

## FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE

### DEFINICIONES BÁSICAS

#### 1 Primeros conceptos

Una función real de variable real es una correspondencia entre dos conjuntos de números reales de forma que a cada elemento del conjunto inicial  $D$  (variable independiente) le corresponda un único elemento del conjunto final (variable dependiente).

$$\begin{aligned} f &: D \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow f(x) \end{aligned}$$

Al conjunto  $D$  se llama dominio de la función y al conjunto de todos los valores imágenes de elementos de  $D$  se llama rango de la función.

Si  $f$  es una función con dominio  $D$  su gráfica consiste en el conjunto de puntos del plano siguiente:

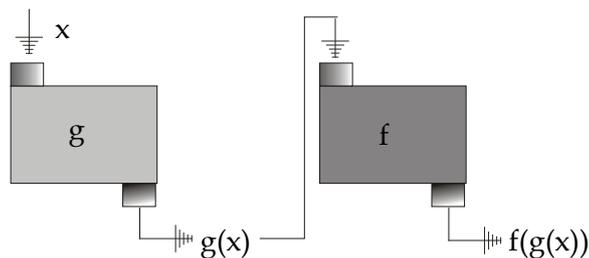
$$\{(x, f(x)) / x \in D\}$$

#### 2 Operaciones entre funciones

Las funciones pueden sumarse, restarse, multiplicarse y también dividirse cuando el denominador es cero,

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x) \quad (fg)(x) = f(x)g(x) \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad (\text{si } g(x) \neq 0)$$

Composición de funciones:  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ . El dominio de la función compuesta  $f \circ g$  está formado por los puntos del dominio de  $g$  para los que  $g(x)$  está en el dominio de la función  $f$ .



#### 3 Transformaciones elementales

##### Traslación vertical

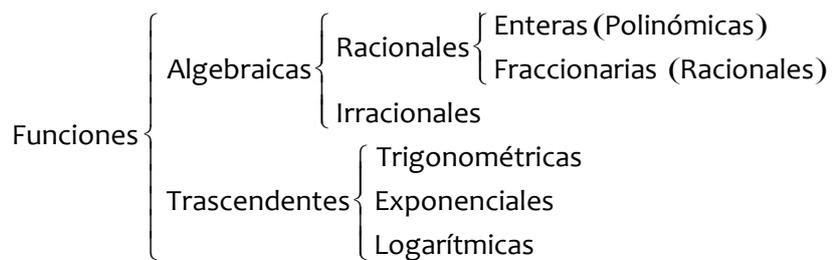
Conocida la gráfica de  $y = f(x)$ , se puede obtener la gráfica de  $y = f(x) + k$  haciendo una traslación vertical de  $k$  unidades.

- Si  $k > 0$  la traslación será hacia arriba
- Si  $k < 0$  la traslación será hacia abajo.

Traslación horizontal	Conocida la gráfica de $y = f(x)$ , se puede obtener la gráfica de $y = f(x + k)$ haciendo una traslación horizontal de $k$ unidades. <ul style="list-style-type: none"> <li>• Si <math>k &gt; 0</math> la traslación será hacia la izquierda</li> <li>• Si <math>k &lt; 0</math> la traslación será hacia la derecha.</li> </ul>
Simetría respecto al eje OX	Conocida la gráfica de $y = f(x)$ , se puede obtener la gráfica de $y = -f(x)$ haciendo una simetría respecto al eje de abscisas.
Simetría respecto al eje OY	Conocida la gráfica de $y = f(x)$ , se puede obtener la gráfica de $y = f(-x)$ haciendo una simetría respecto al eje de ordenadas.
Escalado o dilatación/contracción horizontal	Conocida la gráfica de $y = f(x)$ , se puede obtener la gráfica de $y = f(ax)$ haciendo un cambio de escala en el eje OX.
Escalado o dilatación/contracción vertical	Conocida la gráfica de $y = f(x)$ , se puede obtener la gráfica de $y = kf(x)$ haciendo un cambio de escala en el eje OY.

#### 4 Clasificación de funciones

Las funciones elementales se clasifican de acuerdo con el siguiente esquema:



- Funciones algebraicas son aquellas en las que la variable  $x$  está afectada de las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación de exponente racional.
- Funciones polinómicas (o racionales enteras) son de la forma:

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad a_n, \dots, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$$

- Funciones racionales (o racionales fraccionarias) son cociente de dos funciones polinómicas:

$$f(x) = \frac{a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$$

- Funciones irracionales. Cuando la variable independiente aparece bajo el signo radical o elevada a exponente racional no entero:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4} \quad , \quad g(x) = \frac{x + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{1 + 5x}}$$

- Funciones trascendentes son aquellas que no son algebraicas:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} 3x - \operatorname{tg} x}{\cos x} \quad , \quad g(x) = e^{1/x} \quad , \quad h(x) = \log(x^2 - 4)$$

## 5 Simetría de funciones

Una función  $f$  es simétrica respecto del eje de ordenadas (función *par*) si verifica:

$$f(x) = f(-x), \quad \forall x \in \operatorname{Dom} f$$

Una función  $f$  es simétrica respecto del origen de coordenadas (función *impar*) si verifica:

$$f(x) = -f(-x), \quad \forall x \in \operatorname{Dom} f$$

## 6 Funciones periódicas

Una función  $f$  es periódica, de periodo  $T$  siendo  $T > 0$  si verifica:

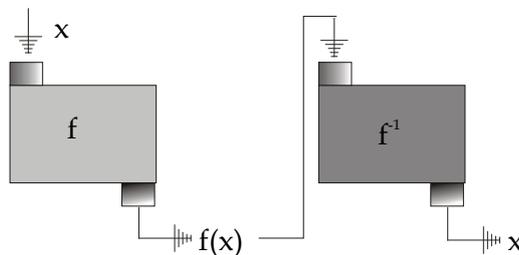
$$f(x + T) = f(x) \quad , \quad \forall x \in \operatorname{Dom} f$$

Llamaremos *periodo principal* de la función al menor valor positivo  $T$  que verifica  $f(x + T) = f(x) \quad \forall x \in \operatorname{Dom} f$ . Es fácil ver que si  $T$  es periodo también lo será cualquier múltiplo de  $T$ .

## 7 Funciones inversas

La función inversa de una función inyectiva  $f$  en un dominio  $D$  es una función que se denotará por  $f^{-1}$  que cumple

$$\forall y \in \operatorname{Im} f \quad f^{-1}(y) = x \quad \text{siendo} \quad f(x) = y$$

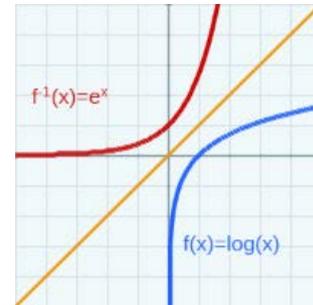


Una función y su inversa verifican las siguientes propiedades:

1. La composición de ambas es la función identidad

$$(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = I(x) = x$$

2. Las gráficas de  $f$  y de  $f^{-1}$ , referidas al mismo sistema de coordenadas, son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante.



$$\text{Dom } f^{-1} = \text{Im } f$$

$$\text{Im } f^{-1} = \text{Dom } f$$

3. Si  $f(x)$  es estrictamente creciente o estrictamente decreciente, su inversa gozará de la misma propiedad.

Ejemplo: La función  $f(x) = x^2$  tiene por función inversa  $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ , ya que se verifica:

$$f \circ f^{-1}(x) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x; \quad f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(x^2) = \sqrt{x^2} = x$$

## 8

### Descomposición en fracciones simples de funciones racionales

Se llama función racional  $R(x)$ , a toda función en la que sólo se efectúan con  $x$  las cuatro operaciones racionales. Cualquier función racional puede expresarse como cociente de polinomios:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

En el caso de que  $\text{Grado } Q(x) > \text{Grado } P(x)$ , para descomponer en fracciones simples se debe descomponer  $Q(x)$  en factores irreducibles. Suponiendo que  $Q(x)$  no tenga raíces complejas múltiples se podrá escribir:

$$Q(x) = (x - x_1)^{m_1} (x - x_2)^{m_2} \cdots (x - x_q)^{m_q} \cdot [a_1x^2 + b_1x + c_1] \cdots [a_jx^2 + b_jx + c_j]$$

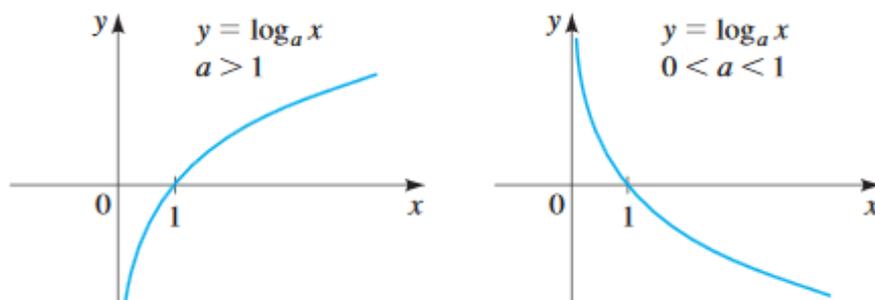
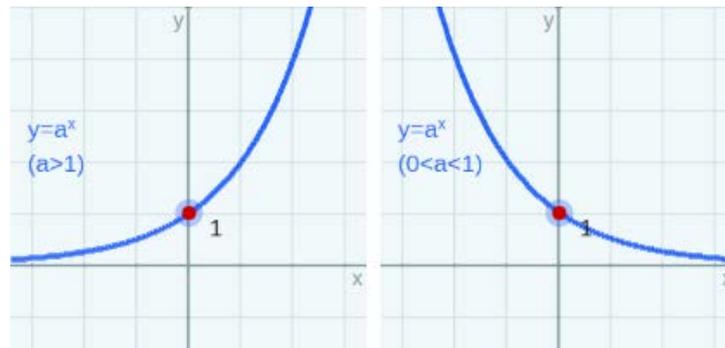
donde  $x_1, x_2, \dots, x_q$  son raíces reales y  $a_1x^2 + b_1x + c_1, \dots, a_jx^2 + b_jx + c_j$  son polinomios cuadráticos con raíces complejas.

La descomposición en fracciones simples en este caso será:

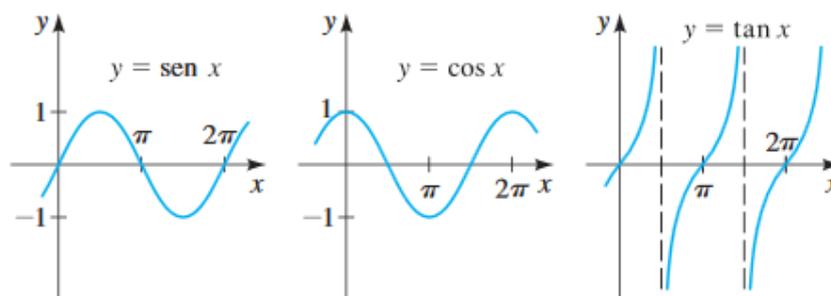
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x - x_1)} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \cdots + \frac{A_{m_1}}{(x - x_1)^{m_1}} + \frac{B_1}{(x - x_2)} + \frac{B_2}{(x - x_2)^2} + \cdots + \frac{B_{m_2}}{(x - x_2)^{m_2}} + \cdots + \frac{\alpha_1x + \beta_1}{a_1x^2 + b_1x + c_1} + \frac{\alpha_2x + \beta_2}{a_2x^2 + b_2x + c_2} + \cdots + \frac{\alpha_jx + \beta_j}{a_jx^2 + b_jx + c_j}$$

## FUNCIONES ELEMENTALES

### 9 Funciones exponenciales y logarítmicas

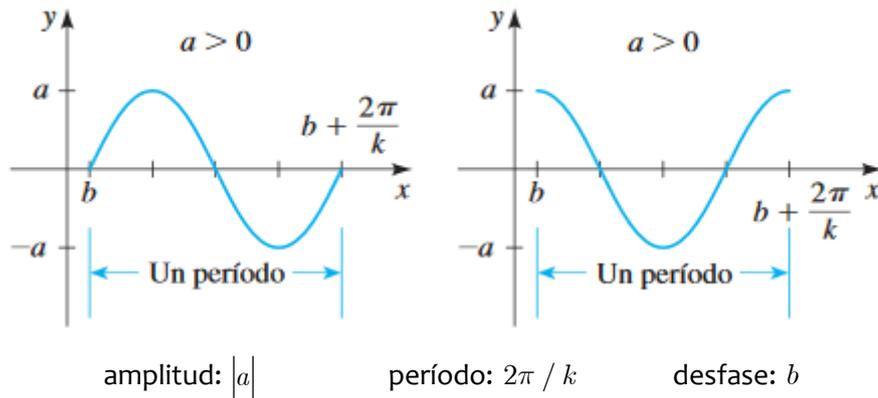


### 10 Funciones trigonométricas



### 11 Funciones seno y coseno

$$y = a \operatorname{sen} k(x - b) \quad (k > 0) \quad y = a \operatorname{cos} k(x - b) \quad (k > 0)$$

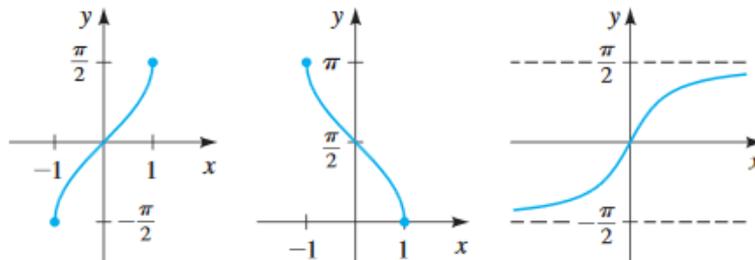


## 12 Gráficas de funciones inversas trigonométricas

$$y = \arcsen x$$

$$y = \arccos x$$

$$y = \operatorname{arctg} x$$

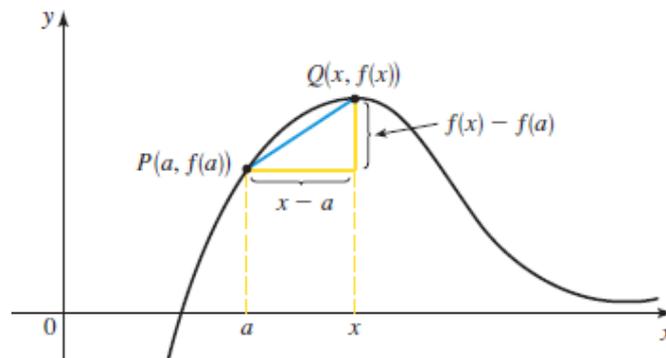


### DEFINICIÓN DE DERIVADA. REGLAS DE DERIVACIÓN

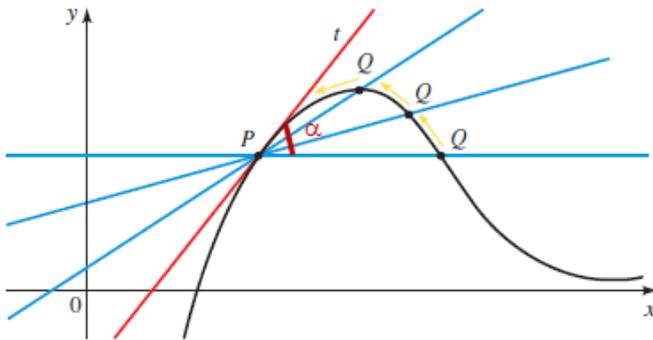
## 13 Definición de derivada

La expresión  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  se denomina *cociente incremental* de  $f$  en el punto  $a$  para un valor de  $\Delta x = x - a$ .

Esta expresión representa la pendiente de la secante a la gráfica de la función  $f$  que une los puntos  $(a, f(a))$  y  $(x, f(x)) = (a + \Delta x, f(a + \Delta x))$ .



**Definición (Derivada).**- La derivada de una función  $y = f(x)$  en un punto  $a$  es el límite del cociente incremental, 
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$



Este valor representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $(a, f(a))$ . Se denota

por  $f'(a)$  ó  $\frac{dy}{dx}(a)$  ó  $\frac{df}{dx}(a)$

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Si una función  $f$  es derivable en el punto  $a$  la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto  $(a, f(a))$  es  $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ . Si  $f'(a) \neq 0$ , la ecuación de la recta normal es  $y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x - a)$ .

## 14 Reglas de derivación

REGLAS DE DERIVACIÓN		$f = f(x), g = g(x), a \in \mathbb{R}$
Producto por un número	$(a \cdot f)' = a \cdot f'$	
Suma y resta	$(f + g)' = f' + g'$	$(f - g)' = f' - g'$
Producto y cociente	$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
Composición	$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$	
Derivada de la función inversa	$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)}$	con $f^{-1}(x) = y$

### Regla de la cadena

Si  $y = f(u)$  es derivable en  $g(x)$  y  $u = g(x)$  es derivable en  $x$ , entonces la función compuesta  $y = (f \circ g)(x) = f(g(x))$  es derivable en  $x$ , siendo la derivada

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

que se puede expresar también con la siguiente notación  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$ .

La dependencia de unas variables respecto de otras se puede indicar mediante un diagrama de dependencia, que para este caso sería:

$$y \text{ ——— } u \text{ ——— } x$$

TIPO	FUNCIÓN	DERIVADA
Tipo potencial	$y = x^a$	$y' = a \cdot x^{a-1}$
	$y = [f(x)]^a$	$y' = a [f(x)]^{a-1} \cdot f'(x)$
	$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
	$y = \sqrt{f(x)}$	$y' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
Tipo exponencial	$y = e^x$	$y' = e^x$
	$y = e^{f(x)}$	$y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$
	$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \log a$
	$y = a^{f(x)}$	$y' = a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \log a$
Tipo logarítmico	$y = \log x$	$y' = \frac{1}{x}$
	$y = \log f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$
	$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\log a}$
	$y = \log_a f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot \frac{1}{\log a}$
Tipo seno	$y = \operatorname{sen} x$ $y = \operatorname{sen}(f(x))$	$y' = \cos x$ $y' = f'(x) \cos f(x)$
Tipo coseno	$y = \operatorname{cos} x$ $y = \operatorname{cos}(f(x))$	$y' = -\operatorname{sen} x$ $y' = -f'(x) \cdot \operatorname{sen}(f(x))$
Tipo tangente	$y = \operatorname{tg} x$ $y = \operatorname{tg}(f(x))$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ $y' = \frac{1}{\cos^2 f(x)} \cdot f'(x)$
Tipo cotangente	$y = \operatorname{cotg} x$ $y = \operatorname{cotg}(f(x))$	$y' = \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}$ $y' = \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 f(x)} \cdot f'(x)$

TIPO	FUNCIÓN	DERIVADA
Funciones arco	$y = \arcsen x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$y = \arcsen f(x)$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-f^2(x)}} \cdot f'(x)$
	$y = \arccos x$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$y = \arccos f(x)$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-f^2(x)}} \cdot f'(x)$
	$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
	$y = \operatorname{arctg} f(x)$	$y' = \frac{1}{1+f^2(x)} \cdot f'(x)$

## 15 Derivada de la función implícita

Cuando la función viene dada en forma explícita, es decir, de la forma  $y = f(x)$  calcular la derivada de  $f$  se reduce a aplicar la definición o alguna de las reglas de derivación estudiadas. Sin embargo, muchas veces una función viene dada a través de una ecuación de la forma  $F(x, y) = 0$  en la que no es fácil, o resulta imposible, obtener explícitamente  $y$  en función de  $x$ . Este tipo de funciones reciben el nombre de *funciones implícitas de una variable*.

*Definición (Función implícita).*- Una ecuación de la forma  $F(x, y) = 0$  define a la variable  $y$  como función implícita de  $x$ , en un entorno de  $(x_0, y_0)$ , si existe un intervalo  $D$  centrado en  $x_0$  de forma que, para todo  $x$  en  $D$ , existe  $y = f(x)$  tal que se verifica  $F(x, f(x)) = 0$ .

Para este tipo de funciones se debe proceder de la siguiente manera para obtener la derivada de  $y$  respecto de  $x$ :

1. Se derivan ambos miembros de la expresión con respecto a  $x$ , aplicando la regla de la cadena, teniendo en cuenta que  $y$  es función de  $x$ .
2. Se despeja la expresión  $\frac{dy}{dx}$ .

Por ejemplo, si se considera la función dada mediante  $x^3y^2 + y^8 - 3x - 5 = 0$  se tendrá:

3. Derivando ambos lados de la igualdad y aplicando la regla de la cadena suponiendo que  $y$  es función de  $x$

$$3x^2y^2 + 2x^3y \frac{dy}{dx} + 8y^7 \frac{dy}{dx} - 3 = 0$$

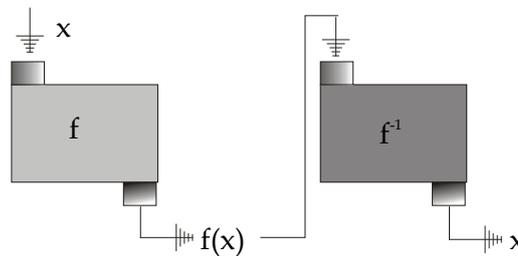
4. Despejando

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3 - 3x^2y^2}{2x^3y + 8y^7}$$

## 16 Derivada de la función inversa

Si  $y = f(x)$  es una función inyectiva y derivable en  $x$  y además  $f'(x) \neq 0$ , entonces la función inversa,  $f^{-1}$ , también es derivable en  $y = f(x)$ , verificándose

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$



## 17 Derivada enésima

Si  $y = f(x)$  es derivable en un dominio  $D$  queda definida la función derivada:

$$\begin{aligned} f' : D &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow f'(x) \end{aligned}$$

Si esta función  $f'(x)$  a su vez es derivable se puede calcular su derivada,  $(f')'(x)$ , que recibe el nombre de derivada segunda. Se denota,  $f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$

Este proceso puede continuar y se tendría la derivada de orden  $n$  o derivada enésima que consistiría en derivar la función  $n$  veces. Si la función es  $y = f(x)$  se denotará:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

**FÓRMULA DE LEIBNIZ (Derivada enésima de un producto).**- Si  $f$  y  $g$  son derivables hasta el orden  $n$  entonces la función  $h(x) = f(x)g(x)$  es derivable hasta el orden  $n$  y además

$$\begin{aligned} h^{(n)}(x) &= (f \cdot g)^{(n)}(x) = \\ &= \binom{n}{0} f(x) g^{(n)}(x) + \binom{n}{1} f'(x) g^{(n-1)}(x) + \dots + \binom{n}{n-1} f^{(n-1)}(x) g'(x) + \binom{n}{n} f^{(n)}(x) g(x) \end{aligned}$$

Nota 1

El factorial de un número natural  $n$  se define como

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$0! = 1$$

Por ejemplo,

$$1! = 1 \qquad 2! = 2 \cdot 1 = 2 \qquad 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \quad 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \quad 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

Se cumple que  $n! = n \cdot (n-1)!$   $n \in \mathbb{N}$

Nota 2

Los números combinatorios se definen como

$$C_{n,m} = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

siendo  $n$  un número natural y  $0 \leq m \leq n$

El número combinatorio  $C_{n,m}$  representa el número de grupos distintos de  $m$  elementos que se pueden formar a partir de  $n$  objetos, de forma que cada grupo se diferencie de otro en algún elemento (combinaciones de  $n$  elementos tomados de  $m$  en  $m$ ).

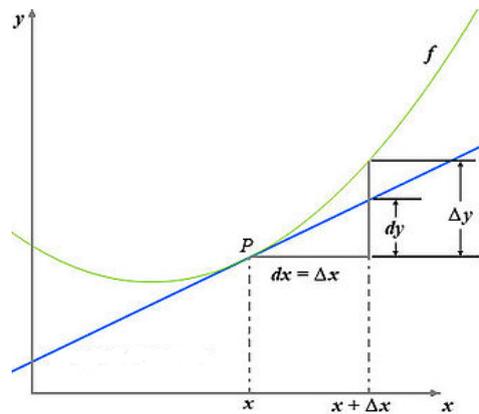
## 18 Recta tangente. Aproximación lineal

**Definición (Diferencial).**- Sea  $y = f(x)$  una función derivable en un intervalo abierto que contiene al número  $x$ ,

- La diferencial de  $x$  es igual al incremento de  $x$ ,  $\Delta x = dx$

- La diferencial de  $y$  se define como  $dy = f'(x) dx$

**Interpretación geométrica:** La diferencial de  $y$  para un incremento de  $x$ ,  $\Delta x = dx$ , es igual al incremento de la ordenada de la recta tangente correspondiente a ese incremento de  $x$ .



### Diferencial segunda

$$\begin{aligned} d^2y &= d(dy) = d[f'(x)dx] = [df'(x)]dx + f'(x)[d(dx)] = \\ &= [f''(x)dx]dx + f'(x)d^2x = f''(x)(dx)^2 + f'(x)d^2x \end{aligned}$$

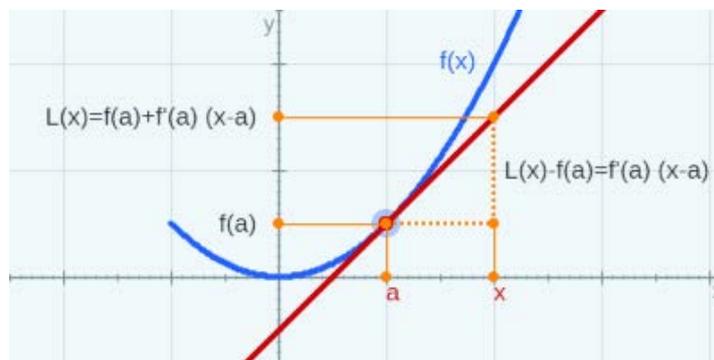
**Aproximación lineal.** Consideremos la gráfica de una función  $y = f(x)$  derivable en el punto  $a$ . Si dibujamos la tangente en el punto  $(a, f(a))$  vemos que para valores  $x$  próximos al punto  $a$ , los valores que toman la ordenada de la recta tangente y la función casi coinciden. Diremos por ello que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $a$  es una linealización (aproximación lineal) de la función en ese punto.

Teniendo en cuenta que la ecuación de la recta tangente en el punto  $(a, f(a))$  tiene por pendiente  $f'(a)$  se tendrá que su ecuación es:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \quad \Leftrightarrow \quad y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

La expresión  $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$  se denomina **linealización** (aproximación lineal) de  $f$  en  $a$

$$f(x) \approx L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$



## Ejercicios propuestos

1

(a) Para  $g(x) = \frac{1}{x}$ , encuentra y simplifica  $\frac{g(a+h) - g(a)}{h}$

(b) ¿Cuál de las siguientes expresiones son funciones y por qué?

$$y = -2x + 7 \quad y^2 = x$$

$$y = x^2 + 4x - 1 \quad x = 2$$

(c) Determinar el dominio de las siguientes funciones

$$f_1(x) = \sqrt{2 - x - x^2} \quad f_2(x) = \log(x^2 - 2)$$

$$f_3(x) = e^{x+5} + |x| \quad f_4(x) = \frac{x+1}{x^3 + 2x^2 + x}$$

$$f_5(x) = \log\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$$

2

Dadas las siguientes funciones

$$(b) f(x) = \frac{x^2}{x-2} \quad (x=2)$$

$$(b) f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (x=-1)$$

$$(c) f(x) = \cos\frac{x}{3} + \cos\frac{x}{4}$$

$$(d) f(x) = \cos 10x + \cos(10 + \pi)x$$

$$(e) f(x) = \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \quad (x=1)$$

$$(f) f(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \quad (x=-1)$$

Se pide:

1. Obtener su dominio.
2. Calcular el límite en  $x = 0$ , o en los puntos indicados.
3. Estudiar la continuidad en  $\mathbb{R}$ .
4. Estudiar las simetrías, y la periodicidad.

3

Dibujar de forma aproximada la gráfica de las siguientes funciones elementales e indicar si se trata de funciones pares o impares:

$$a) y = x^2 - 4x + 6 \quad b) y = -\operatorname{arctg}(x)$$

$$c) y = \cos(-x) \quad d) y = -\operatorname{tg} x$$

$$e) y = e^{-x} + 5 \quad f) xy = -9$$

$$g) y = (x-1)^2 \quad h) y = 1 + \log x$$

$$i) y = \sqrt{x-1} \quad j) y = -\sqrt{x+3}$$

$$k) y = 1 - \sqrt{x} \quad l) y = \frac{1}{x} + 3$$

$$m) y = |x+3| \quad n) y = \operatorname{Ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tilde{n}) y = \operatorname{Sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

4

Utilizando las transformaciones elementales y conocidas las gráficas de las funciones elementales, representar las gráficas de las funciones siguientes:

$$f_1(x) = 1 - e^{-x}$$

$$f_2(x) = \log(x-2) - 1$$

$$f_3(x) = 3 \operatorname{sen}(4x - \pi) + 2$$

$$f_4(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) \quad f_5(x) = 2 + \operatorname{arctg}(x)$$

$$f_6(x) = 2 \operatorname{arc} \operatorname{sen}(x)$$

5

Dada la función  $f(x) = \frac{x(\log x)^2}{(x-1)^2}$ . Se

pide determinar y representar su dominio. ¿Se podría asignar a  $f(x)$  algún valor en los puntos de discontinuidad para que  $f$  sea continua en el intervalo  $(0, \infty)$ ?

Solución:

$\operatorname{Dom} f = (0, \infty) - \{1\} = \mathbb{R}^+ - \{1\}$ . Se puede redefinir  $f(x)$  para que sea continua en  $(0, \infty)$

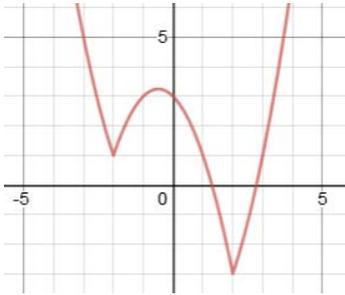
Asignando  $f(1) = 1$ , se evita la discontinuidad de  $f(x)$  en el punto  $x = 1$ .

6

Analizar la continuidad y derivabilidad de la función y representar su gráfica

$$f(x) = |x^2 - 4| - |x + 2| + 1.$$

Solución:  $f(x)$  es continua  $\forall x \in \mathbb{R}$  y es derivable  $\forall x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$ .



7

Sean las funciones  $f(x) = x^2 + ax + b$  y  $g(x) = x^3 - c$  con  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Se pide:

- Determinar la relación entre los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$  para que las gráficas de las dos funciones se corten en el punto  $(1, 2)$ .
- Determinar los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$  para que cumpliéndose las condiciones anteriores, las funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  tengan en el punto  $(1, 2)$  la misma tangente.

Solución:

$$1.) a = 1 - b \quad c = -1$$

$$2.) a = 1 \quad b = 0 \quad c = -1$$

8

Realiza los test de repaso de conocimientos previos

- [Funciones elementales](#)
- [Funciones](#)

9

Calcular la derivada de las siguientes funciones:

$$1. \quad y = \sqrt[5]{3x^2} \quad y' = \frac{1}{5}(3x^2)^{-\frac{4}{5}} \cdot (6x) = \frac{6x}{5\sqrt[5]{(3x^2)^4}} = \frac{6}{5\sqrt[5]{81x^3}}$$

$$2. \quad y = 5^{3x-4}$$

$$\log y = (3x - 4) \log 5 \rightarrow \frac{1}{y} y' = 3 \log 5 \rightarrow y' = 5^{3x-4} (3 \log 5)$$

$$3. \quad y = \log(x^2 + 7x) \quad y' = \frac{2x + 7}{x^2 + 7x}$$

$$4. \quad y = x^2 \cos x \quad y' = 2x \cos x - x^2 \sin x$$

$$5. \quad y = \cos 3x^2 \quad y' = -6x \sin 3x^2$$

$$6. \quad y = \operatorname{tg} 7x \quad y' = \frac{7}{\cos^2 7x}$$

También se puede resolver aplicando la derivada del cociente a la función  $y = \frac{\operatorname{sen} 7x}{\cos 7x}$ .

$$7. \quad y = \frac{2x^2}{x^3 - 1} \quad y' = \frac{4x(x^3 - 1) - 2x^2(3x^2)}{(x^3 - 1)^2} = \frac{-2x^4 - 4x}{(x^3 - 1)^2}$$

8.	$y = \sqrt[3]{\frac{1 + \operatorname{sen} 2x}{1 - \operatorname{sen} 2x}}$ (Sugerencia: utilizar derivación logarítmica) Se toman logaritmos, $\log y = \frac{1}{3} \log(1 + \operatorname{sen} 2x) - \frac{1}{3} \log(1 - \operatorname{sen} 2x)$ Se deriva, $\frac{y'}{y} = \frac{1}{3} \frac{2 \cos 2x}{1 + \operatorname{sen} 2x} + \frac{1}{3} \frac{2 \cos 2x}{1 - \operatorname{sen} 2x} = \frac{4}{3} \frac{\cos 2x}{1 - \operatorname{sen}^2 2x} = \frac{4}{3 \cos 2x}$ $y' = \frac{4}{3 \cos 2x} \sqrt[3]{\frac{1 + \operatorname{sen} 2x}{1 - \operatorname{sen} 2x}}$
9.	$y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ $y' = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \left[ 1 + \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} \left( 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \right] = \frac{4\sqrt{x}\sqrt{x + \sqrt{x}} + 2\sqrt{x} + 1}{8\sqrt{x} \cdot \sqrt{x + \sqrt{x}} \cdot \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}$
10.	$y = \frac{1}{\log(x^{1/2} + 2x)}$ $y = [\log(x^{1/2} + 2x)]^{-1} \quad y' = -[\log(x^{1/2} + 2x)]^{-2} \frac{1}{x^{1/2} + 2x} \left( \frac{1}{2} x^{-1/2} + 2 \right)$ $y' = -\frac{1 + 4\sqrt{x}}{2(x + 2x\sqrt{x}) [\log(\sqrt{x} + 2x)]^2}$

10

(a) Deduce la expresión de la derivada de las siguientes funciones inversas:

$$f(x) = \operatorname{arctg} x \quad g(x) = \operatorname{arcsin}(x)$$

$$h(x) = \operatorname{ar} \cos(x)$$

(b) Dada las funciones  $f$  y  $g$  derivables se considera la función  $h(x) = f(x^2 g(x))$ .

Calcula  $h'(2)$  sabiendo que:  $g(2) = 1$ ,  
 $g'(2) = 2$ ,  $f(4) = 3$ ,  $f'(4) = 4$

11

Hallar de forma aproximada los siguientes valores, utilizando la aproximación lineal

$$(a) \log(0.9) \quad (b) e^{0.4}$$

$$(c) \sqrt[3]{70} \quad (d) \sqrt[3]{8'02}$$

Solución: (a)  $\log(0.9) \approx -0.1$

$$(b) e^{0.4} \approx 1.4 \quad (c) \sqrt[3]{70} \approx 4.125$$

$$(d) \sqrt[3]{8'02} \approx 2 + \frac{0.005}{3} \approx 2'0016667$$

12

La arista de un cubo es de 6 cm, con un error posible de 0,05 cm. Si se calcula el volumen del cubo a partir de esta medida, se pide:

- Estimar, utilizando aproximación lineal, el máximo error posible en el cálculo de dicho volumen.
- Expresar el error estimado en el apartado anterior como porcentaje del volumen del cubo.
- Para una arista y un error de medida dados, ¿Qué relación hay entre el porcentaje de error del volumen y el de la arista?

13

Un estudio del medio ambiente de cierta comunidad suburbana indica que el nivel medio de monóxido de carbono en la atmósfera es de  $C(p) = \sqrt{0,5p^2 + 17}$  partes por millón cuando la población es  $p$  miles de personas. Se estima que, dentro de  $t$  años, la población será de  $p(t) = 3,1 + 0,1t^2$  miles de

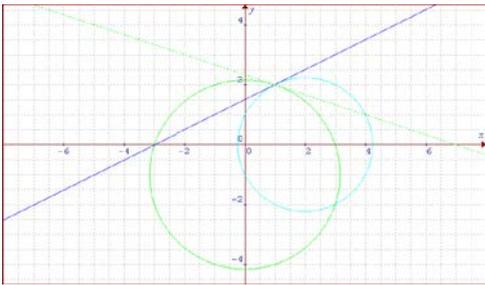
personas. ¿Cuál será la tasa de variación del nivel de monóxido de carbono,  $\frac{dC}{dt}$ , con respecto al tiempo dentro de tres años?  
Solución: 0,24 partes por millón / año

14

Un cohete es lanzado en dirección vertical y rastreado por una estación de observación situada en el suelo a 5km de la plataforma de lanzamiento. Supón que el ángulo de elevación de la visual hacia el cohete aumenta a razón de 3grados/seg cuando  $\theta = 60^\circ$ . Calcula la velocidad del cohete en ese momento.  
Solución:  $1200\pi \text{ km/h}$

15

Calcular los ángulos que forman al cortarse las curvas definidas por  $x^2 + y^2 - 4x = 1$ ,  $x^2 + y^2 + 2y = 9$



Nota: El ángulo que forman dos curvas es el ángulo determinado por sus rectas tangentes.

Se puede calcular así  $\operatorname{tg}\alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$  donde

$m_1$  y  $m_2$  son las pendientes de las rectas tangentes a ambas curvas en el punto de intersección.

Solución: Hay dos puntos de corte entre las dos curvas, los puntos (1, 2) y (3, -2). El ángulo

que forman al cortarse vale:  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ . Este

ángulo es el mismo en los dos puntos de intersección de ambas curvas.

16

Hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva

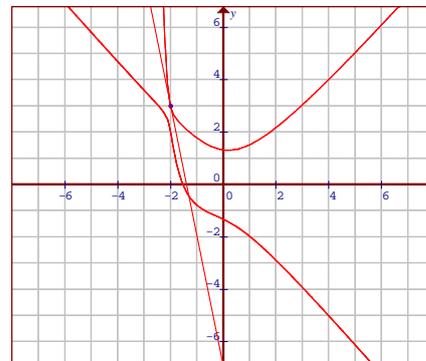
$$4x^3 - 3xy^2 + 6x^2 - 5xy - 8y^2 + 9x + 14 = 0$$

en el punto  $(-2, 3)$

Representar con Matlab las gráficas definidas por las ecuaciones de los apartados anteriores, en un entorno de los puntos dados.

Solución: Recta tangente:  $y - 3 = -\frac{9}{2}(x + 2)$

Recta normal:  $y - 3 = \frac{2}{9}(x + 2)$



17

Determinar los puntos de la curva  $y^2 = 8x$  cuyas distancias al punto  $(6, 0)$  sean mínimas.

Solución: Los puntos son el  $(2, 4)$  y el  $(2, -4)$ .

La distancia mínima es  $4\sqrt{2}$ .

18

Se quiere fabricar latas cilíndricas para bebidas refrescantes, de 200 cm<sup>3</sup> de capacidad, utilizando la mínima cantidad posible de material. Indicar las dimensiones (radio de la base y altura) que garanticen la mínima superficie.

Solución: El radio de la base y la altura de la lata que hacen mínima la superficie son

$$\text{radio} = \sqrt[3]{\frac{100}{\pi}} \text{ cm}; \text{ altura} = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{100}{\pi}} \text{ cm};$$

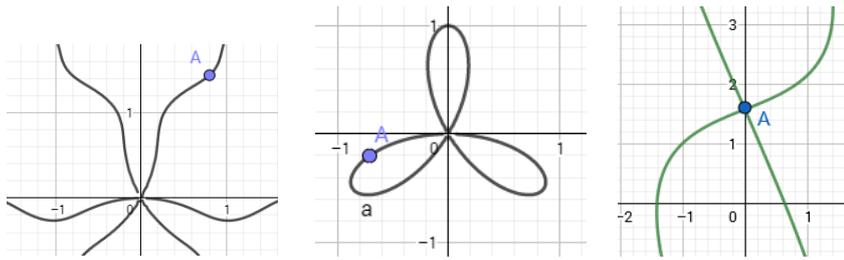
$$\text{superficie mínima} = 6 \cdot \sqrt[3]{100^2 \pi} \text{ cm}^2.$$

## Ejercicios resueltos

### CONCEPTOS BÁSICOS DE FUNCIONES

1

Determinar cuáles de las siguientes curvas son las gráficas de una función  $y$  dependiente de  $x$  en las proximidades del punto A señalado en la figura. Justifica la respuesta



#### Solución

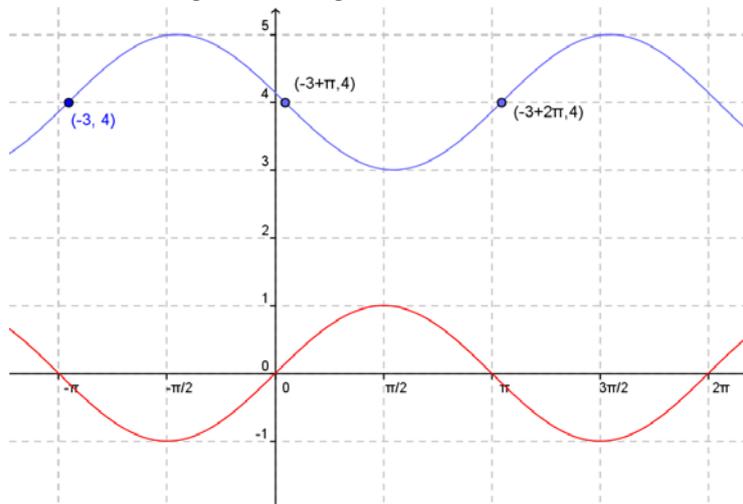
Las dos primeras figuras representan curvas en las que en un entorno del punto A se define una función  $y$  dependiente de  $x$ .

2

Si  $f(x)$  es una función de una variable definida en el conjunto de los números reales, ¿qué relación tiene la gráfica de  $f(x)$  y la de la función  $g(x) = f(x + 3) + 4$ ? Haz la representación de estas dos funciones cuando se considera  $f(x) = \text{sen}(x)$ .

#### Solución

La gráfica de  $g$  es la gráfica de la función  $f$  trasladada horizontalmente 3 unidades a la izquierda y 4 unidades verticalmente hacia arriba. En el caso de que  $f(x) = \text{sen}(x)$  las gráficas de  $f$  y  $g$  aparecen representadas en la siguiente imagen:

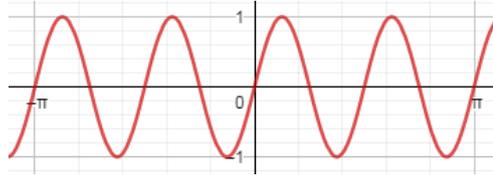


3

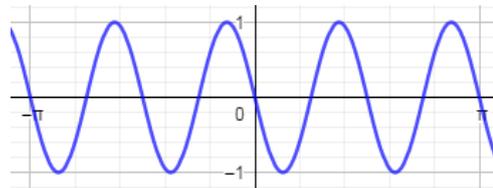
Aplicando transformaciones elementales a la función trigonométrica adecuada, representar la gráfica de la función  $f(x) = 3 \operatorname{sen}(4x - \pi) + 2$ .

## Solución

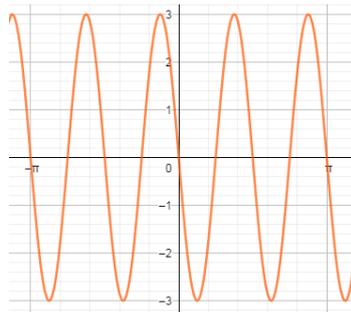
$$y = \operatorname{sen}(4x)$$



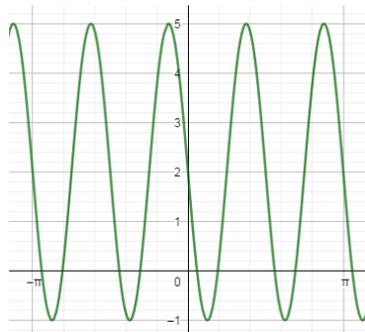
$$y = \operatorname{sen}(4x - \pi) = -\operatorname{sen}(4x)$$



$$y = 3\operatorname{sen}(4x - \pi)$$



$$y = 3\operatorname{sen}(4x - \pi) + 2$$



4

Determina el dominio, simetría y periodicidad de la función  $f(x) = \operatorname{sen} 3x + |\operatorname{sen} 3x|$ . Representa su gráfica.

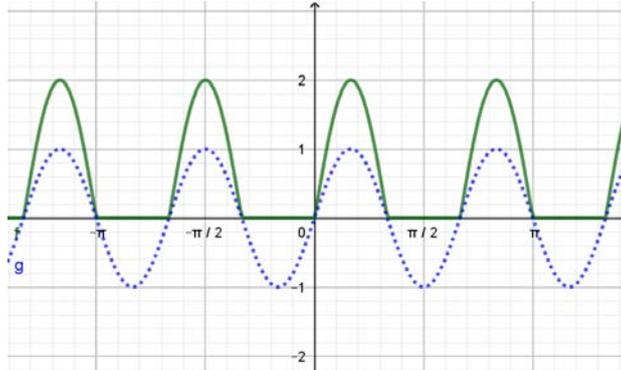
## Solución

$$f(x) = \begin{cases} 2\operatorname{sen}(3x) & \text{si } \operatorname{sen}(3x) > 0 \\ 0 & \text{si } \operatorname{sen}(3x) \leq 0 \end{cases}$$

Como

$$\text{sen}(3x) > 0 \Rightarrow 0 + 2k\pi < 3x < \pi + 2k\pi \Rightarrow \frac{2k\pi}{3} < x < \frac{\pi + 2k\pi}{3} \quad k \in \mathbb{Z}$$

La gráfica de la función será la que se muestra en verde en la figura siguiente:



Se trata de una función cuyo dominio es todo el conjunto de los números reales,  $\mathbb{R}$ , no tiene simetría ni par ni impar:

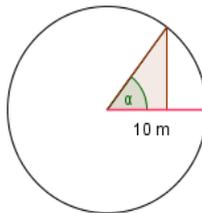
$$f(-x) = \text{sen}(-3x) + |\text{sen}(-3x)| = -\text{sen}(3x) + |\text{sen}(3x)|$$

Es periódica de periodo  $T = \frac{2\pi}{3}$

$$\begin{aligned} f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) &= \text{sen}\left(3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right) + \left|\text{sen}\left(3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right)\right| = \\ &= \text{sen}(3x + 2\pi) + |\text{sen}(3x + 2\pi)| = \text{sen}3x + |\text{sen}3x| \end{aligned}$$

5

Considerar la región sombreada



- Expresa el área de del triángulo representado en la figura anterior en función de  $\alpha$ ,  $A = f(\alpha)$ , cuando  $\alpha \in [0, \pi]$ . Nota: 10m es el radio de la circunferencia.
- Haz una representación gráfica de la función  $y = f(\alpha)$  en el intervalo  $[0, \pi]$  a partir de la gráfica de la función seno.
- Escribe las instrucciones Matlab para hacer la representación de la función área en el intervalo  $\alpha \in [0, \pi]$ .

**Solución**

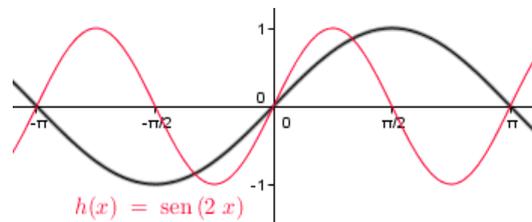
(a) El área del triángulo es  $A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$ . Si  $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  se tiene que:

$$\cos \alpha = \frac{\text{base}}{10} \text{ y } \text{sen} \alpha = \frac{\text{altura}}{10}$$

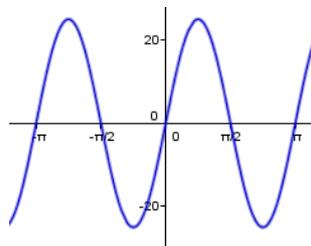
En consecuencia función área será:

$$A = \begin{cases} f(\alpha) = \frac{10 \text{sen} \alpha 10 \cos \alpha}{2} = 50 \text{sen} \alpha \cos \alpha = 25 \text{sen}(2\alpha) & \text{si } \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ f(\pi - \alpha) & \text{si } \alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

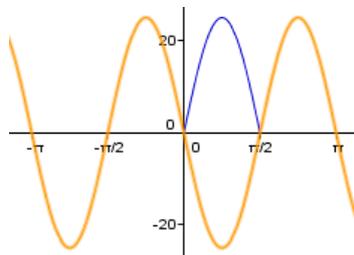
(b) Haciendo una contracción horizontal de la gráfica de  $\text{sen}(x)$  de razón 2, se obtiene la de la función  $\text{sen}(2x)$  que es periódica de periodo  $\pi$



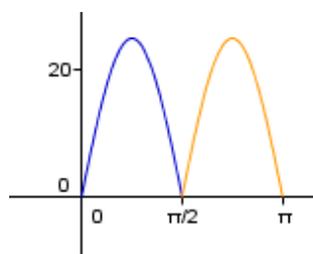
Mediante una dilatación vertical se obtiene la gráfica de la función  $25\text{sen}(2x)$



La gráfica de  $f(\pi - x)$  es el resultado de hacer un reflejo respecto al eje Y junto con un desplazamiento de  $\pi$  unidades (su periodo). El resultado se muestra en naranja



La función área,  $A(\alpha)$ , en el intervalo  $\alpha \in [0, \pi]$  es la siguiente



(c) El código Matlab pedido es:

```
t1=0:0.01:pi/2;
t2=pi/2:0.01:pi;
% f en el intervalo [0, pi/2]
f1=25*sin(2*t1);
% f en el intervalo [pi/2, pi]
f2=25*sin(2*(pi-t2));
plot(t1,f1,t2,f2)
```

## CONCEPTO DE DERIVADA. DIFERENCIAL

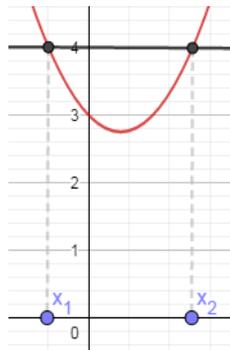
6

Dada la función  $f(x) = x^2 - x + 3$

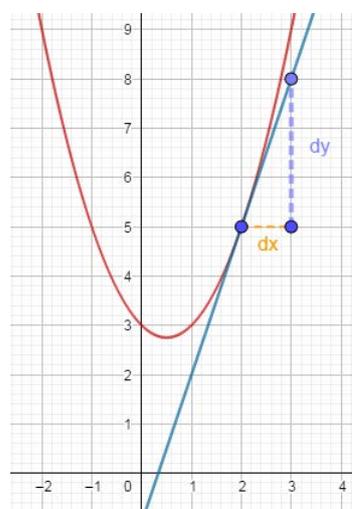
- Determinar si la función es inyectiva justificando la respuesta.
- Calcular la diferencial en el punto  $x = 2$  y representa la gráfica de la función junto con la diferencial en el punto  $x = 2$  para  $dx = 1$ .

### Solución

- No es inyectiva porque es una parábola.



- Ver apuntes para ver la interpretación gráfica de la diferencial.



$$dy = f'(2) dx = 3 \cdot 1 = 3$$

7 (a) Dada la función  $f(x) = \sqrt{1-x}$ , se pide Calcular el valor aproximado de  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ , utilizando la diferencial primera en el punto 0.

(b) Para aproximar el valor de  $\sqrt{a}$ , se utiliza la recta tangente a la función  $f(x) = \sqrt{x}$  en el punto  $b = 1$  y se obtiene  $\sqrt{a} \approx 1.05$ . ¿Cuál será el punto  $a$ ?

### Solución

(a) Como  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$  cuando  $x=1/2$ , la aproximación pedida es:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = f\left(\frac{1}{2}\right) \approx f(0) + f'(0)\left(\frac{1}{2} - 0\right)$$

Teniendo en cuenta que

$$f(0) = 1 \quad f'(x) = -\frac{1}{2}(1-x)^{-1/2} \Rightarrow f'(0) = \frac{-1}{2}$$

se concluye:  $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

(b) Se tiene que

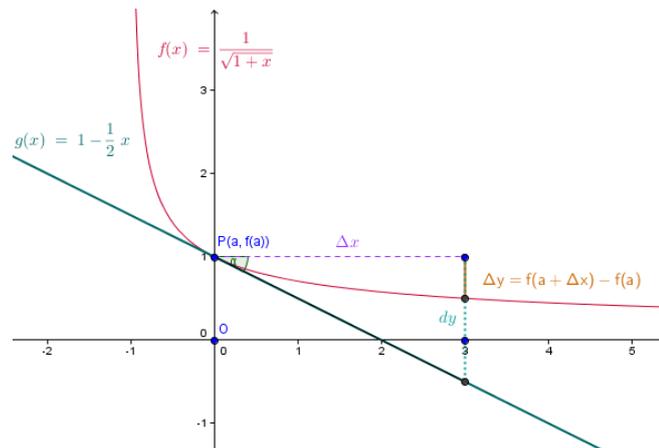
$$f(b+h) \approx f(b) + f'(b)h \quad \text{siendo} \quad f'(b) = \frac{1}{2\sqrt{b}}$$

$$\sqrt{a} \approx \sqrt{1} + \frac{1}{2}(a-1) = 1.05 \Rightarrow \frac{1}{2}(a-1) = 0.05 \Rightarrow a = 1.1$$

8 Se considera la función  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ . Calcula para esta función la diferencial en  $a = 0$  e  $\Delta x = 0.5$ . Haz un bosquejo de esta función y representa el valor obtenido.

### Solución

2. La diferencial es:



$$dy = f'(0)\Delta x = \frac{-1}{2} \cdot 0,5 = -0,25$$

Nota: Para que se vea mejor la gráfica se ha considerado un incremento de valor  $\Delta x = 3$ .

9

¿Qué precisión debe de tener la medida del radio  $r$  de una esfera para calcular el área de su superficie dentro de un 1% de su valor real? (Superficie de una esfera:  $4\pi r^2$ )

### Solución

Sea  $\Delta r$  el error en la medida de  $r$ . Sea  $\Delta S$  el error en la medida del área de la superficie, correspondiente al error  $\Delta r$ .

Sabemos que,

$$|\Delta S| \leq \frac{1}{100} S = \frac{1}{100} 4\pi r^2$$

La aproximación lineal de  $\Delta S$  es

$$\Delta S \approx \frac{dS}{dr} \Delta r = 8\pi r \Delta r$$

Expresando la condición del enunciado se tiene,

$$|8\pi r \Delta r| \leq \frac{4\pi r^2}{100} \Leftrightarrow |\Delta r| \leq \frac{r}{200} = \frac{0,5}{100} r$$

10

Calcular, utilizando la definición de derivada, una aproximación de  $\text{sen}(155^\circ)$ .

### Solución

Como  $155^\circ \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{31\pi}{36} \text{ rad}$ , se tiene, a partir de la definición de derivada, que

$$\frac{\text{sen}\left(\frac{31\pi}{36}\right) - \text{sen}(\pi)}{\frac{31\pi}{36} - \pi} \approx \cos(\pi) \Rightarrow \text{sen}\left(\frac{31\pi}{36}\right) \approx -\left(\frac{31\pi}{36} - \pi\right) \Rightarrow \text{sen}\left(\frac{31\pi}{36}\right) \approx 0.43633$$

$$\text{sen}\left(\frac{31\pi}{36}\right)$$

## REGLA DE LA CADENA

11

Un punto en el plano se mueve a lo largo de la curva de ecuación  $y = \sqrt{\operatorname{sen}^2(x) + 1}$ , de manera que la abscisa respecto al tiempo  $t$  es  $x = \log(2t - 1)$ . Calcular la variación de la ordenada respecto del tiempo,  $\frac{dy}{dt}$ , cuando  $t = 1$ .

## Solución

Aplicando la regla de la cadena

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = \left( \frac{1}{2} (\operatorname{sen}^2 x + 1)^{-1/2} 2 \operatorname{sen} x \cos x \right) \frac{2}{2t - 1}$$

Cuando  $t = 1$ ,  $x = \log(1) = 0$  luego sustituyendo en la expresión anterior se tendrá:

$$\frac{dy}{dt} = 0 \cdot 2 = 0$$

12

Sea  $g(x) = f(\operatorname{sen} x)$ , sabiendo que  $f'(0) = 0$  calcular  $g'(\pi)$ . Comprobar además el resultado obtenido para una función  $f$  concreta.

## Solución

Aplicando la regla de la cadena,

$$g'(x) = f'(\operatorname{sen} x) \cos x \Rightarrow g'(\pi) = f'(\operatorname{sen} \pi) \cos \pi = f'(0)(-1) = 0$$

Por ejemplo, podemos considerar

$$f(x) = x^2 \Rightarrow g(x) = f(\operatorname{sen} x) = (\operatorname{sen} x)^2$$

Se tendría para este ejemplo

$$g'(x) = 2(\operatorname{sen} x)(\cos x) \Rightarrow g'(\pi) = 2 \operatorname{sen} \pi \cdot \cos \pi = 0$$

13

Dada las funciones  $f$  y  $g$  derivables se considera la función  $h(x) = f(x^2 g(x))$ . Calcular  $h'(2)$  sabiendo que:  $g(2) = 1$ ,  $g'(2) = 2$ ,  $f(4) = 3$ ,  $f'(4) = 4$ .

## Solución

Aplicando la regla de la cadena a la función  $h(x) = f(x^2 g(x))$  se tiene que:

$$h'(x) = f'(x^2 g(x))(2xg(x) + x^2 g'(x))$$

Sustituyendo en  $x=2$

$$h'(2) = f'(4g(2))(4g(2) + 4g'(2)) = f'(4)(4 + 8) = 4 \cdot 12 = 48$$

14

Si  $g$  y  $h$  son funciones derivables calcular la primera derivada de la función

$$f(x) = g(x^2) + \frac{h(\sqrt{x})}{x + \operatorname{sen}(3x)}$$

**Solución**

Aplicando la regla de la cadena

$$f'(x) = 2xg'(x^2) + \frac{h'(\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}(x + \operatorname{sen}(3x)) - h(\sqrt{x})(1 + 3\cos(3x))}{(x + \operatorname{sen}(3x))^2}$$

15

a) Supongamos que un cubo de hielo se derrite conservando su forma cúbica y que éste volumen decrece proporcional al área de su superficie. ¿Cuánto tardará en derretirse si el cubo pierde  $\frac{1}{4}$  de su volumen durante la primera hora?

b) ¿Qué precisión debe de tener la medida del radio  $r$  de una esfera para calcular el área de su superficie dentro de un 1% de su valor real? (Superficie de una esfera:  $4\pi r^2$ )

**Solución**

a) Se considera  $x = x(t)$  el lado del cubo en el instante  $t$ , su volumen y su superficie es:

$$V = x^3 \quad S = 6x^2$$

Como el volumen decrece proporcional al área de la superficie se tendrá:

$$\frac{dV}{dt} = -K6x^2 \text{ es decir, } 3x^2 \frac{dx}{dt} = -K6x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = -2k$$

$$\text{Integrando: } \frac{dx}{dt} = -2k \quad \Rightarrow \quad x(t) = -2kt + A$$

Para  $t=0$  se tiene que  $x(0) = A$ , luego  $A$  es el lado del cubo antes de empezar el deshielo.

Como además se sabe que el cubo de hielo disminuye  $\frac{1}{4}$  de su volumen en la primera hora se tiene que:

$$V(0) - V(1) = \frac{1}{4}V(0) \Rightarrow V(1) = \frac{3}{4}V(0)$$

$$(-2k + A)^3 = \frac{3}{4}A^3 \quad -2k + A = \sqrt[3]{\frac{3}{4}}A \quad \Rightarrow \quad 2k = \left(1 - \sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right)A$$

lo que nos da una relación entre la constante  $k$  y el lado inicial del cubo  $A$ ,

$$\frac{A}{2k} = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{\frac{3}{4}}}$$

Se nos pregunta el valor de  $t$  en el que  $x(t)=0$ , luego se tendrá que calcular

$$x(t) = -2kt + A = 0 \Leftrightarrow t = \frac{A}{2k} = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{\frac{3}{4}}} \approx 11 \text{ horas}$$

b) Sea  $\Delta r$  el error en la medida de  $r$ . Sea  $\Delta S$  el error en la medida del área de la superficie, correspondiente al error  $\Delta r$ .

Sabemos que,

$$|\Delta S| \leq \frac{1}{100} S = \frac{1}{100} 4\pi r^2$$

La aproximación lineal de  $\Delta S$  es  $\Delta S \approx \frac{dS}{dr} \Delta r = 8\pi r \Delta r$

Expresando la condición del enunciado se tiene,

$$|8\pi r \Delta r| \leq \frac{4\pi r^2}{100} \Leftrightarrow |\Delta r| \leq \frac{r}{200} = \frac{0,5}{100} r$$

Por lo tanto se deberá medir el radio con un error menor que el 0,5 por ciento del valor verdadero.

#### REGLAS DE DERIVACIÓN

16

Calcular la derivada de las siguientes funciones, simplificando al máximo el resultado.

a)  $y = \text{sen}(\text{sen}(\text{sen}(x)))$       b)  $y = \arccos x$       c)  $y = a^{\frac{1-x}{1+x}}$

#### Solución

a)  $y' = \cos(\text{sen}(\text{sen } x)) \cos(\text{sen } x) \cos x$

b) Se cumple  $y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$ .

Derivando los dos miembros de la última igualdad respecto de  $x$  y aplicando la regla de la cadena se obtiene:

$$1 = -\text{sen } y \cdot y' \Rightarrow y' = -\frac{1}{\text{sen } y}$$

Como

$$\text{sen } y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

se concluye finalmente

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

c) Se cumple  $y = a^{\frac{1-x}{1+x}} \Leftrightarrow \log y = \frac{1-x}{1+x} \log a$

Derivando respecto de  $x$  los dos miembros de esta última igualdad y aplicando la regla de la cadena se tiene que

$$\frac{1}{y} y' = -\frac{2 \log a}{(1+x)^2} \Leftrightarrow y' = -y \frac{2 \log a}{(1+x)^2} \Leftrightarrow y' = -\frac{2 \log a}{(1+x)^2} a^{\frac{1-x}{1+x}}$$

### RAZONES DE CAMBIO RELACIONADAS

17

En una empresa la fuerza laboral  $L$  se mide en horas-trabajador y es una función del tiempo,  $L = f(t)$ . Sea  $M = g(t)$  la producción media por persona. Suponga que la producción  $Q$  está dada por el producto  $LM$ . En cierto momento la fuerza laboral  $L$  está creciendo a un ritmo de 4% anual y la producción media está creciendo a una razón de 5% al año. Encontrar la razón de cambio de la producción total cuando  $Q=10$ .

#### Solución

Datos del problema:  $Q = LM = f(t)g(t)$

$$\frac{dL}{dt} = 0'04 \cdot L$$

$$\frac{dM}{dt} = 0'05 \cdot M$$

Se pide:  $\frac{dQ}{dt} = \frac{dL}{dt} \cdot M + L \cdot \frac{dM}{dt}$

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)_{Q=10} = 0'04 \cdot L \cdot M + L \cdot 0'05M = 0'09 \cdot L \cdot M = 0'09 \cdot Q = 0,9$$

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)_{Q=10} = 0'04 \cdot L \cdot M + L \cdot 0'05M = 0'09 \cdot L \cdot M = 0'09 \cdot Q = 0,9$$

18

¿Con qué rapidez baja el nivel de agua contenida en un depósito cilíndrico si estamos vaciándolo a razón de 300 litros por minuto?

#### Solución

Se cumple que  $V = \pi r^2 h$  siendo  $r$  el radio del cilindro, que es constante, y  $h$  su altura. Al vaciarse el volumen y la altura varían con el tiempo,

$$\frac{dV}{dt} = \pi r^2 \frac{dh}{dt} \rightarrow -300 = \pi r^2 \frac{dh}{dt} \rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{-300}{\pi r^2} \frac{dm}{\text{minuto}}$$

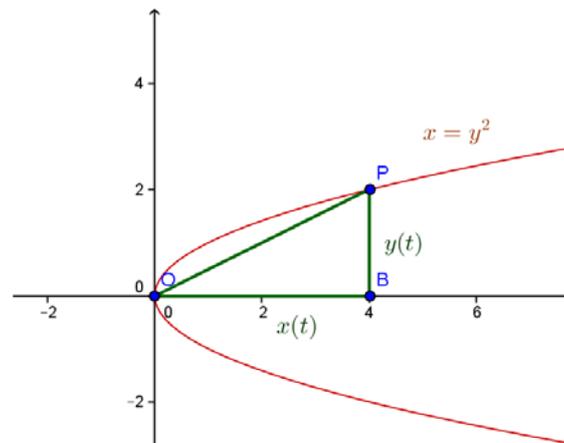
Nota: 1litro = 1dm<sup>3</sup>

19

Un punto P se mueve sobre la parábola  $x = y^2$  situada en el primer cuadrante de forma que su coordenada x está aumentando a razón de 5 cm/seg. Calcular la velocidad a la que el punto P se aleja del origen cuando  $x=9$ .

### Solución

Se trata de un problema de razones de cambio relacionadas. La función distancia de un punto situado en las coordenadas (x, y) al origen es:  $d(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$



Si el punto (x, y) está en la parábola  $x = y^2$  será:

$$d(t) = \sqrt{x^2(t) + x(t)}$$

La velocidad a la que se aleja del origen aplicando la regla de la cadena es:

$$d'(t) = \frac{1}{2} (x^2(t) + x(t))^{-1/2} (2x(t) \cdot x'(t) + x'(t))$$

En el instante en que  $x=9$  y teniendo en cuenta que  $x'(t) = 5 \text{ cm / seg}$  se concluye que la velocidad a la que el punto P se aleja del origen es:

$$\frac{1}{2} (9^2 + 9)^{-1/2} (2 \cdot 9 \cdot 5 + 5) = \frac{95}{2\sqrt{90}} = \frac{95}{6\sqrt{10}}$$

20

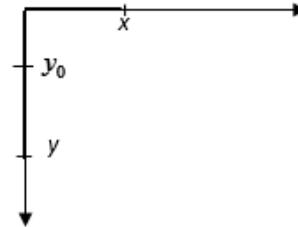
Una persona conduce en dirección sur a 64 km/h y pasa por Madrid a las 12 del mediodía. Otra persona va hacia el este a 60 km/h, pasando por Madrid 15 minutos más tarde. ¿A qué velocidad se separan a las 14h?.

### Solución

- Sea  $x$ , el espacio recorrido hacia el este por el coche que va en esta dirección, en el instante  $t$ .
- Sea  $y$ , el espacio recorrido hacia el sur por el coche que va en esta dirección, en el instante  $t$ .

- El instante  $t = 0$  es a las 12:15h. Por tanto a las 14h es  $t = 7 / 4$ .
- $y_0 = 16km$ , es el espacio recorrido por el coche que va hacia el sur en  $t = 0$ .

$$\begin{cases} x = 60t \\ y = 16 + 64t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 7 / 4$$



La distancia entre ambos vehículos en el instante  $t$  es:  $s(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$

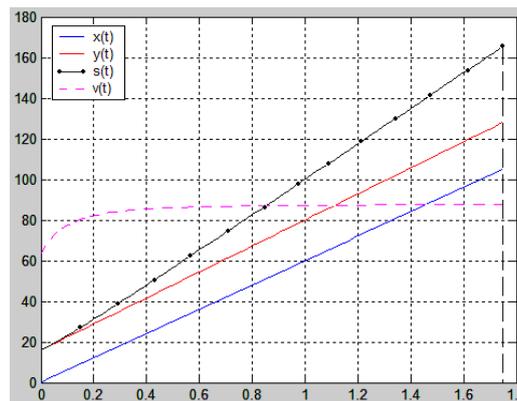
y la variación de esta distancia con el tiempo (velocidad de separación de los vehículos) se obtiene derivando con respecto de  $t$ :

$$v = \frac{ds(t)}{dt} = \frac{x(t)x'(t) + y(t)y'(t)}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}} = \frac{(60t)60 + (16 + 64t)64}{\sqrt{(60t)^2 + (16 + 64t)^2}}$$

En la gráfica se han representado las curvas de las distancias de los dos móviles a Madrid en cada instante  $t$  a partir de las 12:15h, así como la distancia y la velocidad de separación entre ellos.

Los valores de estas funciones a las 14h ( $t = 7 / 4$ ), son:

- Distancia recorrida por el coche que va hacia el este:  $x(7 / 4) = 105km$
- Distancia recorrida por el coche que va hacia el sur:  $y(7 / 4) = 128km$
- Distancia entre ambos vehículos:  $s(7 / 4) = 165.56km$
- Velocidad de separación de ambos vehículos:  $v(7 / 4) = 87.53km / h$



**21**

Un depósito de agua es cónico, con el vértice hacia arriba, y tiene 40 m. de alto y 20 m. de radio en la base. El depósito se llena a  $80m^3 / min$ . ¿A qué velocidad se eleva el nivel de agua cuando la profundidad del agua es de 12 m.?

Nota: El volumen de un cono de altura  $h$  y radio de la base  $r$  es:  $V = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h$

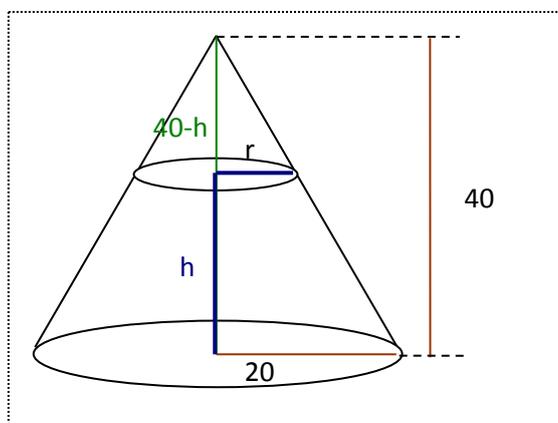
### Solución

En cualquier instante de tiempo el volumen  $V$  es

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot 20^2 \cdot 40 - \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot (40 - h)$$

donde  $r$  y  $h$  son funciones del tiempo. Además estas dos funciones están relacionadas de la manera siguiente:

$$\frac{40}{40 - h} = \frac{20}{r} \quad r = \frac{40 - h}{2}$$



En consecuencia el volumen en un instante  $t$  es:

$$V(t) = \frac{1}{3} \pi \cdot 20^2 \cdot 40 - \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{[40 - h(t)]^3}{4}$$

Derivando respecto de  $t$  en ambos lados de la igualdad

$$\frac{dV}{dt} = \frac{3}{3 \cdot 4} \pi \cdot [40 - h(t)]^2 \frac{dh}{dt}$$

En el instante en el que  $h=12$  m el deposito se llena a  $80 \text{ m}^3 / \text{min}$  luego,

$$80 = \frac{\pi}{4} \cdot [40 - 12]^2 \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{20}{49\pi} \approx 0'13 \text{ m} / \text{min}$$

### DERIVACIÓN IMPLÍCITA

22

Calcular la pendiente de la recta tangente a la curva  $y^2 + 5x = x e^{x(y-2)}$  en el punto  $(-1, 2)$

### Solución

El punto  $P(-1, 2)$  es un punto de la curva:  $2^2 + 5(-1) = (-1)e^{-(2-2)}$

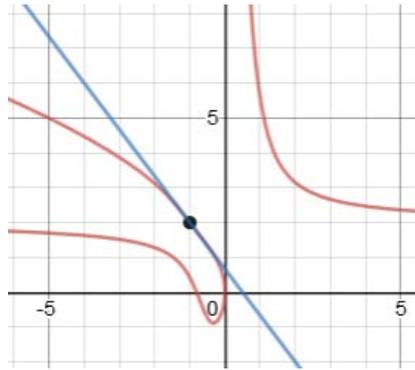
Suponiendo que esta ecuación define implícitamente a  $y$  como función de  $x$ , la pendiente de la recta tangente a la curva en  $P$  es la derivada en dicho punto. Derivando implícitamente:

$$2yy' + 5 = e^{x(y-2)} + xe^{x(y-2)}(y-2 + xy')$$

sustituyendo el punto  $P(-1,2)$  se calcula la pendiente de la recta pedida:

$$2 \cdot 2y'_P + 5 = e^{-(2-2)} - e^{-(2-2)}(2-2 + (-1)y'_P)$$

$$4y'_P + 5 = 1 + y'_P \Rightarrow y'_P = -4/3$$



23

Dada la curva  $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$ , se pide representarla y calcular la recta tangente y normal a dicha curva en el punto  $P(2, -3 + \sqrt{3})$ .

### Solución

Completando cuadrados

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = \boxed{x^2 - 2x} + \boxed{y^2 + 6y} + 6 = \boxed{(x-1)^2 - 1} + \boxed{(y+3)^2 - 9} + 6$$

Se tiene que

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+3)^2 = 4$$

luego la curva es una circunferencia centrada en el punto  $(1, -3)$  y de radio 2. Para calcular la pendiente de la recta tangente calculamos la derivada en el punto  $P$ . Derivando implícitamente:

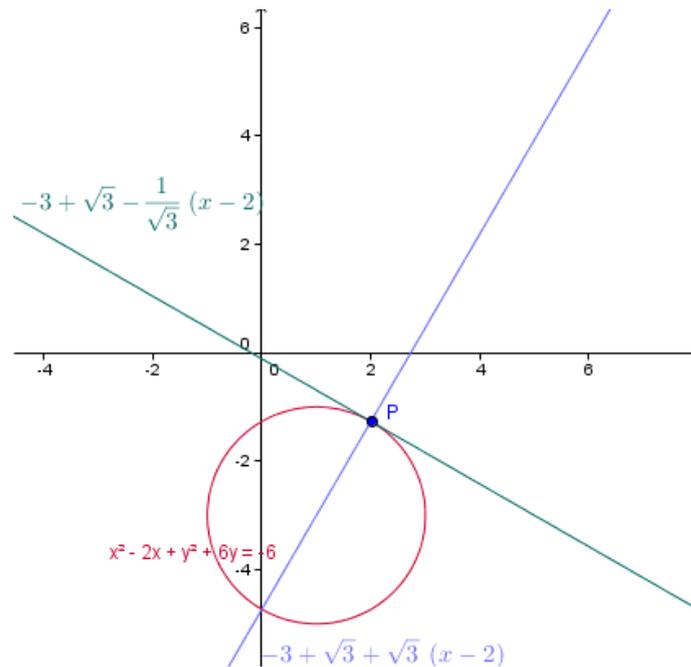
$$2x + 2yy' - 2 + 6y' = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{2x-2}{2y+6}$$

en el punto  $P$

$$y'_P = -\frac{2 \cdot 2 - 2}{2(-3 + \sqrt{3}) + 6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

la ecuación de la recta tangente es:  $y = (-3 + \sqrt{3}) - \frac{1}{\sqrt{3}}(x-2)$

y la de la recta normal  $y = (-3 + \sqrt{3}) + \sqrt{3}(x-2)$



24

Una fábrica vende  $q$  miles de artículos fabricados cuando su precio es de  $p$  euros/unidad. La relación entre  $p$  y  $q$  es  $q^2 - 2q\sqrt{p} - p^2 - 31 = 0$ .

**Solución**

Si el precio  $p$  del artículo es de 9 euros y se incrementa a una tasa de 0.20 euros por semana, se pide calcular la rapidez a la que cambia la cantidad de unidades  $q$ , vendidas por semana cuando el precio es de 9 euros.

Derivando respecto de  $t$

$$2q \frac{dq}{dt} - 2 \frac{dq}{dt} \sqrt{p} - \frac{q}{\sqrt{p}} \frac{dp}{dt} - 2p \frac{dp}{dt} = 0 \quad (1)$$

Cuando  $p = 9$ , el valor de  $q$  es

$$q^2 - 6q - 112 = 0 \Rightarrow q = \frac{6 + \sqrt{36 + 448}}{2} = 14$$

Sustituyendo en (1) los valores  $p = 9$ ,  $q = 14$ ,  $\frac{dp}{dt} = 0.2 \frac{\text{euros}}{\text{semana}}$  se obtiene

$$\frac{dq}{dt} \simeq 0.206 \frac{\text{miles unidades}}{\text{semana}}$$

25

Dos curvas se dicen que son ortogonales en un punto si sus rectas tangentes son perpendiculares. Determinar si las siguientes curvas son ortogonales en el punto  $(1,1)$

$$y^2(2-x) = x^3 \quad y^2 + (xy)^{1/3} = x^2 + 1$$

**Solución**

Calculamos las pendientes de las rectas tangentes a ambas curvas derivando implícitamente:

Curva  $C_1 \equiv y^2(2-x) = x^3$

$$2yy'(2-x) - y^2 = 3x^2. \text{ En el punto } (1, 1)$$

$$2y' - 1 = 3 \rightarrow y' = 2$$

Luego la pendiente de la recta tangente a la curva  $C_1$  en el punto  $(1,1)$  es  $m_1 = 2$

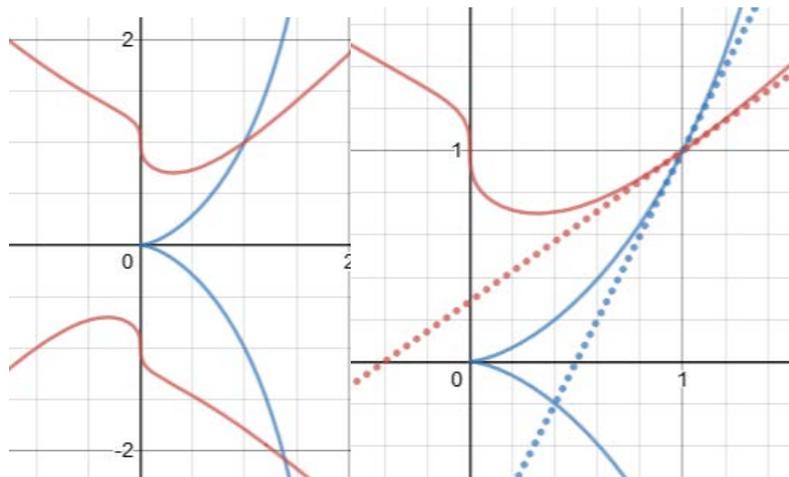
Curva  $C_2 \equiv y^2 + (xy)^{1/3} = x^2 + 1$

$$2yy' + \frac{1}{3}(xy)^{-2/3}(y + xy') = 2x. \text{ En el punto } (1, 1)$$

$$2y' + \frac{1}{3}(1 + y') = 2 \rightarrow \frac{7}{3}y' = 2 - \frac{1}{3} \rightarrow y' = \frac{5}{7}$$

Luego la pendiente de la recta tangente a la curva  $C_2$  en el punto  $(1,1)$  es  $m_2 = \frac{5}{7}$

Como  $m_1 m_2 \neq -1$ , las curvas no son ortogonales.

**26**

Calcula la recta tangente y la recta normal a la curva de ecuación

$$x^2 + x^2 \operatorname{sen}(2y) + y^2(x+1) = 9$$

en el punto  $(3,0)$ .

**Solución**

Derivando implícitamente

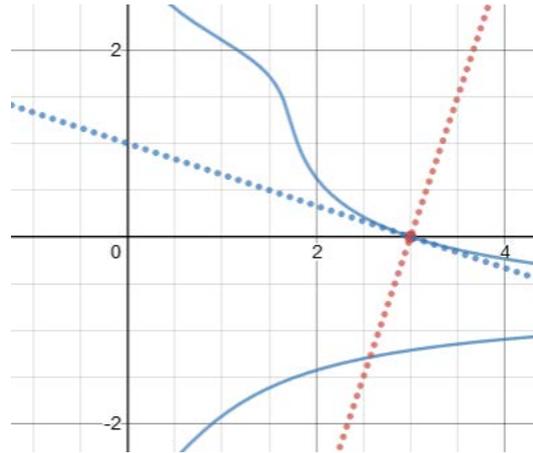
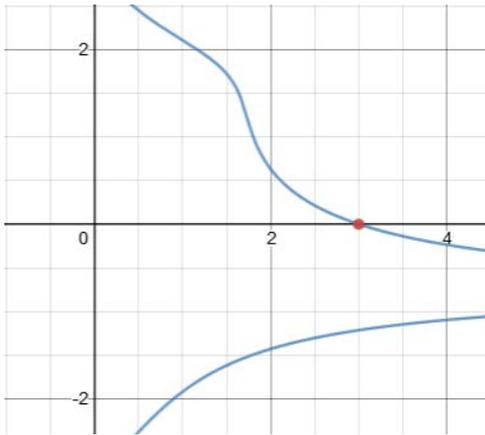
$$2x + 2x \operatorname{sen}(2y) + x^2 \cos(2y) 2y' + 2yy'(x+1) + y^2 = 0$$

En el punto  $P(3,0)$  se tiene

$$6 + 18y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{-1}{3}$$

La recta tangente es:  $y = \frac{-1}{3}(x - 3)$

La recta normal es:  $y = 3(x - 3)$



27

Halla el valor de  $a$  y  $b$  para que la recta tangente a la curva

$$ax^2y - be^{3x-3} = 1 + \operatorname{sen}(y^2 - 1)$$

en el punto  $P(1,1)$  sea la recta  $y=1$ .

### Solución

Derivando implícitamente se tiene

$$2axy + ax^2y' - 3be^{3x-3} = \cos(y^2 - 1)2yy'$$

Como la recta tangente en el punto  $P$  es  $y=1$ , su pendiente es 0, sustituyendo en la ecuación anterior  $x=1$ ,  $y=1$ ,  $y'=0$  se tiene

$$2a - 3b = 0$$

Como además el punto  $P$  cumple la ecuación de la curva se tendrá

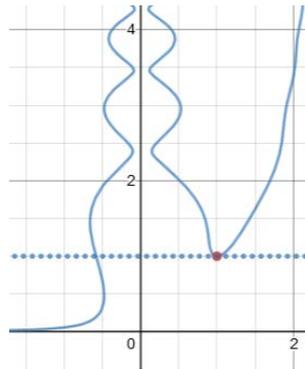
$$a - b = 1$$

Resolviendo el sistema

$$2a - 3b = 0$$

$$a - b = 1$$

la solución es  $b = 2$ ,  $a = 3$ .



28

Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva definida por la ecuación  $4x^3 - 3xy^2 + 6x^2 - 5xy - 8y^2 + 9x + 14 = 0$  en el punto  $(-2, 2)$ .

**Solución**

Si  $m$  es la derivada de  $y$  respecto de  $x$  de la función definida implícitamente por

$$4x^3 - 3xy^2 + 6x^2 - 5xy - 8y^2 + 9x + 14 = 0$$

entonces:

$$\text{Recta tangente en } (-2, 2): \quad y - 2 = m(x + 2)$$

$$\text{Recta normal en } (-2, 2): \quad y - 2 = -\frac{1}{m}(x + 2)$$

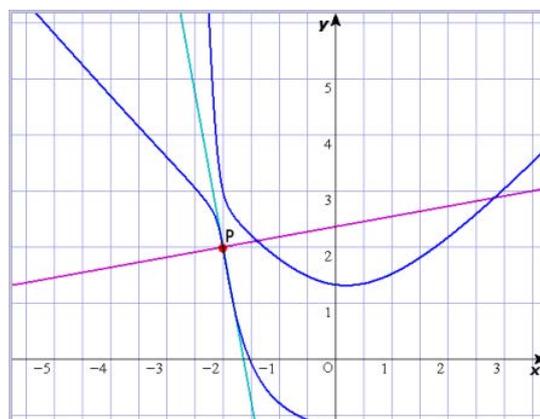
Para hallar  $m$  se deriva implícitamente la ecuación y se particulariza en  $(-2, 2)$

$$12x^2 - 3y^2 - 6xyy' + 12x - 5y - 5xy' - 16yy' + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad y'(-2, 2) = -\frac{11}{2}$$

Por tanto,

$$\text{Recta tangente en } (-2, 2): \quad y - 2 = -\frac{11}{2}(x + 2)$$

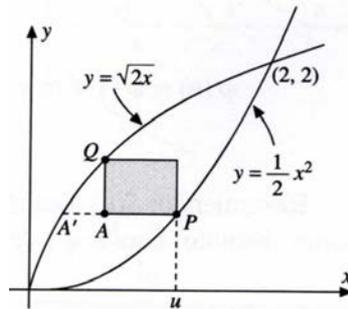
$$\text{Recta normal en } (-2, 2): \quad y - 2 = \frac{2}{11}(x + 2)$$



## EXTREMOS DE UNA FUNCIÓN

29

Se consideran los rectángulos que están situados en la región del plano limitada por las curvas  $y = \frac{x^2}{2}$  e  $y = \sqrt{2x}$ , que tienen un vértice en cada curva, que tienen sus lados paralelos a los ejes y sus lados horizontales miden  $\frac{1}{2}$  (ver figura). Determinar de entre todos ellos, aquél que tiene área máxima.



## Solución

Sean las coordenadas del punto P:  $\left(a, \frac{1}{2}a^2\right)$ .

Entonces las coordenadas del punto Q son  $\left(a - \frac{1}{2}, \sqrt{2\left(a - \frac{1}{2}\right)}\right)$

El área del rectángulo es:  $A = \overline{AP} \cdot \overline{AQ} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{2\left(a - \frac{1}{2}\right)} - \frac{1}{2}a^2 \right)$

$$A' = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2a-1}} - a \right) = 0 \Rightarrow a\sqrt{2a-1} = 1$$

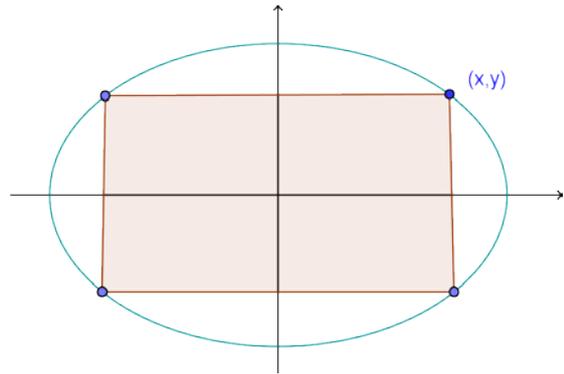
Resolviendo esta ecuación resulta  $a = 1$  luego  $P\left(1, \frac{1}{2}\right)$  y  $Q\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ . El rectángulo solución es entonces un cuadrado.

30

Calcula los lados del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en la elipse de ecuación  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

## Solución

Función a maximizar:  $Area = 4xy$



Será máxima cuando:

$$\frac{d(Area)}{dx} = 0 \Rightarrow 4(y + xy') = 0$$

Se calcula  $y'$  derivando implícitamente la ecuación de la elipse:

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0 \Rightarrow y' = -\frac{b^2x}{a^2y} \quad \text{Sustituyendo en } y + xy' = 0 \text{ se tiene:}$$

$$\frac{a^2y^2 - x^2b^2}{a^2y} = 0 \Rightarrow a^2y^2 - x^2b^2 = 0 \Rightarrow y^2 = \frac{b^2x^2}{a^2}$$

Y como  $x$  e  $y$  están sobre la elipse, verificarán  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , por tanto:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{a\sqrt{2}}{2}, \quad y = \pm \frac{b\sqrt{2}}{2}$$

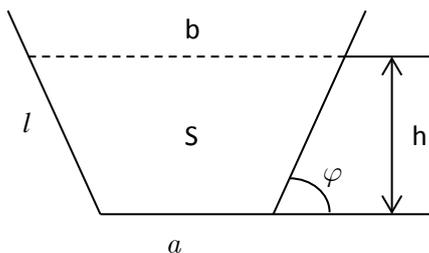
Por la naturaleza geométrica del problema se deduce que éstos valores sólo pueden corresponder a un máximo de la función Área. El valor del área máxima será

$$Area = 2ab$$

31

Se considera un canal, abierto por su parte superior, con sección en forma de trapecio isósceles. Por el canal circula agua; se conocen la altura  $h$  y el área  $S$  de la sección transversal de la corriente. Determinar el ángulo de inclinación  $\varphi$  que deben de tener las paredes laterales para que el perímetro mojado sea mínimo y hallar dicho perímetro.

**Solución**



Perímetro mojado:

$$P = a + 2l = a + 2 \frac{h}{\text{sen } \varphi}$$

El área  $S$  de la sección es,

$$S = \frac{1}{2}h(a+b) = \frac{1}{2}h\left[a + (a + 2h \cotg \varphi)\right] = h(a + h \cotg \varphi)$$

Despejando  $a$ ,

$$a = \frac{S}{h} - h \cotg \varphi$$

Sustituyendo en el perímetro mojado,

$$P = \frac{S}{h} - h \cotg \varphi + 2 \frac{h}{\sen \varphi}$$

Para hallar el mínimo de esta función resolvemos  $P'(\varphi) = 0$

$$P'(\varphi) = h \frac{1}{\sen^2 \varphi} - 2h \frac{\cos \varphi}{\sen^2 \varphi} = h \frac{1 - 2 \cos \varphi}{\sen^2 \varphi} = 0 \Rightarrow \cos \varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$$

En este punto hay un mínimo ya que  $P'\left(\frac{\pi}{3} - \varepsilon\right) < 0$  y  $P'\left(\frac{\pi}{3} + \varepsilon\right) > 0$

El valor del perímetro en este punto es:  $P\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{S}{h} + \sqrt{3}h$

## Material de consulta

Libro digital interactivo

[https://personales.unican.es/alvarez/A\\_Calculol/index\\_1.html](https://personales.unican.es/alvarez/A_Calculol/index_1.html)

Cálculo de una variable. Tomo 1. Thomas, George B. Pearson Educación.

- Capítulo 1. Preliminares
- Capítulo 3. Derivadas

