n(x-1)^n\right|}=|x-1|$$

que converge si $|x-1|<1 \quad\to\quad \forall x\in(0,2)$.

Ahora estudiamos la convergencia en los extremos del intervalo

- Para $x=0:$ $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(-1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}1$; la serie no cumple la condición necesaria de convergencia, es divergente.
- Para $x=2:$ $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$; la serie es oscilante.

En conclusión, resulta $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n\,,\quad \forall x\in(0,2)$.

Solución e)

$$f(x)=\frac{2+x}{1+2x+x^2}=\frac{2+x}{(x+1)^2}$$ Descomponemos en fracciones simples

$$\frac{2+x}{(x+1)^2}=\frac{A}{(x+1)^2}+\frac{B}{(x+1)}=\frac{A+B(x+1)}{(x+1)^2} \quad\rightarrow\quad 2+x=A+B(x+1)$$

$$\begin{cases} para \quad x=-1: \quad 1=A \\ para \quad x=0: \quad 2=A+B \quad\rightarrow\quad B=1 \end{cases}$$

$$\frac{2+x}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+1)}$$

- Para obtener el desarrollo de $\frac{1}{(x+1)^2}$ podemos integrar la función

$$\int\frac{1}{(x+1)^2}\cdot dx=\frac{-1}{x+1}+C=\frac{-1}{1-(-x)}+C=-\left(1-x+x^2-x^3+\dots\right)+C=$$
$$=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n+C$$

derivando obtenemos el desarrollo buscado

- $$\frac{1}{(x+1)^2}=\int\frac{1}{(x+1)^2}=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\cdot x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)\cdot x^n$$

El desarrollo de $\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-(-x)}=1-x+x^2-x^3+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$, que converge si y sólo si $|-x|<1 \;\Rightarrow\; |x|<1 \;\Rightarrow\; x\in(-1,1)$.

En conclusión, resulta $$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+2)x^n, \quad \forall x\in(-1,1)$$

Solución f)

$$f(x)=\frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{1-(-x^2)}=1-x^2+x^4-x^6+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

se trata de una serie geométrica de razón $-x^2$, que converge si y sólo si

$$|-x^2|<1 \quad\rightarrow\quad |x^2|<1 \quad\rightarrow\quad |x|^2<1 \quad\rightarrow\quad |x|<1$$

resultando

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}, \quad \forall x\in(-1,1)$$

Solución g)

Desarrollamos la función que se obtiene al derivar $f(x)=\log(1+x)$, ya que es más sencilla

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-(-x)}=1-x+x^2-x^3+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

Es una serie geométrica de razón $-x$, que converge si y sólo si .$|-x|<1 \quad \rightarrow \quad |x|<1$..

Para obtener el desarrollo de $f(x)$ integramos término a término el desarrollo de $f'(x)$ y tendremos

$$f(x)=\int\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\cdot dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)}+C$$

Hacemos $x=0$ para obtener el valor de la constante de integración, así

$$f(0)=\log(1+0)=\log(1)=0=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 0^{n+1}}{(n+1)}+C \quad \Rightarrow \quad C=0,$$

Luego quedará el desarrollo $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)}$, que converge al menos para $|x|<1$.

Estudiamos ahora la convergencia en los extremos del intervalo

- Para $x=-1$: $\quad f(-1^+)=\log(0^+) \quad \rightarrow -\infty$; la serie diverge.
- Para $x=1$: $\quad f(1)=\log(2) \quad \rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)}$; la serie es alternada, resultando convergente porque verifica el teorema de Leibniz, pues cumple las dos hipótesis:

  La sucesión $\frac{1}{(n+1)}$ es monótona decreciente

  $$a_{n+1}<a_n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{(n+2)}<\frac{1}{(n+1)} \quad \Leftrightarrow \quad n+2>n+1 \quad \Leftrightarrow \quad 2>1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

  Además se cumple $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)}=0$

En conclusión, el desarrollo en serie quedará

$$f(x)=\log(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)}, \quad \forall x\in(-1,1]$$

Solución h)

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2 x^n \qquad |x|<1$$

Solución i)

Descomponiendo en fracciones simples:

$$\frac{5x+3}{(2+x)(-1+3x)}=\frac{A}{2+x}+\frac{B}{-1+3x}$$

$$5x+3=A(-1+3x)+B(2+x)$$

Si $x=-2$ $\qquad 5(-2)+3=A(-1+3(-2))\Rightarrow -7=-7A\Rightarrow A=1$

Si $x=0$ $\qquad 2B=3+A\Rightarrow 2B=4\Rightarrow B=2$

Por lo tanto,

$$\frac{5x+3}{(2+x)(-1+3x)}=\frac{1}{2+x}+\frac{2}{-1+3x}$$

Utilizando el desarrollo de la serie geométrica, se tiene que

$$\frac{5x+3}{(2+x)(-1+3x)}=\frac{1}{2+x}+\frac{2}{-1+3x}=\frac{1/2}{1+\frac{x}{2}}-\frac{2}{1-3x}=$$

$$=\underbrace{\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{2^n}}_{si\ \left|\frac{x}{2}\right|<1}-\underbrace{2\sum_{n=0}^{\infty}3^n x^n}_{si\ |3x|<1}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n-2\cdot 3^n}{2^{n+1}}\right)x^n \qquad si\ |x|<\frac{1}{3}$$

Solución j)

Conocido el desarrollo de la función

$$\log(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \qquad -1<x\le 1$$

Se tiene que

$$f(x)=\log\left(\frac{1-x}{2+6x}\right)=\log(1-x)-\log(2+6x)=\log(1-x)-\log[2(1+3x)]$$

$$f(x)=-\log 2+\log(1-x)-\log(1+3x)=-\log 2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-x)^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(3x)^n}{n}$$

$$f(x)=-\log 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\left[(-1)^n-3^n\right]\cdot x^n$$

La serie resultante será convergente si la variable x está en el intervalo intersección de los intervalos de convergencia de las dos series restadas.

El intervalo de convergencia de la primera serie es

$$-1<-x\le 1\to\ 1>x\ge -1\to\ -1\le x<1$$

El intervalo de convergencia de la segunda serie es

$$-1 < 3x \le 1 \rightarrow \quad -\frac{1}{3} < x \le \frac{1}{3}$$

El intervalo intersección de ambos es $-\dfrac{1}{3} < x \le \dfrac{1}{3}$.

21 Dada la función $f(x) = \log(1+x^2)$. Se pide

a) Calcular la serie de potencias de esta función en el punto $a = 0$ a partir del desarrollo de su función derivada.

b) Obtener el campo de convergencia de la serie obtenida en el apartado anterior. Enunciar el Teorema de Abel.

c) Escribir el código Matlab para representar la función y los primeros cinco términos no nulos de la serie de potencias.

d) Calcular la suma de la siguiente serie: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

Solución a)

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} = 2x\,\frac{1}{1+x^2} = 2x\sum_{n=0}^{\infty}\left(-x^2\right)^n = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,x^{2n+1} \qquad |x| < 1$$

Integrando término a término

$$\log(1+x^2) = \int f'(x)\,dx = \int\left(2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,x^{2n+1}\right)dx =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(2\int(-1)^n\,x^{2n+1}dx\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(2(-1)^n\,\frac{x^{2n+2}}{2n+2}\right) + C$$

$$\log(1+x^2) = \sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\,\frac{x^{2n+2}}{n+1}\right) + C$$

Para x=0 se tiene que log1=C luego C=0. Como al integrar una serie de potencias se conserva el radio de convergencia se tendrá que

$$\log(1+x^2) = \sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\,\frac{x^{2n+2}}{n+1}\right) \text{ si } |x| < 1.$$

Solución b)

Conocido el radio de convergencia de la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{x^{2n+2}}{n+1}$ R=1, para obtener el campo de convergencia basta analizar los puntos extremos de dicho intervalo.

$x=1 \quad \rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$. Esta serie es convergente por el criterio de Leibniz ya que se cumple $a_n=\frac{1}{n+1}$ tiende a cero cuando n tiende a infinito y es una sucesión monótona decreciente.

$x=-1 \quad \rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$. Esta serie es convergente como se ha visto para el punto anterior.

El campo de convergencia es el intervalo $\left[-1,1\right]$, es decir,

$$\log\left(1+x^2\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\frac{x^{2n+2}}{n+1} \qquad x\in\left[-1,1\right]$$

Solución c)

El código Matlab pedido es:

```
x=-1:0.1:1;
s=0;
for n=0:4
    s=s+((-1)^n)*x.^(2*n+2)/(n+1);
end
plot(x,log(1+x.^2),x,s)
```

Solución d)

Para obtener el valor de la serie basta tener en cuenta que

$$\log\left(1+1\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n-1}}{n} \quad \Rightarrow \quad -\log 2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{n}$$

22

a) Desarrollar la función $f(x)=x\,e^x$ en serie de potencias de x , obteniendo el término general de la serie mediante la derivada enésima de $f(x)$, aplicando la fórmula de MacLaurin.

b) Obtener el campo de convergencia de la serie de potencias del apartado anterior.

c) Hallar el número de términos de la serie que debemos sumar para obtener el valor aproximado de $\frac{-1}{2\sqrt{e}}$ con dos cifras decimales exactas, es decir que el error cometido en la aproximación sea inferior a 0'005.

Solución a)

Sabemos que el desarrollo es

$$xe^x=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\sum_{0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}$$

La fórmula de MacLaurin es $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n}(0)}{n!}x^n$. Calculamos la derivada enésima de la función:

$$y = xe^x, \quad y'(x) = e^x + xe^x, \quad y''(x) = 2e^x + xe^x, \quad y'''(x) = 3e^x + xe^x, \ldots, \quad y^{(n}(x) = ne^x + xe^x$$

Por lo tanto,

$$y^{(n}(0) = n$$

Y, sustituyendo en la fórmula de MacLaurin

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^n$$

A este mismo resultado se hubiera llegado multiplicando por x el desarrollo conocido de la función e^x:

$$xe^x = x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}$$

Solución b)

Para obtener el intervalo de convergencia se aplica el criterio del cociente:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n-1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Por lo tanto el radio de convergencia es infinito, es decir la serie converge para todo x real.

Solución c)

Obtenemos en primer lugar el punto x donde se hace la aproximación

$$x\, e^x = \frac{-1}{2\sqrt{e}} \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{2}$$

Sustituyendo este valor en la serie se obtiene la serie numérica,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n (n-1)!}$$

Que es una serie alternada, por tanto,

$$|error| < a_{n+1} \le 0.005 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2^{n+1} n!} \le \frac{5}{1000} \quad \Rightarrow \quad 2^{n+1} n! \ge 200$$

Y esta desigualdad se verfica para $n \ge 4$. Tomando $n = 4$ se obtiene

$$\frac{-1}{2\sqrt{e}} \cong -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \frac{1}{96} = -\frac{29}{96}$$ con error menor que 0.005.

23 Dada la función $f(x) = \log x$, se pide:

a) Obtener el desarrollo en serie de la función $f(x)$ en potencias de (x-1) calculando su campo de convergencia.

b) Obtener el valor de la suma de la siguiente serie: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}}{n}$

c) Calcular el valor aproximado de $\log 1.5$ con la suma de los 10 primeros términos de la serie obtenida en el apartado 1. dando una cota del error.

Solución a)

La serie de potencias de esta función es

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n}\left(1\right)}{n\,!}\left(x-1\right)^{n}$$

siendo $f^{(n}\left(x\right)=\left(-1\right)^{n}\left(n-1\right)!\,x^{-n}\quad n\geq 1,\;\; f\left(1\right)=0$. Luego, el desarrollo en serie es

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}}{n}\left(x-1\right)^{n}$$

Nota: También podría haberse obtenido conocido el desarrollo de la función geométrica e integrando.

Para analizar la convergencia de esta serie basta aplicar el criterio del cociente a la serie de los valores absolutos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}\left|x-1\right|^{n+1}}{\frac{1}{n}\left|x-1\right|^{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left|x-1\right|}{\left(n+1\right)\left|x-1\right|}=\left|x-1\right|$$

Si $\left|x-1\right|<1$ la serie de potencias es convergente. Analizando los extremos:

- En x=2, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}}{n}\left(2-1\right)^{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}}{n}$ es convergente ya que se puede aplicar Leibnit (hay que demostrar las hipótesis del teorema)

- En x=0, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}}{n}\left(0-1\right)^{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ es divergente por ser la serie armónica.

Solución b)

El valor pedido es el resultado de sustituir en la serie x por 2, luego

$$\log\left(2\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}}{n}$$

Solución c)

Teniendo en cuenta que

$$\log(1.5) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (1.5-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ 2^n}$$

un valor aproximado con los 10 primeros términos

$$\log(1.5) \approx \sum_{n=1}^{10} \frac{(-1)^n}{n\ 2^n}$$

tendrá un error de aproximación menor que el valor absoluto del término 11 de la serie (al ser una serie alternada)

$$\left| \log(1.5) - \sum_{n=1}^{10} \frac{(-1)^n}{n\ 2^n} \right| < \frac{1}{11 \cdot 2^{11}}$$

24 Dada la función $f(x) = \dfrac{x}{8+x^3}$

a) Obtener el desarrollo en serie de potencias centrado en el punto $a=0$, que denotaremos por $T(x)$, indicando dónde converge la serie a la función.

b) Escribir el código Matlab para representar, junto con la gráfica de la función, la aproximación que da la serie de potencias considerando los ocho primeros términos no nulos del desarrollo en el dominio donde la serie converja a la función.

c) Escribir el código Matlab para calcular $f(1.5) - T(1.5)$.

Solución a)

Utilizando el desarrollo de la serie geométrica,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + ... + (-1)^n x^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

se tiene

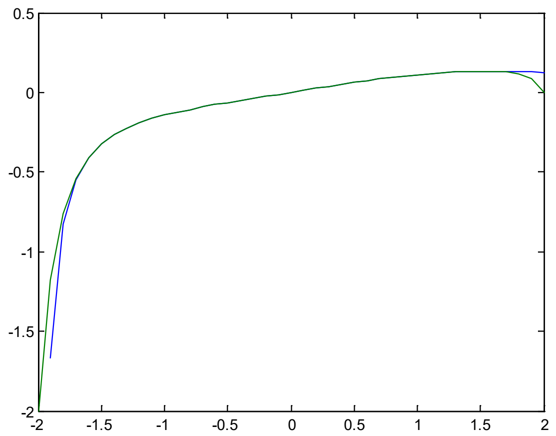
$$f(x) = \frac{x}{8+x^3} = \frac{x}{8} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{x^3}{8}} = \frac{x}{8} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{3n}}{8^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{3n+1}}{8^{n+1}}$$

$$\text{si } \left| \frac{x^3}{8} \right| < 1 \Leftrightarrow |x| < 2$$

Solución b)

El código Matlab para representar la función y la aproximación será

```
x=-2:0.1:2;
s=0;
for k=0:7;
    s=s+((-1)^k*x.^(3*k+1))/8^(k+1);
end
plot(x,x./(8+x.^3),x,s)
```



Solución c)

Para calcular el valor pedido el código Matlab podría ser

```
format long
x=1.5; f=inline('x./(8+x.^4)');v1=f(x)
k=0:7;ak=((-1).^k.*x.^(3*k+1))./8.^(k+1);v2=sum(ak)
v1-v2
```

25 Dada la serie de potencias $f\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-3\right)^{n}x^{n+1}}{n+1}$. Se pide:

a) Calcular el dominio de la función $f\left(x\right)$.

b) Encontrar la expresión de $f\left(x\right)$ a partir de su derivada.

c) Calcula el valor de $f\left(2\right)$ y $f\left(\frac{1}{3}\right)$.

Solución (A)

Para calcular el dominio, se aplica el criterio del cociente a la serie de los valores absolutos, es decir, a la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n}\left|x\right|^{n+1}}{n+1}$. Se tiene que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\left|x\right|^{n+1+1}}{n+1+1}:\frac{3^{n}\left|x\right|^{n+1}}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\left|x\right|^{n+2}\left(n+1\right)}{3^{n}\left|x\right|^{n+1}\left(n+2\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\left|x\right|\left(n+1\right)}{\left(n+2\right)}=3\left|x\right|$$

La serie será convergente para los valores de x que cumplan

$$3\left|x\right|<1\Leftrightarrow\left|x\right|<\frac{1}{3}$$

- Para $x=\frac{1}{3}$, la serie es $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{n+1}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$. Se trata de una serie alternada convergente por Leibniz ya que la sucesión $a_n=\frac{1}{n+1}$ es monótona decreciente y tiende a cero cuando n tiende a infinito.

- Para $x=-\frac{1}{3}$, la serie es $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{n+1}=-\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$. Se trata de una serie divergente por comparación con la serie armónica.

El dominio de la función es, por tanto, $-\frac{1}{3}<x\leq\frac{1}{3}$

Solución (B)

Derivando $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n x^{n+1}}{n+1}$ se tiene

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n(n+1)x^n}{n+1}=\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}(-3x)^n}_{\substack{serie\ geométrica\\ primer\ \text{término: } a_1=-3x\\ razón\ r=-3x}}=\frac{-3x}{1+3x}\underset{\text{integrando}}{\Rightarrow} f(x)=\frac{1}{3}\log\left(x+\frac{1}{3}\right)-x+C$$

Dado que $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n x^{n+1}}{n+1}=\frac{1}{3}\log\left(x+\frac{1}{3}\right)-x+C$, sustituyendo en el 0 se tendrá

$$0=f(0)=\frac{1}{3}\log\left(\frac{1}{3}\right)+0+C\Rightarrow C=-\frac{1}{3}\log\left(\frac{1}{3}\right)$$

Luego

$$f(x)=\frac{1}{3}\log\left(x+\frac{1}{3}\right)-x-\frac{1}{3}\log\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}\log(1+3x)-x$$

Observación:

Teniendo en cuenta $\log(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ $\quad 1<x\leq 1$, se podría haber obtenido la expresión de la función considerando que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n x^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-3)^{n-1}x^n}{n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(3x)^n}{3n}=\frac{1}{3}\underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(3x)^n}{n}-3x\right)}_{=\log(1+3x)-3x}=\frac{1}{3}\log(1+3x)-x$$

siendo su campo de validez

$$-1 < 3x \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{3} < x \le \frac{1}{3}$$

Solución (C)

$f(2)$ no se puede calcular porque 2 no es un punto del dominio, para calcular en el punto 1/3 basta sustituir en la expresión de la función.

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\log(2) - \frac{1}{3}$$

26 Obtener el desarrollo en serie de potencias en el origen de la función $g(x) = \dfrac{3x-1}{x^2+x-6}$ indicando su campo de convergencia.

Solución

$$g(x) = \frac{3x-1}{x^2+x-6} = \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+3} = \frac{1/2}{\frac{x}{2}-1} + \frac{2/3}{\frac{x}{3}+1} = \frac{-1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}} + \frac{2}{3}\frac{1}{1+\frac{x}{3}}$$

$$= \underbrace{\frac{-1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}}_{|x|<2} + \underbrace{\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{3^n}}_{|x|<3} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{2^{n+1}} + \frac{1(-1)^n}{3^{n+1}}\right)x^n \qquad |x| < 2$$

APLICACIONES DEL DESARROLLO EN SERIE DE POTENCIAS

27 Calcular el valor de la siguiente integral $\int_0^1 3\log\left(1+\frac{x^2}{3}\right)dx$ con un error menor que 10^{-2}.

Solución

Utilizando el desarrollo en serie de la función logaritmo

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} \qquad -1 < x \le 1$$

se tiene

$$f(x) = 3\log\left(1+\frac{x^2}{3}\right) = 3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(\frac{x^2}{3}\right)^n \quad -1 < \frac{x^2}{3} \le 1$$

Por lo tanto,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{n\cdot 3^{n-1}} \qquad 0 \le x^2 \le 3$$

es decir,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{n\cdot 3^{n-1}} \qquad -\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3}$$

$$\int_0^1 3\log\left(1+\frac{x^2}{3}\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 3^{n-1}}\int_0^1 x^{2n}dx\right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 3^{n-1}}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_{x=0}^{x=1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 3^{n-1}(2n+1)}$$

Como es una serie alternada, el error al considerar como aproximación de la integral los primeros n sumandos es menor que el valor absoluto del primer término no considerado.

Para que el error sea menor que 10^{-2}, basta elegir n cumpliendo

$$\frac{1}{(n+1)\cdot 3^n(2n+3)} < 10^{-2}$$

es decir, n=2. Por lo tanto,

$$\int_0^1 3\log\left(1+\frac{x^2}{3}\right)dx \approx \frac{1}{1\cdot 3^0\cdot 3} - \frac{1}{2\cdot 3^1\cdot 5} = 0.3$$

28 Utilizando desarrollos en serie de potencias, calcular con Octave/Matlab una aproximación de la integral $I = \int_0^2 e^{-x^2}dx$

Nota:

- Considerar los 10 primeros términos del desarrollo y escribir el desarrollo utilizado.
- Para calcular el factorial de un número en Octave/Matlab se puede utilizar la función `factorial`, por ejemplo:

Solución

Como

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots \quad |x|<\infty$$

$$\Rightarrow \qquad e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!} \quad |x|<\infty$$

Utilizando los 10 primeros términos se puede encontrar una aproximación de la integral

$$I = \int_0^2 e^{-x^2}dx \approx \int_0^2\sum_{n=0}^{9}\frac{(-x^2)^n}{n!}dx = \sum_{n=0}^{9}\int_0^2\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}dx = \sum_{n=0}^{9}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)\cdot n!}\Bigg|_{x=0}^{x=2} =$$

$$= \sum_{n=0}^{9}\frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+1)\cdot n!} = \sum_{n=0}^{9}\frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+1)\cdot n!}$$

El código matlab para calcular la aproximación de la integral es

```
n=0:9;
an=(-1).^n.*2.^(2*n+1)./((2*n+1).*factorial(n))
```

```
sum(an)
```

29 Dada la función $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$. Se pide

a) Obtener el desarrollo en serie de potencias centrado en el punto $a=0$.

b) Considerando una distribución normal de media 0 y desviación típica 1, la probabilidad de que x esté entre a y b se calcula mediante la siguiente integral:

$$P\left(a<x<b\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-x^2/2}dx$$

Escribir el código matlab para obtener el valor de $P\left(0<x<1\right)$ con los primeros 8 términos de la serie obtenida en el apartado a). Utilizar el formato largo

c) Escribir el código Matlab para obtener una cota del error cometido en la aproximación del apartado anterior.

d) Obtener el valor aproximado que devuelve Matlab para $P\left(0<x<1\right)$ usando el comando int.

Solución a)

Utilizando el desarrollo de la serie de la función exponencial

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\qquad x\in\mathbb{R}$$

se tiene que

$$f\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2^2\cdot 2!}+\ldots+\left(-1\right)^n\frac{x^{2n}}{2^n n!}+\ldots\right)\quad x\in\mathbb{R}$$

Solución a) y d)

Para calcular el valor pedido se tendrá

$$P\left(0<x<1\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 e^{-x^2/2}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n x^{2n}}{2^n n!}\right)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{\left(2n+1\right)2^n n!}$$

El código Matlab pedido es

```
format long
n=0:7;
an=(-1).^n./((2*n+1).*2.^n.*factorial(n));
valor1=sum(an)/sqrt(2*pi)
syms u
valor2=double(int(exp(-u^2/2),u,0,1)/sqrt(2*pi))
```

Resultado dado por Matlab: valor1=0.341344743903117 valor2=0.341344746068543

Solución c)

Dado que la serie que permite calcular la probabilidad es una serie alternada convergente por Leibniz, el error que se comete en la aproximación con los 8 primeros términos de la serie $S = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)2^n n!}$ con $a_n = \frac{1}{(2n+1)2^n n!}$ es

$$|error| = \left| S - \sum_{n=0}^{7} (-1)^n a_n \right| \leq a_8 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{17 \cdot 2^8 \cdot 8!}$$

Material de consulta

Proyecto Lemat: https://www.bdmat.com/lemat/

Tema: Sucesiones y series. Nivel 3.

Autora: Elena Alvarez