INTEGRAL INDEFINIDA

DEFINICIONES

1 Primitiva

Definición (Función primitiva).- Se dice que $F(x)$ es una función primitiva de otra función $f(x)$ si y sólo si se verifica $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in D_f$ siendo D_f el dominio de la función $f(x)$

Obsérvese que si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ también se verificará $dF(x) = f(x)dx$.

PROPOSICIÓN.- Si $F(x)$ es un primitiva de $f(x)$, también serán primitivas de $f(x)$ todas aquellas funciones $G(x)$ que verifiquen $G(x) = F(x) + C$ y sólo esas.

TEOREMA (Existencia de primitiva).- La condición necesaria y suficiente para que $f(x)$ tenga función primitiva en un intervalo I, es que sea continua en I.

2 Integral indefinida

El proceso de cálculo de primitivas se denomina integración y se denota por el símbolo ∫, llamado signo integral.

Definición (Integral indefinida).- Dada una función, $f(x)$ continua en un intervalo I, se llama integral indefinida de $f(x)$ y se representa por $\int f(x)dx$ al conjunto de funciones que tienen por derivada $f(x)$ (tienen por diferencial $f(x)dx$). Es decir,

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

donde $f(x)$ se llama integrando o función subintegral y C constante de integración. Debiendo verificarse $\frac{d}{dx}\left[F(x) + C\right] = f(x)$

Propiedades de la Integral indefinida.- Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo abierto I. Entonces se verifican las siguientes propiedades:

P1.- $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, siendo k una constante

P2.- $\int \left[f(x) \pm g(x)\right] dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Las propiedades P1 y P2 confieren al operador $\int$ carácter lineal.

Una forma coloquial de expresar que dos operadores son inversos, consiste en decir que cada uno anula o destruye el efecto producido por el otro. Resulta inmediato comprobar que la integración es la operación inversa de la diferenciación.

TEOREMA.- Los operadores ∫ (integración) y d (diferenciación), son inversos, si bien cuando se aplican en el orden ∫ d debe añadirse una constante arbitraria.

CÁLCULO DE PRIMITIVAS

El cálculo de primitivas interesa sobre todo como auxiliar del cálculo de integrales definidas, por lo que los métodos que se presentan son de tipo práctico pero también de alcance limitado.

Es importante señalar que todos los métodos de integración están inspirados en la misma idea: *reducir la integral planteada a una integral inmediata.*

3 Inmediatas

La siguiente tabla incluye algunas de las integrales inmediatas más frecuentes. Convendremos en llamar integrales inmediatas a todas aquellas cuya solución puede escribirse sin más recursos que el recuerdo de las reglas de derivación.

Tabla de integrales inmediatas
$\int a dx = ax + C$
$\int \left(x+a\right)^m dx = \dfrac{\left(x+a\right)^{m+1}}{m+1} + C \qquad (m \neq -1)$
$\int \dfrac{dx}{x+a} = \log\left\|x+a\right\| + C$
$\int e^{ax} dx = \dfrac{e^{ax}}{a} + C \qquad \left(a \neq 0\right)$
$\int k^{ax} dx = \dfrac{k^{ax}}{a \log k} + C \qquad \left(k > 0, \quad a \neq 0\right)$
$\int \cos ax \, dx = \dfrac{\operatorname{sen} ax}{a} + C \qquad \left(a \neq 0\right)$
$\int \operatorname{sen} ax \, dx = -\dfrac{\cos ax}{a} + C \qquad \left(a \neq 0\right)$

Tabla de integrales inmediatas
$\int \operatorname{tg} ax\,dx = -\frac{1}{a}\log\left\|\cos ax\right\| + C \qquad (a \neq 0)$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsen}\frac{x}{\left\|a\right\|} + C \qquad (a \neq 0)$
$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C \qquad (a \neq 0)$
$\int \operatorname{Sh} ax\,dx = \frac{\operatorname{Ch} ax}{a} + C \quad (a \neq 0)$
$\int \operatorname{Ch} ax\,dx = \frac{\operatorname{Sh} ax}{a} + C \quad (a \neq 0)$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \operatorname{ArgSh}\frac{x}{\left\|a\right\|} + C = \log\left\|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right\| + C \qquad (a \neq 0)$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \operatorname{ArgCh}\frac{x}{\left\|a\right\|} + C = \log\left\|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right\| + C \quad (a \neq 0)$
$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{ArgTh}\frac{x}{a} + C = \frac{1}{2a}\log\left\|\frac{a + x}{a - x}\right\| + C \qquad (a \neq 0)$

Tabla 2.- Integrales inmediatas.

3 Integrales inmediatas: Ejemplos

POTENCIAS DE EXPONENTE ENTERO

6 a) $\int (-1)x^{-2}\,dx = x^{-1} = \frac{1}{x}$

b) $\int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1} = \frac{-1}{x}$

c) $\int \frac{5}{x^2}\,dx = \frac{-5}{x}$

7 a) $\int \frac{1}{x^3}\,dx = \int x^{-3}\,dx = \frac{x^{-2}}{-2} = \frac{-1}{2x^2}$

b) $\int \frac{2}{x^3}\,dx = 2\int \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{-2}{2x^2} = \frac{-1}{x^2}$

15 a) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\,|x|$

b) $\int \frac{1}{5x}\,dx = \frac{1}{5}\int \frac{5}{5x}\,dx = \frac{1}{5}\ln\,|5x|$

LAS RAÍCES TAMBIÉN SON POTENCIAS

9 a) $\int \frac{3}{2}x^{1/2}\, dx = x^{3/2} = \sqrt{x^3}$

b) $\int \frac{3}{2}\sqrt{x}\, dx = \int \frac{3}{2}x^{1/2}\, dx = x^{3/2} = \sqrt{x^3}$

10 a) $\int \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}\int \frac{3}{2}x^{1/2}\, dx = \frac{2}{3}x^{3/2} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$

b) $\int 7\sqrt{x}\, dx = 7\int \sqrt{x}\, dx = \frac{14}{3}\sqrt{x^3}$

11 a) $\int \sqrt{3x}\, dx = \int \sqrt{3}\cdot\sqrt{x}\, dx = \int \sqrt{3}\sqrt{x}\, dx = \sqrt{3}\int \sqrt{x}\, dx = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^3} = \frac{2\sqrt{3x^3}}{3}$

b) $\int \frac{\sqrt{2x}}{5}\, dx = \int \frac{\sqrt{2}}{5}\sqrt{x}\, dx = \frac{\sqrt{2}}{5}\int \sqrt{x}\, dx = \frac{\sqrt{2}}{5}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{x^3} = \frac{2\sqrt{2}}{15}\sqrt{x^3} = \frac{2\sqrt{2x^3}}{15}$

ALGUNAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

17 a) $\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x$

b) $\int 2\cos x\, dx = 2\operatorname{sen} x$

18 a) $\int \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) dx = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

b) $\int \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\int 2\cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$

19 a) $\int (-\operatorname{sen} x)\, dx = \cos x$

b) $\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x$

20 a) $\int \operatorname{sen}(x - \pi)\, dx = -\cos(x - \pi)$

b) $\int \operatorname{sen} 2x\, dx = \frac{1}{2}\int 2\operatorname{sen} 2x\, dx = \frac{-1}{2}\cos 2x$

ALGUNAS EXPONENCIALES

22 a) $\int e^x \, dx = e^x$

b) $\int e^{x+1} \, dx = e^{x+1}$

23 a) $\int e^{2x} \, dx = \frac{1}{2}\int 2e^{2x} \, dx = \frac{1}{2}e^{2x}$

b) $\int e^{2x+1} \, dx = \frac{1}{2}\int 2e^{2x+1} \, dx = \frac{1}{2}e^{2x+1}$

1. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int 7x^4 \, dx$

b) $\int \frac{1}{x^2} \, dx$

c) $\int \frac{x^4 - 5x^2 + 3x - 4}{x} \, dx$

d) $\int \frac{x^3}{x-2} \, dx$

e) $\int \frac{x^4 - 5x^2 + 3x - 4}{x+1} \, dx$

f) $\int \sqrt{x} \, dx$

g) $\int \frac{7x^4 - 5x^2 + 3x - 4}{x^2} \, dx$

h) $\int \sqrt[3]{5x^2} \, dx$

i) $\int \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{5x^3}}{3x} \, dx$

j) $\int \frac{\sqrt{5x^3}}{\sqrt[3]{3x}} \, dx$

a) $\int 7x^4 \, dx = 7 \cdot \frac{x^5}{5} + k = \frac{7x^5}{5} + k$

b) $\int \frac{1}{x^2} \, dx = \int x^{-2} \, dx = \frac{x^{-1}}{-1} + k = \frac{-1}{x} + k$

c) $\int \frac{x^4 - 5x^2 + 3x - 4}{x} \, dx = \int \left(x^3 - 5x + 3 - \frac{4}{x}\right) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{5x^2}{2} + 3x - 4 \ln|x| + k$

d) $\int \frac{x^3}{x-2} \, dx = \int \left(x^2 + 2x + 4 + \frac{8}{x-2}\right) dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + 4x + 8 \ln|x-2| + k$

e) $\int \frac{x^4 - 5x^2 + 3x - 4}{x+1} \, dx = \int \left(x^3 - x^2 - 4x + 7 - \frac{11}{x+1}\right) dx =$

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 7x - 11 \ln|x+1| + k$$

f) $\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{1/2}\, dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + k = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + k$

g) $\int \frac{7x^4 - 5x^2 + 3x - 4}{x^2}\, dx = \int \left(\frac{7x^4}{x^2}\right) dx - \int \left(\frac{5x^2}{x^2}\right) dx + \int \left(\frac{3x}{x^2}\right) dx - \int \left(\frac{4}{x^2}\right) dx =$

$= \int 7x^2\, dx - \int 5\, dx + \int \frac{3}{x}\, dx - \int \frac{4}{x^2}\, dx =$

$= \frac{7x^3}{3} - 5x + 3\, ln\,|x| + \frac{4}{x} + k$

h) $\int \sqrt[3]{5x^2}\, dx = \int \sqrt[3]{5}\, x^{2/3}\, dx = \sqrt[3]{5} \cdot \frac{x^{5/3}}{5/3} + k = \frac{3\sqrt[3]{5x^5}}{5} + k$

i) $\int \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{5x^3}}{3x}\, dx = \int \frac{x^{1/3}}{3x}\, dx + \int \frac{\sqrt{5}x^{3/2}}{3x}\, dx = \frac{1}{3}\int x^{-2/3}\, dx + \frac{\sqrt{5}}{3}\int x^{1/2}\, dx =$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{x^{1/3}}{1/3} + \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{x^{3/2}}{3/2} + k = \sqrt[3]{x} + \frac{2\sqrt{5x^3}}{9} + k$

j) $\int \frac{\sqrt{5x^3}}{\sqrt[3]{3x}}\, dx = \int \frac{\sqrt{5} \cdot x^{3/2}}{\sqrt[3]{3} \cdot x^{1/3}}\, dx = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{3}}\int x^{7/6}\, dx = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{3}} \cdot \frac{x^{13/6}}{13/6} + k = \frac{6\sqrt{5}\,\sqrt[6]{x^{13}}}{13\sqrt[3]{3}} + k$

2. **a)** $\int (3x - 5\, tg\, x)\, dx = 3\int x\, dx - 5\int tg\, x\, dx = \frac{3x^2}{2} - 5\,(-\,ln\,|cos\, x|) + k =$

$= \frac{3x^2}{2} + 5\, ln\,|cos\, x| + k$

b) $\int (5\, cos\, x + 3^x)\, dx = 5\int cos\, x\, dx + \int 3^x\, dx = 5\, sen\, x + \frac{3^x}{ln\, 3} + k$

c) $\int (3\, tg\, x - 5\, cos\, x)\, dx = 3\int tg\, x\, dx - 5\int cos\, x\, dx = 3\,(-\; ln|cos\, x|) - 5\, sen\, x + k =$

$= -\,3\, ln\,|cos\, x| - 5\, senx + k$

d) $\int (10^x - 5^x)\, dx = \frac{10^x}{ln\, 10} - \frac{5^x}{ln\, 5} + k$

1. **Calcula:**

a) $\int cos^4\, x\, sen\, x\, dx$ **b)** $\int 2^{sen\, x} cos\, x\, dx$

a) $\int cos^4\, x\, sen\, x\, dx = -\int cos^4\, x\,(-sen\, x)\, dx = -\,\frac{cos^5\, x}{5} + k$

b) $\int 2^{sen\, x} cos\, x\, dx = \frac{1}{ln\, 2}\int 2^{sen\, x} cos\, x \cdot ln\, 2\, dx = \frac{2^{sen\, x}}{ln\, 2} + k$

2. Calcula:

a) $\int cotg\ x\ dx$ **b)** $\int \frac{5x}{x^4+1} dx$

a) $\int cotg\ x\ dx = \int \frac{\cos x}{sen\ x}\ dx = ln\,|sen\ x| + k$

b) $\int \frac{5x}{x^4+1}\ dx = \frac{5}{2}\int \frac{2x}{1+(x^2)^2}\ dx = \frac{5}{2}\ arc\ tg\,(x^2) + k$

4 Integración por cambio de variable

El cambio de variable es una de las técnicas más utilizadas para obtener la primitiva de una función. También se conoce este método como método de sustitución.

TEOREMA.- Se considera la integral $\int f(x)dx$ *y el cambio de variable* $x = g(t)$. *Si* f *y* g *verifican:*

(a) f *es continua en el intervalo* I_1.

(b) g *tiene derivada continua en el intervalo* I_2.

(c) $g(I_2) \subseteq I_1$

entonces:

$$\int f(x)dx = \int f\big[g(t)\big]g'(t)dt \quad \text{con } x \in I_1,\ t \in I_2$$

De esta forma se obtiene una nueva integral en la variable t que debe ser más sencilla de resolver que la integral de partida. La primitiva que se obtenga debe expresarse en la variable inicial, por lo que se deshará el cambio de variable una vez realizada la integración.

4 Integración por cambio de variable: Eemplos

b) $\int \frac{dx}{x - \sqrt[4]{x}}$

Cambio: $x = t^4 \ \rightarrow\ dx = 4t^3\ dt$

$$\int \frac{dx}{x-\sqrt[4]{x}} = \int \frac{4t^3\ dt}{t^4 - t} = \int \frac{4t^2\ dt}{t^3-1} = \frac{4}{3}\int \frac{3t^2\ dt}{t^3-1} = \frac{4}{3}\ ln|t^3-1| + k =$$

$$= \frac{4}{3}\ ln|\sqrt[4]{x^3} - 1| + k$$

c) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\ dx$

Cambio: $x + 1 = t^2 \ \rightarrow\ dx = 2t\ dt$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\ dx = \int \frac{(t^2-1)}{t}\cdot 2t\ dt = \int (2t^2 - 2)\ dt = \frac{2t^3}{3} - 2t + k =$$

$$= \frac{2\sqrt{(x+1)^3}}{3} - 2\sqrt{x+1} + k$$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx$

Cambio: $x = t^2 \;\rightarrow\; dx = 2t\,dt$

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{2t\,dt}{t^2+t} = \int \frac{2\,dt}{t+1} = 2\,ln\,|t+1| + k =$$

$$= 2\,ln\,(\sqrt{x}+1) + k$$

f) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx$

Cambio: $x = t^2 \;\rightarrow\; dx = 2t\,dt$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx = \int \frac{t\cdot 2t\,dt}{1+t^2} = \int \frac{2t^2\,dt}{1+t^2} = \int \left(2 - \frac{2}{1+t^2}\right)dt =$$

$$= 2t - 2\,arc\,tg\,t + k = 2\sqrt{x} - 2\,arc\,tg\,\sqrt{x} + k$$

Nota: Los siguientes ejercicios requieren conocer primero cómo obtener las primitivas de funciones racionales.

d) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\,dx$

Cambio: $x + 1 = t^2 \;\rightarrow\; dx = 2t\,dt$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\,dx = \int \frac{2t\,dt}{(t^2-1)\,t} = \int \frac{2\,dt}{(t+1)(t-1)}$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2}{(t+1)(t-1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t-1} = \frac{A(t-1)+B(t+1)}{(t+1)(t-1)}$$

$$2 = A(t-1) + B(t+1)$$

Hallamos A y B:

$$\left.\begin{array}{llll} t=-1 & \rightarrow\; 2=-2A & \rightarrow\; A=-1 \\ t=1 & \rightarrow\; 2=2B & \rightarrow\; B=1 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{2\,dt}{(t+1)(t-1)} = \int \left(\frac{-1}{t+1} + \frac{1}{t-1}\right)dt = -ln\,|t+1| + ln\,|t-1| + k =$$

$$= ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + k$$

Así:

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\,dx = ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right| + k$$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^{2x}-3e^x}$

Hacemos el cambio: $e^x = t \;\rightarrow\; x = ln\, t \;\rightarrow\; dx = \dfrac{1}{t}\, dt$

$$\int \frac{dx}{e^{2x}-3e^x} = \int \frac{1/t}{t^2-3t}\, dt = \int \frac{1}{t^3-3t^2}\, dt = \int \frac{1}{t^2(t-3)}\, dt$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{t^2(t-3)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t-3} = \frac{At(t-3)+B(t-3)+Ct^2}{t^2(t-3)}$$

$$1 = At(t-3)+B(t-3)+Ct^2$$

Hallamos A, B y C:

$$\left.\begin{array}{llll} t=0 & \rightarrow & 1=-3B & \rightarrow\; B=-1/3 \\ t=3 & \rightarrow & 1=9C & \rightarrow\; C=1/9 \\ t=1 & \rightarrow & 1=-2A-2B+C & \rightarrow\; A=-1/9 \end{array}\right\}$$

Así, tenemos que:

$$\int \frac{1}{t^2(t-3)}\, dt = \int \left(\frac{-1/9}{t} + \frac{-1/3}{t^2} + \frac{1/9}{t-3}\right) dt =$$

$$= \frac{-1}{9}\, ln|t| + \frac{1}{3t} + \frac{1}{9}\, ln|t-3| + k$$

Por tanto:

$$\int \frac{dx}{e^{2x}-3e^x} = \frac{-1}{9}\, ln\, e^x + \frac{1}{3e^x} + \frac{1}{9}\, ln|e^x-3| + k =$$

$$= -\frac{1}{9}x + \frac{1}{3e^x} + \frac{1}{9}\, ln|e^x-3| + k$$

9. **Resuelve, por el método de sustitución, la integral:** $\displaystyle\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\, dx$

$$I = \int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\, dx$$

Hacemos el cambio $\sqrt{x} = t \;\rightarrow\; x = t^2 \;\rightarrow\; dx = 2t\, dt$

$$I = \int \frac{1+t^2}{1+t} \cdot 2t\, dt = 2\int \frac{t+t^3}{1+t}\, dx \overset{(1)}{=} 2\int \left(t^2 - t + 2 - \frac{2}{t+1}\right) dt =$$

$$= 2\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + 2t - 2ln\,|t+1|\right)$$

(1) Dividimos $(t^3+t):(t+2)$ y expresamos de la forma:

$$\frac{\text{dividendo}}{\text{divisor}} = \text{cociente} + \text{resto}$$

Deshaciendo el cambio: $I = \dfrac{2}{3}\sqrt{x^3} - x + 4\sqrt{x} - 4ln\left(\sqrt{x}+1\right) + k$

a) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1-\sqrt{e^x}}\,dx$

Cambio: $\sqrt{e^x} = t \;\rightarrow\; e^{x/2} = t \;\rightarrow\; \dfrac{x}{2} = \ln t \;\rightarrow\; dx = \dfrac{2}{t}\,dt$

$$\int \frac{e^x}{1-\sqrt{e^x}} = \int \frac{t^2 \cdot (2/t)\,dt}{1-t} = \int \frac{2t\,dt}{1-t} = \int \left(-2 + \frac{2}{1-t}\right) dt =$$

$$= -2t - 2\ln|1-t| + k = -2\sqrt{e^x} - 2\ln|1-\sqrt{e^x}| + k$$

b) $\displaystyle\int \sqrt{e^x - 1}\,dx$

Cambio: $\sqrt{e^x-1} = t \;\rightarrow\; e^x = t^2+1 \;\rightarrow\; x = \ln(t^2+1) \;\rightarrow\; dx = \dfrac{2t}{t^2+1}\,dt$

$$\int \sqrt{e^x-1}\,dx = \int t \cdot \frac{2t}{t^2+1}\,dt = \int \frac{2t^2}{t^2+1}\,dt = \int \left(2 - \frac{2}{t^2+1}\right) dt =$$

$$= 2t - 2\,\mathrm{arc\,tg}\,t + k = 2\sqrt{e^x-1} - 2\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{e^x-1} + k$$

c) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}-e^x}{e^{2x}+1}\,dx$

Hacemos el cambio: $e^x = t \;\rightarrow\; x = \ln t \;\rightarrow\; dx = \dfrac{1}{t}\,dt$

$$\int \frac{e^{3x}-e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \int \frac{t^3-t}{t^2+1}\cdot\frac{1}{t}\,dt = \int \frac{t^2-1}{t^2+1}\,dt = \int \left(1 - \frac{2}{t^2+1}\right) dt =$$

$$= t - 2\,\mathrm{arc\,tg}\,t + k = e^x - 2\,\mathrm{arc\,tg}\,(e^x) + k$$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$

Hacemos el cambio: $x = t^2 \;\rightarrow\; dx = 2t\,dt$

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{2t\,dt}{1+t} = \int \left(2 - \frac{2}{1+t}\right) dt = 2t - 2\ln|1+t| + k =$$

$$= 2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x}) + k$$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^{2x}-3e^x}$

Hacemos el cambio: $e^x = t \;\rightarrow\; x = \ln t \;\rightarrow\; dx = \dfrac{1}{t}\,dt$

$$\int \frac{dx}{e^{2x}-3e^x} = \int \frac{1/t}{t^2-3t}\,dt = \int \frac{1}{t^3-3t^2}\,dt = \int \frac{1}{t^2(t-3)}\,dt$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{t^2(t-3)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t-3} = \frac{At(t-3) + B(t-3) + Ct^2}{t^2(t-3)}$$

$$1 = At(t-3) + B(t-3) + Ct^2$$

Así, tenemos que:

$$\int \frac{1}{t^2(t-3)}\,dt = \int\left(\frac{-1/9}{t} + \frac{-1/3}{t^2} + \frac{1/9}{t-3}\right)dt =$$

$$= \frac{-1}{9}\,ln|t| + \frac{1}{3t} + \frac{1}{9}\,ln|t-3| + k$$

Por tanto:

$$\int \frac{dx}{e^{2x}-3e^x} = \frac{-1}{9}\,ln\,e^x + \frac{1}{3e^x} + \frac{1}{9}\,ln|e^x-3| + k =$$

$$= -\frac{1}{9}x + \frac{1}{3e^x} + \frac{1}{9}\,ln|e^x-3| + k$$

5 Integración por partes

Este método es eficiente para integrandos en los que aparezcan productos de funciones trascendentes.

TEOREMA.- Sean $u = u(x)$ y $v = v(x)$ dos funciones con derivadas continuas en un cierto intervalo I. Entonces:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

5 Integración por partes: Ejemplos

1. Calcula: $\int x\,sen\,x\,dx$

Llamamos $I = \int x\,sen\,x\,dx$.

$$\left.\begin{array}{l} u = x,\ \ du = dx \\ dv = sen\,x\,dx,\ \ v = -cos\,x \end{array}\right\}\ I = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + sen\,x + k$$

c) $\int 3x\cos x\,dx = 3\int x\cos x\,dx$

$$\left\{\begin{array}{l} u = x \ \rightarrow\ du = dx \\ dv = \cos x\,dx \ \rightarrow\ v = sen\,x \end{array}\right.$$

$$3\int x\cos x\,dx = 3\left[x\,sen\,x - \int sen\,x\,dx\right] = 3[x\,sen\,x + \cos x] + k =$$

$$= 3x\,sen\,x + 3\cos x + k$$

a) $\int x \ln x \, dx$

$$\begin{cases} u = \ln x \;\rightarrow\; du = \dfrac{1}{x}\,dx \\ dv = x\,dx \;\rightarrow\; v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$\int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln|x| - \frac{x^2}{4} + k$$

d) $\int \ln(2x-1)\,dx$

$$\begin{cases} u = \ln 2x - 1 \;\rightarrow\; du = \dfrac{2}{2x-1} \\ dv = dx \;\rightarrow\; v = x \end{cases}$$

$$\int \ln(2x-1)\,dx = x\ln(2x-1) - \int \frac{2x}{2x-1}\,dx =$$

$$= x\ln(2x-1) - \int \left(1 + \frac{1}{2x-1}\right) dx =$$

$$= x\ln(2x-1) - x - \frac{1}{2}\ln(2x-1) + k$$

2. **Calcula:** $\int x \operatorname{arc\,tg} x \, dx$

Llamamos $I = \int x \operatorname{arc\,tg} x\, dx$.

$$\left.\begin{array}{l} u = \operatorname{arc\,tg} x,\;\; du = \dfrac{1}{1+x^2}\,dx \\ dv = x\,dx,\;\; v = \dfrac{x^2}{2} \end{array}\right\}$$

$$I = \frac{x^2}{2}\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\int\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}[x - \operatorname{arc\,tg} x] + k = \frac{x^2}{2}\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x + k =$$

$$= \frac{x^2+1}{2}\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}x + k$$

g) $\int \operatorname{arc\,cos} x\,dx$

$$\begin{cases} u = \operatorname{arc\,cos} x \;\rightarrow\; du = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx \;\rightarrow\; v = x \end{cases}$$

$$\int \operatorname{arc\,cos} x\,dx = x\operatorname{arc\,cos} x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\operatorname{arc\,cos} x - \sqrt{1-x^2} + k$$

6 Integración de funciones racionales

Recordemos que se llama función racional $R(x)$, a toda función en la que sólo se efectúan con x las cuatro operaciones racionales. Cualquier función racional puede expresarse como cociente de polinomios:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Este apartado está dedicado al cálculo de integrales de funciones de este tipo. Es decir, integrales de la forma $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ con $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios.

Distinguiremos dos casos:

1. *Grado de $P(x) \geq$ Grado $Q(x)$*

En este caso se divide $P(x)$ entre $Q(x)$, obteniéndose

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int c(x) dx + \int \frac{r(x)}{Q(x)} dx$$

siendo $\int c(x) dx$ la integral de un polinomio (por tanto inmediata) y $\int \frac{r(x)}{Q(x)} dx$ una integral racional en la que el grado del numerador es inferior al del denominador que se estudia en el caso siguiente.

2. Grado de $P(x) <$ Grado $Q(x)$

Estas integrales se resuelven por *descomposición en fracciones simples*. Para ello se descompone Q(x) en factores irreducibles,

$$Q(x) = (x - x_1)^{m_1} (x - x_2)^{m_2} \cdots (x - x_q)^{m_q} \cdot [a_1 x^2 + b_1 x + c_1] \cdots [a_j x^2 + b_j x + c_j],$$

donde los últimos factores tienen raíces complejas (se cumple $b_k^2 - 4a_k c_k < 0$).

Nota: Supondremos en este curso que Q no tiene raíces complejas múltiples.

La descomposición en fracciones simples es la siguiente:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x - x_1)} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \cdots + \frac{A_{m_1}}{(x - x_1)^{m_1}} + \frac{B_1}{(x - x_2)} + \frac{B_2}{(x - x_2)^2} + \cdots + \frac{B_{m_2}}{(x - x_2)^{m_2}} + \cdots +$$
$$+ \frac{\alpha_1 x + \beta_1}{a_1 x^2 + b_1 x + c_1} + \frac{\alpha_2 x + \beta_2}{a_2 x^2 + b_2 x + c_2} + \cdots + \frac{\alpha_j x + \beta_j}{a_j x^2 + b_j x + c_j}$$

Las integrales que resultan son todas de los tipos siguientes:

$$\int \frac{A_1}{(x-x_1)}\,dx = A_1 \log|x-x_1| + C$$

$$\int \frac{A_{m_1}}{(x-x_1)^{m_1}}\,dx = \frac{-A_{m_1}}{(m_1-1)(x-x_1)^{m_1-1}} + C;$$

$$\int \frac{\alpha_j x + \beta_j}{a_j x^2 + b_j x + c_j}\,dx = \quad \text{logaritmo} \quad + \quad \text{arco tangente}$$

OBSERVACIÓN: Es interesante darse cuenta de que la primitiva de una función racional, en el caso más general, está compuesta por una parte racional y otra parte trascendente y que, además, la componente racional procede únicamente de la integración de raíces múltiples.

6 Integración de funciones racionales: Ejemplos

1. Calcula: $\displaystyle\int \frac{3x^2-5x+1}{x-4}\,dx$

$$\int \frac{3x^2-5x+1}{x-4}\,dx = \int\left(3x+7+\frac{29}{x-4}\right)dx = \frac{3x^2}{2} + 7x + 29\ \ln|x-4| + k$$

2. Calcula: $\displaystyle\int \frac{3x^2-5x+1}{2x+1}\,dx$

$$\int \frac{3x^2-5x+1}{2x+1}\,dx = \int\left(\frac{3}{2}x - \frac{13}{4} + \frac{17/4}{2x+1}\right)dx =$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{13}{4}x - \frac{17}{8}\ \ln|2x+1| + k =$$

$$= \frac{3x^2}{4} - \frac{13}{4}x - \frac{17}{8}\ \ln|2x+1| + k$$

3. Calcula:

a) $\displaystyle\int \frac{5x-3}{x^3-x}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{x^2-2x+6}{(x-1)^3}\,dx$

a) Descomponemos la fracción:

$$\frac{5x-3}{x^3-x} = \frac{5x-3}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

$$\frac{5x-3}{x^3-x} = \frac{A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)}{x(x-1)(x+1)}$$

$$5x-3 = A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)$$

Hallamos A, B y C dando a x los valores 0, 1 y –1:

$$\left.\begin{array}{llll} x=0 & \Rightarrow\ -3=-A & \Rightarrow & A=3 \\ x=1 & \Rightarrow\ 2=2B & \Rightarrow & B=1 \\ x=-1 & \Rightarrow\ -8=2C & \Rightarrow & C=-4 \end{array}\right\}$$

Así, tenemos que:

$$\int \frac{5x-3}{x^3-x}\,dx = \int \left(\frac{3}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{4}{x+1} \right) dx = 3\,ln|x| + ln|x-1| - 4\,ln|x-1| + k$$

b) Descomponemos la fracción:

$$\frac{x^2-2x+6}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} = \frac{A(x-1)^2 + B(x-1) + C}{(x-1)^3}$$

$$x^2 - 2x + 6 = A(x-1)^2 + B(x-1) + C$$

Dando a x los valores 1, 0 y 2, queda:

$$\left.\begin{array}{lll} x=1 & \Rightarrow & 5 = C \\ x=0 & \Rightarrow & 6 = A - B + C \\ x=2 & \Rightarrow & 6 = A + B + C \end{array}\right\} \begin{array}{l} A = 1 \\ B = 0 \\ C = 5 \end{array}$$

Por tanto:

$$\int \frac{x^2-2x+6}{(x-1)^3}\,dx = \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{5}{(x-1)^3} \right) dx = ln|x-1| - \frac{5}{2(x-1)^2} + k$$

4. Calcula:

a) $\displaystyle\int \frac{x^3+22x^2-12x+8}{x^4-4x^2}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{x^3-4x^2+4x}{x^4-2x^3-4x^2+8x}\,dx$

a) $x^4 - 4x^2 = x^2(x^2-4) = x^2(x-2)(x+2)$

Descomponemos la fracción:

$$\frac{x^3+22x^2-12x+8}{x^2(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x+2}$$

$$\frac{x^3+22x^2-12x+8}{x^2(x-2)(x+2)} =$$

$$= \frac{Ax(x-2)(x+2) + B(x-2)(x+2) + Cx^2(x+2) + Dx^2(x-2)}{x^2(x-2)(x+2)}$$

$$x^3 + 22x^2 - 12x + 8 = Ax(x-2)(x+2) + B(x-2)(x+2) + Cx^2(x+2) + Dx^2(x-2)$$

Hallamos A, B, C y D dando a x los valores 0, 2, –2 y 1:

$$\left.\begin{array}{lllllllll} x=0 & \Rightarrow & 8 = -4B & \Rightarrow & B = -2 & & & & \\ x=2 & \Rightarrow & 80 = 16C & \Rightarrow & C = 5 & & & & \\ x=-2 & \Rightarrow & 112 = -16D & \Rightarrow & D = -7 & & & & \\ x=1 & \Rightarrow & 19 = -3A - 3B + 3C - D & \Rightarrow & -3A = -9 & \Rightarrow & A = 3 & & \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{x^3 + 22x^2 - 12x + 8}{x^4 - 4x^2}\, dx = \int \left(\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{5}{x-2} - \frac{7}{x+2} \right) dx =$$

$$= 3\, ln|x| + \frac{2}{x} + 5\, ln|x-2| - 7\, ln|x+2| + k$$

b) La fracción se puede simplificar:

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 8x} = \frac{x(x-2)^2}{x(x-2)^2(x+2)} = \frac{1}{x+2}$$

$$\int \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 8x}\, dx = \int \frac{1}{x+2}\, dx = ln|x+2| + k$$

Ejemplo 5.54. *Hallar la integral* $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 + 4x + 13}\, dx$

Solución. Expresamos el denominador como el cuadrado de un binomio,

$$x^2 + 4x + 13 = (x+2)^2 - 4 + 13 = (x+2)^2 + 9$$

de donde,

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 13} = \int \frac{dx}{(x+2)^2 + 9} = \frac{1}{9} \int \frac{dx}{\left(\frac{x+2}{3}\right)^2 + 1} =$$

$$= \frac{3}{9} \int \frac{1/3\, dx}{\left(\frac{x+2}{3}\right)^2 + 1} = \frac{1}{3} \operatorname{arc\,tg} \frac{x+2}{3} + C$$

Ejemplo 5.55. *Hallar la integral* $\displaystyle\int \frac{1}{2x^2 - 4x + 10}\, dx$

Solución. Expresamos el denominador como el cuadrado de un binomio, sacando previamente 2 factor común,

$$2x^2 - 4x + 10 = 2[x^2 - 2x + 5] = 2[(x-1)^2 - 1 + 5] = 2[(x-1)^2 + 4]$$

de donde,

$$\int \frac{dx}{2x^2 - 4x + 10} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x-1)^2 + 4} = \frac{1}{8} \int \frac{dx}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 1} =$$

$$= \frac{2}{8} \int \frac{1/2\, dx}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 1} = \frac{1}{4} \operatorname{arc\,tg} \frac{x-1}{2} + C$$

Ejemplo 5.56. *Hallar la integral* $\displaystyle\int \frac{3x+2}{x^2-4x+8}\,dx$

Solución. Esta integral es del tipo ln + arc tg. Para ello buscamos en el numerador la derivada del denominador $2x-4$ y luego separamos en dos integrales; la primera es un ln y en la segunda buscamos el arc tg, expresando el denominador como el cuadrado de un binomio,

$$\begin{aligned}
\int \frac{(3x+2)\,dx}{x^2-4x+8} &= 3\int \frac{(x+2/3)\,dx}{x^2-4x+8} = \frac{3}{2}\int \frac{2x+4/3}{x^2-4x+8}\,dx = \\
= \frac{3}{2}\int \frac{2x-4+4+4/3}{x^2-4x+8}\,dx &= \frac{3}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+8}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{16/3\,dx}{(x-2)^2+4} = \\
&= \frac{3}{2}\ln|x^2-4x+8| + 4\int \frac{1/2\,dx}{\left(\frac{x-2}{2}\right)^2+1} = \\
&= \frac{3}{2}\ln(x^2-4x+8) + 4\operatorname{arc\,tg}\frac{x-2}{2} + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.61. *Hallar la integral* $\displaystyle\int \frac{8x^2+6x+6}{x^3-3x^2+7x-5}\,dx$

Solución. Factorizamos el denominador y descomponemos la fracción en fracciones simples.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -3 & 7 & -5 \\
1 & & 1 & -2 & 5 \\
\hline
 & 1 & -2 & 5 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
x^3-3x^2+7x-5 = (x-1)(x^2-2x+5) \\
x^2-2x+5=0 \to x = \dfrac{2\pm\sqrt{4-20}}{2} \text{ Sin solución.}
\end{array}$$

De donde resulta,

$$\begin{aligned}
\frac{8x^2+6x+6}{x^3-3x^2+7x-5} = \frac{8x^2+6x+6}{(x-1)(x^2-2x+5)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2-2x+5} = \\
&= \frac{A(x^2-2x+5)+(Mx+N)(x-1)}{(x-1)(x^2-2x+5)}
\end{aligned}$$

Los coeficientes los calculamos dando valores a x,

$$\begin{aligned}
&x=1 \to 20 = 4A \to A = 5 \\
&x=0 \to 6 = 5A - N \;\to\; N = 5A-6 = 25-6 = 19 \\
&x=2 \to 50 = 5A+2M+N \to 50 = 25+2M+19 \to 2M = 6 \to M = 3
\end{aligned}$$

Con lo cual resulta,

$$\int \frac{8x^2+6x+6}{x^3-3x^2+7x-5}\,dx = \int \frac{5}{x-1}\,dx + \int \frac{3x+19}{x^2-2x+5}\,dx = 5\ln|x-1| + I_1$$

Para calcular la integral I_1 siempre seguimos el siguiente procedimiento: En primer lugar expresamos la parte literal del denominador como el cuadrado de un binomio y al binomio le llamamos t,

$$x^2-2x+5 = (x-1)^2-1+5 = (x-1)^2+4$$

Con lo cual resulta la siguiente integral,

$$I_1 = \int \frac{3x+19}{x^2-2x+5}\,dx = \int \frac{3x+19}{(x-1)^2+4}\,dx = \begin{bmatrix} x-1=t \\ dx=dt \end{bmatrix} = \int \frac{3t+22}{t^2+4}\,dt =$$

Para resolver esta integral separamos la parte literal de la parte numérica; con la parte literal buscamos un ln y con la numérica un arc tg

$$= \int \frac{3t}{t^2+4}\,dt + \int \frac{22}{t^2+4}\,dt = \frac{3}{2}\int \frac{2t}{t^2+4}\,dt + \frac{22}{4}\int \frac{1}{t^2/4+1}\,dt =$$

$$= \frac{3}{2}\ln|t^2+4| + \frac{22}{4}\cdot 2\int \frac{1/2}{(t/2)^2+1}\,dt = \frac{3}{2}\ln|t^2+4| + 11\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{2} =$$

$$= \frac{3}{2}\ln|x^2-2x+5| + 11\operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{2}$$

con lo cual, resulta

$$\int \frac{8x^2+6x+6}{x^3-3x^2+7x-5}\,dx = 5\ln|x-1| + \frac{3}{2}\ln|x^2-2x+5| + 11\operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{2} + C$$

Ejemplo 5.57. *Hallar la integral* $\displaystyle\int \frac{2x^3+3x^2-6x-12}{x^2-4}\,dx$

Solución. Efectuamos la división de los polinomios,

$$\begin{array}{rrrr|l} 2x^3 & +3x^2 & -6x & -12 & x^2-4 \\ \cline{5-5} -2x^3 & & +8x & & 2x+3 \\ \cline{1-4} & 3x^2 & +2x & -12 & \\ & -3x^2 & & +12 & \\ \cline{2-4} & & 2x & & \end{array} \quad \to \quad \frac{2x^3+3x^2-6x-12}{x^2-4} = 2x+3+\frac{3x}{x^2-4}$$

Con lo cual, la integral se transforma en dos integrales, que en este caso ambas resultan inmediatas; la primera por ser polinómica, y la segunda por ser la derivada de un logaritmo.

$$\int \frac{2x^3+3x^2-6x-12}{x^2-4}\,dx = \int (2x+3)\,dx + \int \frac{2x}{x^2-4}\,dx = x^2+3x+\ln|x^2-4| + C$$

Ejemplo 5.58. *Hallar la integral* $\displaystyle\int \frac{2x^3-5x^2-4x+13}{x^2-4x+4}\,dx$

Solución. Efectuamos la división de los polinomios,

$$\begin{array}{rl|l}
 & 2x^3-5x^2-4x+13 & x^2-4x+4 \\ \cline{3-3}
 & -2x^3+8x^2-8x & 2x+3 \\ \cline{2-2}
 & 3x^2-12x+13 & \\
 & -3x^2+12x-12 & \\ \cline{2-2}
 & 1 &
\end{array}$$

Por consiguiente, aplicando la prueba de la división, resulta:

$$\frac{2x^3-5x^2-4x+13}{x^2-4x+4} = 2x+3+\frac{1}{x^2-4x+4}$$

Con lo cual, la integral se transforma en dos integrales, que en este caso ambas resultan inmediatas; la primera por ser polinómica, y la segunda por ser elemental.

$$\int \frac{2x^3-5x^2-4x+13}{x^2-4x+4}\,dx = \int (2x+3)\,dx + \int \frac{1}{x^2-4x+4}\,dx =$$
$$= x^2+3x+\int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx = x^2+3x-\frac{1}{x-2}+C$$

7 Integración de productos de senos y cosenos

Son integrales de la forma

$$I = \int \begin{Bmatrix} \operatorname{sen} mx \\ \cos mx \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \operatorname{sen} nx \\ \cos nx \end{Bmatrix} dx \qquad \text{con} \qquad m,n \in \mathbb{Z}$$

Las distintas integrales que surgen al combinar de todas las formas posibles estos productos se resuelven recordando las fórmulas de trigonometría que enseñan a transformar productos de senos y cosenos en sumas o diferencias. Estas fórmulas son las siguientes:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}(a+b) &= \operatorname{sen} a\cos b+\cos a \operatorname{sen} b \\ \operatorname{sen}(a-b) &= \operatorname{sen} a\cos b-\cos a \operatorname{sen} b \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \operatorname{sen} a\cos b &= \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(a+b)+\operatorname{sen}(a-b)\right] \\ \cos a \operatorname{sen} b &= \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(a+b)-\operatorname{sen}(a-b)\right] \end{aligned}\right.$$

$$\left.\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos a\cos b-\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \\ \cos(a-b) &= \cos a\cos b+\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \cos a\cos b &= \frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right] \\ \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b &= \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right] \end{aligned}\right.$$

Aplicando estas fórmulas, las integrales se convierten en inmediatas.

7 Integración de productos de senos y cosenos: Ejemplos

191. $\int \operatorname{sen} 4x \cos x \, dx$

Solución:
Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.
Se transforma el producto en suma o resta.
La integral es:

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 5x}{5}-\frac{\cos 3x}{3}\right)+k$$

192. $\int \operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} 3x \, dx$

Solución:
Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.
Se transforma el producto en suma o resta.
La integral es:

$$\frac{1}{4}\left(-\frac{\operatorname{sen} 8x}{4}+\operatorname{sen} 2x\right)+k$$

193. $\int \cos 6x \cos 4x \, dx$

Solución:
Se aplica el método de integración de funciones trigonométricas.
Se transforma el producto en suma o resta.
La integral es:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\operatorname{sen} 10x}{5}+\operatorname{sen} 2x\right)+k$$

8 Integración de funciones trigonométricas

Son integrales de la forma $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x) dx$ donde R indica una función racional.

Estas integrales se resuelven mediante un cambio de variable que depende de la forma de la función $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$. Los más frecuentes son:

- *Si* $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ *es par en* $(\operatorname{sen} x, \cos x)$, *el cambio es* $\operatorname{tg} x = t$ *con lo que:*

$$\operatorname{sen} x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \qquad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \qquad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

- *Si* $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ *es impar en cos x, el cambio es* $\operatorname{sen} x = t$.
- *Si* $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ *es impar en sen x, el cambio es* $\cos x = t$.

- *Si* $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ *no tiene ninguna de las paridades anteriores, entonces el cambio general aplicable es* $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$ *. En este caso:*

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Expresiones básicas de las funciones trigonométricas

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \qquad \operatorname{sen} 2x = 2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \qquad \operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2};$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2 x}} \qquad \operatorname{sen} x = \frac{tg\ x}{\sqrt{1+tg^2 x}}$$

8 Integración de funciones trigonométricas: Ejemplos

4. Calcula: $\int sen^2\, x\, dx$

Forma 1. Utilizando fórmulas trigonométricas

$$\int sen^2\, x\, dx \overset{(1)}{=} \int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}\right) dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\, sen\ 2x + k$$

(1) Aplicando la fórmula: $sen^2\, x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$

Resolvámosla integrando por partes:

$$\left.\begin{array}{l} u = sen\ x \ \to\ du = \cos x\, dx \\ dv = sen\ x\, dx \ \to\ v = -\cos x \end{array}\right\}$$

$$I = -sen\ x \cos x - \int (-\cos x)\cos x\, dx = -sen\ x \cos x + \int \cos^2 x\, dx =$$

$$= -sen\ x \cos x + \int (1 - sen^2\, x)\, dx = -sen\ x \cos x + \int dx - \int sen^2\, x\, dx =$$

$$= -sen\ x \cos x + x - \int sen^2\, x\, dx$$

Es decir:

$$I = -sen\ x \cos x + x - I \ \to\ 2I = -sen\ x \cos x + x \ \to\ I = \frac{x - sen\ x \cos x}{2} + k$$

Ejemplo 5.65. *Hallar la integral* $\int \operatorname{sen}^4 x\, dx$

Solución. Tenemos,

$$\int \operatorname{sen}^4 x\, dx = \int \left(\operatorname{sen}^2 x\right)^2 dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx =$$
$$= \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\right) dx = \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right) dx =$$
$$= \frac{1}{8}\int \left(2 - 4\cos 2x + 1 + \cos 4x\right) dx = \frac{1}{8}\int \left(3 - 4\cos 2x + \cos 4x\right) dx =$$
$$= \frac{1}{8}\left(3x - \frac{4\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 4x}{4}\right) + C = \frac{3x}{8} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{\operatorname{sen} 4x}{32} + C$$

Calcula $\int \cos^4 x\, dx$ **utilizando la expresión:**

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}$$

$$\cos^4 x = \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{\cos^2 2x}{4} + \frac{\cos 2x}{2} \overset{(1)}{=} \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 4x}{2}\right) + \frac{\cos 2x}{2} =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{\cos 4x}{8} + \frac{\cos 2x}{2} = \frac{3}{8} + \frac{\cos 4x}{8} + \frac{\cos 2x}{2}$$

(1) $\cos^2 2x = \frac{1}{2} + \frac{\cos 4x}{2}$

Por tanto:

$$\int \cos^4 x\, dx = \int \left(\frac{3}{8} + \frac{\cos 4x}{8} + \frac{\cos 2x}{2}\right) dx = \frac{3}{8}x + \frac{\operatorname{sen} 4x}{32} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + k$$

9 Integración de funciones irracionales

En los casos en los que una función irracional es integrable, la integración se basa en la racionalización de la integral mediante cambio de variable.

Es habitual la integración de algunas funciones irracionales cuadráticas mediante un cambio de variable trigonométrico o hiperbólico que conduzca a una integral de uno de estos tipos.

Consideremos $\int f\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$, donde f es una función racional de las variables del integrando, con $a \neq 0$. Se distinguen tres casos que darán lugar a tres posibles cambios de variable,

1.- $ax^2+bx+c = p^2 - \left(qx+r\right)^2 \rightarrow$ cambio de variable, $qx + r = p \cdot \operatorname{sen} t$

2.- $ax^2+bx+c = p^2 + \left(qx+r\right)^2 \rightarrow$ cambio de variable, $qx + r = p \cdot Sh\ t$

3.- $ax^2+bx+c = -p^2 + \left(qx+r\right)^2 \rightarrow$ cambio de variable, $qx + r = p \cdot Ch\ t$

RELACIONES BÁSICAS DE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS

$$Ch\,x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} \qquad Sh\,x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} \qquad \mathrm{Ch}^2\,x - \mathrm{Sh}^2\,x = 1$$

$$\mathrm{Ch}\,2x = \mathrm{Ch}^2\,x + \mathrm{Sh}^2\,x \qquad \mathrm{Sh}\,2x = 2\,\mathrm{Sh}\,x\,\mathrm{Ch}\,x \qquad \mathrm{ArgSh}\,x = \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

$$\mathrm{ArgCh}\,x = \log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \qquad \mathrm{ArgTh}\,x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

9 Integración de funciones irracionales: Ejemplos

Ejemplo 5.69. *Calcular la integral* $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

Solución. Aplicamos la sustitución $x = \operatorname{sen} t$ y transformamos la integral en una integral trigonométrica.

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \left[\begin{array}{l} x = \operatorname{sen} t \\ dx = \cos t dt \end{array}\right] = \int \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\cos t dt =$$

$$= \int \cos t \cos t\, dt = \int \cos^2 t dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4} + C =$$

$$= \frac{t}{2} + \frac{2\operatorname{sen} t\cos t}{4} + C = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen} x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C$$

de donde, al deshacer el cambio, se ha tenido en cuenta que:

$$\operatorname{sen} t = x \quad \rightarrow \quad t = \operatorname{arc\,sen} x, \quad \cos t = \sqrt{1-x^2}$$

Resuelve:

a) $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$

b) $\int \sqrt{9-4x^2}\,dx$

a) Haz $x = 2\,sen\,t$. b) Haz $x = 3/2\,sen\,t$.

a) $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$

Hacemos $x = 2sen\,t \rightarrow dx = 2cos\,t\,dt$

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = \int \sqrt{4-4sen^2\,t}\;2cos\,t\,dt = \int \sqrt{4(1-sen^2\,t)}\;2cos\,t\,dt =$$

$$= \int 4cos^2\,t\,dt = 4\int\left(\frac{1}{2}+\frac{cos\,2t}{2}\right)dt = 4\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{4}sen\,2t\right)+k =$$

$$= 2t + sen\,2t + k$$

Deshacemos el cambio con $t = arc\ sen\ \frac{x}{2}$:

$sen\ 2t = 2sen\ t\cos t = 2sen\ t\sqrt{1 - sen^2\ t} = 2 \cdot \frac{x}{2}\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$

$I = 2arc\ sen\ \frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{4 - x^2} + k$

b) $\int \sqrt{9 - 4x^2}\ dx$

Hacemos $x = \frac{3}{2} sen\ t \rightarrow dx = \frac{3}{2}\cos t\ dt$

$$\int \sqrt{9 - 4x^2}\ dx = \int \sqrt{9 - 4 \cdot \frac{9}{4} sen^2\ t} \cdot \frac{3}{2}\cos t\ dt = \frac{3}{2}\int \sqrt{9(1 - sen^2\ t)}\ \cos t\ dt =$$

$$= \frac{3}{2}\int 3\cos^2 t\ dt = \frac{9}{2}\int \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2}\right) dt = \frac{9}{2}\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4} sen\ 2t\right) =$$

$$= \frac{9}{4}t + \frac{9}{8} sen\ 2t + k$$

Deshacemos el cambio:

$\frac{2x}{3} = sen\ t \rightarrow t = arc\ sen\ \frac{2x}{3}$

$sen\ 2t = 2sen\ t\cos t = 2sen\ t\sqrt{1 - sen^2\ t} = 2 \cdot \frac{2x}{3}\sqrt{1 - \frac{4x^2}{9}} = \frac{4x}{9}\sqrt{9 - 4x^2}$

Ejemplo 5.70. *Calcular la integral* $\int \sqrt{x^2 - 1}\, dx$

Solución. Aplicamos la sustitución $x = \cosh t$ y transformamos la integral en una integral hiperbólica.

$$\int \sqrt{x^2 - 1}\, dx = \left[\begin{array}{l} x = \cosh t \\ dx = \operatorname{senh} t\, dt \end{array}\right] = \int \sqrt{\cosh^2 t - 1}\ \operatorname{senh} t\, dt =$$

$$= \int \operatorname{senh} t\ \operatorname{senh} t\, dt = \int \operatorname{senh}^2 t\, dt = \int \frac{\cosh 2t - 1}{2}\, dt = \frac{\operatorname{senh} 2t}{4} - \frac{t}{2} + C =$$

$$= \frac{2\operatorname{senh} t\cosh t}{4} - \frac{t}{2} + C = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2}\ln\left[x + \sqrt{x^2 - 1}\right] + C$$

de donde, se han tenido en cuenta las siguientes fórmulas:

$$\operatorname{senh}^2 t = \frac{\cosh 2t - 1}{2}, \quad \operatorname{senh} 2t = 2\operatorname{senh} t\ \cosh t$$

y al deshacer el cambio, se ha tenido en cuenta que:

$$\cosh t = x \quad \rightarrow \quad t = \operatorname{arg\,cosh} x = \ln\left[x + \sqrt{x^2 - 1}\right], \quad \operatorname{senh} t = \sqrt{x^2 - 1}$$

Ejercicios propuestos

1 Calcular las siguientes integrales

(a) $\int 3^x\, 5^{2x}\, dx$ (b) $\int \cos^2 \frac{x}{2}\, d\,x$

(c) $\int \frac{3x^2-1}{x^3-x+1}dx$ (d) $\int \frac{x^7}{\sqrt{1-x^{16}}}\, d\,x$

(e) $\int \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}{4+x^2}\, dx$ (f) $\int \frac{5}{\sqrt{2x-3}}\, dx$

(g) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$ (h) $\int \frac{x^3 dx}{x^8+1}$

(i) $\int \frac{dx}{16e^x+4e^{-x}}$

Solución:

a) $F(x)=\frac{75^x}{\log(75)}+C$

b) $F(x)=\frac{x}{2}+\frac{sen\, x}{2}+C$;

c) $F(x)=\log\left|x^3-x+1\right|+C$

d) $F(x)=\frac{1}{8}\operatorname{arc\,sen}\left(x^8\right)+C$

e) $F(x)=\frac{1}{4}\left[arc\,tg\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2+C$;

f) $F(x)=5\sqrt{2x-3}+C$

g) $F(x)=\operatorname{arc\,sen}\left(e^x\right)+C$

h) $F(x)=\frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg}\left(x^4\right)+C$

i) $F(x)=\frac{1}{8}\operatorname{arc\,tg}\left(2e^x\right)+C$;

2 Calcular las siguientes integrales indefinidas, aplicando el método de integración por partes:

(a) $\int \operatorname{arc\,sen} x\; dx$

(b) $\int x\ \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{1+x}\right)\, dx$

(c) $\int x^3\, e^x\, dx$ (d) $\int x\, sen\, x\; dx$

(e) $\int e^x\ \cos x\ dx$ (f) $\int \frac{\log x}{\sqrt{x}}\, dx$

(g) $\int x^5\ \log x\ dx$ (h) $\int \operatorname{sen} x\ e^{-x}\, dx$

(i) $\int \sqrt{x}\ \operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}\ dx$ (j) $\int x^2 \operatorname{arc\,tg}(x)\, dx$

(k) $\int \log\left(x^2-2x+5\right)dx$ (l) $\int \log(1+x)\ dx$

Solución:

a) $F(x)=x\ \operatorname{arc\,sen}(x)+\sqrt{1-x^2}+C$

b)

$$F(x)=\frac{x^2}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{1+x}\right)+ \\ +\frac{x}{2}-\log\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)+C$$

c) $F(x)=e^x\left(x^3-3x^2+6x-6\right)+C$

d) $F(x)=-x\ \cos(x)+\operatorname{sen}(x)+C$

e) $F(x)=\frac{e^x}{2}\left(\operatorname{sen} x+\cos x\right)+C$

f) $F(x)=2\sqrt{x}\left(-2+\log x\right)+C$

g) $F(x)=\frac{x^6}{6}\left(-\frac{1}{6}+\log(x)\right)+C$

h) $F(x)=-\frac{e^{-x}}{2}\left(\operatorname{sen} x+\cos x\right)+C$

i)

$$F(x)=\frac{2}{3}\,x^{3/2}\ \operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}-\frac{x}{3}+\frac{1}{3}\log(x+1)+C$$

j)

$$F(x)=\frac{x^3}{3}\operatorname{arc\,tg}(x)-\frac{x^2}{6}+\frac{1}{6}\log\left(x^2+1\right)+C$$

k)

$$F(x)=(x-1)\ \log\left(x^2-2x+5\right)-2x+ \\ +4\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x-1}{2}\right)+C \quad ;$$

l) $F(x)=(x+1)\ \log\left|1+x\right|-x+C$

3 Determinar el valor de las siguientes integrales:

(a) $\int \frac{2x^2+2x-3}{x^3+2x}dx$

(b) $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$

(c) $\int \frac{(x^4+2x)\,dx}{x^3+2x^2-x-2}$

(d) $\int \frac{x+3}{x^3+x^2+2x+2}dx$

(e) $\int \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8}dx$

(f) $\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}dx$

(g) $\int \frac{2x^3+10x+4}{x^4+2x^3+4x^2+6x+3}dx$

(h) $\int \frac{x^4-3x^3+1}{(x-2)^5}dx$

Solución:

a)

$$F(x) = -\frac{3}{2}\log|x| + \frac{7}{4}\log(x^2+2) + \sqrt{2}\,\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$$

b) $F(x) = arc\,tg(x+2) + C$;

c)

$$F(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{2}\log|x-1| + \frac{1}{2}\log|x+1| + 4\log|x+2| + C\ ;$$

d)

$$F(x) = \frac{2}{3}\log|x+1| - \frac{1}{3}\log(x^2+2) + \frac{5}{3\sqrt{2}}\,arc\,tg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$$

e) $F(x) = x + \log(x-4)^4 + \log|x+2| + C$

f) $F(x) = \frac{4}{1-x} + \log\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + C$

g)

$$F(x) = -\log\sqrt{x^2+3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,arc\,tg\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + 3\log|x+1| + \frac{2}{x+1} + C$$

h)

$$F(x) = \log|x-2| - \frac{5}{x-2} - \frac{3}{(x-2)^2} + \frac{4}{3(x-2)^3} + \frac{7}{4(x-2)^4} + C$$

4 Determinar el valor de las siguientes integrales:

(a) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x}}$ (b) $\int \frac{dx}{x^{1/2}-x^{1/4}}$

(c) $\int \sqrt{9-4x^2}\ dx$ (d) $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+6x-8}}$

(e) $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x+9}}$ (f) $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-4x-3}}$

Solución:

a) $F(x) = \log\left|\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1}\right| + C$

b) $F(x) = 2\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x} + 4\log\left|\sqrt[4]{x}-1\right| + C$

c) $F(x) = \frac{9}{4}\left(\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{2x}{3}\right) + \frac{2x}{9}\sqrt{9-4x^2}\right) + C$

d) $F(x) = \operatorname{arc\,sen}(x-3) + C$

e) $F(x) = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x-2}{\sqrt{13}}\right) + C$;

f) $F(x) = \operatorname{arc\,sen}(x+2) + C$