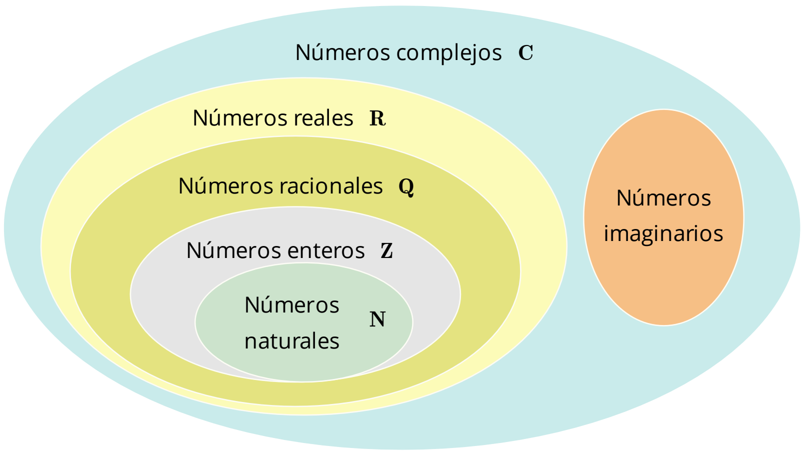
NÚMEROS REALES Y COMPLEJOS

NÚMEROS REALES

1 Sistemas numéricos

Los diferentes conjuntos de números surgen por necesidades prácticas de dar sentido a algunas operaciones algebraicas.



El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ con la suma y el producto tiene estructura de cuerpo.

En $\mathbb{R}$ está definida una relación de orden $\leq$

- Reflexiva: $a \leq a$
- Antisimétrica: Si $a \leq b \quad y \quad b \leq a$ entonces $a = b$
- Transitiva: Si $a \leq b \quad y \quad b \leq c$ entonces $a \leq c$

Esta relación de orden es total y compatible con la suma y el producto:

- Para todo $a, b \in \mathbb{R}$, se tiene $a \leq b \quad ó \quad b \leq a$
- Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$, si $a \leq b$ entonces $a + c \leq b + c$
- Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $c \geq 0$ si $a \leq b$ entonces $ac \leq bc$

En el conjunto de los números reales todo conjunto no vacío acotado superiormente tiene supremo (axioma del supremo).

2 Intervalos

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene que

Intervalo abierto: $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \;/\; a < x < b\}$

Intervalo cerrado: $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \;/\; a \leq x \leq b\}$

Intervalo semiabiertos o semicerrados: $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x \le b\}$

$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \le x < b\}$

Intervalos no acotados

Sea $a \in \mathbb{R}$ se definen los siguientes conjuntos:

$$(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x > a\}$$

$$[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \ge a\}$$

$$(-\infty,a) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x < a\}$$

$$(-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \le a\}$$

3 Valor absoluto. Definición y propiedades

Si $a > 0$, entonces

$\lvert x\rvert = a$	significa que	$x = a$	o	$x = -a$
$\lvert x\rvert < a$	significa que	$-a < x < a$		
$\lvert x\rvert > a$	significa que	$a < x$	o	$x < -a$

Propiedades

$$\lvert -a\rvert = \lvert a\rvert \qquad \lvert a\,b\rvert = \lvert a\rvert\lvert b\rvert \qquad \left\lvert \frac{a}{b}\right\rvert = \frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}$$

4 Fórmulas de distancia y punto medio

Distancia entre $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$: $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$

Punto medio de $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$: $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

NÚMEROS COMPLEJOS

5 Definición

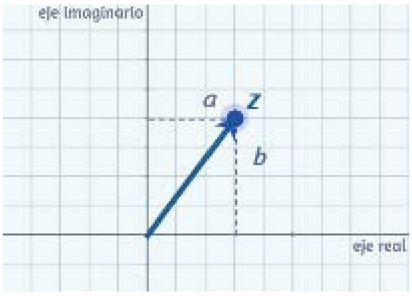
El conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(a,b) \,/\, a,b \in \mathbb{R}\}$ con las operaciones suma y producto siguientes

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$

$$(a,b)*(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$$

se llamará conjunto de números complejos y lo denotaremos por $\mathbb{C}$, $(\mathbb{R}^2,+,*)=\mathbb{C}$

Cada número complejo $z=(a,b)$ puede identificarse con el punto P de coordenadas (a,b), que recibe el nombre de afijo de z. Al número complejo $(0,1)$ le llamaremos *unidad imaginaria* y representaremos por i. Además, el número real a se identifica con el número complejo $(a,0)$, $a\equiv(a,0)$.



Observad que se cumple $i^2\equiv(0,1)*(0,1)=(-1,0)\equiv-1$

Teniendo en cuenta que: $(a,b)\equiv(a,0)+(b,0)*(0,1)$, El complejo $z=(a,b)$ se representa en forma binómica, como $z=a+bi$.

6 Definiciones

Para el número complejo $z=a+bi$

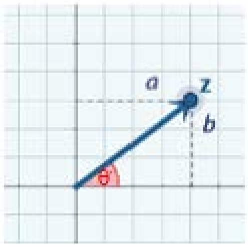
- La parte real de z es a
- La parte imaginaria de z es b
- El conjugado es $\bar{z}=a-bi$
- El módulo es $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

Interpretación geométrica del módulo (Distancia).- Sean los complejos $z=x+yi$, $z_0=x_0+y_0i$, el valor de $|z-z_0|$ representa la distancia entre los afijos de los complejos z y z_0.

De la interpretación geométrica del módulo se deduce que la igualdad $|z-z_0|=r$ la verifican todos los puntos (x,y) del plano, cuya distancia al punto (x_0,y_0) es igual a r. Elevando la igualdad anterior al cuadrado se obtiene la ecuación de la circunferencia de centro (x_0,y_0) y radio r.

$$|z-z_0|^2=\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$

- El argumento de z es θ siendo $\cos\theta=\frac{a}{|z|}$, $\operatorname{sen}\theta=\frac{b}{|z|}$. Se denota $\arg(z)$ y se dice principal si $-\pi<\theta\le\pi$.



Si z es un número complejo y φ su argumento se cumple:

$$\cos\varphi=\frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}\qquad \operatorname{sen}\varphi=\frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|}$$

Llamaremos valor principal del argumento al comprendido entre $-\pi$ y π: $-\pi<\arg z\le\pi$.

Cualquier ángulo φ verificando $\varphi=\arg z+2k\pi$ con $k\in\mathbb{Z}$, también es argumento de z.

Formas de expressar un número complejo: Si $z=a+bi$. $r=|z|$ $\theta=\arg(z)$

Forma trigonométrica	$z=r\left(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta\right)$
Forma polar	$z=r_\theta$
Forma exponencial	$z=re^{i\theta}$

$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi$ *(Fórmula de Euler)*

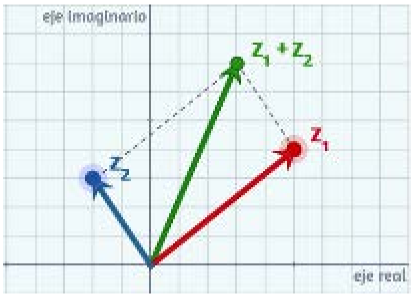
7 Operaciones

Si $z=a+bi=r\left(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta\right)=re^{i\theta}$

$w=c+di=s\left(\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi\right)=se^{i\varphi}$

- Suma: $z+w=\left(a+c\right)+\left(b+d\right)i$

$$z+w=\left(r\cos\theta+s\cos\varphi\right)+\left(r\operatorname{sen}\theta+s\operatorname{sen}\varphi\right)i$$



- Producto $\quad z\cdot w=ac-bd+\left(ad+bc\right)i$

$$z\cdot w=rs\left(\cos\left(\theta+\varphi\right)+i\operatorname{sen}\left(\theta+\varphi\right)\right)$$

$$z\cdot w=rs\ e^{i\left(\theta+\varphi\right)}$$

- Cociente: $\quad \dfrac{z}{w}=\dfrac{z\,\overline{w}}{w\,\overline{w}}=\dfrac{\left(a+bi\right)\left(c-di\right)}{c^2+d^2}$

$$\frac{z}{w}=\frac{r}{s}\left(\cos\left(\theta-\varphi\right)+i\operatorname{sen}\left(\theta-\varphi\right)\right)$$

$$\frac{z}{w}=\frac{r}{s}\ e^{i\left(\theta-\varphi\right)}$$

- Potencias de exponente natural

Teorema de Moivre: Si n es un número natural,

$$z^n=\left[r\left(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta\right)\right]^n=r^n\left(\cos\left(n\theta\right)+i\operatorname{sen}\left(n\theta\right)\right)$$

$$z^{1/n}=\left[r\left(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta\right)\right]^{1/n}=r^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right)$$

donde k=0,1, ...(n-1)

- Raices enésimas

$$z^{1/n}=\left[r(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)\right]^{1/n}=$$
$$=r^{1/n}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),\quad k=0,1,2\ldots(n-1)$$

8 Funciones trigonométricas complejas

Si $a\in\mathbb{R}$ entonces se tiene

$$e^{ia}=\cos a+i\operatorname{sen}a$$
$$e^{-ia}=\cos a-i\operatorname{sen}a$$

Por lo tanto,

$$e^{ia}+e^{-ia}=2\cos a$$

$$e^{ia} - e^{-ia} = i2\,\text{sen}\, a$$

Extendiendo estas fórmulas al campo complejo definimos el *seno* y el *coseno complejos*

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \text{sen}\, z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Ejercicios propuestos

1 Escribir en las formas binómica, polar y exponencial los siguientes números complejos:

a) $z = 8\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,sen\,\frac{\pi}{3}\right)^8$

b) $z = \dfrac{\left(5_{\pi/4}\right)^2}{(4i)^3 \cdot 2_{5\pi/6}}$ c) $\dfrac{1+4i}{1-4i} \cdot \text{Re}\,\left(\overline{3-i}\right)$

d) $z = \dfrac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot i\right)^{14} \cdot (1-i)^6}{\left(1+\sqrt{3}\cdot i\right)^3}$

Solución: a) $-4 + 4\sqrt{3}\cdot i = 8_{\frac{2\pi}{3}} = 8\cdot e^{\frac{2\pi}{3}i}$

b) $\frac{25}{256}\cdot\left(\sqrt{3}+i\right) = \left(\frac{25}{128}\right)_{\frac{\pi}{6}} = \frac{25}{128}\cdot e^{\frac{\pi}{6}i}$

c) $\frac{3}{17}\cdot(-15+8i) = 3_{arc\ tg\left(\frac{-8}{15}\right)} = 3\cdot e^{arc\ tg\left(\frac{-8}{15}\right)i}$

d) $-1 = 1_{\pi} = e^{\pi i}$

2 a) Realizar las siguientes operaciones: $z_1 + z_2$ y $z_1 - z_2$ vectorialmente

(a.1) $z_1 = \frac{1}{i} \quad z_2 = \frac{1-i}{1-3i}$

(a.2) $z_1 = \left(1+i\sqrt{3}\right)^3 \quad z_2 = \frac{2}{1-3i}$

(B) Representar en el plano complejo todos los valores posibles de i^m, para $m \in \mathbb{Z}$.

Ejemplos: i^{-425}, i^{28}, i^{189}, i^{275}

Solución: (a.1) $z_1 = -i \qquad z_2 = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$

(a.2) $z_1 = -8 \qquad z_2 = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$

(b) $i^{-425} = i^{-1} = -i$; $i^{28} = 1$; $i^{189} = i$; $i^{275} = i^3 = -i$

3 Sean z y w dos números complejos que satisfacen las siguientes condiciones

$|z| = 2$ y $\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{\pi}{4}$

siendo una de las raíces novenas de w el número complejo $\frac{1}{2}\left(i - \sqrt{3}\right)$. Se pide calcular z , w

Solución: $z = 2e^{-i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$, $w = -i$,

Ejercicios resueltos

1 Halla el valor de $z = \dfrac{3-2i}{2+i}$, $w = \dfrac{27+8i}{5+6i}$

Solución

$$z = \frac{3-2i}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i} = \frac{(3-2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{(6-2)+(-3-4)i}{2^2+1^2} = \frac{4-7i}{4+1}$$

$$z = \frac{4}{5} - \frac{7}{5}i$$

$$w=\frac{27+8i}{5+6i}=\frac{27+8i}{5+6i}\cdot\frac{5-6i}{5-6i}=\frac{(135+48)+(-162+40)i}{5^2+6^2}=\frac{183-122i}{25+36}=\frac{183}{61}-\frac{122}{61}i$$

$$w=3-2i$$

2

Calcular el valor de a y b para que $\dfrac{3b-2ai}{4-3i}$ sea real y de módulo unidad

Solución

Operando

$$z=\frac{(3b-2ai)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)}=\frac{12b-8ai+9bi+6a}{16+9}=\frac{12b+6a}{25}+i\frac{9b-8a}{25}$$

- Si se quiere que sea real

$$\frac{9b-8a}{25}=0 \quad\Rightarrow\quad 9b-8a=0 \quad\Rightarrow\quad b=\frac{8a}{9}$$

- Si además es de módulo uno

$$\frac{12b+6a}{25}=\pm1 \quad\Rightarrow\quad 12b+6a=\pm25 \quad\Rightarrow\quad \frac{96a}{9}+6a=\pm25 \quad\Rightarrow\quad a=\pm\frac{3}{2}$$

Luego, los valores pedidos son

$$a=\frac{3}{2}\quad b=\frac{4}{3}\qquad\qquad o \qquad\qquad a=-\frac{3}{2}\quad b=-\frac{4}{3}$$

3

Calcular $z=\sqrt[6]{1-\sqrt{3}i}$ y las raíces cúbicas del número -27 en forma binómica

Solución

a) Calculando su módulo y argumento

$$r=\left|z\right|=\sqrt{1+3}=2$$

$$\phi=\arg\left(z\right)=arctg\frac{-\sqrt{3}}{1}=-\frac{\pi}{3}$$

se tiene que sus raíces sextas son:

$$z_k=\sqrt[6]{2}_{\frac{-\pi/3+2k\pi}{6}}\qquad k=0,1,2,3,4,5$$

b) $z=\sqrt[3]{-27i}=\sqrt[3]{27e^{(-\frac{\pi}{2}+2k\pi)i}}=3e^{\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}i}$

$$k=0\Rightarrow z_0=3e^{-\frac{\pi}{6}i}=\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$$

$$k=1\Rightarrow z_1=3e^{\frac{\pi}{2}i}=3i$$

$$k=2\Rightarrow z_2=3e^{\frac{7\pi}{6}i}=-\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$$

4 Escribir en forma exponencial los siguientes números complejos:

$$z=\frac{\left(-1-\sqrt{3}\ i\right)^{27}}{\overline{i\,e^{2\pi i}}} \qquad w=\sum_{n=2}^{235} i^n$$

Solución

$$z=\frac{\left(-1-\sqrt{3}\ i\right)^{27}}{\overline{i\,e^{2\pi i}}}=2^{27}e^{\frac{\pi}{2}i} \quad \text{ya que}$$

$$\left(-1-\sqrt{3}\ i\right)^{27}=\left(2e^{-\frac{2\pi}{3}i}\right)^{27}=2^{27}e^{-\frac{2*27\pi}{3}i}=2^{27}e^{-18\pi i}=2^{27}$$

$$e^{2\pi i}=1$$

$$\overline{ie^{2\pi i}}=\overline{i}=-i=e^{-\frac{\pi}{2}i}$$

Teniendo en cuenta que las potencias de i son -1, -i, 1, i agrupando las sumas de cuatro en cuatro términos se obtendrá que la suma de cada grupo de cuatro sumandos es 0. Como hay 234 sumandos, se pueden hacer 58 grupos de 4 y sobrarán los dos últimos sumandos:

$$w=\underbrace{\sum_{n=2}^{235} i^n}_{\substack{234\ sumandos\\ 234=4*58+2}}=\underbrace{\left(i^2+i^3+i^4+i^5\right)}_{=0}+\underbrace{\left(i^6+i^7+i^8+i^9\right)}_{=0}+\ldots+\underbrace{\left(i^{230}+i^{231}+i^{232}+i^{233}\right)}_{=0}+i^{234}+i^{235}=$$

$$=i^2+i^3=-1-i=\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i}$$

5 Escribir en forma exponencial los siguientes números complejos:

$$z=\frac{\left(-1-\sqrt{3}\ i\right)^{21}}{\overline{i^{2014}}\quad e^{2\pi i}} \qquad w=\frac{2_{\pi}\left(2+2i\right)}{e^{3+\frac{\pi}{3}i}}$$

Solución

$$z=\frac{\left(-1-\sqrt{3}\ i\right)^{21}}{\overline{i^{2014}}\quad e^{2\pi i}}=\frac{2^{21}}{-1}=-2^{21}=2^{21}e^{\pi i} \quad \text{ya que}$$

$$\left(-1-\sqrt{3}\;i\right)^{21} = \left(2e^{-\frac{2\pi}{3}i}\right)^{21} = 2^{27}e^{-\frac{2*21\pi}{3}i} = 2^{21}e^{-14\pi i} = 2^{21}$$
$$i^{2014} = i^{2} = -1 \Rightarrow \overline{i^{2014}} = -1$$
$$e^{2\pi i} = 1$$

$$w = \frac{2_{\pi}\left(2+2i\right)}{e^{3+\frac{\pi}{3}i}} = \frac{4\sqrt{2}}{e^{3}}e^{\frac{11\pi}{12}i}$$ ya que

$$\left.\begin{array}{l} 2_{\pi} = 2e^{\pi i} \\ 2+2i = 2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i} \\ e^{3+\frac{\pi}{3}i} = e^{3}e^{\frac{\pi}{3}i} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2_{\pi}\left(2+2i\right)}{e^{3+\frac{\pi}{3}i}} = \frac{2e^{\pi i}\;\;2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}}{e^{3}e^{\frac{\pi}{3}i}} = \frac{4\sqrt{2}}{e^{3}}e^{\left(\pi+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)i} = \frac{4\sqrt{2}}{e^{3}}e^{\frac{11\pi}{12}i}$$

6 Resolver la ecuación: $z^4 = i$ escribiendo los números complejos solución en forma exponencial con argumento comprendido entre $-\pi$ y π.

Solución

Se trata de calcular las raíces cuartes de i

$$z = \sqrt[4]{i} = \sqrt[4]{e^{i\frac{\pi}{2}}} = e^{i\left(\frac{\pi/2+2k\pi}{4}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}\right)} \quad k = 0,1,2,3$$

Escribiendo las 4 raíces con su argumento principal se tendrá:

$$z_o = e^{\frac{\pi}{8}i} \qquad z_1 = e^{\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}\right)i} = e^{\frac{5\pi}{8}i}$$
$$z_3 = e^{\left(\frac{9\pi}{8}-2\pi\right)i} = e^{-\frac{7\pi}{8}i} \qquad z_4 = e^{i\left(\frac{13\pi}{8}-2\pi\right)} = e^{-i\frac{3\pi}{8}}$$

7 Determinar el lugar geométrico de los números complejos z que verifican $\left|z-2\right| = \left|z-3\right|$

Solución

Forma 1. Calculamos los números complejos $z = x+iy$ que cumplan

$$\left|x+iy-2\right| = \left|x+iy-3\right| \Leftrightarrow \left(x-2\right)^2 + y^2 = \left(x-3\right)^2 + y^2$$

Operando

$$\left|x+iy-2\right| = \left|x+iy-3\right| \Leftrightarrow \left(x-2\right)^2 = \left(x-3\right)^2 \Leftrightarrow x^2-4x+4 = x^2-6x+9 \Leftrightarrow x = 5/2$$

Se trata de los números complejos cuya parte real es 5/2.

Forma 2. Si tenemos en cuenta que la expresión $d(z,w)=|z-w|$, se trata de encontrar los puntos del plano que equidistan de los puntos 2 y 3. Sin realizar ningún cálculo es fácil ver que esos puntos son los de la recta x=2.5.

8 Calcular el siguiente número complejo: $z=\dfrac{\sqrt[6]{2}\,e^{-\frac{3\pi}{2}i}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\overline{i^{101}}}{(1+i)^3}$

Solución

Se tiene que

$$z=\frac{\sqrt[6]{2}\,e^{-\frac{3\pi}{2}i}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\overline{i^{101}}}{(1+i)^3}=\frac{\sqrt[6]{2}\,e^{-\frac{3\pi}{2}i}\;e^{-\frac{\pi}{3}i}\;\overline{i}}{\left(\sqrt{2}\;e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^3}=\frac{\sqrt[6]{2}\,e^{-\frac{3\pi}{2}i}\;e^{-\frac{\pi}{3}i}\;e^{-\frac{\pi}{2}i}}{2\sqrt{2}\;e^{\frac{3\pi}{4}i}}$$

$$=2^{1/6-3/2}e^{\left(-\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{4}\right)i}=2^{-\frac{4}{3}}e^{-\frac{37\pi}{12}i}=2^{-\frac{4}{3}}e^{\frac{11\pi}{12}i}$$

9 Uno de los vértices de un hexágono regular inscrito en una circunferencia con centro en el origen tiene por coordenadas el punto ($P\left(-1,\sqrt{3}\right)$. Hallar las coordenadas de los otros vértices y escribirlas en forma binómica y en forma exponencial.

Solución

Los vértices del hexágono son:

$$z=2e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+k\frac{\pi}{3}\right)}\qquad k=0,1,2,3,4,5$$

$$z_k=2\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}+k\frac{\pi}{3}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{3}+k\frac{\pi}{3}\right)\right]\qquad k=0,1,2,3,4,5$$

$$z_0=-1+\sqrt{3}i=2e^{\frac{2\pi}{3}i}\quad z_1=-2=2e^{\pi i}\quad z_2=-1-\sqrt{3}i=2e^{-\frac{2\pi}{3}i}$$

$$z_3=1-\sqrt{3}i=2e^{-\frac{\pi}{3}i}\quad z_4=2=2e^{0i}\quad z_5=1+\sqrt{3}i=2e^{\frac{\pi}{3}i}$$

10 Representar el conjunto de números complejos z que verifican $|z|\geq|2z-1|$.

Solución

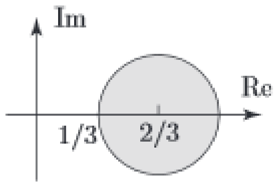
El conjunto de los números complejos que verifican $|z|\geq|2z-1|$ son aquellos $z=x+iy=(x,y)$ que verifican

$$\sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{\left(2x-1\right)^2+\left(2y\right)^2} \Leftrightarrow x^2+y^2 \geq 4x^2-4x+1+4y^2 \Leftrightarrow$$

$$3x^2+3y^2-4x+1 \leq 0 \Leftrightarrow x^2+y^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3} \leq 0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{2}{3}\right)^2+y^2-\frac{4}{9}+\frac{1}{3} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{2}{3}\right)^2+y^2 \leq \frac{1}{9}$$

Se trata del círculo de centro (2/3,0) y radio 1/3.



$$|z| \geq |2z-1|$$

11 Dado el número complejo

$$z=\frac{(2e^{i\frac{\pi}{3}}-1)\cdot 2_{-\frac{\pi}{4}}\cdot i^{43}}{3\sqrt{3}-3i}$$

calcular su expresión en forma binómica y exponencial.

Solución

$$z=\frac{(2e^{i\frac{\pi}{3}}-1)\cdot 2_{-\frac{\pi}{4}}\cdot i^{43}}{3\sqrt{3}-3i}=\frac{\left(2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+2isen\left(\frac{\pi}{3}\right)-1\right)2e^{-\frac{\pi}{4}i}\left(-i\right)}{6e^{-\frac{\pi}{6}i}}=$$

$$=\frac{\left(1+i\sqrt{3}-1\right)2e^{-\frac{\pi}{4}i}\left(-i\right)}{6e^{-\frac{\pi}{6}i}}=\frac{\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{2}i}2e^{-\frac{\pi}{4}i}e^{-\frac{\pi}{2}i}}{6e^{-\frac{\pi}{6}i}}=\frac{\sqrt{3}}{3}e^{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)i}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}e^{-\frac{\pi}{12}i}=\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{12}\right)i$$

Test de autoevaluación

Test de 10 preguntas de repaso del contenido del tema

http://giematic.com/PlanRecCI/Test/T2A/index.html

Material de consulta

Unidad didáctica interactiva

https://proyectodescartes.org/Un_100/materiales_didacticos/_Un_010_Complejos/index.html