PRECÁLCULO

MATEMÁTICAS PARA EL CÁLCULO

1 Fracciones

$b \neq 0 \quad \frac{a}{b} = c \Leftrightarrow a = bc$	$\frac{2x}{x+3} = 1 \Leftrightarrow 2x = x+3 \Leftrightarrow x = 3$
$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$	$x + \frac{x+1}{x+3} = \frac{x(x+3)}{x+3} + \frac{x+1}{x+3} = \frac{x^2+3x+x+1}{x+3} = \frac{x^2+4x+1}{x+3}$
$\frac{a}{b+c} \neq \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$	$\frac{1}{4+2} = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$
$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$	$\frac{\frac{x}{x+1}}{x+3} = \frac{x}{(x+3)(x+1)}$

2 Potencias enteras

- $a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N} \qquad a^n = \overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{n\ veces}$
- $a^0 = 1$ si $a \neq 0$
- $a \in \mathbb{R} - \{0\},\ n \in \mathbb{N} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Propiedades:

$a^{m+n} = a^m a^n$	$3^{2+4} = 3^2 3^4$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$3^{x-2} = 3^x 3^{-2} = \frac{3^x}{3^2}$
$(a^m)^n = a^{mn}$	$\left((3)^2\right)^4 = 3^8$
$(ab)^n = a^n b^n$	$(2\cdot 3)^4 = 2^4 \cdot 3^4$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = 2^4 3^{-4}$

3 Radicales

- $a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$ $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$. No siempre está definido (si n es par se debe cumplir que a sea positivo)

  Por definición, $b = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow b^n = a$. En el caso de que n sea par, b debe es el valor positivo que lo cumple.

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$ si n es impar o en el caso de que n sea par cuando a y b son positivos.	$\sqrt[2]{(-1)(-1)} = \sqrt[2]{1} = 1 \neq \underbrace{\sqrt{-1}}_{no\ existe\ en\,\mathbb{R}}\ \sqrt{-1}$
$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$	$a^{6/5} = \sqrt[5]{a^6} = a\sqrt[5]{a}$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	$\sqrt{\sqrt[5]{a^6}} = \left(a^{6/5}\right)^{1/2} = a^{6/10} = \sqrt[10]{a^6} = a^{3/5} = \sqrt[5]{a^3}$
$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\dfrac{\sqrt[5]{a^6}}{\sqrt[5]{a^3}} = \sqrt[5]{\dfrac{a^6}{a^3}} = \sqrt[5]{a^3}$
$\sqrt{x+y} \neq \sqrt{x} + \sqrt{y}$	Por ejemplo: $5 = \sqrt{16+9} \neq \sqrt{16} + \sqrt{9} = 4+3$
$\sqrt[n]{a^n} = \lvert a \rvert$ si n es par	$\sqrt[2]{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$ $\sqrt[3]{(-5)^3} = \sqrt[3]{-125} = -5$

4 Productos notables

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \qquad (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \qquad (x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

Recuerda que:

$$(x+y)^2 \neq x^2 + y^2 \qquad (x-y)^2 \neq x^2 - y^2$$

5 Fórmulas de factorización

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2 \qquad x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$$

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2) \qquad x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

6 Igualdades

$a\cdot b=0 \Leftrightarrow a=0 \text{ ó } b=0$ o ambos son nulos	Si un producto es cero si y solo sí alguno de sus factores es cero. $(x+1)(x-2)=0 \Leftrightarrow x=-1 \text{ o } x=2$
$\frac{a}{b}=0 \Leftrightarrow a=0$	Un cociente es nulo si y solo si es cero su numerador. $\frac{x+1}{x-2}=0 \Leftrightarrow x=-1$

7 Desigualdades

En el conjunto de los números reales hay definida una relación $\leq$ de orden (reflexiva, antisimétrica y transitiva) que es una relación de orden total y compatible con la suma y el producto.

$a\leq a$	Propiedad reflexiva.
Si $a\leq b$ y $b\leq a$ entonces a=b	Propiedad antisimétrica
Si $a<b$ y $b<c$, entonces $a<c$	Propiedad transitiva
Dados dos números a y b se cumple que o bien a<b, o bien b<a o bien a=b	Orden total
Si $a<b$, entonces $a+c<b+c$	Compatible con la suma: si se suma o resta un número a ambos miembros de una desigualdad se obtiene otra equivalente: $x-2\leq 4 \Leftrightarrow x\leq 6$
Si $a<b$ y $0<c$, entonces $ac<bc$	Compatible con el producto: si se multiplica o divide ambos miembros de una desigualdad por un número positivo resulta una desigualdad equivalente $3x\leq 6 \Leftrightarrow x\leq 2$
Si $a<b$ y $c<0$, entonces $ac>bc$	Si se multiplica o divide ambos miembros de una desigualdad por un número negativo la desigualdad cambia de sentido $-3x\leq 6 \Leftrightarrow x\geq 2$

8 Logaritmos

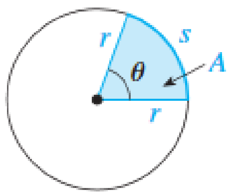
Si $x>0$: $\quad y=\log_a x \quad$ significa $\quad a^y=x$

$\log_a a^x = x$ $\log_a 1 = 0$ $a^{\log_a a}=a$	$\log_a xy=\log_a x+\log_a y$ $\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y$

Cambio de base $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$	$\log_a x^b = b \log_a x$ $\log(x \pm y) \neq \log x \pm \log y$

TRIGONOMETRÍA

9 Medidas de ángulos



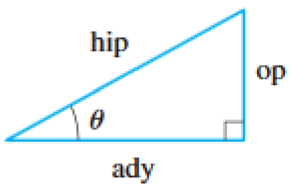
π *radianes = 180 grados*

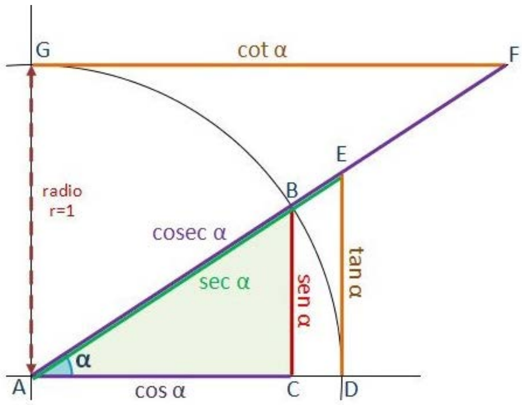
$$s = r\theta \qquad A = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

Para convertir grados a radianes, multiplicar por $\dfrac{\pi}{180}$

Para convertir de radianes a grados, multiplicar por $\dfrac{180}{\pi}$

10 Trigonometría de un ángulo recto





$$\operatorname{sen}\theta = \frac{op}{hip} \qquad \csc\theta = \frac{hip}{op}$$

$$\cos\theta = \frac{ady}{hip} \qquad \csc\theta = \frac{hip}{ady}$$

$$tg\theta = \frac{op}{ady} \qquad ctg\theta = \frac{ady}{op}$$

θ	radianes	$\operatorname{sen}\theta$	$\cos\theta$	$tg\theta$
0^o	0	0	1	0
30^o	$\pi / 6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45^o	$\pi / 4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60^o	$\pi / 3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$

90^o	$\pi / 2$	1	0	--
180^o	π	0	-1	0
270^o	$3\pi / 2$	-1	0	--

11 Identidades fundamentales

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \qquad tgx = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \qquad ctgx = \frac{1}{tgx}$$

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad 1 + tg^2 x = \sec^2 x \qquad 1 + ctg^2 x = \csc^2 x$$

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x \qquad \cos(-x) = \cos x \qquad tg(-x) = -tgx$$

12 Fórmulas de adición y sustracción

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \ \cos y + \cos x \ \operatorname{sen} y \qquad \operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen} x \ \cos y - \cos x \ \operatorname{sen} y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \ \cos y - \operatorname{sen} x \ \operatorname{sen} y \qquad \cos(x-y) = \cos x \ \cos y + \operatorname{sen} x \ \operatorname{sen} y$$

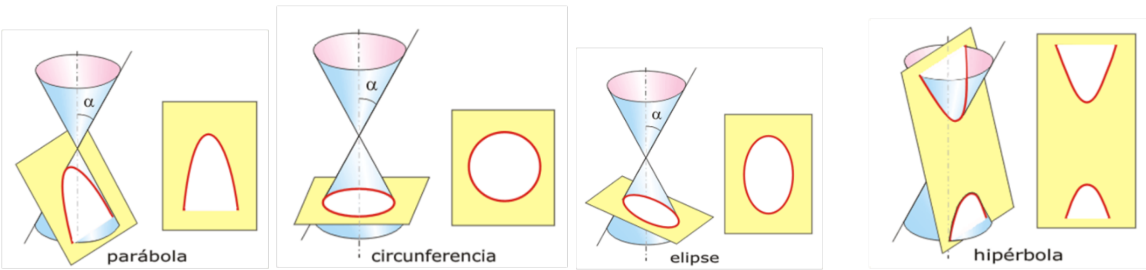
13 Fórmulas para reducir potencias

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

SECCIONES CÓNICAS

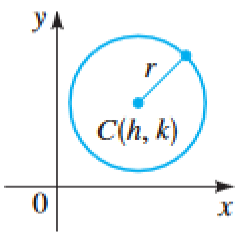
13 Secciones cónicas

En la figura siguiente representamos gráficamente cómo se generan la cónicas, curvas que se obtienen al cortar una superficie cónica mediante un plano.



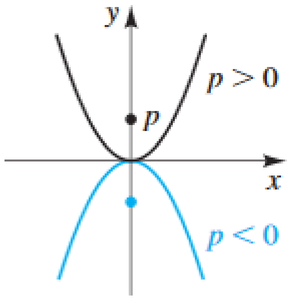
Circunferencia

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$



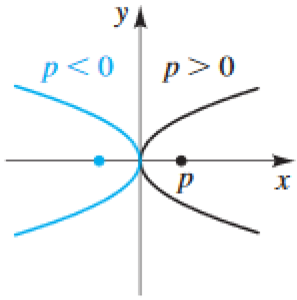
Parábolas

$$x^2 = 4py$$



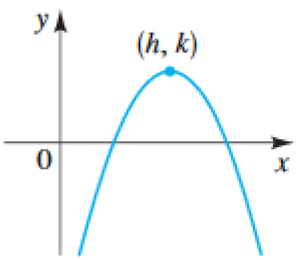
Foco $(0, p)$ directriz $y = -p$

$$y^2 = 4px$$

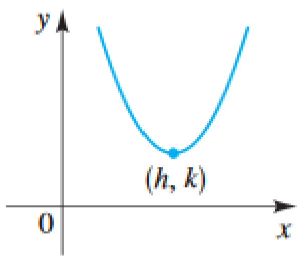


Foco $(p, 0)$, directriz $x = -p$

$$y = a(x-h)^2 + k$$
$$a < 0,\ h > 0,\ k > 0$$

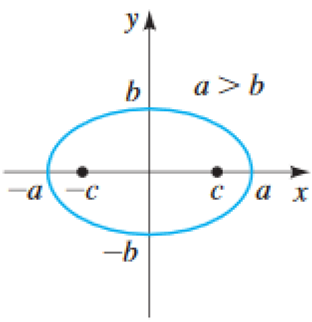


$$y = a(x-h)^2 + k$$
$$a > 0,\ h > 0,\ k > 0$$



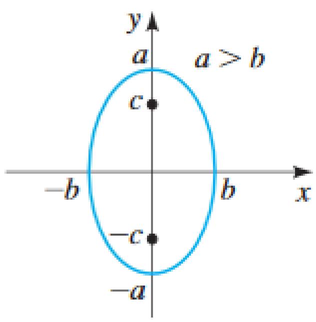
Elipses

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Focos $(\pm c, 0)$, $c^2 = a^2 - b^2$

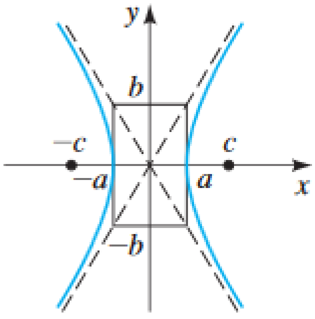
$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

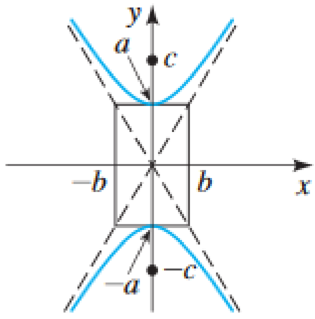


Focos $(0, \pm c)$, $c^2 = a^2 - b^2$

Hipérbolas

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad\qquad -\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$





Focos $\left(\pm c, 0\right)$, $c^2 = a^2 + b^2$ Focos $\left(0, \pm c\right)$, $c^2 = a^2 + b^2$

Referencias

Para ampliar la información y practicar con ejercicios resueltos se puede consultar las siguientes páginas

- Potencias
  https://personales.unican.es/alvareze/CalculoWeb/CalculoI/matex/reales.pdf

- Trigonometría
  https://personales.unican.es/alvareze/CalculoWeb/CalculoI/matex/Trigo_1.pdf
  https://personales.unican.es/alvareze/CalculoWeb/CalculoI/matex/Trigo_2.pdf

- Ecuaciones e inecuaciones
  https://personales.unican.es/alvareze/CalculoWeb/CalculoI/matex/EcuSiste.pdf

- Polinomios
  https://personales.unican.es/alvareze/CalculoWeb/CalculoI/matex/polinomios.pdf

- Simplificación de fracciones algebraicas
  https://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales_didacticos/simplificar_fracciones_algebraicas-JS/index.html

- Cónicas
  https://personales.unican.es/alvareze/CalculoWeb/CalculoI/matex/conicas.pdf

- Logaritmos
  https://personales.unican.es/alvareze/CalculoWeb/CalculoI/matex/ExpoLog.pdf

Página web asignatura

https://personales.unican.es/alvareze/CalculoWeb/CalculoI/prerrequisitos.html