FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES. CÁLCULO DIFERENCIAL

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Para poder seguir adecuadamente este tema, se requiere que el alumno repase y ponga al día sus conocimientos en los siguientes contenidos:

- Cálculo de derivadas.
- Propiedades de las funciones derivables.
- Análisis de extremos en funciones de una variable.

CÁLCULO DIFERENCIAL DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

1 Superficies y curvas de nivel

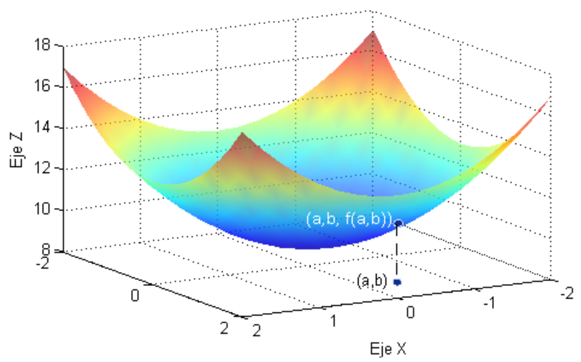
Definición (Función).- Una función real de dos variables, f, no es más que una correspondencia que asigna a cada pareja (x,y) de números reales otro número real único $f(x,y)$.

Definición (Dominio, rango).- Se define el dominio D de la función f como el conjunto de pares reales en los que la función está definida. El rango es el conjunto de números reales dado por

$$\operatorname{Im} f = \left\{ z \in \mathbb{R} \,/\, (x,y) \in D \right\}$$

La gráfica de una función de dos variables $z = f(x,y)$ es la representación en el espacio $\mathbb{R}^3$ de todos los valores (x,y,z) siendo z la imagen de (x,y) por la función f con $(x,y) \in D$.

Gráfica de $f(x,y) = 9 + x^2 + y^2$



Para una función de dos variables, $z = f(x,y)$, la curva de nivel de valor k es el conjunto de todos los pares de valores (x,y) tales que su imagen es el valor k.

2 Continuidad

Definición (Continuidad).- Una función $z = f(x,y)$ es continua en un punto (a,b) de su dominio si

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

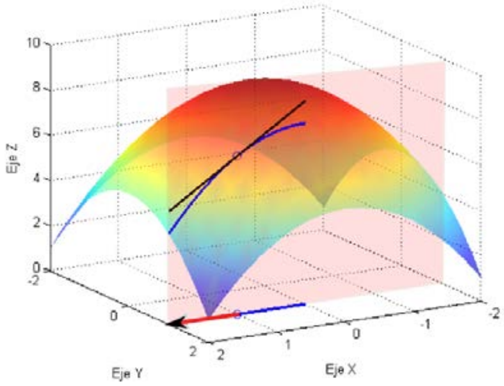
3 Derivadas parciales

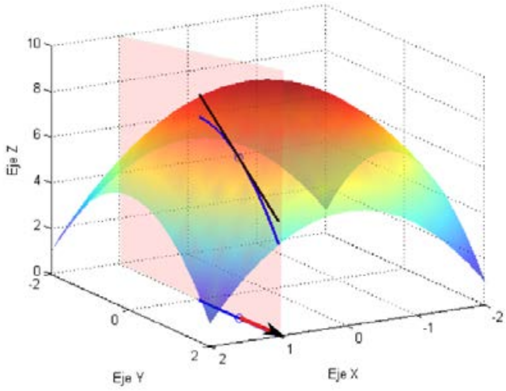
Definición (Derivadas parciales).- Si $z = f(x,y)$ es una función de dos variables se define la derivada parcial de f en el punto (a,b)

- *con respecto a x como:* $$f'_x(a,b) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(a+\Delta x, b) - f(a,b)}{\Delta x}$$
- *con respecto a y como:* $$f'_y(a,b) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(a, b+\Delta y) - f(a,b)}{\Delta y}$$

siempre que los límites anteriores existan

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA.- Las derivadas parciales no son más que derivadas de una función de una variable: la función cuya gráfica se obtiene como intersección de la superficie con los planos verticales $x = a$, $y = b$ en los casos de derivada parcial en la dirección de y y en la dirección de x, respectivamente.





NOTACIÓN: Para hacer referencia a las derivadas parciales de la función $z = f(x,y)$ respecto a las variables x e y se suelen utilizar las siguientes notaciones:

$$f'_x(a,b) = \frac{\partial z}{\partial x}(a,b) = z'_x(a,b) \qquad\qquad f'_y(a,b) = \frac{\partial z}{\partial y}(a,b) = z'_y(a,b)$$

DERIVADAS PARCIALES de segundo orden:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx}(x,y) = f''_{xx}(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{z'_x(x+\Delta x, y) - z'_x(x,y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy}(x,y) = f''_{xy}(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{z'_x(x, y+\Delta y) - z'_x(x,y)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy}(x,y) = f''_{yy}(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{z'_y(x, y+\Delta y) - z'_y(x,y)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{z'_y(x+\Delta x, y) - z'_y(x,y)}{\Delta x}$$

TEOREMA DE SCHWARZ.- Sea $z = f(x,y)$ una función de dos variables. Si existen $f, f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ y además f''_{xy} es continua en una región abierta D entonces se cumple que en dicha región se da la igualdad de las derivadas cruzadas de segundo orden

$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) \qquad \forall (x,y) \in D$$

4 Derivadas direccionales

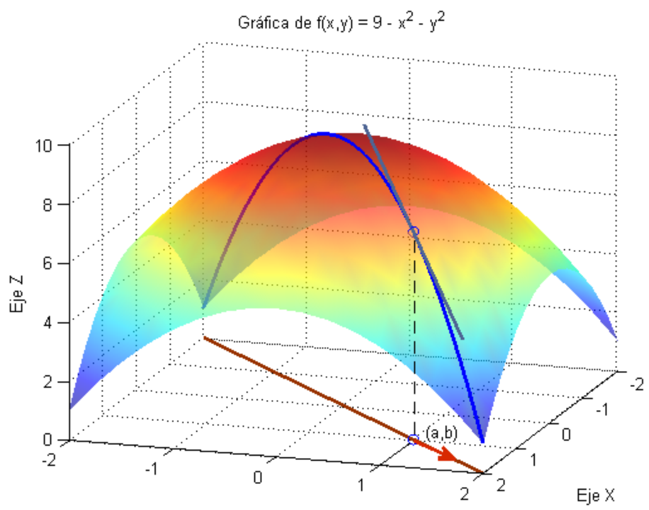
Definición (Dirección).- Una dirección en $\mathbb{R}^2$ es cualquier vector de norma 1.

Si $\bar{u}$ es una dirección en el plano entonces se puede expresar como $\bar{u} = \left(\cos\varphi, \operatorname{sen}\varphi\right)$ siendo φ el ángulo que forma el vector con el eje positivo de las X.

Definición (Derivada direccional en un punto): Sea f una función de dos variables y $\bar{u} = \left(\cos\varphi, \operatorname{sen}\varphi\right)$ una dirección. Se define la derivada direccional de f en el punto $\left(a,b\right)$, en la dirección de $\bar{u}$ como el valor del siguiente límite en el caso de que exista:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f\left(a+t\cos\varphi, b+t\operatorname{sen}\varphi\right)-f\left(a,b\right)}{t} = D_u f\left(a,b\right) = f'_u\left(a,b\right) = f'_\varphi\left(a,b\right) = z'_\varphi\left(a,b\right)$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA: La derivada direccional es la pendiente de la recta tangente a la curva intersección de la superficie con el plano vertical que contiene a la dirección dada.



5 Funciones diferenciables

Definición (Diferenciable y diferencial).- Sea $z = f\left(x,y\right)$ una función definida y acotada en un dominio D al cual pertenece el punto $\left(a,b\right)$ y que tiene derivadas parciales en dicho punto. Se dice que f es diferenciable en $\left(a,b\right)$ si el incremento total:

$$\Delta z = f\left(a+\Delta x, b+\Delta y\right) - f\left(a,b\right)$$

correspondiente a los incrementos arbitrarios de Δx e Δy se puede expresar como

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}\left(a,b\right)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\left(a,b\right)\Delta y + \varepsilon\left(\Delta x,\Delta y\right)\sqrt{\left(\Delta x\right)^2+\left(\Delta y\right)^2}$$

cumpliendo que: $\lim\limits_{\left(\Delta x,\Delta y\right)\to\left(0,0\right)} \varepsilon\left(\Delta x,\Delta y\right) = 0$

A la parte lineal en Δx e Δy se le llama *diferencial* de $z = f\left(x,y\right)$ en el punto $\left(a,b\right)$ y se denota,

$$\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.}$$

TEOREMA (Condición necesaria de diferenciabilidad).- Si la función $z = f\left(x,y\right)$ *es diferenciable en el punto* $\left(a,\ b\right)$ *entonces es continua en el punto* $\left(a,b\right)$.

TEOREMA (Condición suficiente de diferenciabilidad).- Si la función $z = f\left(x,y\right)$ *y las dos derivadas parciales primeras son continuas en un entorno del punto* $\left(a,b\right)$ *entonces la función es diferenciable en dicho punto.*

TEOREMA.- Si una función es diferenciable existe la derivada direccional en cualquier dirección.

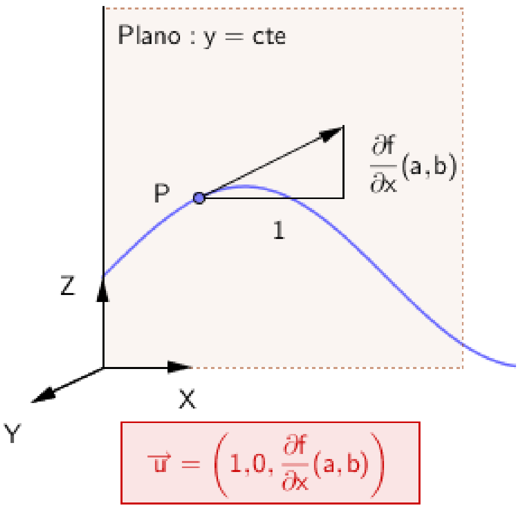
TEOREMA.- Si $z = f\left(x,y\right)$ *es una función diferenciable en* $\left(a,b\right)$ *entonces la derivada direccional de* f *en la dirección del vector unitario* $\overline{u} = \left(\cos\varphi, \operatorname{sen}\varphi\right)$ *es*

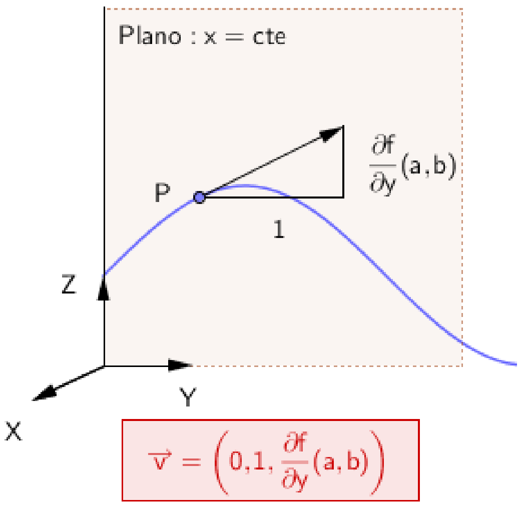
$$D_u f\left(a,b\right) = f_x\left(a,b\right)\cos\varphi + f_y\left(a,b\right)\operatorname{sen}\varphi$$

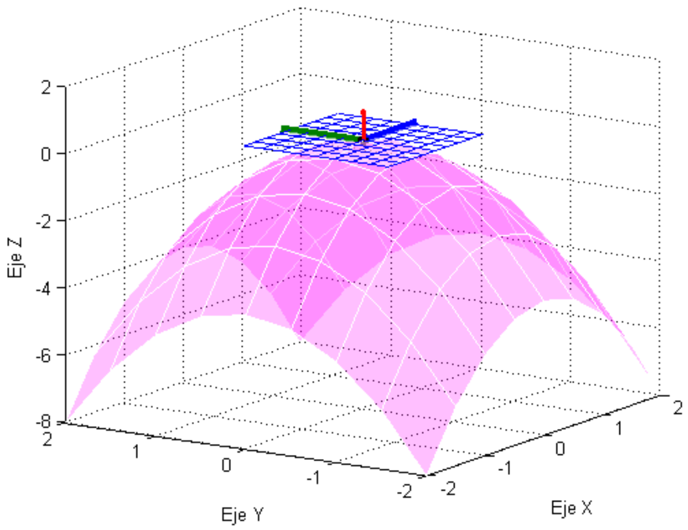
6 Plano tangente y aproximación lineal

Sea S una superficie de ecuación $z = f\left(x,y\right)$ y $P\left(a,b,f\left(a,b\right)\right)$ un punto de S. Si f es diferenciable en $\left(a,b\right)$ se define el plano tangente como el plano que contiene a las rectas tangentes a cualquier curva C que esté sobre la superficie S y que pase por P.

Definimos en el punto $P\left(a,b,f\left(a,b\right)\right)$ los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tangentes a las curvas resultantes de la intersección de S con los planos: $y = cte$, $x = cte$, respectivamente.







Por lo tanto un vector normal al plano tangente es el producto vectorial de $\vec{u}$ por $\vec{v}$

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \end{vmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\vec{i} - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\vec{j} + \vec{k}$$

La ecuación del plano tangente es entonces:

$$\left\langle (x,y,z) - \left(a,b,f(a,b)\right), \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b), -1\right) \right\rangle = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) - \left(z - f(a,b)\right) = 0$$

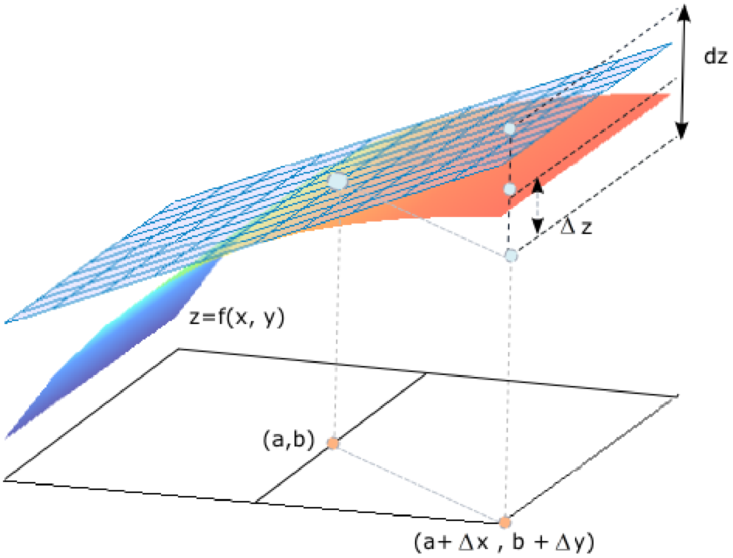
$$z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

Si f es diferenciable, el incremento de la función, Δz, se puede aproximar mediante el valor de la diferencial, dz, así

$$\Delta z = f\left(a+\Delta x, b+\Delta y\right) - f\left(a,b\right) \approx \frac{\partial f}{\partial x}\left(a,b\right)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\left(a,b\right)\Delta y = dz$$

para $\left(\Delta x, \Delta y\right) \to \left(0,0\right)$

Interpretación geométrica de la diferencial: la diferencial dz es la variación de la ordenada del plano tangente al pasar del punto $\left(a,b\right)$ al punto $\left(a+\Delta x, b+\Delta y\right)$.

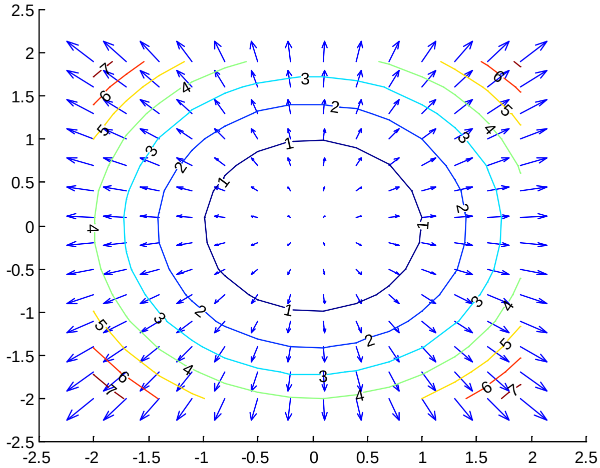


7 Gradiente

Definición (Gradiente).- Si $z = f\left(x,y\right)$ es una función de dos variables se define el gradiente de f en el punto $\left(a,b\right)$ como el vector: $\nabla f\left(a,b\right) = f_x'\left(a,b\right)\mathbf{i} + f_y'\left(a,b\right)\mathbf{j}$

PROPIEDADES DEL GRADIENTE: Sea f una función diferenciable en el punto $\left(a,b\right)$. Se cumplen las siguientes propiedades:

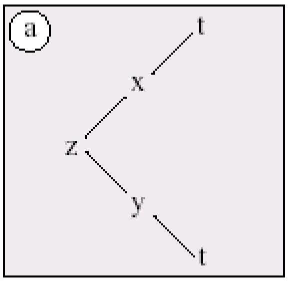
- *Si el gradiente de f en $\left(a,b\right)$ es el vector nulo entonces la derivada direccional de f en cualquier dirección es cero.*
- *La dirección de máximo crecimiento de f viene dada por $\nabla f\left(x,y\right)$. El valor máximo de la derivada direccional es $\left\|\nabla f\left(x,y\right)\right\|$.*
- *La dirección de mínimo crecimiento de f viene dada por $-\nabla f\left(x,y\right)$. El valor mínimo de la derivada direccional es $-\left\|\nabla f\left(x,y\right)\right\|$.*
- *El vector gradiente es normal a las curvas de nivel.*



Curvas de nivel de la superficie $z = x^2 + y^2$

8 Regla de la cadena

DERIVACION COMPUESTA DE UNA VARIABLE.- Sea $z = f(x, y)$ *una función definida en un dominio D, siendo cada una de las variables* x *e* y *funciones de la variable* t



$$x = \phi(t),\ y = \psi(t),\ t_o < t < t_1$$

Si en el punto t *existen las derivadas*

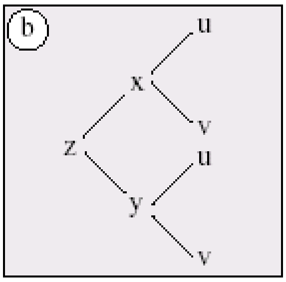
$$\frac{dx}{dt} = \phi'(t)$$

y para cada una de las variables $x = \phi(t),\ y = \psi(t)$ *la función* $z = f(x, y)$ *es diferenciable entonces se tiene:*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

DERIVACIÓN COMPUESTA DE DOS VARIABLES.- Sea $z = f(x, y)$ *una función definida en un dominio D siendo cada una de las variables* x *e* y *funciones de las variables* u *y* v

$$x = \phi(u, v),\ y = \psi(u, v)$$



Si en el punto (u, v) *existen las derivadas parciales continuas*

$$\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}$$

y en el punto (x, y) *la función* z *es diferenciable entonces se tiene:*

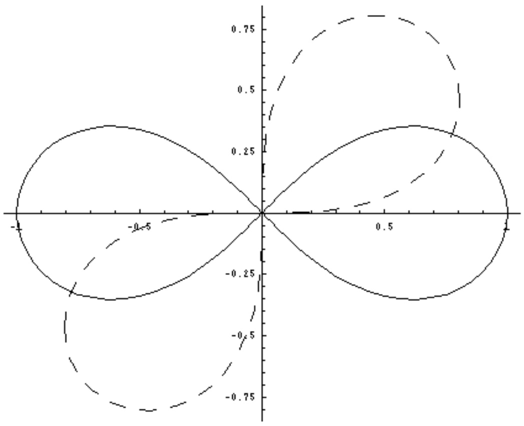
$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

9 Funciones implícitas

TEOREMA FUNCION IMPLÍCITA (Una variable independiente): Se considera la ecuación $F(x, y) = 0$. *Dicha ecuación define en un entorno del punto* $P(a, b)$ *a la variable y como función implícita de* x, *es decir,* $y = f(x)$ *si:*

- *El punto* (a, b) *pertenece a la curva de ecuación* $F(x, y) = 0$
- *Las derivadas parciales* $F_x^{'}(x, y)$ *y* $F_y^{'}(x, y)$ *son funciones continuas en un entorno del punto* (a, b)
- $F_y^{'}(x, y) \neq 0$

NOTA: En el caso de que se cumplan los dos primeros puntos y el tercero se sustituya por $F_x^{'}(x, y) \neq 0$ entonces es la x la que se define como función implícita de y, es decir, $x = h(y)$



En trazo continuo: $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ En trazo discontinuo: $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$

TEOREMA.- Si la ecuación $F(x,y)=0$ define a y como función derivable de x entonces:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} \quad , \quad F'_y(x,y)\neq 0$$

Nota: Basta derivar $F(x,y)=0$ respecto a x aplicando la regla de la cadena:

$$F'_x+F'_y\frac{dy}{dx}=0$$

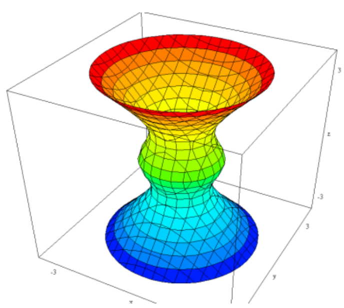
TEOREMA FUNCION IMPLÍCITA (Dos variables independientes): Se considera la ecuación . Dicha ecuación define en un entorno del punto $P(a,b,c)$ a la variable z como función implícita de x e y es decir, $z=f(x,y)$ si:

- *El punto (a,b,c) pertenece a la superficie de ecuación $F(x,y,z)=0$*
- *Las derivadas parciales $F'_x(x,y,z)$, $F'_y(x,y,z)$ y $F'_z(x,y,z)$ son funciones continuas en un entorno del punto (a,b,c)*
- $F'_z(a,b,c)\neq 0$

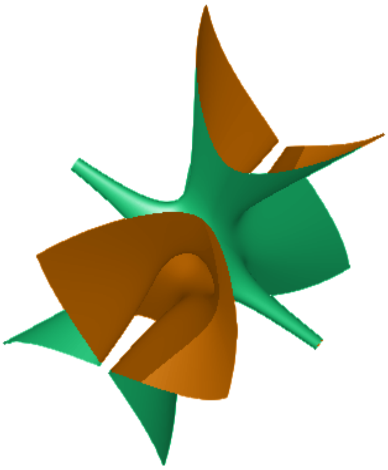
TEOREMA.- Si la ecuación $F(x,y,z)=0$ define a z como función diferenciable de x e y entonces:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}$$

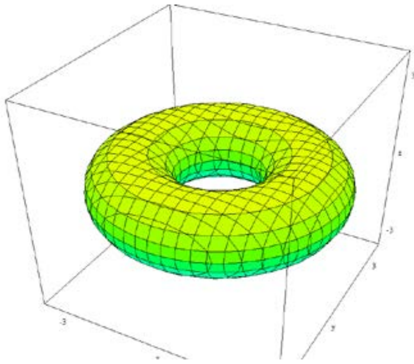
EJEMPLOS DE SUPERFICIES EN IMPLÍCITAS



$$0.8z^2-\log\left(0.8\left(z^2+0.3\right)\right)=x^2+y^2$$



$$\sqrt{xy}-\sqrt{yz}-\sqrt{zx-y}=1$$



$$z^2+\left(\sqrt{x^2+y^2}-2\right)^2=1$$

SUPERFICIES IMPLÍCITAS. PLANO TANGENTE.

Sea S una superficie de ecuación $F\left(x,y,z\right)=C$ *y sea* $P\left(a,b,c\right)$ *un punto de S donde F es diferenciable. La ecuación del plano tangente a S en* P *es:*

$$F_x'\left(a,b,c\right)\left(x-a\right)+F_y'\left(a,b,c\right)\left(y-b\right)+F_z'\left(a,b,c\right)\left(z-c\right)=0$$

y las ecuaciones paramétricas de la recta normal a S en $P\left(a,b,c\right)$ *son*

$$\begin{cases} x=a+F_x'\left(a,b,c\right)\cdot t \\ y=b+F_y'\left(a,b,c\right)\cdot t \\ z=c+F_z'\left(a,b,c\right)\cdot t \end{cases}$$

siempre y cuando no sean simultáneamente cero todas las derivadas parciales en el punto.

10 Extremos. Máximos y mínimos. Puntos de silla.

Definición (Extremos absolutos).- Sea $z=f\left(x,y\right)$ *una función definida en una región D y sea* $\left(a,b\right)\in D$ *se dice que*

(a) $f\left(a,b\right)$ *es el valor máximo absoluto de* f *en* D *si*

$$f\left(a,b\right)\geq f\left(x,y\right)\quad\forall\left(x,y\right)\in D$$

(b) $f\left(a,b\right)$ *es el valor mínimo absoluto de* f *en* D *si*

$$f\left(a,b\right)\leq f\left(x,y\right)\quad\forall\left(x,y\right)\in D$$

Definición (Extremos relativos).- Sea $z=f\left(x,y\right)$ *una función definida en una región D y sea* $\left(a,b\right)\in D$ *se dice que* *(a)* $f(a,b)$ *es un valor máximo relativo de* f *en* D *si existe un entorno B de* (a,b) *tal que* $f(a,b) \geq f(x,y) \;\; \forall (x,y) \in B$

(b) $f(a,b)$ *es un valor mínimo relativo de* f *en* D *si existe un entorno B de* (a,b) *tal que* $f(a,b) \leq f(x,y) \;\; \forall (x,y) \in B$

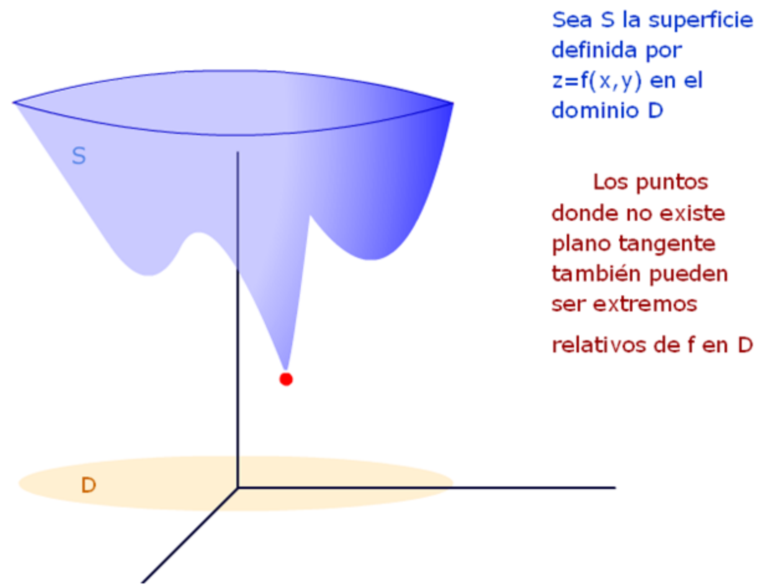
TEOREMA DE WEIERSTRASS.- Sea $z = f(x,y)$ *una función continua en un subconjunto* D *de* $\mathbb{R}^2$ *acotado y que contiene a su frontera, entonces la función* f *tiene máximo y mínimo absolutos en* D.

Definición (Punto crítico).- Sea $z = f(x,y)$ *una función definida en una región D. El punto* $(a,b) \in D$ *se dice que es un punto crítico si se cumple una de las afirmaciones siguientes:*

(1) (a,b) *está situado en el contorno de D. A estos puntos se les llama puntos frontera.*

(2) $f_x'(a,b) = f_y'(a,b) = 0$, *es decir,* $\nabla f(a,b) = 0$. *A estos puntos se les llama estacionarios.*

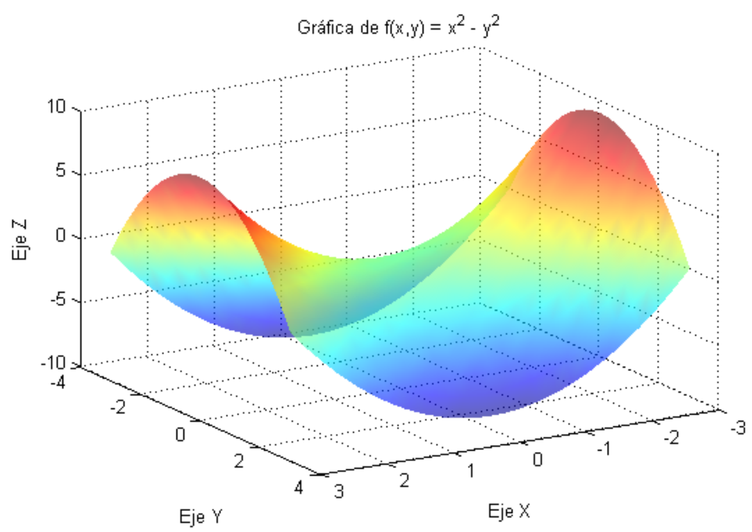
(3) *no existe* $f_x'(a,b)$ *ó* $f_y'(a,b)$. *A estos puntos se les llama singulares.*



TEOREMA.- Si $f(a,b)$ es un extremo relativo de f en una región abierta de su dominio D entonces el punto (a,b) es un punto crítico de f.

TEOREMA (Condición necesaria para la existencia de extremo de funciones diferenciables).- Sea $z=f(x,y)$ una función diferenciable en D. Es condición necesaria para la existencia de un extremo relativo de f en $(a,b)\in D$ que se verifique $f_x'(a,b)=f_y'(a,b)=0$

IMPORTANTE.- Es condición necesaria pero no suficiente. Basta tomar como ejemplo la función $f(x,y)=y^2-x^2$, la cual cumple que $(0,0)$ es un punto estacionario y sin embargo no es extremo relativo (ni máximo ni mínimo), como muestra la figura siguiente.



La generalización de la fórmula de Taylor de grado dos para una función de dos variables, $z=f(x,y)$, que admite derivadas parciales de cualquier orden en un entorno de (a,b) viene dada por[1]:

$$f(x,y)=f(a,b)+f'_x(a,b)(x-a)+f'_y(a,b)(y-b)+$$
$$+\frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(a,b)(x-a)^2+f''_{yy}(a,b)(y-b)^2+2f''_{xy}(a,b)(x-a)(y-b)\right]+R_2$$

donde R_2 es un infinitésimo verificando:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{R_2}{\left\|(x-a,y-b)\right\|^2}=0$$

Haciendo

$$x=a+\Delta x \quad\Leftrightarrow\quad x-a=\Delta x$$
$$y=b+\Delta y \quad\Leftrightarrow\quad y-b=\Delta y$$

la expresión de la fórmula de Taylor es:

$$f(a+\Delta x,b+\Delta y)=f(a,b)+f'_x(a,b)\Delta x+f'_y(a,b)\Delta y+$$
$$+\frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(a,b)(\Delta x)^2+f''_{yy}(a,b)(\Delta y)^2+2f''_{xy}(a,b)\Delta x\Delta y\right]+R_2$$

Esta expresión puede escribirse de la manera siguiente:

$$f(a+\Delta x,b+\Delta y)-f(a,b)=\left\langle\nabla f(a,b),(\Delta x,\Delta y)\right\rangle+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix}\cdot Hf(a,b)\cdot(\Delta x,\Delta y)+R_2$$

donde

$$Hf(a,b)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a,b) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b)\\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b)\end{pmatrix}$$

se llama *matriz hessiana*. El término entre corchetes de la fórmula de Taylor se denomina diferencial segunda y escribiendo $dx=\Delta x, dy=\Delta y$ se tendrá:

$$d^2f=f_{xx}(a,b)dx^2+f_{yy}(a,b)dy^2+2f_{xy}(a,b)dxdy=$$
$$=\begin{pmatrix}dx & dy\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f''_{xx}(a,b) & f''_{xy}(a,b)\\ f''_{yx}(a,b) & f''_{yy}(a,b)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dx\\ dy\end{pmatrix}$$

De analizar el signo de la diferencial segunda, o lo que es lo mismo, si la matriz hessiana es definida positiva o negativa se deduce el siguiente método práctico.

11 Cálculo de extremos relativos

Los pasos a seguir son:

[1] Con objeto de no complicar la notación se ha considerado únicamente la fórmula de Taylor de orden 2 pudiendo generalizarse fácilmente a cualquier orden.

(1) Cálculo de los puntos críticos como solución del sistema

$$\left.\begin{array}{l} f'_x(x,y)=0 \\ f'_y(x,y)=0 \end{array}\right\}$$

(2) Si (a,b) es un punto crítico, el estudio del hessiano

$$H=\begin{vmatrix} f''_{xx}(a,b) & f''_{xy}(a,b) \\ f''_{yx}(a,b) & f''_{yy}(a,b) \end{vmatrix}$$

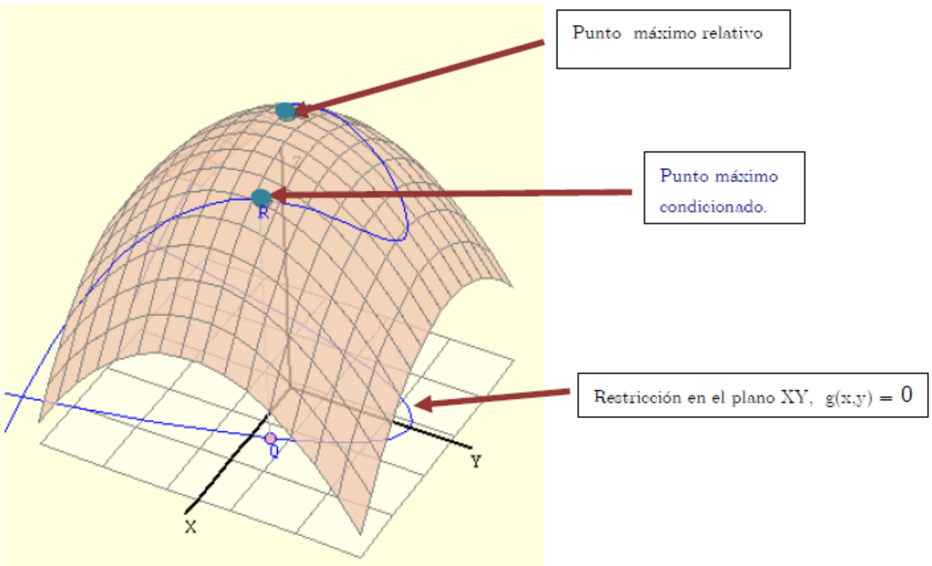
nos permitirá concluir:

$$\begin{array}{l} H>0 \quad f''_{xx}(a,b)>0 \quad \Rightarrow \quad (a,b) \text{ punto de mínimo relativo} \\ H>0 \quad f''_{xx}(a,b)<0 \quad \Rightarrow \quad (a,b) \text{ punto de máximo relativo} \\ H<0 \quad \Rightarrow \quad (a,b) \text{ punto de silla} \end{array}$$

12 Extremos condicionados

Un extremo (máximo o mínimo) de la función $f(x,y)$ cuando (x,y) está sobre una curva del plano contenida en el dominio de f, cuya ecuación es $g(x,y)=0$, se dice que es un extremo de f condicionado a la condición o restricción $g(x,y)=0$.

Por ejemplo:



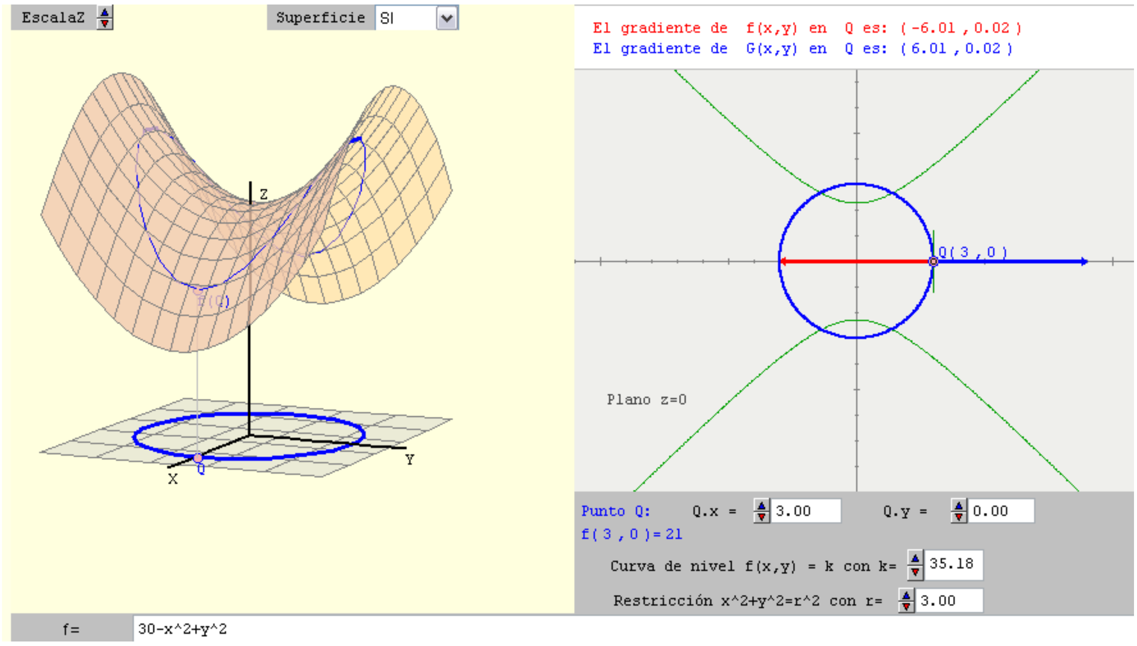
El método de Lagrange[2] permite hallar analíticamente los puntos extremos condicionados de una función suave, es decir, con derivadas parciales continuas.

[2] El método lo realizó uno de los matemáticos más grandes del siglo XVIII, Joseph Lagrange, cuando tenía 19 años.

TEOREMA (Método de Lagrange para funciones de dos variables y una condición).- Sean f *y g dos funciones con derivadas parciales continuas tal que* f *tiene un máximo o mínimo sujeto a la restricción dada por* $g\left(x,y\right)=0$ *entonces dicho extremo se producirá en uno de los puntos críticos de la función F dada por*

$$F\left(x,y,\lambda\right)=f\left(x,y\right)+\lambda g\left(x,y\right)$$

Al número λ *(lambda) se le llama "multiplicador de Lagrange".*



OBSERVACIÓN.- Según este teorema, los extremos libres de F coinciden con los extremos condicionados de f .

Para analizar si el punto crítico $\left(a,b,\lambda_o\right)$ obtenido del sistema

$$\left.\begin{array}{l} F_x=0 \\ F_y=0 \\ F_\lambda=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f_x+\lambda g_x=0 \\ f_y+\lambda g_y=0 \\ g\left(x,y\right)=0 \end{array}\right\}$$

Ejercicios propuestos

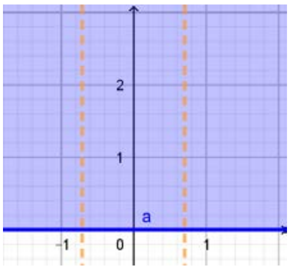
1 Representa gráficamente el dominio de las funciones siguientes:

a) $f\left(x,y\right)=\dfrac{\log y}{2x^2-1}$ b) $f\left(x,y\right)=\dfrac{x-y}{\log\left(xy\right)}$

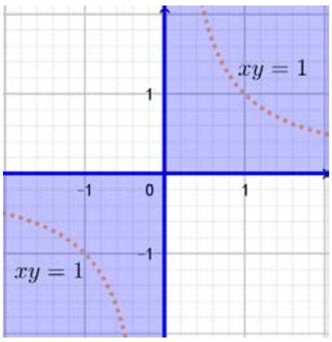
c) $f\left(x,y\right)=\operatorname{arc\,sen}\dfrac{x}{2}+\sqrt{x\,y}$

Representa con Matlab las gráficas de esas funciones.
Solución:

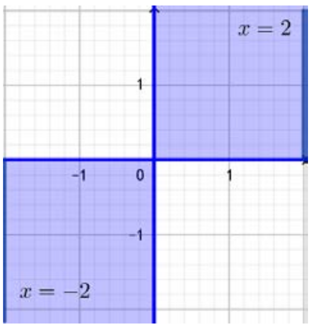
a)



b)



c)



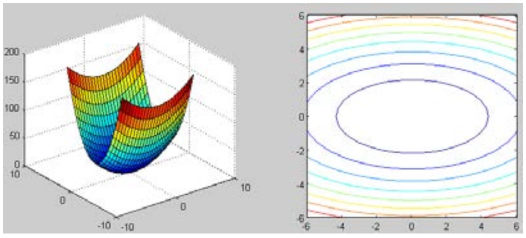
2 Representa las curvas de nivel de las funciones:

(a) $z=x^2+4y^2+1$

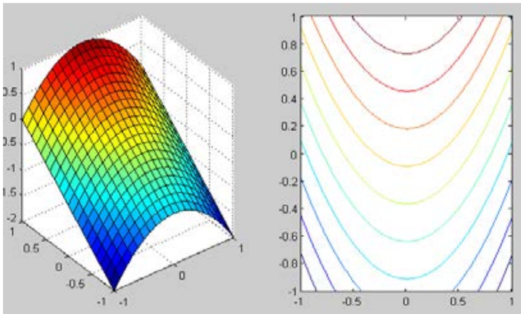
(b) $z=-x^2+y$

(c) $z=100-x^2-y^2$, para $z=0,\ 50,\ 100,\ 150$.

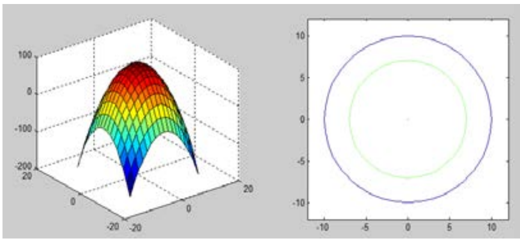
Solución:
(a) Son elipses $k=x^2+4y^2+1$ para k>1.
Para k=1 es un punto.



(b) Son parábolas, $y=x^2+k$



(c) Para k=100 es un punto (0,0) y para k=150 no hay curva de nivel. Para k=0 y k=50 son circunferencias



3 Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

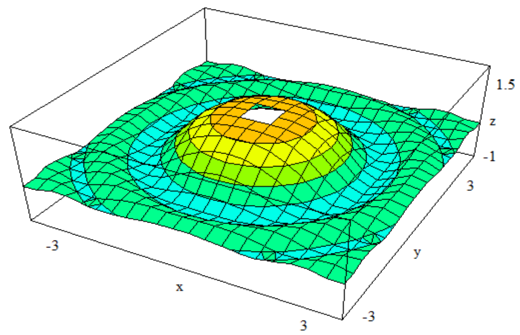
(a) $f\left(x,y\right)=\dfrac{\operatorname{sen}\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}$

(b) $f\left(x,y\right)=\cos\sqrt[3]{\left|xy\right|-1}$

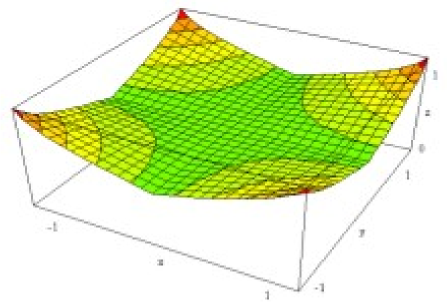
(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\left(x^2+y^2\right)\log\left(1+x\,y\right)}{sen\left[x\,y\left(x^2+y^2\right)\right]}$

Solución:

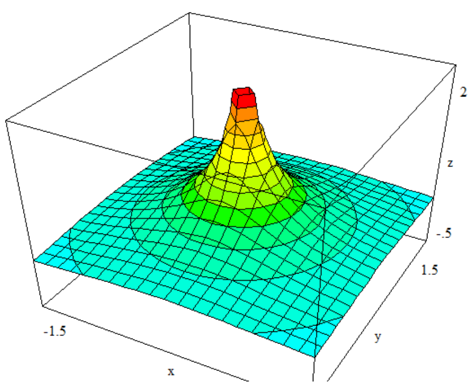
(a) Continua en $\mathbb{R}^2$ salvo en el cero que tiene una discontinuidad evitable.



(b) Continua en $\mathbb{R}^2$



(c) Esta función tiene discontinuidades evitables en los puntos de la circunferencia $x^2+y^2=1$. En el punto (0,0) no está definida, además $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f\left(x,y\right)=\infty$



4 (a) Se considera la función $f\left(x,y\right)=e^{-x^2-y^2}$.

- Encontrar todos los puntos en los que $f_x\left(x,y\right)=f_y\left(x,y\right)=0$
- Calcular $f_x'\left(1,1\right)$ y $f_x'\left(-1,1\right)$

(b) Hallar las derivadas parciales de la función $f\left(x,y\right)=2x\,e^{xy^2}$. Evaluarlas en el punto (-1,0).

(c) Hallar las derivadas parciales primeras de la función

$$z=f(x,y)=x^2\ \text{sen}\ (3x+y^3),$$

obteniendo el valor particular de ambas en el punto $\left(\pi/3,0\right)$

Solución: (a) El punto (0,0). $f_x'\left(1,1\right)=-2e^{-2}$, $f_x'\left(-1,1\right)=2e^{-2}$

(b) $f_x'\left(-1,0\right)=2$, $f_y'\left(-1,0\right)=0$

(c) $z_x'\left(\dfrac{\pi}{3},0\right)=-\dfrac{\pi^2}{3}$, $\quad z_y'\left(\dfrac{\pi}{3},0\right)=0$

5 Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones:

(a) $f(x,y)=x^3y+xy$

(b) $f(x,y)=x\sqrt{x+y}$

(c) $f(x,y)=\dfrac{x^2}{y}$ (d) $f(x,y)=e^{x^2}+y$

(e) $f(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$ (f) $f(x,y)=\text{arctg}\,\dfrac{y}{x}$

Solución:

(a) $f_x=3x^2y+y$; $f_y=x^3+x$

(b) $f_x=\sqrt{x+y}+\dfrac{x}{2\sqrt{x+y}}$; $f_y=\dfrac{x}{2\sqrt{x+y}}$

(c) $f_x=\dfrac{2x}{y}$; $f_y=-\dfrac{x^2}{y^2}$

(d) $f_x=2x\cdot e^{x^2}$; $f_y=1$

(e) $f_x=\dfrac{-x^2+y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$; $f_y=\dfrac{-2x\,y}{\left(x^2+y^2\right)^2}$

(f) $f_x=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$; $f_y=\dfrac{x}{x^2+y^2}$.

6 El volumen de un tronco de cono viene dado por la fórmula

$$V=\frac{1}{3}\pi h\left(R^2+Rr+r^2\right)$$

Donde h es la altura, r el radio de la base menor y R el radio de la base mayor.
Se pide estudiar la variación de dicho volumen (razón de cambio) cuando se produce un incremento arbitrario (no simultáneo) de cada una de las variables. Analizar cuál es la forma más ventajosa de aumentar el volumen de un tronco de cono de dimensiones R=10, r=4 y h=6.
Solución:
La variable que produce un incremento más rápido del volumen, para los valores dados, es h por lo que la mejor opción será aumentar la altura del tronco del cono.

7

(a) Dada la superficie S de ecuación $z = x^2 + 3xy + y^2$ y el punto $P(1,1,5)$. Se pide:

1. Calcula la pendiente de la recta r que es paralela al plano ZX y tangente a la superficie S en el punto P. Obtén también la ecuación de dicha recta. Representa con Matlab la superficie en las proximidades del punto P junto con la recta r.
2. Calcula la pendiente de la recta r que es paralela al plano ZY y tangente a la superficie S en el punto P. Obtén también la ecuación de dicha recta. Representa con Matlab la superficie en las proximidades del punto P junto con la recta r.

Repite el ejercicio para las siguientes superficies y puntos
b) $z = x^2 + y^2 e^{x+y}$, $P(1,-1,2)$
c) $z = x^2 y^3 + y^2 x^3$, $P(2,1,12)$

Solución: a.1) La pendiente de la recta es 5. La recta es $\begin{Bmatrix} y = 1 \\ z = 5x \end{Bmatrix}$

a.2) La pendiente de la recta es 5. La recta es $\begin{Bmatrix} x = 1 \\ z = 5y \end{Bmatrix}$

b.1) La recta es $\begin{Bmatrix} y = -1 \\ z = 3x - 1 \end{Bmatrix}$

b.2) La recta es $\begin{Bmatrix} x = 1 \\ z = -y + 1 \end{Bmatrix}$

c.1) La recta es $\begin{Bmatrix} y = 1 \\ z = 16x - 20 \end{Bmatrix}$

c.2) La recta es $\begin{Bmatrix} x = 2 \\ z = 28y - 16 \end{Bmatrix}$

8

(a) Se considera la función $f(x,y) = e^{xy} + \dfrac{x}{y} + sen\left(\left(2x + 3y\right)\pi\right)$. Calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $f_x(0,1)$, $f_y(2,-1)$, $f_{xx}(0,1)$, $f_{xy}(2,-1)$. ¿Se cumple el teorema de Schwartz en el punto (0,1)? ¿Y en el (2, -1)?

(b) Calcula las derivadas parciales segundas f_{xx}, f_{xy} y f_{yx} de las siguientes funciones:

b.1) $f(x,y) = e^{ax+by}$

b.2) $f(x,y) = (x+y)^n$

b.3) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Solución:

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy} + \dfrac{1}{y} + 2\pi \cos\left(\left(2x + 3y\right)\pi\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy} - \frac{x}{y^2} + 3\pi \cos\left(\left(2x + 3y\right)\pi\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2 e^{xy} - \left(2\pi\right)^2 sen\left(\left(2x + 3y\right)\pi\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{xy} + xye^{xy} - \frac{1}{y^2} - 6\pi^2 sen\left(\left(2x + 3y\right)\pi\right)$$

$$f_x(0,1) = 1 + 1 + 2\pi\cos(3\pi) = 2 - 2\pi$$

$$f_y(2,-1) = \frac{2}{e^2} - 2 - 3\pi \qquad f_{xx}(0,1) = 1$$

$f_{xy}(2,-1) = \dfrac{-1}{e^2} - 1$. Cumple el teorema de Schwarz en los puntos (0,1) y (2, -1).

b.1) $f_{xx} = a^2 \cdot e^{ax+by}$; $f_{xy} = f_{yx} = a\, b \cdot e^{ax+by}$

b.2) $f_{xx} = n(n-1)\cdot(x+y)^{n-2}$;

$$f_{xy} = f_{yx} = n(n-1)\cdot(x+y)^{n-2}$$

b.3) $f_{xx} = \dfrac{2x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^{5/2}}$;

9

a) Calcular el valor de la diferencial, dz, para las funciones siguientes, en el punto indicado:

1. $z = f(x,y) = x^3 + xy^2$, en el punto (-1,2)

2. $z = f(x,y) = x \operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x$, en el punto (0,0)

b) Utilizar la diferencial primera para aproximar la variación de la función $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ cuando (x,y) varía desde el punto (1,1) hasta el punto (1'01,0'97). Comparar esta aproximación con la variación exacta de z.

c) Obtener el valor aproximado de $\sqrt{1.1 + \log\left(2.2 - 1.1^2\right)}$ utilizando la diferencial primera de la función $z = \sqrt{x + \log\left(y - x^2\right)}$.

d) Utilizar la diferencial primera de una función para aproximar el valor de $\sqrt[4]{1'01} \cdot \sqrt[5]{31'98}$.

e) El radio r y la altura h de un cilindro circular recto se miden con un error posible del 4 por 100 y 2 por 100, respectivamente. Aproximar el error porcentual máximo al medir el volumen, utilizando la diferencial.

f) Se mide el radio y la altura de un cono circular recto con errores, a lo más, 3% y 2% respectivamente. Utilice incrementos para aproximar el porcentaje máximo de error que se puede cometer al calcular el volumen del cono si se utilizan estas medidas (la fórmula es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$)

Solución: a) $dz\Big|_{(-1,2)} = 7dx - 4dy$

$$dz\Big|_{(0,0)} = 0dx + 0dy = 0$$

b)

$$\Delta z = f\left(1.01, 0.97\right) - f\left(1,1\right) \cong$$

$$\cong dz\Big|_{(1,1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0.01 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-0.03\right)$$

$$= \frac{0.02}{\sqrt{2}} = 0.0141$$

c)

$$f\left(1.1, 2.2\right) - f\left(1,2\right) \approx \frac{-3}{2} \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.2 = 0.05$$

$$f(1.1, 2.2) \approx 1.05$$

d)

$$\sqrt[4]{1.01} \cdot \sqrt[5]{31.98} \cong$$

$$\cong \sqrt[4]{1}\ \sqrt[5]{32} + \frac{1}{2}\left(0.01\right) + \frac{1}{80}\left(-0.02\right) = 2.00475$$

d) 10%

f) El máximo porcentaje de error al calcular el volumen es de aproximadamente 8%.

10 (a) Hallar la ecuación del plano tangente y de la recta normal a las superficies siguientes y representarlos con Matlab junto con la superficie correspondiente.

1. $z = \operatorname{arctg}\left(y / x\right)$ en el punto de coordenadas $P\left(1, \sqrt{3}, \dfrac{\pi}{3}\right)$.

2. al paraboloide $z = \dfrac{x^2 + 4y^2}{10}$ en el punto (2,-2,2).

(b) Obtener la ecuación de los planos tangentes horizontales a la superficie

$$z = 4(x-1)^2 + 3(y+1)^2$$

Solución:

(a)

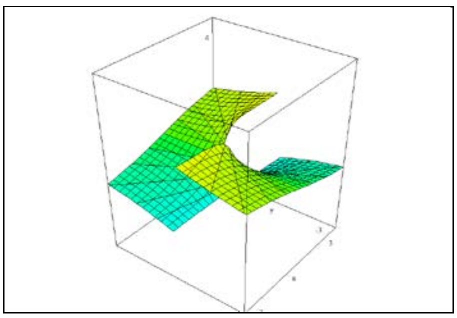
1. $3\sqrt{3}x - 3y + 12z = 4\pi$

$$\frac{x-1}{3\sqrt{3}} = \frac{y - \sqrt{3}}{-3} = \frac{z - \pi/3}{12}$$

2. $2x - 8y - 5z = 10$

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-8} = \frac{z-2}{-5}$$

(b) z=0.



Gráfica de la función $z = \operatorname{arctg}(y / x)$

11 Dada la función
$f(x,y)=e^{x}\cdot\cos\,y+e^{y}\cdot\cos\,x$, se pide estudiar en el punto (0,0):

a. La diferenciabilidad.
b. Hallar el valor de la derivada direccional máxima en el punto (0,0), indicando en qué dirección se alcanza mediante el vector unitario correspondiente.
c. Hallar el valor de la derivada direccional mínima en el punto (0,0), indicando en qué dirección se alcanza mediante el vector unitario correspondiente.
d. Obtener la derivada direccional de f en el punto (0,0), según la dirección dada por el vector $\vec{v}=\vec{i}-\sqrt{3}\cdot\vec{j}$.
e. La ecuación del plano tangente a la superficie en el punto (0,0,f(0,0)), en el caso de que exista.

Solución: a) $f\left(x,y\right)$ es diferenciable en $\mathbb{R}^2$

b) $f_{u_{máxima}}\left(0,0\right)=\sqrt{2}$, $\vec{u}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$

c) $f_{u_{mínima}}\left(0,0\right)=-\sqrt{2}$, $\vec{u}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\vec{i}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\vec{j}$

d) $f_{v}\left(0,0\right)=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ e) $z=2+x+y$

12 a) ¿En qué direcciones se anula la derivada de $f(x,y)=xy+y^2$ en el punto de coordenadas (2, 5)?.

b) Se considera la función $f\left(x,y\right)=x^2y-4y^3$

Calcular $D_{\vec{u}}f\left(2,1\right)$ en los casos siguientes:

1. $\vec{u}=\left(1,-2\right)$
2. $\vec{u}$ es el vector en la dirección que une los puntos (2,1) y (4,0)
3. siguiendo la dirección que forma con el eje OX un ángulo de $60°$.

Solución: a) $\mathbf{u}_1=\left(\dfrac{-12}{13},\dfrac{5}{13}\right)$;

$\mathbf{u}_2=\left(\dfrac{12}{13},\dfrac{-5}{13}\right)$

(b.1) $4\sqrt{5}$ (b.2) $\dfrac{16}{\sqrt{5}}$ (b.3) $2-4\sqrt{3}$

13 a) La derivada direccional de una función polinómica dada $f\left(x,y\right)$ en el punto $P_o\left(1,2\right)$ es $2\sqrt{2}$ en dirección hacia $P_1\left(2,3\right)$ y -3 en dirección hacia $P_2\left(1,0\right)$. Calcúlense $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en $P_o\left(1,2\right)$, así como la derivada direccional de f en $P_o\left(1,2\right)$ en dirección hacia $P_3\left(4,6\right)$.

b) Sea $f\left(x,y\right)$ una función diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$. Se conocen las derivadas direccionales de $f\left(x,y\right)$ en el punto (1,2), según las direcciones del plano dadas por los vectores unitarios $\vec{u}=\dfrac{\vec{i}+3\vec{j}}{\sqrt{10}}$; $\vec{v}=\dfrac{-\vec{i}+\vec{j}}{\sqrt{2}}$

cuyos valores son $f_u^{'}(1,2)=\dfrac{5}{\sqrt{10}}$,

$f_v^{'}(1,2)=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ respectivamente.

1. Hallar las derivadas parciales $f_x^{'}(1,2)$ y $f_y^{'}(1,2)$.
2. Hallar la derivada direccional de la función f en el punto (1,2), según la dirección del vector $\vec{w}=\dfrac{-\vec{i}-\vec{j}}{\sqrt{2}}$.

Solución: a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(1,2\right)=1$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(1,2\right)=3$,

$D_u\left(1,2\right)=3$ con $u=\left(\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5}\right)$

b) $f_x^{'}(1,2)=-1$; $f_y^{'}(1,2)=2$

$f_w^{'}(1,2)=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$

14 Una colina se representa por la ecuación $z=1200-3x^2-2y^2$, donde la distancia se mide en metros, el eje OX apunta al este y el eje OY apunta al norte. Un hombre está en el punto de coordenadas $(-10,5,850)$.

a. ¿Cuál es la dirección en la que la ladera tiene mayor pendiente?
b. Si el hombre se mueve hacia el este, ¿está descendiendo o ascendiendo?, ¿con qué pendiente?

c. Si el hombre se mueve hacia el suroeste ¿está ascendiendo o descendiendo? ¿con qué pendiente?

Solución: a) $\mathbf{u} = \left(\dfrac{3}{\sqrt{10}}, -\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)$

b) $z'_x > 0$ si $-10 \le x < 0$, es decir z es creciente en la dirección del eje OX positivo y, por tanto, el hombre asciende con pendiente $m = 60$

c) Suroeste: $\mathbf{u} = (-1,-1)$ $z'_{\mathbf{u}} = -20\sqrt{2} < 0$, por lo tanto z es decreciente y el hombre desciende.

15 Comprobar que el gradiente de $f(x,y)$ es perpendicular a la curva de nivel asociada a $z = 6$ considerando

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2$

(b) $f(x,y) = x^2y^2 + \operatorname{sen}(x+y)$

Solución: $\nabla f = \mathbf{n}$, siendo $\mathbf{n}$ un vector normal a la curva de nivel.

16 Calcular, aplicando la regla de la cadena, las derivadas de las siguientes funciones:

(a) $z = x^2 + y^2$ donde $x = \dfrac{1}{t}$, $y = t^2$

(b) $z = 4x - y^2$ donde $x = uv^2$, $y = u^3v$

(c) $\dfrac{dz}{dt}$, siendo $z = x^2 + xy$ con $x = \operatorname{sen} t, \quad y = \cos t$.

(d) $\dfrac{\partial z}{\partial y} + \dfrac{3x}{2y}\dfrac{\partial z}{\partial x}$ en función de x e y, siendo $z = uv$ con $u = x^2 + y^2$, $v = \dfrac{x^2}{y^3}$.

(e) $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, para la función definida así $z = f(x,y) = \log(x^2 + y)$, estando las variables x e y relacionadas con las variables u y v mediante las ecuaciones: $x = e^{uv}$, $y = \dfrac{1}{v}$. Expresar las soluciones en función de las variables u y y.

Solución: a) $\dfrac{dz}{dt} = -\dfrac{2}{t^3} + 4t^3$

b) $\dfrac{\partial z}{\partial u} = 4v^2 - 6u^5v^2$, $\dfrac{\partial z}{\partial v} = 8uv - 2u^6v$

c) $\dfrac{dz}{dt} = \operatorname{sen} 2t + \cos 2t$

d) $\dfrac{\partial z}{\partial y} + \dfrac{3x}{2y}\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2x^2}{y^2} + \dfrac{3x^4}{y^4}$

e) $\dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{2v^2e^{2uv}}{ve^{2uv} + 1}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{2uv^2e^{2uv} - 1}{v^2e^{2uv} + v}$

17 a) Calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ en la superficie definida de forma implícitas: $xy^2 + z^3 + \operatorname{sen} xyz = 0$.

b) Suponiendo que la ecuación $xy - x + 2z + e^{2z} - 2 = 0$, define implícitamente a z como función diferenciable de x e y, calcular dz y d^2z, sabiendo que

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2 + {} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2$$

c) Suponiendo que la ecuación $z\operatorname{arctg}(1 - z^2) + 3x + 5z - 8y^3 = 0$, define a z como función implícita de x e y, calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ en el punto $(1,1,1)$.

Solución: a) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{y^2 + (yz)\cos(xyz)}{3z^2 + (xy)\cos(xyz)}$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2xy + (xz)\cos(xyz)}{3z^2 + (xy)\cos(xyz)}$$

b) $dz = \dfrac{(1-y)\,dx - xdy}{2(1 + e^{2z})}$

$$d^2z = -\frac{\left[(y-1)^2 e^{2z}dx^2 + 2\left((1+e^{2z})^2 + e^{2z}x(y-1)\right)dxdy + x^2e^{2z}dy^2\right]}{2\left(1+e^{2z}\right)^3}$$

c) $z'_x(1,1,1) = -1, \quad z'_y(1,1,1) = 8$

18 Se considera $f(x,y) = \log\left(\dfrac{x+1}{y-2}\right)$. Se pide:

a. Representa el dominio de la función $f(x,y) = \log\left(\dfrac{x+1}{y-2}\right)$

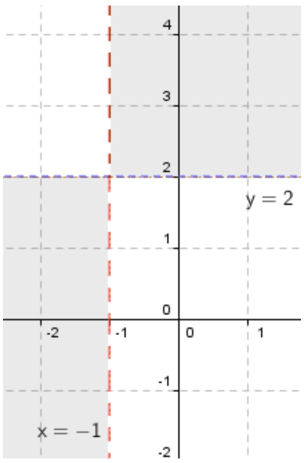
b. Determina las curvas de nivel de $f(x,y) = \log\left(\dfrac{x+1}{y-2}\right)$ y represéntalas

c. Calcula la derivada direccional de $f(x,y) = \log\left(\dfrac{x+1}{y-2}\right)$ en el punto $(5,8)$ en cualquier dirección $\vec{u}$

d. Demuestra que el vector gradiente a $f(x,y) = \log\left(\dfrac{x+1}{y-2}\right)$ en un punto (a,b) de su dominio es ortogonal a la curva de nivel que pasa por el punto (a,b).

e. Calcula la recta tangente a la curva intersección de la superficie definida por $f(x,y) = \log\left(\dfrac{x+1}{y-2}\right)$ y el plano que es perpendicular a $z=0$ y contiene a la recta que pasa por $(5,8,0)$ y tiene por vector director $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2},0\right)$. Justifica la respuesta.

Solución: a)



El dominio es la región del plano sombreada en la figura

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x > -1 \ , \ y > 2\right\} \cup$$
$$\cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x < -1 \ , \ y < 2\right\}$$

b) Rectas: $y = \dfrac{1}{e^k}(x+1) + 2$

c) $D_u f = \dfrac{1}{6}\cos\varphi - \dfrac{1}{6}\operatorname{sen}\varphi$ siendo $u = (\cos\varphi, \operatorname{sen}\varphi)$

d) El vector gradiente en el punto (a,b) es $\nabla \mathbf{f}(a,b) = \left(\dfrac{1}{a+1}, \dfrac{1}{2-b}\right)$, luego está contenido en la recta de pendiente $m = \dfrac{a+1}{2-b}$. La curva de nivel que pasa por el punto (a,b) es la recta de pendiente $m' = \dfrac{b-2}{a+1}$, siendo $m \cdot m' = -1$.

e) La ecuación de la recta pedida en paramétricas es:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 5 + \dfrac{1}{2}t, \quad y = 8 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}t, \\ z = 0 + \dfrac{1-\sqrt{3}}{12}t \end{array} \right\}$$

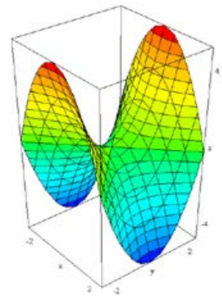
19 Determinar los extremos relativos y los puntos de silla, si existen, de las siguientes funciones:

a) $z = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 20$

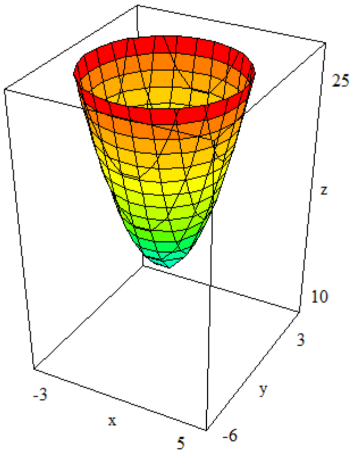
b) $z = 2x^4 + y^2 - 3yx^2$

c) $z = x^3 + y^2 + yx^2 + 2y + 1$

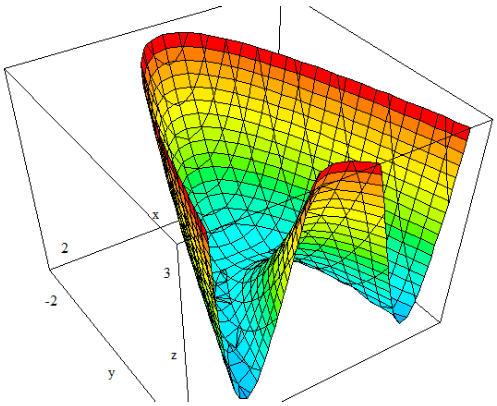
d) $z = x^2y + 2y^2x - 2xy$



Solución: a) $f(1,-2) = 15$ es un mínimo relativo.



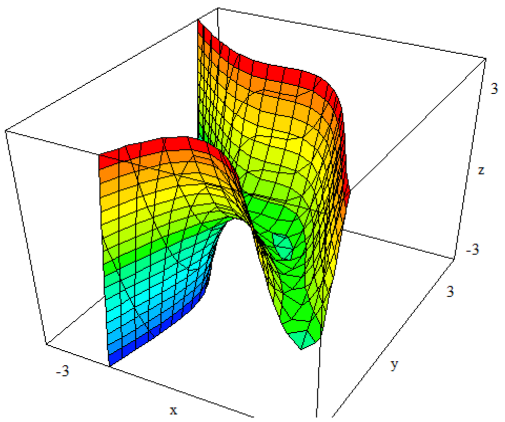
b) $f(0,0)=0$ es un mínimo.



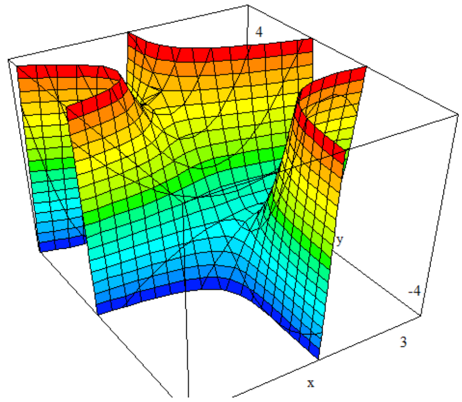
c) $f\left(1,-\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{4}$ es un mínimo relativo.

Además, hay dos puntos de silla en

$P_1(0,-1) \quad y \quad P_2(2,-3)$



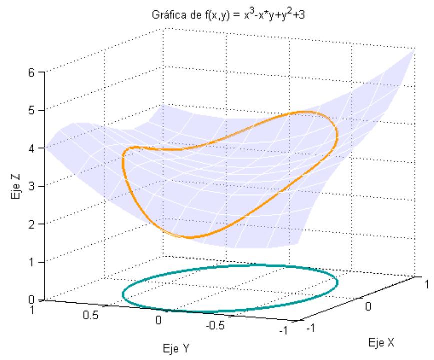
d) $z=-\frac{4}{27}$, es un mínimo relativo en el punto $\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$, $z=0$, es un punto de silla en los puntos $(0,0)$, $(0,1)$ y $(2,0)$



20 Calcular con Matlab los máximos y mínimos de $f(x,y)=x^3-xy+y^2+3$ sometida a la condición de que los puntos (x,y) satisfagan la ecuación de la elipse $x^2+2y^2=1$.

Solución: Puntos críticos

x	y	λ
-0.31	0.67	-0.61
0.94	-0.22	-1.54
-0.98	-0.12	1.54
0.54	0.59	-0.27



21 (a) Calcular los extremos condicionados de $f(x,y)=y-x^2$ sujetos a la ecuación de condición $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{6^2}=1$.

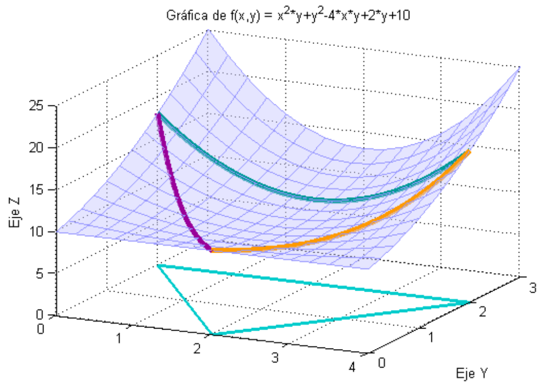
(b) Extremos relativos y absolutos de $f(x,y)=\left(x^2+y^2\right)^2-2\left(x^2-y^2\right)$ sobre $A\equiv\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;/\; x^2+y^2\le 4\right\}$

Solución: (a) $P_1\left(0,6\right)$ es punto de máximo condicionado, el valor es 6; $P_2\left(0,-6\right)$ es punto de máximo condicionado, el valor es -6; $P_3\left(2\sqrt{2},-2\right)$ y $P_4\left(-2\sqrt{2},-2\right)$ son puntos de mínimo condicionado, el valor es -10.

(b) $P_1\left(0,0\right)$ es punto de silla;
$P_2\left(-1,0\right)$ y $P_3\left(1,0\right)$ son puntos de mínimo relativo y absoluto, el valor es -1. El máximo absoluto está en $P_4\left(0,-2\right)$ y $P_5\left(0,2\right)$, el valor es 24.

22 Calcular los extremos absolutos de la función $f\left(x,y\right)=x^2y+y^2-4xy+2y+5$ en el dominio D dado por el triángulo de vértices A(2,0), B(4,2) y C(0,2). Comprueba los resultados con Matlab.

Solución: La función toma como valor mínimo absoluto 4 (en P(2,1)) y como valor máximo absoluto 13 (en B(4,2) y en C(0,2)).



Test de autoevaluación

1 El dominio, el rango y la curva de nivel $z=0$ de la función $z=1-\sqrt{x^2+2y^2}$ son respectivamente:

A) $\text{Dominio}=\mathbb{R}^2$, $\text{Rango}=\mathbb{R}$, la curva de nivel es una circunferencia.
B) $\text{Dominio}=\mathbb{R}$, $\text{Rango}=(-\infty,1)$, la curva de nivel es una circunferencia.
C) $\text{Dominio}=\mathbb{R}^2$, $\text{Rango}=\left(-\infty,1\right]$, la curva de nivel es una elipse.
D) Ninguna de las anteriores.

2 Las derivadas parciales de la función $f(x,y)=xe^{x^2y}$ en el punto $\left(1,\log 2\right)$ son:

A) $f'_x\left(1,\log 2\right)=4\log 2+2$, $f'_y\left(1,\log 2\right)=1$.
B) $f'_x\left(1,\log 2\right)=4\log 2+2$, $f'_y\left(1,\log 2\right)=2$.
C) $f'_x\left(1,\log 2\right)=2\log 2+1$, $f'_y\left(1,\log 2\right)=2$
D) Ninguna de las anteriores.

3 Las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal a la superficie $xyz=10$ en el punto $\left(1,2,5\right)$ son:

A) $10x+5y+2z-30=0$ y
$x=1+10t,\ \ y=2+5t,\ \ z=5+2t$.
B) $10x+5y+2z-30=0$ y
$x=1+2t,\ \ y=2+t,\ \ z=5+5t$.
C) $2x+y+10z-6=0$ y
$x=1+10t,\ \ y=2+5t,\ \ z=5+2t$
D) Ninguna de las anteriores.

4 La pendiente de la curva intersección de la superficie $z=x^2+4y^2$ con el plano $y=1$ en el punto $\left(2,1,8\right)$ es:

A) $m=4$.
B) $m=1$.
C) $m=2$.
D) Ninguna de las anteriores.

5 Sea z una función definida implícitamente por la ecuación $1+xyz-e^{xyz}=0$, entonces se cumple:

A) $z'_x=-\dfrac{z}{x}$.

B) $z'_y = \dfrac{z}{y}$.

C) $yz'_x + xz'_y = 0$.

D) Ninguna de las anteriores

6 El valor máximo de la derivada direccional de la función $f(x,y) = x\sqrt{x^2+y^2}$ en el punto $(1,1)$ es f'_α y su dirección viene dada por el vector $\mathbf{u}$:

A) $f'_\alpha = 5$, $\mathbf{u} = (3,1)$.

B) $f'_\alpha = \sqrt{5}$, $\mathbf{u} = (1,3)$

C) $f'_\alpha = 0$, $\mathbf{u} = (1,1)$.

D) Ninguna de las anteriores.

7 Decir cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera:

A) El plano tangente a la superficie $z = x + y$ en cualquier punto de ella es $z - x - y = 0$.

B) La función $f(x,y) = x^2 + y^2$ no es diferenciable en $(0,0)$.

C) La función $f(x,y) = 2x^2 - y^2$, en el punto $(1,-2)$, crece más rápido en la dirección del eje OX que en la dirección del eje OY.

D) Ninguna de las anteriores.

8 Aproximar el valor de $z = e^{x+2y}$ en el punto $(0.1,-0.2)$, utilizando la diferencial de en $(0,0)$. El resultado obtenido es:

A) $e^{-0.3} \approx 0.65$

B) $e^{-0.3} \approx 0.7$

C) $e^{-0.3} \approx 0.75$

D) Ninguna de las anteriores

9 Si $z = f(x,y)$, con $x = s^2 + t^2$ e $y = \dfrac{s}{t}$, se verifica:

A) $2y\dfrac{\partial z}{\partial x} = t\dfrac{\partial z}{\partial t} - s^2\dfrac{\partial z}{\partial s}$.

B) $2x\dfrac{\partial z}{\partial x} = t\dfrac{\partial z}{\partial t} - s\dfrac{\partial z}{\partial s}$.

C) $2x\dfrac{\partial z}{\partial x} = t\dfrac{\partial z}{\partial t} + s\dfrac{\partial z}{\partial s}$.

D) Ninguna de las anteriores.

10 La función $f(x,y) = x^2y^2$:

A) Tiene un mínimo absoluto en $(0,0)$.

B) Tiene un mínimo absoluto en $(0,0)$.

C) Tiene un punto de silla en $(0,0)$.

D) Ninguna de las anteriores.

Soluciones del Test:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c	b	a	a	a	d	a	b	c	a

Ejercicios resueltos

DOMINIO. RECORRIDO. GRÁFICA. CONTINUIDAD

1 Dada las superficies

$$(1) \quad z = x^2 + y^2 \qquad\qquad (2) \quad y = \frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{9}$$

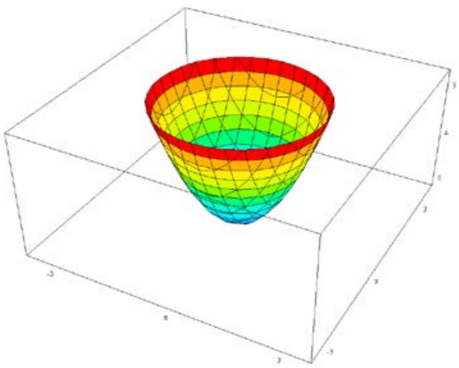
Se pide:

1. Realizar un bosquejo de su gráfica.
2. Obtener las trazas

3. Obtener las curvas de nivel.

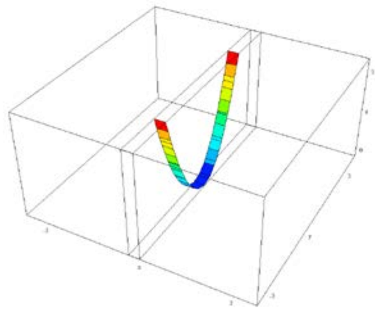
Solución (1)

Se trata de un paraboloide



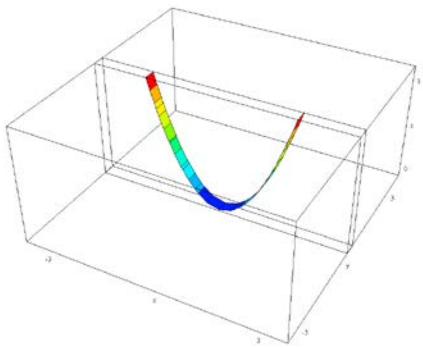
Al cortar por planos x=cte:

Parábolas $z = cte + y^2$



Al cortar por planos y=cte:

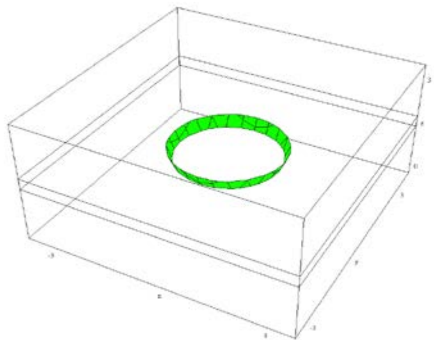
Parábolas $z = x^2 + cte$

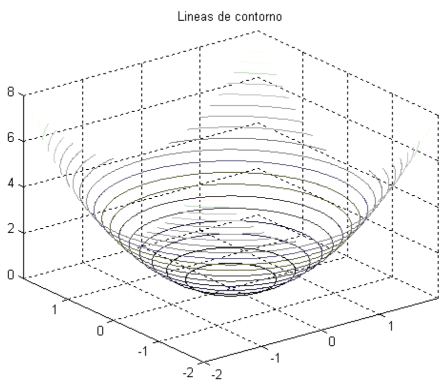


Al cortar por planos z=cte (curvas de nivel):

Circunferencias

$Cte = x^2 + y^2 \quad (Cte > 0)$

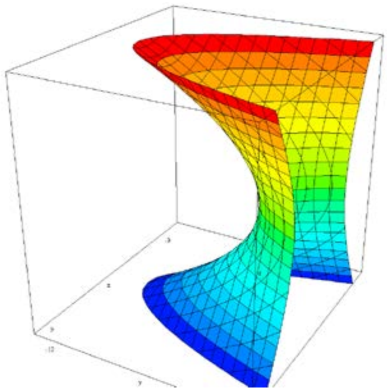




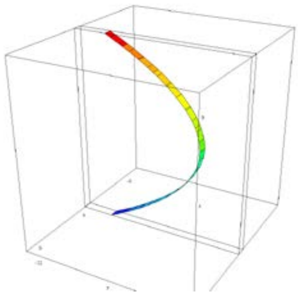
Solución (2)

Se trata de un hiperboloide

Curvas $x = cte$:

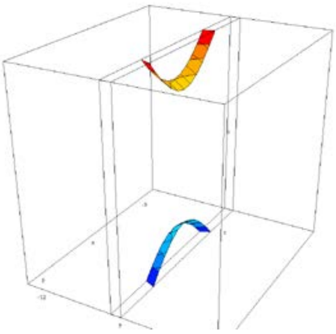


Parábolas $y = Cte - \dfrac{z^2}{9}$



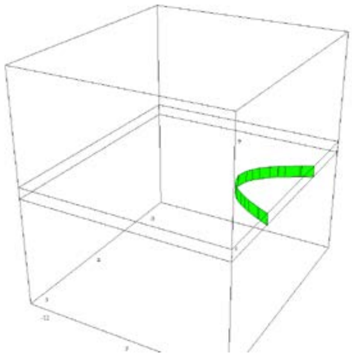
Curvas $y = cte$:

Hipérbolas $Cte = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{z^2}{9}$



Curvas $z = cte$:

Parábolas $y = \dfrac{x^2}{4} - Cte$



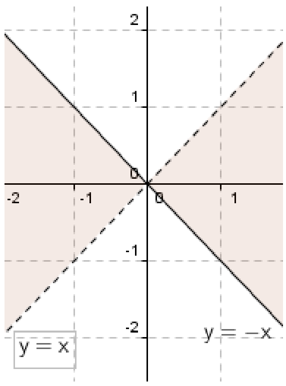
2 Representar el dominio de la función $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2 e^{\frac{x+y}{x-y}}}$.

Solución

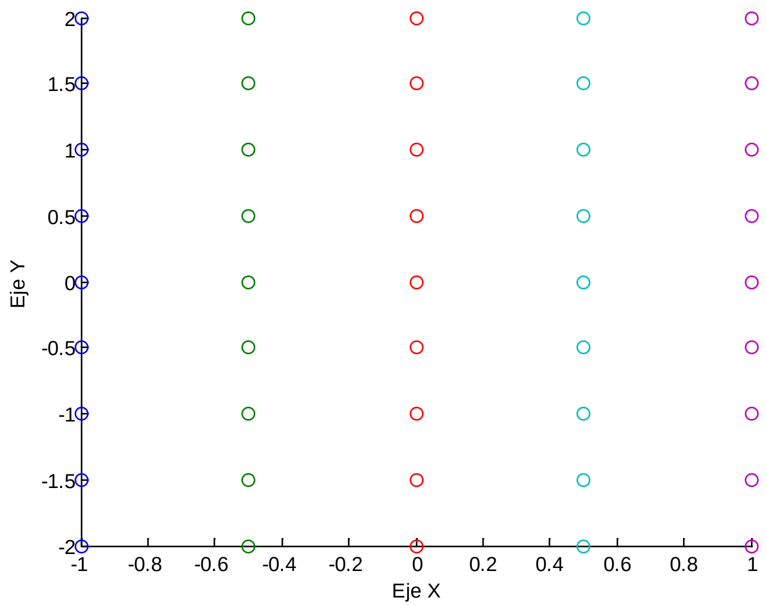
El dominio es el conjunto de los puntos

$$Domf = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, (x-y)(x+y) \geq 0, \quad x \neq y \right\}$$

es decir, los puntos del plano comprendidos entre las rectas $x = y$, $x = -y$ salvo los de la recta $x = y$, gráficamente



3 (a) Representar en Matlab los puntos siguientes en el espacio tridimensional considerando que están en el plazo z=0.

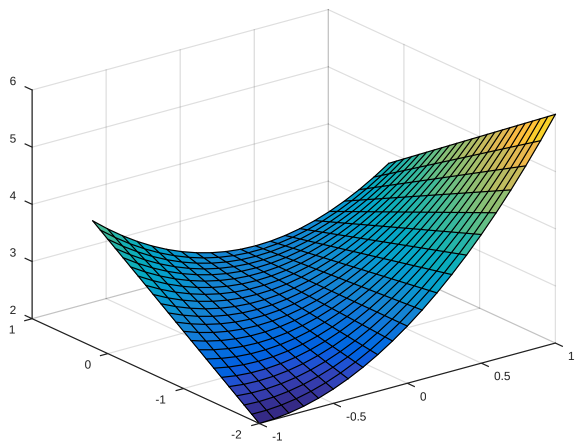


(b) Representar junto a los puntos del apartado anterior la superficie: $f\left(x,y\right)=x^2-xy+3$

Solución a)

```
x=-1:0.5:1;y=-2:0.5:0.2;
[X,Y]=meshgrid(x,y);
plot3(X,Y,0*X,'o')
```

Solución b)



4 Dada la función $f(x,y)=y\log\left(\dfrac{x^3y}{x^2+y^2}\right)+\log 2\,.$

Se pide:

a) Determinar y representar el dominio de la función.

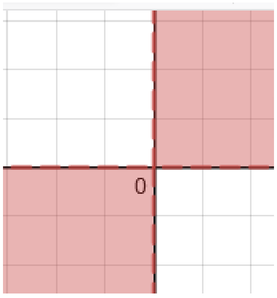
b) Escribir el código Matlab para representar la gráfica de $f\left(x,y\right)$ en un conjunto rectangular en el que esté definida. Representar sobre dicha superficie el punto (1,3,f(1,3))

Solución a)

El dominio de la función es el conjunto de los puntos (x,y) del plano que verifican

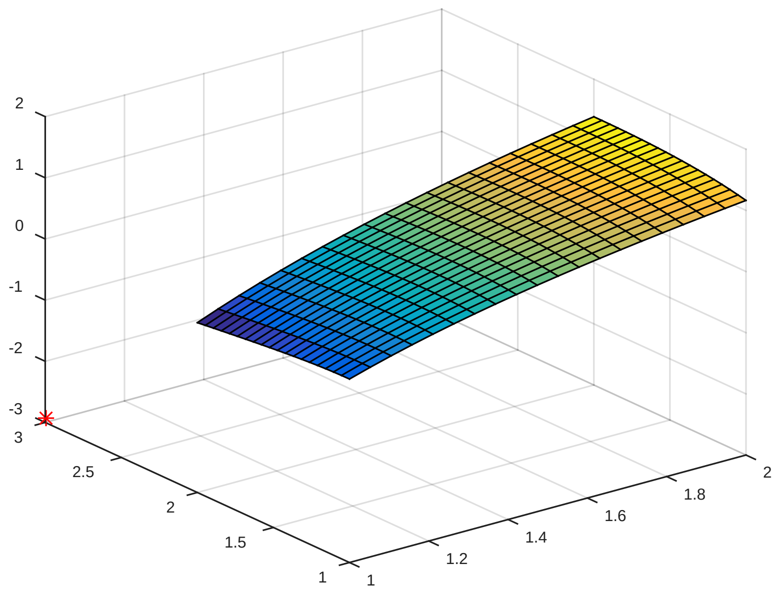
$$\frac{x^3 y}{x^2+y^2}>0,\ \left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)\Leftrightarrow x^3 y>0,\ x\neq 0\ ,\ y\neq 0$$

Gráficamente se trata de los puntos del plano del primer y tercer cuadrante sin incluir los ejes coordenados.



Solución b)

Escribiremos el código Matlab para representar la superficie en el dominio [1,2]x[1,2]




```
x=linspace(1,2,30);
y=x;[X,Y]=meshgrid(x);
Z=log(X.^3.*Y./(X.^2+Y.^2))+log(2);
surf(X,Y,Z)
hold on
f=inline('y.*log(x.^3.*y./(x.^2+y.^2))+log(2)')
plot3(1,3,f(1,3), '*r')
```

5 Calcular y representar el dominio de la función $f\left(x,y\right)=arc\,\text{sen}\,\dfrac{x}{x+y}$ y las curvas de nivel de la función $g\left(x,y\right)=e^{xy}$

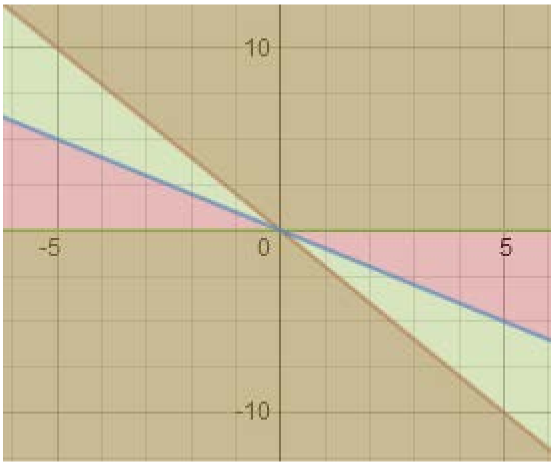
Solución

El dominio de f es el conjunto de los puntos (x,y) del plano que verifican

$$\begin{cases}-1\le \dfrac{x}{x+y}\le 1\\ x+y\ne 0\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\begin{cases}-x-y\le x\le x+y & x+y>0\\ ó\\ -x-y\ge x\ge x+y & x+y<0\end{cases}\\ x+y\ne 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\begin{cases}-2x\le y & y\ge 0 & y>-x\\ ó\\ -2x\ge y & 0\ge y & y<-x\end{cases}\\ x+y\ne 0\end{cases}$$

Es decir, la zona coloreada de marrón en el siguiente gráfico



Las curvas de nivel son hipérbolas ya que:

$$f\left(x,y\right)=C \qquad e^{xy}=C \qquad >0 \quad\Leftrightarrow\quad xy=\log C \quad \left(C>0\right)$$

6 Determinar y dibujar la curva de nivel de la función $f\left(x,\text{y}\right)=x^2+y^2+3x-5y+4$ que pasa por el punto (1,1).

Solución

La curva de nivel de la función

$$f\left(x,\text{y}\right)=x^2+y^2+3x-5y+4$$

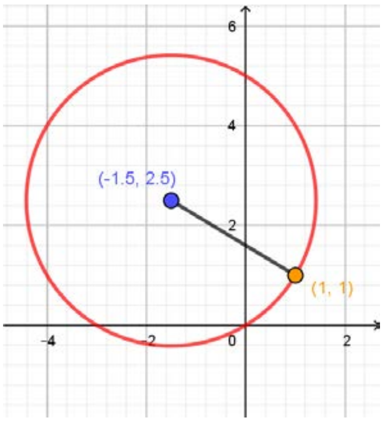
en el punto (1,1) es

$$x^2+y^2+3x-5y+4=f\left(1,1\right)$$

$$x^2+y^2+3x-5y+4=4 \Leftrightarrow \left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{9}{4}+\frac{25}{4}=\frac{17}{2}$$

Se trata de una circunferencia de centro (-3/2,5/2) y radio $\sqrt{\frac{17}{2}}$.



7

Escribir el código Matlab para representar:

a) En una misma figura la superficie de ecuación

$$\left.\begin{array}{l} x\left(u,v\right)=u-u^3/3+u\,v^2 \\ y(u,v)=v-v^3/3+vu^2 \\ z(u,v)=u^2-v^2 \end{array}\right\} u\in\left[-2,2\right], v\in\left[-3,3\right]$$

y el plano z=1.

b) En una misma figura la curva de ecuación

$$\left.\begin{array}{l} x\left(t\right)=5\cos\left(t\right)-\cos\left(5t\right) \\ y(t)=5sen\left(t\right)-sen\left(5t\right) \\ z(t)=\cos\left(t\right)+6 \end{array}\right\} t\in\left[0,2\pi\right]$$

y la curva proyección sobre el plano z=0.

Solución a)

```
figure(3)
u=linspace(-2,2,25);
v=linspace(-3,3,25);
[U,V]=meshgrid(u,v);
x=U-U.^3/3+U.*V.^2;
y=V-V.^3/3+V.*U.^2;
```

```
z=U.^2-V.^2;
surf(x,y,z)
%Viendo la superficie anterior, los puntos de la
%superficie se proyectan en un dominio
%contenido en el rectángulo R=[-20,20]x[-10,10]
hold on
x=linspace(-20,20,2);
y=linspace(-10,10,2);
[X,Y]=meshgrid(x,y);
surf(X,Y,0*X+1)
hold off
```

Solución b)

```
t=linspace(0,2*pi);
xx=5*cos(t)-cos(5*t);
yy=5*sin(t)-sin(5*t);
zz=cos(t)+6;
figure(4)
hold on
plot3(xx,yy,zz)
plot3(xx,yy,0*xx)
hold off
```

8

Estudiar la continuidad en todo $\mathbb{R}^2$ de las siguientes funciones:

a) $f(x,y)=\dfrac{\operatorname{arctg}(3xy-6)}{xy-2}$ b) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{|x|+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Solución a)

Esta función debe estudiarse en los puntos de la curva $xy=2$, porque en ellos se produce una indeterminación de la forma $\dfrac{0}{0}$.

Para resolver esta indeterminación calcularemos el límite doble, utilizando la equivalencia: $\operatorname{arctg} x \underset{x\to 0}{\approx} x$

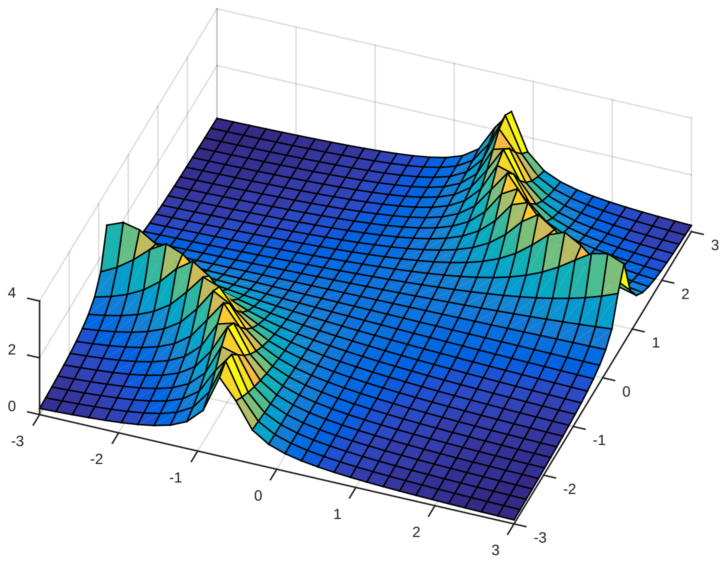
que aplicada a nuestra función se traduce en: $\operatorname{arctg}(3xy-6) \underset{xy\to 2}{\approx} 3(xy-2)$

Por lo tanto,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\ ab=2}}\frac{\operatorname{arctg}(3xy-6)}{xy-2}\approx\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\ ab=2}}\frac{(3xy-6)}{xy-2}=3$$

Si se define de nuevo la función como $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{arctg}(3xy-6)}{xy-2}, & xy\neq 2\\ 3, & xy=2\end{cases}$

Resulta una función continua en $\mathbb{R}^2$, como se aprecia en la gráfica.



Solución b)

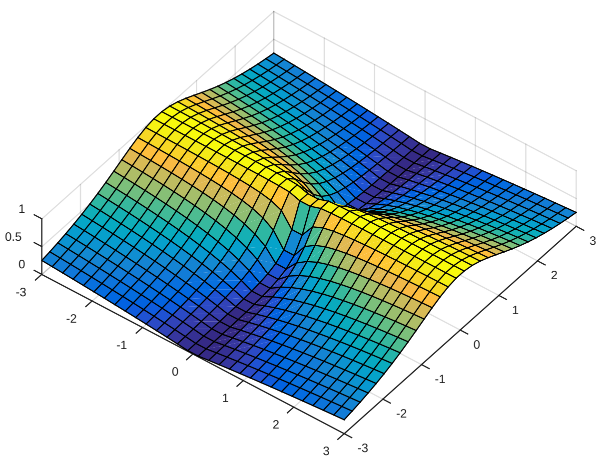
Esta función debe estudiarse en $(0,0)$, puesto que es el único punto que anula el denominador. Calculamos el límite doble,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|}{|x|+y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x>0}} \frac{x}{x+y^2} \approx \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|}{|x|+y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x<0}} \frac{-x}{-x+y^2} \approx \lim_{x\to 0} \frac{-x}{-x} = 1$$

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ (x=0)}} \frac{|x|}{|x|+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{0+y^2} = 0$$

Por lo tanto, la función no es continua en $(0,0)$, puesto que el límite depende de la dirección de aproximación al origen, como se aprecia en la figura.



DERIVADAS PARCIALES. DERIVADAS DIRECCIONALES. FUNCIONES DIFERENCIALES

9 El precio de un piso P en función de la superficie S y de la calidad de los materiales C viene dado por una función $P(S,C)$. ¿Es razonable que $\frac{\partial P}{\partial C} > 0$? ¿Es razonable que $\frac{\partial P}{\partial S} < 0$?

Solución

- Si $\frac{\partial P}{\partial C} > 0$ significa que a mayor calidad de los materiales aumenta el precio de la vivienda. Parece razonable.
- Si $\frac{\partial P}{\partial S} < 0$ significaría que al aumentar la superficie del piso el precio disminuiría. Esto no parece lógico.

10 Se considera la función $g(x,y) = \log(2 - y - x^2) - e^{\sqrt{1-x-y^2}}$. Obtener y representar su dominio. ¿Es diferenciable en el punto (0,0)? Justificar la respuesta.

Solución

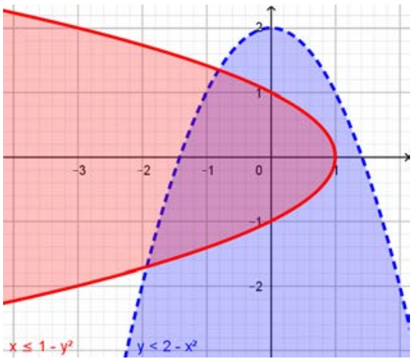
El dominio es el conjunto de puntos (x,y) del plano que cumplen a la vez las siguientes condiciones

$$2 - y - x^2 > 0, \quad 1 - x - y^2 \geq 0$$

es decir,

$$2 - x^2 > y, \quad 1 - y^2 \geq x$$

Por lo tanto, la región está comprendida entre dos parábolas



En el punto (0,0) la función es diferenciable ya que la función g es continua en el origen y las derivadas parciales existen en el origen

$$g'_x(x,y) = \frac{-2x}{2 - y - x^2} + \frac{1}{2}\left(1 - x - y^2\right)^{-1/2} e^{\sqrt{1-x-y^2}}$$

$$g'_y(x,y)=\frac{-1}{2-y-x^2}+\frac{1}{2}\left(1-x-y^2\right)^{-1/2}2ye^{\sqrt{1-x-y^2}}$$

siendo además continuas en el origen por ser composición de funciones continuas

11 Dada la función $f(x,y)=x^2\sin(xy)$ se pide:

a) Calcular su dominio.

b) Determinar si la función $f(x,y)$ es o no diferenciable en él justificando la respuesta.

Solución a)

El dominio de la función es $\mathbb{R}^2$.

Solución b)

La función es diferenciable en su dominio ya que

- la función es continua (por ser composición de funciones continuas)
- tiene derivadas parciales primeras

$$f'_x(x,y)=2x\sin(xy)+x^2\,\mathrm{y}\cos(xy)$$

$$f'_y(x,y)=x^3\cos(xy)$$

- tiene al menos una de las derivadas parciales de primer orden continua (en este caso son las dos derivadas parciales continuas).

12 Dada la superficie S de ecuación $z=\dfrac{xsen(y)+y\cos(x)}{x^2+y^2}+7$ y el punto $P\left(0,3,\dfrac{22}{3}\right)$.

Se pide:

a) Escribir el código Octave/Matlab para representar la superficie S en un dominio rectangular que contenga al punto (0,3) y donde la función sea continua.

b) Escribir el código Octave/Matlab para representar los puntos de la malla en el plazo z=0 que se ha utilizado para dibujar la superficie del apartado anterior.

c) Calcular la pendiente de la recta r que es paralela al plano ZX y es tangente a la superficie S en el punto P.

d) Obtener la ecuación de la recta r del apartado anterior y escribir el código Octave/Matlab para representarla en una misma gráfica junto con la superficie.

e) Escribir el código Octave/Matlab para representar en el plano la curva de nivel que pasa por el punto P.

Solución a)

El dominio de la función es $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. La malla para representar la superficie no puede contener al origen. Consideramos una malla en el rectángulo $[-1,1] \text{x} [2,4]$ que contiene al punto

```
x=linspace(-1,1,20);
y=linspace(2,4,20);
[X,Y]=meshgrid(x,y);
Z=(X.*sin(Y)+Y.*cos(X))./(X.^2+Y.^2)+7;
surf(X,Y,Z);
hold on
plot3(X,Y,0*Z,'o')
```

Solución c) y d)

La pendiente de la recta r es la derivada parcial de z respecto x en el punto (0,3)

$$z_x'(x,y) = \frac{\left(sen(y) - ysen(x)\right)\left(x^2 + y^2\right) - \left(xsen(y) + y\cos(x)\right)2x}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

$$z_x'(0,3) = \frac{\left(sen(3) - 3sen(0)\right)\left(0^2 + 3^2\right) - \left(0\,sen(3) + 3\cos(0)\right)2 \cdot 0}{\left(0^2 + 3^2\right)^2} = \frac{sen(3)}{3^2}$$

La ecuación de la recta r es

$$\begin{cases} x = 0 + t & \\ y = 3 & t \in \mathbb{R} \\ z = 22/3 + \dfrac{sen(3)}{9} t & \end{cases}$$

```
%Representación de la recta
val=sin(3)/9;
t=[-2 2];
x=0+t;
y=3+0*t;
z=22/3+val*t;
plot3(x,y,z)
hold off
```

Solución e)

Considerando $f(x,y) = \dfrac{xsen(y) + y\cos(x)}{x^2 + y^2} + 7$, la curva de nivel que pasa por P es la intersección de la superficie con el plano z=22/3. Es decir, la curva $f(x,y) = \dfrac{22}{3}$

$$\frac{x sen(y) + y\cos(x)}{x^2 + y^2} + 7 = \frac{22}{3} \Rightarrow \frac{x sen(y) + y\cos(x)}{x^2 + y^2} = \frac{1}{3}$$

```
%Código Octave/Matlab para representar la curva
figure(2)
hold on
ezplot('(x*sin(y)+y*cos(x))/(x^2+y^2)+7=22/3')
plot(0,3,'o')
hold off
```

13 La derivada direccional de $f(x,y) = e^{x/2}\cos y$ en el punto $P(0,\pi)$ en la dirección u es ¼. Calcular este vector y el ángulo que forma con el eje OX positivo.

Solución

Se considera la dirección $u = (\cos\varphi, sen\varphi)$, como f es diferenciable en $P(0,\pi)$ entonces

$$D_u f(0,\pi) = \nabla f(0,\pi)\bullet u = \frac{\partial f}{\partial x}(0,\pi)\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}(0,\pi) sen\varphi = \frac{1}{4}$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x}(0,\pi) = \frac{1}{2}e^{x/2}\cos y \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,\pi) = -\frac{1}{2}\\
&\frac{\partial f}{\partial y}(0,\pi) = -\frac{1}{2}e^{x/2} seny \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,\pi) = 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

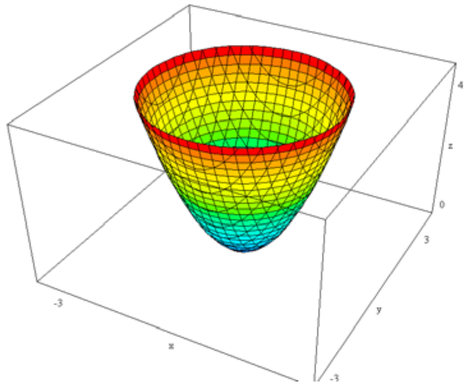
$$-\frac{1}{2}\cos\varphi + 0 = \frac{1}{4} \rightarrow \cos\varphi = \frac{-1}{2} \rightarrow sen\varphi = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

La solución será entonces

$$\begin{aligned}
u &= \left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \varphi = \frac{2\pi}{3}\\
u &= \left(\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right) \quad \varphi = -\frac{2\pi}{3}
\end{aligned}$$

14 El conjunto de los puntos (x,y) con $0 \le x \le 5$, $0 \le y \le 5$ es un cuadrado colocado en el primer cuadrante del plano XY. Supongamos que se caliente ese cuadrado de tal manera que $T(x,y) = x^2 + y^2$ es la temperatura en el punto $P(x,y)$. ¿En qué sentido se establecerá el flujo de calor en el punto $P_o(3,4)$?

Solución



Indicación: El flujo de calor en la región está dado por una función vectorial $C\left(x,y\right)$ porque su valor en cada punto depende de las coordenadas de éste. Sabemos por física que $C\left(x,y\right)$ será perpendicular a las curvas isotermas $T\left(x,y\right)=c$ donde c es constante. El gradiente y todos sus múltiplos verifican esta condición. En esta situación nos dice la física que $C=-K\nabla T$ donde K es una constante positiva (llamada conductividad térmica). Nótese que la razón del signo negativo es que el calor fluye desde puntos de mayor temperatura a puntos de menor temperatura.

Como $T\left(3,4\right)=25$ el punto P está en la isoterma $T\left(x,y\right)=25$, que es un cuadrante de la circunferencia $x^2+y^2=25$. Sabemos que el flujo de calor en $P_o\left(3,4\right)$ es $C_o=-K\nabla T_o$.

Como $\nabla T=2x\vec{i}+2y\vec{j}$ se tiene que $\nabla T_o=6\vec{i}+8\vec{j}$. Así el flujo de calor en Po es: $C_o=-K\left(6\vec{i}+8\vec{j}\right)$. Como la conductividad térmica es positiva se puede afirmar que el calor fluye en Po en el sentido del vector unitario:

$$\vec{u}=\frac{-\left(6\vec{i}+8\vec{j}\right)}{\sqrt{\left(-6\right)^2+\left(-8\right)^2}}=-\frac{3}{5}\vec{i}-\frac{4}{5}\vec{j}$$

15 Hallar a y b para que la derivada direccional máxima de la función $e^{ax+by}\cos\left(x+y\right)-z=0$ en el punto $\left(0,0\right)$ sea $3\sqrt{2}$ en la dirección de la bisectriz del primer cuadrante.

Solución

La función $z=e^{ax+by}\cos\left(x+y\right)$ es continua por ser composición de funciones continuas y es diferenciable por ser las derivadas parciales continuas en todo $\mathbb{R}^2$:

$$z'_x=\frac{\partial f}{\partial x}=ae^{ax+by}\cos\left(x+y\right)-e^{ax+by}\operatorname{sen}\left(x+y\right)$$

$$z'_y=\frac{\partial f}{\partial y}=be^{ax+by}\cos\left(x+y\right)-e^{ax+by}\operatorname{sen}\left(x+y\right)$$

Esto significa que la derivada direccional en un punto siguiendo una dirección se puede obtener como el producto escalar de la dirección por el gradiente en el punto considerado.

$$D_u f(0,0) = \langle \nabla f(0,0), u \rangle = 3\sqrt{2}$$

Por otro lado el gradiente nos marca la dirección donde la derivada direccional es máxima que en este caso es además la bisectriz del primer cuadrante luego en este caso:

$$\left\| \nabla f(0,0) \right\| = 3\sqrt{2} \qquad u = \frac{1}{\left\| \nabla f(0,0) \right\|} \nabla f(0,0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

Calculando el gradiente en el origen:

$$\nabla f(0,0) = a\vec{i} + b\vec{j}$$

se tiene que cumplir que:

$$\sqrt{a^2 + b^2} = 3\sqrt{2} \qquad u = \left(\frac{a}{3\sqrt{2}}, \frac{b}{3\sqrt{2}} \right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \Rightarrow a = b$$

Por lo tanto, resolviendo el sistema formado por estas dos ecuaciones: $a = b = 3$.

16 Hallar a y b para que la derivada direccional de la función $f(x,y) = e^{ax+by}$ en el punto (0,0), se produzca en la dirección de la bisectriz del segundo cuadrante y su valor sea $3\sqrt{2}$.

Solución

Puesto que la función es diferenciable, la derivada direccional máxima en $(0,0)$ se produce en la dirección del gradiente en este punto,

$$\nabla f(0,0) = \left(f'_x(0,0), f'_y(0,0) \right) = (a,b)$$

Por otra parte, un vector director de la bisectriz del segundo cuadrante es $(-1,1)$. Si la derivada direccional máxima tiene que darse en esta dirección, el vector gradiente y el vector $(-1,1)$ tienen que ser proporcionales, por tanto,

$$\frac{a}{-1} = \frac{b}{1} = \lambda \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a = -\lambda \\ b = \lambda \end{cases}$$

Es decir, $\nabla f(0,0) = (-\lambda, \lambda)$

Además el valor de la derivada direccional máxima es el módulo del gradiente, por tanto debe de ser,

$$\left| \nabla f(0,0) \right| = \sqrt{(-\lambda)^2 + \lambda^2} = \lambda\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \quad \rightarrow \quad \lambda = 3$$

Con este resultado se tiene, $a = -3, \quad b = 3$

17 Determinar los valores a, b y c para que la derivada direccional de la función $f(x,y,z) = axy^2 + byz + cz^2x^3$ tenga en el punto (1,2,-1) un valor máximo de 64 en una dirección paralela al eje Z.

Solución

La derivada direccional máxima de $f(x,y,z) = axy^2 + byz + cz^2x^3$ en el punto (1,2,-1) se alcanza en la dirección del gradiente en P y su valor máximo es el módulo del gradiente. En consecuencia, como

$$\nabla f(x,y,z) = \left(ay^2 + 3cz^2x^2, 2axy + bz, by + 2czx^3\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \nabla f(1,2,-1) = \left(4a + 3c, 4a - b, 2b - 2c\right)$$

se debe cumplir $\nabla f(1,2,-1) = (0,0,64)$

$$\left.\begin{array}{r} 4a+3c=0 \\ 4a-b=0 \\ 2b-2c=64 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4a+3c=0 \\ b=4a \\ c=b-32 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4a=-3c \\ 4a=b \\ 4a=c+32 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} c=-8 \\ b=24 \\ a=6 \end{array}\right\}$$

18 Dada la superficie $z = x\sqrt{x+y}$

a) Hallar la pendiente de la recta que es paralela al plano XZ y tangente a la superficie en el punto P(1, 3,2).

b) Calcular la ecuación de la recta tangente del apartado anterior

c) Calcular la derivada direccional de la función en el punto (1,3) en la dirección del vector que une los puntos (1,3) con (2,4).

Solución a)

Se trata de calcular la derivada parcial de la función en el punto (1, 3)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sqrt{x+y} + \frac{x}{2\sqrt{x+y}} \qquad \rightarrow \qquad \frac{\partial z}{\partial x}(1,3) = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$

Solución b)

La ecuación de la recta tangente es:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = 3 \\ z = 2 + \dfrac{9}{4}t \end{array}\right\} \; t \in \mathbb{R}$$

Solución c)

Como f es diferenciable en el punto (1,3) por tener derivadas parciales continuas, la derivada direccional se calculará multiplicando escalarmente el gradiente por la dirección:

$$D_u f\left(1,3\right) = \nabla f\left(1,3\right) \cdot \mathrm{u}$$

Como

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{2\sqrt{x+y}} \rightarrow \qquad \frac{\partial z}{\partial y}\left(1,3\right) = \frac{3}{4}$$

$$\nabla f\left(1,3\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\left(1,3\right), \frac{\partial z}{\partial y}\left(1,3\right)\right) = \left(\frac{9}{4}, \frac{3}{4}\right) \qquad \mathrm{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

se tendrá

$$D_u f\left(1,3\right) = \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

19 Dada la función $f\left(x,y\right) = x^2 + sen\left(xy\right)$, determinar

a) las direcciones donde se verifica que la derivada direccional de f en el punto A(1,0) es 1.

b) en qué dirección desde el punto A(1,0) aumentará más la función f, ¿en la dirección del vector que une A(1,0) y B(4,4) o considerando la dirección que forma un ángulo de $\varphi = \frac{\pi}{3}$ radianes con el eje x?

Solución a)

Dada la función $f\left(x,y\right) = x^2 + sen\left(xy\right)$ que es diferenciable en todo su dominio, $\mathbb{R}^2$, el gradiente en el punto (0,1) es

$$\nabla f\left(x,y\right) = \left(2x + y\cos\left(xy\right), x\cos\left(xy\right)\right) \rightarrow \nabla f\left(2,1\right) = \left(2,1\right)$$

La dirección en la que la derivada direccional en el punto (1,0) es 1 será aquella $u = \left(\cos\varphi, sen\varphi\right)$ en la que se verifique

$$\nabla f\left(1,0\right) \bullet \mathbf{u} = 1 \Leftrightarrow \left(2,1\right) \bullet \left(\cos\varphi, sen\varphi\right) = 1 \Leftrightarrow 2\cos\varphi + sen\varphi = 1$$

$$\Rightarrow 1 - \cos^2\varphi = 1 - 4\cos\varphi + 4\cos^2\varphi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5\cos^2\varphi - 4\cos\varphi = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\varphi = 0 \\ \cos\varphi = \dfrac{4}{5} \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{u} = \left(0,1\right) \quad ó \quad \mathbf{u} = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$$

Solución b)

Para saber en qué dirección aumentará más la función desde el punto (1,0) calculamos las derivadas direccionales:

- Si $\mathbf{u} = \dfrac{\vec{AB}}{\left|\vec{AB}\right|} = \left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right) \Leftrightarrow D_{\mathbf{u}} f\left(1,0\right) = \left(2,1\right) \bullet \left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right) = 2$
- Si $\mathbf{v} = \left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right), \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right) \Leftrightarrow D_{\mathbf{v}} f\left(1,0\right) = \left(2,1\right) \bullet \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

En la dirección del vector **u** aumentará más la función.

20 El potencial eléctrico en un punto $\left(x, y\right)$ viene dado por $V = \log\sqrt{x^2 + y^2}$. Calcular la derivada direccional de V en el punto (3,6) en la dirección que va desde ese punto al (2,4). Demostrar que la variación del potencial en cualquier punto es máxima a lo largo de rectas que pasan por el origen.

Solución

El vector que une los dos puntos es (-1,-2) se tiene que $u = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}, -\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$. Como

$$\nabla V\left(x, y\right) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}\right) \qquad \nabla V\left(3,6\right) = \left(\frac{3}{3^2 + 6^2}, \frac{6}{3^2 + 6^2}\right) = \left(\frac{3}{45}, \frac{6}{45}\right) = \left(\frac{1}{15}, \frac{2}{15}\right)$$

la derivada direccional es

$$DV_u\left(3,6\right) = \nabla V\left(3,6\right) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \left(\frac{1}{15}, \frac{2}{15}\right) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{-5}{15\sqrt{5}} = -\frac{-\sqrt{5}}{15}$$

Como hemos visto,

$$\nabla V\left(x, y\right) = \frac{1}{x^2 + y^2}\left(x, y\right)$$

Por lo tanto la dirección del vector gradiente es la del vector (x,y), este vector es director de la recta que pasa por el punto y por el origen de coordenadas.

APROXIMACIÓN LINEAL. DIFERENCIAL. PLANO TANGENTE.

21 Utilizando la diferencial primera obtener un valor aproximado de $\sqrt{e^{0.1} + 3\cos\left(-0.2\right)}$

Solución

Se considera $f(x,y)=\sqrt{e^x+3\cos(y)}$, el punto $(a,b)=(0,0)$ y $\Delta x=0.1$, $\Delta y=-0.2$ Se tiene

$$f(a+\Delta x,b+\Delta y)\approx f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\Delta y$$

Operando:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{e^x}{2\sqrt{e^x+3\cos(y)}}\rightarrow\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{1}{4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{-3\operatorname{sen} y}{2\sqrt{e^x+3\cos(y)}}\quad\rightarrow\quad\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$$

$$\sqrt{e^{0.1}+3\cos(-0.2)}\approx f(0,0)+\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot 0.1+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot(-0.2)=2+\frac{1}{40}=\frac{81}{40}$$

22 Aproximar linealmente mediante una función adecuada el valor de $\left(0.99e^{0.02}\right)^8$.

Solución

Se considera la función $f\left(x,y\right)=\left(xe^y\right)^8=x^8e^{8y}$ y el punto $\left(a,b\right)=\left(1,0\right)$

Entonces $f\left(0.99,0.02\right)=\left(0.99e^{0.02}\right)^8$ y se tendrá

$$f\left(0.99,0.02\right)\approx f\left(1,0\right)+f_x'\left(1,0\right)\left(0.99-1\right)+f_y'\left(1,0\right)\left(0.02-0\right)=$$

$$=1+f_x'\left(1,0\right)\left(-0.01\right)+f_y'\left(1,0\right)\left(0.02\right)=1-8\cdot 0.01+8\cdot 0.02=1.08$$

ya que

$$f_x'\left(x,y\right)=8x^7e^{8y}\rightarrow f_x'\left(1,0\right)=8$$
$$f_y'\left(x,y\right)=8x^8e^{8y}\rightarrow f_y'\left(1,0\right)=8$$

23 Dada la función $f(x,y)=y\log\left(\dfrac{x^3y}{x^2+y^2}\right)+\log 2$ calcular el valor aproximado de $f(1.1,0.9)$ utilizando la diferencial.

Solución

Calculamos la diferencial de la función en el punto (1,1)

$$f(1.1,0.9)-f\left(1,1\right)\simeq f_x'\left(1,1\right)\left(1.1-1\right)+f_y'\left(1,1\right)\left(0.9-1\right)$$

Teniendo en cuenta que

$$f\left(1,1\right)=\log\left(\frac{1}{2}\right)+\log 2=0$$

Para derivar la función se puede hacer directamente

$$f_x'\left(x,y\right)=y\frac{1}{\dfrac{x^3y}{x^2+y^2}}\frac{3x^2y\left(x^2+y^2\right)-2x^4y}{\left(x^2+y^2\right)^2}=y\frac{x^4y+3x^2y^3}{x^3y\left(x^2+y^2\right)}=\frac{yx^2+3y^3}{x\left(x^2+y^2\right)}$$

$$\Rightarrow \qquad f_x'\left(1,1\right)=2$$

o tener en cuenta que

$$f(x,y)=y\log\left(x^3y\right)-y\log\left(x^2+y^2\right)+\log 2\Rightarrow f_x'(x,y)=y\frac{3x^2y}{x^3y}-y\frac{2x}{x^2+y^2}$$

Análogamente

$$f_y'\left(x,y\right)=\log\left(\frac{x^3y}{x^2+y^2}\right)+y\frac{1}{\dfrac{x^3y}{x^2+y^2}}\frac{x^3\left(x^2+y^2\right)-2x^3y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=$$

$$=\log\left(\frac{x^3y}{x^2+y^2}\right)+\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \qquad \Rightarrow \qquad f_y'\left(1,1\right)=\log\left(\frac{1}{2}\right)=-\log 2$$

O también

$$f(x,y)=y\left(\log\left(x^3y\right)-\log\left(x^2+y^2\right)\right)+\log 2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow f_y'(x,y)=y\log\left(\frac{x^3y}{x^2+y^2}\right)+y\left(\frac{x^3}{x^3y}\right)-y\frac{2y}{x^2+y^2}$$

Por lo tanto,

$$f(1.1,0.9)-f\left(1,1\right)\simeq f_x'\left(1,1\right)\left(1.1-1\right)+f_y'\left(1,1\right)\left(0.9-1\right)$$

$$f(1.1,0.9)\simeq f\left(1,1\right)+f_x'\left(1,1\right)\left(1.1-1\right)+f_y'\left(1,1\right)\left(0.9-1\right)=0+2\cdot 0.1+\log\left(2\right)\cdot 0.1$$

24 De una función $z=f\left(x,y\right)$ diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$ se sabe que el plano tangente a $f\left(x,y\right)$ en el punto (1, 2) es: $2x+3y+4z=1$. ¿Se puede calcular con estos datos la derivada direccional de f en la dirección que une el punto $\left(1,2\right)$ con el punto $\left(3,4\right)$? Justificar la respuesta.

Solución

La dirección en la que nos piden calcular la derivada direccional es:

$$v=\left(3-1,4-2\right)=\left(2,2\right)\Rightarrow u=\frac{v}{\left\|v\right\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Como el plano tangente en el punto (1, 2) es

$$2x+3y+4z=1\Leftrightarrow \frac{1}{2}x+\frac{3}{4}y+z=\frac{1}{4} \qquad \text{(I)}$$

que corresponde a la ecuación

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)(x-1)+\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)(y-2)=z-f(1,2) \qquad \text{(II)}$$

se tiene que cumplir que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)=\frac{-1}{2} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)=\frac{-3}{4}$$

sin más que igualar los coeficientes en las dos expresiones (I) y (II).
Luego la derivada direccional pedida es:

$$D_u\left(f,(1,2)\right)=\left\langle\left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,2),\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)\right),u\right\rangle=\left\langle\left(\frac{-1}{2},-\frac{3}{4}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\rangle=\frac{-5}{4\sqrt{2}}=\frac{-5\sqrt{2}}{8}$$

25 a) Calcular un vector tangente a la superficie gráfica de $f(x,y)=x\,sen(xy)$ en el punto $P(1,\pi)$ que se encuentra en el plano vertical que contiene a la dirección (0,1).

b) ¿Qué relación existe entre el plano tangente a una superficie definida por la función $z=f(x,y)$ en un punto $P(a,b)$ y la diferencial en dicho punto P? ¿Qué representa geométricamente la diferencial de una función en un punto?

Solución a)

El vector que une los dos puntos es (-1,-2) se tiene que $u=\left(-\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$. Como

$$\nabla V(x,y)=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\right) \qquad \nabla V(3,6)=\left(\frac{3}{3^2+6^2},\frac{6}{3^2+6^2}\right)=\left(\frac{3}{45},\frac{6}{45}\right)=\left(\frac{1}{15},\frac{2}{15}\right)$$

la derivada direccional es

$$DV_u(3,6)=\nabla V(3,6)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=\left(\frac{1}{15},\frac{2}{15}\right)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=\frac{-5}{15\sqrt{5}}=-\frac{-\sqrt{5}}{15}$$

Como hemos visto,

$$\nabla V(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}(x,y)$$

Por lo tanto la dirección del vector gradiente es la del vector (x,y), este vector es director de la recta que pasa por el punto y por el origen de coordenadas.

Solución b)

Se tiene que

$$T_1=\left(0,1,\frac{\partial f}{\partial y}(1,\pi)\right)=(0,1,-1) \qquad ya\ que\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^2\cos(xy)$$

26 Dada la superficie $f(x,y) = -\sqrt{\operatorname{sen}\left(x^2+y^2\right)+4}$ se pide:

a) Escribir el código Matlab para dibujar la gráfica de la función en $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] x \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

b) Escribir el código Matlab para dibujar el plano tangente a la superficie en el punto P(0,0,-2) junto con la recta normal a este plano en P.

c) Calcular de forma aproximada el valor de la función en el punto $(-0.1\,,\,0.3)$ utilizando la aproximación que da el plano tangente. Compararlo con el valor que da Matlab a $f(-0.1\,,\,0.3)$

Solución a)

Código Matlab:

```
[X,Y]=meshgrid(-pi/2:0.1:pi/2);
Z=-sqrt(sin(X.^2+Y.^2)+4);
surf(X,Y,Z)
```

Solución b)

Se calcula el plano tangente y la recta normal

$$f(0,0) = -2$$

$$f'_x(x,y) = \frac{-x\cos\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{\operatorname{sen}\left(x^2+y^2\right)+4}} \qquad \to f'_x(0,0) = 0$$

$$f'_y(x,y) = \frac{-y\cos\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{\operatorname{sen}\left(x^2+y^2\right)+4}} \qquad \to f'_y(0,0) = 0$$

Plano tangente: $z = f(0,0) + f_x'(0,0)(x-0) + f_y'(0,0)(y-0) \quad \to \quad z = -2$

Recta normal: Como el plano tangente es horizontal la recta normal es el conjunto de puntos de la forma puntos $(0,0,\lambda)$ siendo $\lambda \in \mathbb{R}$.

En general, la recta tangente se obtiene como la recta que pasa por el punto $(a,b,f(a,b))$ y tiene por vector director el perpendicular al plano tangente: $\mathbf{n} = \left(f_x'(a,b), f_y'(a,b), -1\right)$.

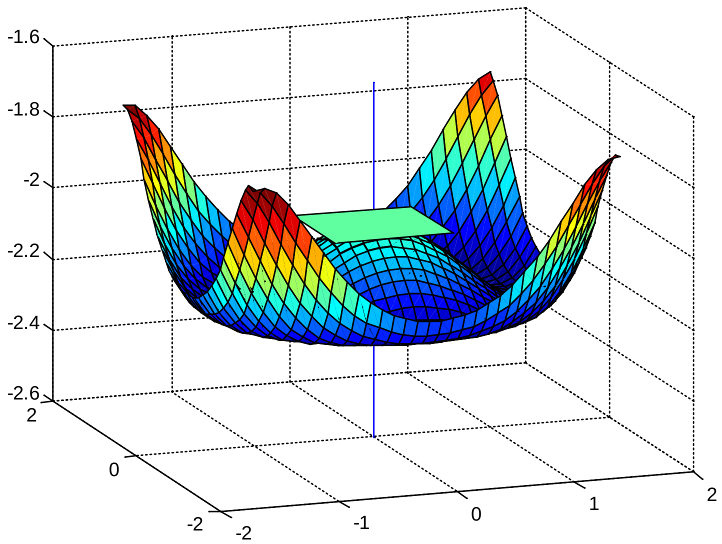
En este caso, sería

$$\begin{cases} x = 0 + \lambda f_x'(0,0) \\ y = 0 + \lambda f_y'(0,0) \\ z = f(0,0) + \lambda(-1) \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \qquad \to \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = -2 - \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Código Matlab para representar el plano tangente y la recta normal:

```
hold on
%Plano tangente
```

```
[X1,Y1]=meshgrid(-0.5:0.5);
Z1=-2*X1.^0;
surf(X1,Y1,Z1)
%Para representar un segmento de recta tangente, basta unir
%dos puntos del eje Z, por ejemplo P(0,0,-2.6) y Q(0,0,-1.6)
plot3([0 0],[0 0],[-2.6 -1.6])
```



Solución c)

La aproximación pedida se obtiene teniendo en cuenta que:

$$f(a+\Delta x, b+\Delta y) \approx f(a,b) + f'_x(a,b)\Delta x + f'_y(a,b)\Delta y$$

En este caso

$$f(-0.1,\ 0.3) \approx -2$$

El valor que da Matlab para $f(-0.1,\ 0.3) \approx -2.0248$

```
f=inline('-sqrt(sin(x.^2+y.^2)+4)','x','y')
f(-0.1,0.3)
```

REGLA DE LA CADENA

27 Sea $u = x^4 y + y^2 z^3 + \varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$ donde $\begin{cases} x = 1 + rse^t \\ y = rs^2 e^{-t} \\ z = r^2 s \ \operatorname{sen} t \end{cases}$

Calcular $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ cuando $r = 2,\ s = 1,\ t = 0$ sabiendo que $\varphi'\left(\dfrac{3}{2}\right) = -1$.

Solución:

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}=$$

$$=\left(4x^3y+\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\frac{1}{y}\right)re^t+\left(x^4+2yz^3++\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\frac{-x}{y^2}\right)2rse^{-t}+3y^2z^2r^2\operatorname{sen}t$$

Para $r=2,\quad s=1,\quad t=0$ se tiene que $x=3,\quad y=2,\quad z=0$. Sustituyendo estos valores en la expresión anterior, así como $\varphi'\left(\frac{3}{2}\right)=-1$, resulta que $\frac{\partial u}{\partial s}=758$.

28 Calcular la expresión de las derivadas parciales respecto de x e y de la función:

$$\omega=f\left(g\left(x^2\right)+h\left(y\right),g\left(x\right)h\left(y\right)\right)$$

Considerando que g y h son funciones derivables y que f es una función diferenciable

Solución:

Se trata de calcular las derivadas parciales de $\omega=f\left(u,v\right)$ siendo

$$u=g\left(x^2\right)+h\left(y\right)\qquad v=g\left(x\right)h\left(y\right)$$

Aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=\frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\omega}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial\omega}{\partial u}g'\left(x^2\right)2x+\frac{\partial\omega}{\partial v}g'\left(x\right)h\left(y\right)$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial y}=\frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\omega}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial\omega}{\partial u}h'\left(y\right)+\frac{\partial\omega}{\partial v}g\left(x\right)h'\left(y\right)$$

29 En la ecuación $x\frac{\partial z}{\partial x}+\sqrt{1+y^2}\frac{\partial z}{\partial y}=x$ efectuar el cambio de variable

$$u=\log x\qquad v=\log\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)$$

escribir esta ecuación en función de $\frac{\partial z}{\partial u}$ y $\frac{\partial z}{\partial v}$ y las nuevas variables.

Solución b)

Aplicando la regla de la cadena se tiene

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial v}\frac{1+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}}{y+\sqrt{1+y^2}}=\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\frac{\sqrt{1+y^2}+y}{\sqrt{1+y^2}}}{y+\sqrt{1+y^2}}=\frac{\partial z}{\partial v}\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

Se tiene que $x\frac{\partial z}{\partial x}+\sqrt{1+y^2}\frac{\partial z}{\partial y}=x\Leftrightarrow\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=e^u$

30 Considerar la función $w=f(x,y)$ en la que $x=r\cos\varphi$, $y=r\operatorname{sen}\varphi$. Demostrar que $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right)^2$

Solución

Aplicando la regla de la cadena

$$\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial w}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial w}{\partial y}sen\varphi$$
$$\frac{\partial w}{\partial \varphi}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi}=\frac{\partial w}{\partial x}\left(-rsen\varphi\right)+\frac{\partial w}{\partial y}r\cos\varphi$$

Operando

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right)^2=\left(\frac{\partial w}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial w}{\partial y}sen\varphi\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\left(-rsen\varphi\right)+\frac{\partial w}{\partial y}r\cos\varphi\right)^2=$$

$$=\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\cos^2\varphi+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 sen^2\varphi+2\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\cos\varphi sen\varphi+$$
$$+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}r^2sen^2\varphi+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 r^2\cos^2\varphi-2\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\mathrm{r}^2\cos\varphi sen\varphi\right)=\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$$

31 Si $z=u\sqrt{u+v^2}$ con $u=xy$, $v=arctg\left(\frac{y}{x}\right)$ calcular $z_x^{'}$ para x=1, y=0.

Solución

Aplicando la regla de la cadena si $z=u\sqrt{u+v^2}$ con $u=xy$, $v=arctg\left(\frac{y}{x}\right)$ calcular $z_x^{'}$

$$z_x^{'}=z_u^{'}\cdot u_x^{'}+z_v^{'}\cdot v_x^{'}=\left(\sqrt{u+v^2}+u\frac{1}{2}\left(u+v^2\right)^{-1/2}\right)y+u\frac{1}{2}\left(u+v^2\right)^{-1/2}2v\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

Para x=1, y=0, se tiene u=0 y $v=0$, sustituyendo $z_x^{'}=0$.

32 Si $u=f(x,y)$ donde $x=e^s sent$, $y=e^s\cos t$, comprobar si se verifica la siguiente igualdad: $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=e^{-2s}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]$

Solución

Aplicando la regla de la cadena

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}e^s\cos t+\frac{\partial u}{\partial y}e^s\,\text{sen}\,t$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}=-\frac{\partial u}{\partial x}e^s\,\text{sen}\,t+\frac{\partial u}{\partial y}e^s\cos t$$

Sustituyendo en

$$\left[\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]=$$

$$=\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}e^s\cos t+\frac{\partial u}{\partial y}e^s\,\text{sen}\,t\right)^2+\left(-\frac{\partial u}{\partial x}e^s\,\text{sen}\,t+\frac{\partial u}{\partial y}e^s\cos t\right)^2\right]$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2e^{2s}\cos^2 t+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2e^{2s}\,\text{sen}^2\,t+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2e^{2s}\,\text{sen}^2\,t+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2e^{2s}\cos^2 t=$$

$$=e^{2s}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]$$

Por lo tanto,

$$e^{-2s}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

33 Demostrar que la función $z=y\,g\left(x^2-y^2\right)$, siendo g una función derivable, satisface la ecuación $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$

Solución

Se puede considerar: $z=y\;g(u)$ siendo $u=x^2-y^2$. Aplicando la regla de la cadena

$$\left.\begin{array}{l} z'_x=y\,g'(u)\,\dfrac{\partial u}{\partial x} \\ z'_y=g(u)+yg'(u)\dfrac{\partial u}{\partial y}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} z'_x=y\,g'\left(x^2-y^2\right)2x \\ z'_y=g\left(x^2-y^2\right)+yg'\left(x^2-y^2\right)(-2y)\end{array}\right\}$$

Sustituyendo en la expresión:

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}\left(2xy\,g'\left(x^2-y^2\right)\right)+\frac{1}{y}\left(g\left(x^2-y^2\right)-2y^2g'\left(x^2-y^2\right)\right)=$$
$$=2y\,g'\left(x^2-y^2\right)+\frac{g\left(x^2-y^2\right)}{y}-2y\,g'\left(x^2-y^2\right)=\frac{g\left(x^2-y^2\right)}{y}=\frac{z}{y^2}$$

FUNCIONES IMPLÍCITAS

34 Hallar la ecuación del plano tangente y de la recta normal a la superficie $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-3=0$, en el punto (a, b, c).

Solución:

La ecuación del plano tangente viene dada por

$$F_x'(a,b,c).(x-a)+F_y'(a,b,c).(y-b)+F_z'(a,b,c).(z-c)=0$$

$$F_x'(a,b,c).(x-a)+F_y'(a,b,c).(y-b)+F_z'(a,b,c).(z-c)=0$$

sustituyendo tendremos

$$F_x'(a,b,c).(x-a)+F_y'(a,b,c).(y-b)+F_z'(a,b,c).(z-c)=0$$

simplificando

$$F_x'(a,b,c).(x-a)+F_y'(a,b,c).(y-b)+F_z'(a,b,c).(z-c)=0$$

Las ecuaciones paramétricas de la recta normal son:

$$\begin{cases} x=a+F_x'(a,b,c)\cdot t \\ y=b+F_y'(a,b,c)\cdot t \\ z=c+F_z'(a,b,c)\cdot t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=a+\frac{2}{a}\cdot t \\ y=b+\frac{2}{b}\cdot t \\ z=c+\frac{2}{c}\cdot t \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}$$

35 Dada la ecuación $xe^y+ye^{2z}+ze^{3x}=0$ se pide:

a) Justificar si define una función $z=f\left(x,y\right)$ diferenciable en las proximidades del punto (0,0,0).

b) Determinar la ecuación del plano tangente a la superficie $xe^y+ye^{2z}+ze^{3x}=0$ en el punto (0,0,0).

c) Calcular la derivada direccional de la función $f\left(x,y\right)$ en el punto (0,0) en la dirección que forma 120^o con el eje positivo de abscisas.

Solución a)

La ecuación $F\left(x,y,z\right)=xe^{y}+ye^{2z}+ze^{3x}=0$ define implícitamente a una función $z=f\left(x,y\right)$ diferenciable ya que se verifica

- El punto (0,0,0) es un punto de la superficie, $F\left(0,0,0\right)=0$
- Las derivadas parciales

  $$F'_x\left(x,y,z\right)=e^{y}+3ze^{3x} \qquad F'_y\left(x,y,z\right)=xe^{y}+e^{2z}$$
  $$F'_z\left(x,y,z\right)=2ye^{2z}+e^{3x}$$

  son continuas en un entorno del punto (0,0,0)
- $F'_z\left(0,0,0\right)=1\neq 0$

Solución b)

Teniendo en cuenta que

$$\begin{array}{l} F'_x\left(x,y,z\right)=e^{y}+3ze^{3x}\Rightarrow F'_x\left(0,0,0\right)=1 \\ F'_y\left(x,y,z\right)=xe^{y}+e^{2z}\Rightarrow F'_y\left(0,0,0\right)=1 \\ F'_z\left(x,y,z\right)=2ye^{2z}+e^{3x}\Rightarrow F'_z\left(0,0,0\right)=1 \end{array}$$

la ecuación del plano tangente es:

$$F'_x\left(0,0,0\right)x+F'_y\left(0,0,0\right)y+F'_z\left(0,0,0\right)z=0$$

$$x+y+z=0$$

Solución c)

Como la función $z=f\left(x,y\right)$ es diferenciable

$$f'_x\left(0,0\right)=-\frac{F'_x\left(0,0,0\right)}{F'_z\left(0,0,0\right)} \qquad f'_y\left(0,0\right)=-\frac{F'_y\left(0,0,0\right)}{F'_z\left(0,0,0\right)}$$

Por lo tanto

$$\nabla f\left(0,0\right)=\left(-\frac{F'_x\left(0,0,0\right)}{F'_z\left(0,0,0\right)},-\frac{F'_y\left(0,0,0\right)}{F'_z\left(0,0,0\right)}\right)=\left(-1,-1\right)$$

$$D_u f\left(0,0\right)=\left(-1,1\right)\bullet\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right),sen\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)=\left(-1,-1\right)\bullet\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

36 Encontrar los puntos sobre la superficie $2xy+2x+2yz-2z^{2}+2xz=0$. tales que el plano tangente a la superficie sea paralelo al plano XY.

Solución

Los puntos de la superficie $2xy+2x+2yz-2z^2+2xz=0$ en los que el plano tangente es paralelo al plano XY deben cumplir $z_x^{'}=z_y^{'}=0$. Se tiene que considerando

$$F(x,y,z)=xy+x+yz-z^2+xz$$

se tendrá

$$z_x^{'}=-\frac{F_x^{'}}{F_z^{'}}=0 \quad \to \quad y+1+z=0 \to \quad y=-z-1$$
$$z_y^{'}=-\frac{F_x^{'}}{F_z^{'}}=0 \quad \to \quad x+z=0 \to \quad x=-z$$

Como el punto tiene que estar en la superficie

$$\begin{aligned}&-z(-z-1)-z+(-z-1)z-z^2+(-z)z=0 \to \\ &z^2+z-z-z^2-z-z^2-z^2=0 \to 2z^2+z=0 \to \\ &z=0 \text{ ó } \quad z=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

37 Obtener las ecuaciones de los planos tangentes a la superficie $x^2+y^2+2z^2=60$ que son paralelos al plano $6x+4y+4z=12$.

Solución a)

Si se considera la superficie S definida por $F(x,y,z)=x^2+y^2+2z^2-60=0$, un vector normal al plano tangente a S en el punto P(x,y,z) es

$$\mathbf{n}=\left(F_x^{'}(x,y,z),F_y^{'}(x,y,z),F_z^{'}(x,y,z)\right)=(2x,\ 2y,\ 4z)$$

Determinamos los puntos (x,y,z) de la superficie S que cumplen que este vector es paralelo al perpendicular al plano $6x+4y+4z=12$, es decir, al vector $\mathbf{v}=(6,4,4)$. Serán aquellos puntos que cumplan

$$\frac{2x}{6}=\frac{2y}{4}=\frac{4z}{4}=\lambda \to P(3\lambda,2\lambda,\lambda)$$

$$9\lambda^2+4\lambda^2+2\lambda^2=60 \to \lambda^2=\frac{60}{15}=4 \to \lambda=\pm 2$$

Los puntos son $P_1(6,4,2)$, $P_2(-6,-4,-2)$.

Teniendo en cuenta que ecuación del plano tangente a la superficie $F(x,y,z)=0$ en el punto (a,b,c) es

$$F_x^{'}(a,b,c)(x-a)+F_y^{'}(a,b,c)(y-b)+F_z^{'}(a,b,c)(z-c)=0$$

se tendrá que el plano tangente en $P_1(6,4,2)$ es: $12(x-6)+8(y-4)+8(z-2)=0$

y el plano tangente en $P_2(-6,-4,-2)$ es : $-12(x+6)-8(y+4)-8(z+2)=0$

38 Sea la superficie $z=f(x,y)$ definida implícitamente por

$z^3+z\log\left(x^2+y^2\right)+y^2=8$. Se pide

a) calcular las derivadas parciales de z en el punto (1,0)

b) la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto (1,0)

c) la ecuación de la recta normal a la superficie en el punto (1,0,2).

Solución a)

Derivando implícitamente $z^3+z\log\left(x^2+y^2\right)+y^2=8$ se tendrá:

$$3z^2z'_x+z'_x\log\left(x^2+y^2\right)+z\frac{2x}{x^2+y^2}=0 \qquad \to \qquad 3\cdot 2^2z'_x+z'_x\log 1+2\,\frac{2}{1}=0$$

$$\to \qquad z'_x(1,0)=-\frac{1}{3}$$

$$3z^2z'_y+z'_y\log\left(x^2+y^2\right)+z\frac{2y}{x^2+y^2}+2y=0 \ \to\ 3\cdot 2^2z'_y+z'_y\log 1=0$$

$$\to \qquad z'_y(1,0)=0$$

Solución b)

$$z=z(1,0)+z'_x(1,0)(x-1)+z'_y(1,0)(y-0) \qquad \to \qquad z=2-\frac{1}{3}(x-1)$$

Solución c)

Se obtiene como la recta que pasa por el punto $(1,0,f(1,0))$ y tiene por vector director el perpendicular al plano tangente: $\mathbf{n}=\left(-\frac{1}{3},0,-1\right)$, es decir

$$\begin{cases} x=1-\dfrac{1}{3}\lambda \\ y=0 \\ z=2-\lambda \end{cases} \qquad \lambda\in\mathbb{R}$$

39 Justificar si la función z definida implícitamente como función de x y de y por $z^2+\frac{2}{x}=\sqrt{y^2-x^2}$ satisface la relación $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{z}$. ¿Qué condiciones deben cumplirse para que z defina implícitamente una función de x y de y en un entorno del punto $\left(x_o, y_o, z_o\right)$?

Solución

Derivando implícitamente, se tiene que:

$$2\,z\,z'_x - \frac{2}{x^2} = \frac{-x}{\sqrt{y^2 - x^2}} \qquad \rightarrow \quad z'_x = \frac{-\dfrac{-x}{\sqrt{y^2-x^2}} + \dfrac{2}{x^2}}{2z}$$

$$2\,z\,z'_y = \frac{y}{\sqrt{y^2 - x^2}} \qquad \rightarrow \quad z'_y = \frac{\dfrac{y}{\sqrt{y^2-x^2}}}{2z}$$

Sustituyendo en la expresión dada en el enunciado se puede ver que no se cumple la identidad.

Las condiciones que deben cumplirse son las hipótesis del teorema de la función implícita.

EXTREMOS

40 Si $z = \log\left(xy^2 + x^2\right)$, determinar el polinomio de Taylor de grado 2 de esta función en el punto $\left(1,2\right)$. ¿En qué dirección crece más la función, en la dirección del eje OX o en la dirección del eje OY?

Solución

El polinomio de Taylor de una función de dos variables $z = f\left(x,y\right)$ que cumple las hipótesis del Teorema de Schwartz en el punto $\left(a,b\right)$ es

$$\begin{aligned} T_2\left(x,y\right) &= f\left(a,b\right) + f'_x\left(a,b\right)\left(x-a\right) + f'_y\left(a,b\right)\left(y-b\right) + \\ &+ \frac{1}{2!}\left[f''_{xx}\left(a,b\right)\left(x-a\right)^2 + 2f''_{xy}\left(a,b\right)\left(x-a\right)\left(y-b\right) + f''_{yy}\left(a,b\right)\left(y-b\right)^2\right] \end{aligned}$$

La función a considerar $z = \log\left(xy^2 + x^2\right)$ es una función que tiene derivadas primeras y segundas continuas en el punto (1,2) así que derivando su polinomio de Taylor es

$$f'_x\left(x,y\right) = \frac{y^2 + 2x}{xy^2 + x^2} \rightarrow f'_x\left(1,2\right) = \frac{6}{5}$$

$$f'_y\left(x,y\right) = \frac{2yx}{xy^2 + x^2} = \frac{2y}{y^2 + x} \rightarrow f'_y\left(1,2\right) = \frac{4}{5}$$

$$f'_{xx}(x,y)=\frac{2\left(xy^2+x^2\right)-\left(y^2+2x\right)^2}{\left(xy^2+x^2\right)^2}\rightarrow f'_{xx}(1,2)=-\frac{26}{25}$$

$$f'_{xy}(x,y)=\frac{2y\left(xy^2+x^2\right)-2xy\left(y^2+2x\right)}{\left(xy^2+x^2\right)^2}\rightarrow f'_{xy}(1,2)=-\frac{4}{25}$$

$$f'_{yy}(x,y)=\frac{2\left(y^2+x\right)-4y^2}{\left(y^2+x\right)^2}\rightarrow f'_{yy}(1,2)=-\frac{6}{25}$$

$$T_2(x,y)=\log(5)+\frac{6}{5}(x-1)+\frac{4}{5}(y-2)+\frac{1}{2}\left[-\frac{26}{5}(x-1)^2-\frac{8}{25}(x-1)(y-2)-\frac{6}{25}(y-2)^2\right]$$

Teniendo en cuenta los valores de las derivadas parciales de primer orden, en el punto (1,2) la función crece más en la dirección del eje OX que en la dirección del eje OY:

$$f'_x(1,2)=\frac{6}{5}>\frac{4}{5}=f'_y(1,2)$$

41

Determine los puntos críticos de la siguiente función y clasifíquelos:

$$f(x,y)=x^3+y^3-3x-12y+20\,.$$

Solución:

Para determinar los puntos críticos se plantea la condición necesaria de extremo local. Los puntos que cumplan estas condiciones necesarias son los puntos críticos de la función.

Condición necesaria

$$\nabla f(x,y)=(0,0)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=3x^2-3=0\rightarrow 3x^2=3\rightarrow x^2=1\rightarrow x=\sqrt{1}=\pm 1.$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=3y^2-12=0\rightarrow 3y^2=12\rightarrow y^2=4\rightarrow y=\sqrt{4}=\pm 2.$$

Los puntos que anulan las derivadas son los que resultan de combinar los dos posibles de x que anulan la derivada parcial respecto a x con los dos valores de y que anulan la derivada parcial respecto a y:

$$(1,2),\quad (1,-2),\quad (-1,2),\quad (-1,-2)$$

Para clasificar estos puntos críticos como máximos locales, mínimos locales o puntos de silla se pasa a estudiar las condiciones suficientes de máximo o mínimo local, condiciones de segundo orden, pues sólo son suficientes para aquellos puntos que previamente hubiesen anulado el gradiente de la función (condición de primer orden).

Condición suficiente

Para estudiar estas condiciones se debe estudiar el signo de la forma cuadrática representada por la matriz hessiana de la función en cada uno de los puntos críticos. En general, para cualquier punto $(x,y)\in D_f$ (dominio de $f(x,y)$) se tiene que

$$Hf(x,y)=\begin{pmatrix}6x & 0\\ 0 & 6y\end{pmatrix}$$

- En el $(1,2)$ se tiene

$$Hf(1,2)=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 12\end{pmatrix},\ H_1=|6|=6>0,\ H_2=\begin{vmatrix}6 & 0\\ 0 & 12\end{vmatrix}=72>0.$$

La función alcanza un mínimo relativo en el punto $(1,2)$.

- En el $(1,-2)$ se tiene

$$Hf(1,-2)=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & -12\end{pmatrix},$$
$$\mathrm{H}_1=|6|=6>0,\ \mathrm{H}_2=\begin{vmatrix}6 & 0\\ 0 & -12\end{vmatrix}=-72<0.$$

El punto $(1,-2)$ es un punto de silla.

- En el $(-1,2)$ se tiene

$$Hf(-1,\ 2)=\begin{pmatrix}-6 & 0\\ 0 & 12\end{pmatrix},$$
$$\mathrm{H}_1=|-6|=-6<0,\ \mathrm{H}_2=\begin{vmatrix}-6 & 0\\ 0 & 12\end{vmatrix}=-72<0.$$

El punto $(-1,2)$ es un punto de silla.

- En el $(-1,-2)$ se tiene

$$Hf(-1,-2)=\begin{pmatrix}-6 & 0\\ 0 & -12\end{pmatrix},$$
$$\mathrm{H}_1=|-6|=-6<0,\ \mathrm{H}_2=\begin{vmatrix}-6 & 0\\ 0 & -12\end{vmatrix}=72>0.$$

La función alcanza un máximo relativo en el punto $(-1,-2)$.

42 Estudiar los extremos relativos de la función $f(x,y)=x^3+3xy^2-15x-12y$

Solución

Como la función es diferenciable, los puntos críticos son los puntos solución del sistema:

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=3x^2+3y^2-15=0\\ f'_y(x,y)=6xy-12=0\end{cases}$$

Despejando de la segunda ecuación, se tiene que $y=\dfrac{2}{x}$. Sustituyendo en la primera ecuación

$$x^2 + \left(\frac{2}{x}\right)^2 - 5 = 0 \qquad \to x^4 + 4 - 5x^2 = 0$$

$$\to \qquad x^2 = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \begin{cases} x^2 = 4 \ \to x = \pm 2 \\ x^2 = 1 \ \to x = \pm 1 \end{cases}$$

Los puntos críticos son entonces de la forma $\left(x, \frac{2}{x}\right)$ con $x = \pm 2$, $x = \pm 1$, es decir,

$$(2,1) \qquad (-2,-1) \qquad (1,2) \qquad (-1,-2)$$

Dado que

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{vmatrix} = 36x^2 - 36y^2 \qquad f''_{xx}(x,y) = 6x$$

basta aplicar el teorema del hessiano para clasificar los puntos críticos.

- $H(2,1) = \begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} > 0$, $f''_{xx}(2,1) = 12 > 0$, en el punto (2, 1) hay un mínimo de valor $f(2,1)$
- $H(-2,-1) = \begin{vmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{vmatrix} > 0$, $f''_{xx}(-2,-1) = -12 < 0$, en el punto (-2, -1) hay un máximo de valor $f(-2,-1)$
- $H(1,2) = \begin{vmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{vmatrix} < 0$, en el punto (1,2) hay un punto de silla
- $H(-1,-2) = \begin{vmatrix} -6 & -12 \\ -12 & -6 \end{vmatrix} < 0$, en el punto (-1,-2) hay un punto de silla

EXTREMOS CONDICIONADOS

43 Hallar los valores extremos de $z = f(x,y) = xy$ sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$

Solución:

Hay que calcular los extremos de $z = f(x,y) = xy$, con la condición $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Vemos que f y g son diferenciables en $\mathbb{R}^2$. La función auxiliar de Lagrange

$$F(x,y,\lambda) = xy + \lambda\left(x^2 + y^2 - 1\right)$$

Calculamos las derivadas de primer orden de F y resolvemos el sistema

$$\begin{cases} F_x\left(x,y,\lambda\right) = y + 2\lambda x = 0 \\ F_y\left(x,y,\lambda\right) = x + 2\lambda y = 0 \\ F_\lambda\left(x,y,\lambda\right) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Despejando λ en las dos primeras ecuaciones anteriores tenemos

(II) $\lambda = -\dfrac{y}{2x} = -\dfrac{x}{2y}$ se sigue que: $y^2 = x^2$ (III)

Por la tercera ecuación de (I), y por (III) debe ser

$$y^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

y por (III) $x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Así obtenemos los puntos críticos de f sometidos a la restricción $x^2 + y^2 = 1$:

$$P_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad , \quad P_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad P_3\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad , \quad P_4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

Analizamos la diferencial segunda: $d^2 f$ (= signo Δ f) teniendo en cuenta que dx, dy están ligadas por $dg = 0$, es decir, $2xdx + 2ydy = 0$

Entonces, según lo visto antes es $\text{signo}\, d^2 f = \text{signo}\, d^2 F$. Ahora, como

$$\begin{cases} F_{xx} = 2\lambda \\ F_{yy} = 2\lambda \\ F_{xy} = 1 \end{cases}$$

$$d^2 f = d^2 F = F_{xx}dx^2 + 2F_{xy}dxdy + F_{yy}dy^2 = 2dx^2 + 2\lambda dxdy + 2dy^2$$

Por otra parte, tenemos que

$$P_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right): \quad \lambda_1 = -\frac{y}{2x} = -\frac{1}{2}, \qquad P_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right): \quad \lambda_2 = -\frac{y}{2x} = -\frac{1}{2},$$

$$P_3\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right): \quad \lambda_3 = -\frac{y}{2x} = \frac{1}{2}, \qquad \mathrm{P}_4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right): \quad \lambda_4 = -\frac{y}{2x} = \frac{1}{2}$$

luego, en P_1 y P_2 tendremos:

$$d^2 f = -(dx^2 - 2dxdy + dy^2) = -(dx - dy)^2 \qquad \text{(IV)}$$

(aquí ya vemos que $d^2 f$ tiene signo negativo, por lo tanto Δf tendrá signo negativo, lo cual implicará que f tiene máximo local en P_1 y P_2. No obstante, continuaremos adelante con el fin de ilustrar totalmente el procedimiento en estudio).

Ahora bien, dx y dy están ligadas por $dg(x,y) = 2xdx + 2ydy = 0$, lo que implica que,

$$dy = -\frac{x}{y}dx \qquad \text{(V)} \qquad (y \neq 0 \text{ en } P_1, P_2).$$

De (IV) y de (V) resulta $d^2 f = -\left(dx + \frac{x}{y}dx\right)^2$ Ahora, como en $P_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $P_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, es $\frac{x}{y} = +1$ tenemos que

$$d^2 f = -\left(dx + dx\right)^2 = -4dx$$

Por lo tanto, $\operatorname{signo}\Delta f = \operatorname{signo} d^2 f = -1$. Luego, f tiene en P_1, P_2 máximo relativo. Además, vale

$$z = f\left(x, y\right)\Big|_{P_1, P_2} = \frac{1}{2}$$

Análogamente, como en $P_3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y en $P_4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ es $\frac{x}{y} = -1$, tendremos:

$$d^2 f = dx^2 + 2dxdy + dy^2 = \left(dx + dy\right)^2 = \left(dx - \frac{x}{y}dx\right)^2 = \left(dx + dx\right)^2 = 4dx^2$$

Por lo tanto $\operatorname{signo}\Delta f = \operatorname{signo} d^2 f = +1$

Esto significa que f tiene en P_3 y P_4 valor mínimo local. Además, es

$$z = f\left(x, y\right)\Big|_{P_3, P_4} = \frac{-1}{2}$$

Material de consulta

Libro interactivo parte I
Libro Interactivo. Parte II
Laboratorios y Unidades didácticas con videos explicativos: enlace

Autora: Elena Álvarez

Ecuaciones de algunas superficies frecuentes

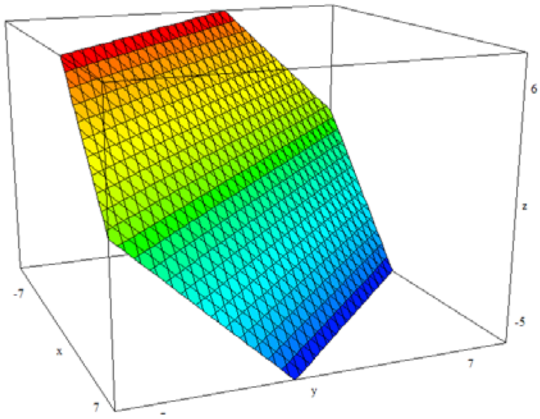
PLANO

Cartesianas

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Paramétricas

$$x = x_o + ua_1 + vb_1$$
$$y = y_o + ua_2 + vb_2$$
$$z = z_o + ua_3 + vb_3$$



$$\begin{cases} x = 1 - v \\ y = -u \qquad u \in I,\ v \in J \\ z = u + v \end{cases}$$

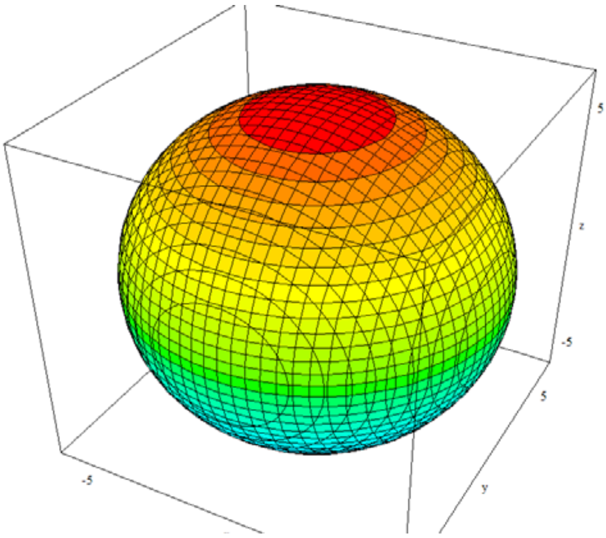
ESFERA

Cartesianas

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

Paramétricas

$$x = r \operatorname{sen} u \cos v$$
$$y = r \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$$
$$z = r \cos u$$



$$\begin{cases} x = 5 \operatorname{sen} u \cos v \\ y = 5 \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \\ z = 5 \cos u \end{cases}$$

$$0 \leq u \leq \pi,\ \ 0 \leq v \leq 2\pi$$

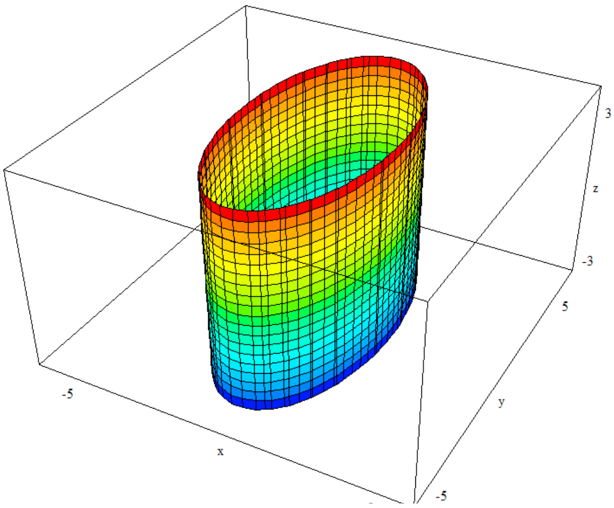
CILINDRO ELÍPTICO

Cartesianas

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Paramétricas

$$x=a\ \cos u$$
$$y=b\ \operatorname{sen} u$$
$$z=v$$



$$\begin{cases} x=2\cos u \\ y=4\operatorname{sen} u & 0\le u<2\pi,\quad v\in I \\ z=v \end{cases}$$

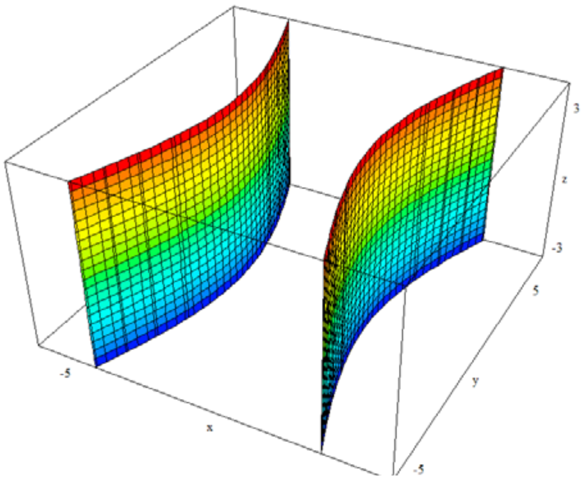
CILINDRO HIPERBÓLICO

Cartesianas

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Paramétricas

$$x=a\cosh u$$
$$y=b\operatorname{senh} u$$
$$z=v$$



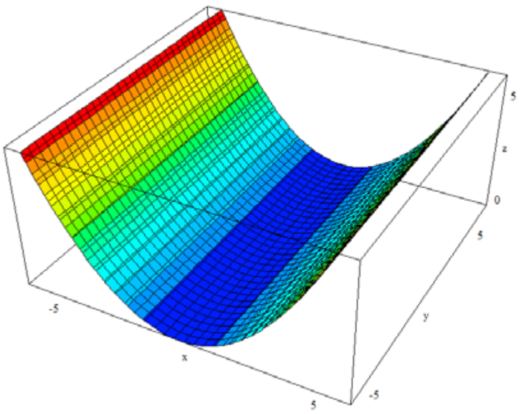
$$\begin{cases} x=2\cosh u \\ y=4\operatorname{senh} u & (u,v)\in D \\ z=v \end{cases}$$

CILINDRO PARABÓLICO

Cartesianas

$$z=\frac{x^2}{a}$$

Paramétricas



<table>
<tr>
<td>

$x = u$

$y = v$

$z = \dfrac{u^2}{a}$

</td>
<td>

$x = u,\ \ y = v,\ \ z = \dfrac{u^2}{4},\quad (u,v) \in D$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

CONO

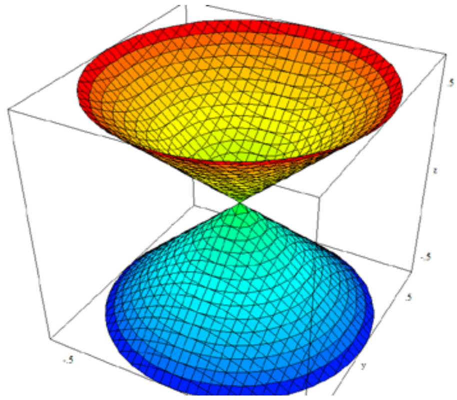
Cartesianas

$z^2 = x^2 + y^2$

Paramétricas

$\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \operatorname{sen} v \quad 0 \le v \le 2\pi,\ u \in I \\ z = u \end{cases}$

</td>
<td>



</td>
</tr>
<tr>
<td>

ELIPSOIDE

Cartesianas

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

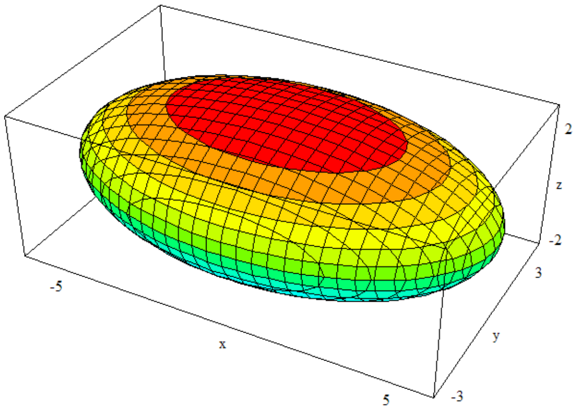
Paramétricas

$x = a \operatorname{sen} u \cos v$

$y = b \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$

$z = c \cos u$

</td>
<td>



$\begin{cases} x = 5 \operatorname{sen} u \cos v \\ y = 3 \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \\ z = 2 \cos u \end{cases}$

$0 \le u \le \pi,\ \ 0 \le v \le 2\pi$

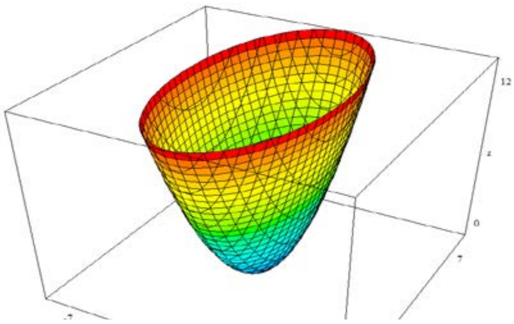
</td>
</tr>
<tr>
<td>

PARABOLOIDE ELIPTICO

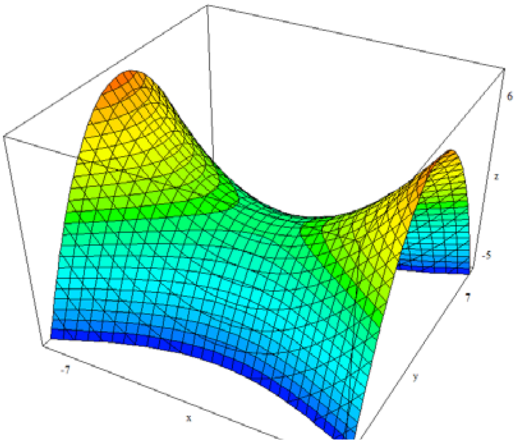
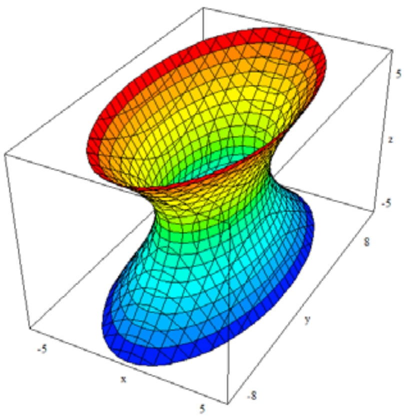
Cartesianas

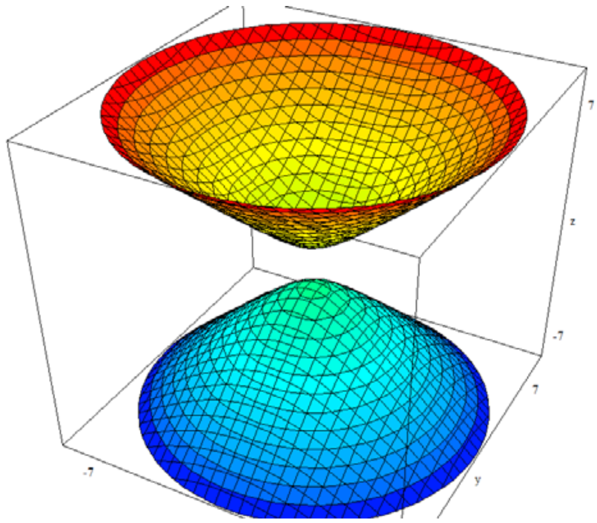
Paramétricas

</td>
<td>



</td>
</tr>
</table>

$\begin{cases} x = au\cos v \\ y = bu\,\mathrm{sen}\,v \\ z = \pm u^2 \end{cases}$	$\begin{cases} x = u\cos v \\ y = 2u\,\mathrm{sen}\,v \qquad u \in I,\ \ 0 \le v < 2\pi \\ z = u^2 \end{cases}$
PARABOLOIDE HIPERBÓLICO Cartesianas $z = \pm\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)$ Paramétricas $\begin{cases} x = au\cosh v \\ y = bu\,\mathrm{senh}\,v \\ z = \pm u^2 \end{cases}$	 $\begin{cases} x = 3u\cosh v \\ y = 2u\,\mathrm{senh}\,v \qquad u \in I,\ \ v \in J \\ z = u^2 \end{cases}$
HIPERBOLOIDE DE UNA HOJA Cartesianas $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ Paramétricas $\begin{cases} x = a\cosh u\cos v \\ y = b\cosh u\,\mathrm{sen}\,v \\ z = c\,\mathrm{senh}\,u \end{cases}$	 $\begin{cases} x = 2\cosh u\cos v \\ y = 4\cosh u\,\mathrm{sen}\,v \qquad -\infty < u < \infty,\ \ 0 \le v \le 2\pi \\ z = 3\,\mathrm{senh}\,u \end{cases}$
HIPERBOLOIDE DE DOS HOJAS Cartesianas $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$	

Paramétricas $$\begin{cases} x = a \operatorname{senh} u \cos v \\ y = b \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v \\ z = c \cosh u \end{cases}$$	 $$\begin{cases} x = \operatorname{senh} u \cos v \\ y = \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v \\ z = \cosh u \end{cases}$$ $$-\infty < u < \infty, \ \ 0 \le v \le 2\pi$$