SERIES DE FOURIER

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Para poder seguir adecuadamente este tema, se requiere que el alumno repase y ponga al día sus conocimientos en los siguientes contenidos:

- Series. Concepto de convergencia.
- Funciones trigonométricas y propiedades.
- Números complejos y función exponencial compleja.
- Dibujo de curvas y programación básica con Matlab.
- Cálculo diferencial e integral de funciones de una variable.

Los objetivos específicos de este tema son:

1. Definir y representar funciones armónicas, conociendo el significado de los parámetros que intervienen en la definición.
2. Entender la definición de función periódica y saber calcular el periodo propio y la frecuencia angular de una función definida como suma de armónicos.
3. Saber y aplicar el criterio de Dirichlet para desarrollar una función en serie de Fourier.
4. Saber calcular desarrollos en serie de Fourier.
5. Aproximar una función periódica mediante un desarrollo limitado de Fourier.
6. Obtener el desarrollo en serie de Fourier de una función a partir de otra de desarrollo conocido.
7. Obtener la serie de Fourier en forma compleja y dibujar el espectro de amplitud.

SERIES DE FOURIER

1 Definiciones básicas

Definición (Función periódica).- Una función $f(x)$ definida en un conjunto no acotado D se llama periódica, si existe un número $T > 0$ tal que para cada $x \in D$ se cumple la condición $f\left(x+T\right)=f\left(x\right)$.

Nótese que si T es período de $f(x)$ también admite $f\left(x\right)$ los períodos $2T$, $3T$, etc. Si T es el menor número positivo que verifica esta condición le llamaremos *período propio o fundamental.* Cuando no indiquemos lo contrario supondremos que nos referimos al período fundamental.

Definición (Función armónica o armónico).- Se llama función armónica o simplemente armónico a una función periódica definida por una de las ecuaciones siguientes:

$$f(x) = A\cos(\omega x + \Phi) \text{ ó } f(x) = A\text{sen}(\omega x + \Phi)$$

Como se desprende de la definición, los armónicos son ondas senoidales o cosenoidales cuya forma viene determinada por los valores siguientes:

- A, es la amplitud o altura de la sinusoide.
- Φ, es el ángulo de fase e indica el punto de arranque dentro del ciclo.
- ω, es la frecuencia angular medida en rad/seg.

La frecuencia angular ω es el parámetro determinante de la forma de la senoide y va a jugar un papel fundamental en todo el Análisis de Fourier. Su expresión es

$$\omega = 2\pi f$$

siendo f la frecuencia en $ciclos\,/\,sg$. Puesto que el periodo T es la duración de un ciclo u oscilación se verifica $f = \dfrac{1}{T}$ y, por tanto $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

Definición (Serie trigonométrica o de Fourier).- Una serie de funciones del tipo

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \,\text{sen}\, n\omega x)$$

se llama serie trigonométrica y las constantes $a_0,\ a_n,\ b_n \quad (n = 1,\ 2, \ldots)$ se llaman coeficientes de la serie trigonométrica.

OBSERVACIÓN.- Las funciones de la serie trigonométrica anterior son armónicos con ángulo de fase cero, frecuencia angular $n\omega$ y periodo propio $T = 2\pi\,/\,n\omega$ y, por tanto, todas ellas tienen como periodo común $2\pi\,/\,\omega$.

Definición (Desarrollo de una función en serie trigonométrica).- Desarrollar una función $f(x)$ con período $T = 2\pi$ ó $T = 2p$ en serie trigonométrica significa hallar una serie trigonométrica convergente, cuya suma $S(x)$ sea igual a la función $f(x)$.

2 Serie de Fourier para la función periódica de periodo 2p

Analizaremos a continuación las condiciones suficientes para que una función sea desarrollable en serie de Fourier, estas condiciones se recogen en el teorema de Dirichlet[1].

[1] Las condiciones bajo las cuales una función admite desarrollo en serie son muchas. Sin embargo, la mayor parte de las aplicaciones prácticas quedan cubiertas con el Teorema de Dirichlet.

TEOREMA DE DIRICHLET.- Si $f(x)$ es una función periódica de período $2p$, y continua en un intervalo de un período o tiene en este intervalo a lo sumo un número finito de puntos de discontinuidad de salto finito, así como un número finito de máximos y mínimos, entonces se puede representar por una serie de Fourier convergente que tiene por suma el valor de la función $f(x)$ en los puntos en que ésta es continua y el promedio de los límites por la derecha y por la izquierda en los puntos en los que es discontinua.

Suponiendo que la función $f(x)$ cumple el criterio de Dirichlet, el siguiente teorema nos da el método para calcular los coeficientes a_0, a_n, b_n de la serie de Fourier a partir de $f(x)$, así como las condiciones de convergencia de la serie.

TEOREMA.- Supongamos que la función periódica $f(x)$ de período $2p$ cumple el criterio de Dirichlet en $[-p, p]$. Entonces si se considera

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \operatorname{sen} n\omega x)$$

siendo,

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)dx\,, \quad a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos n\omega x dx\,, \quad b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\operatorname{sen} n\omega x dx$$

se cumplirá que la serie $S(x)$ converge a:

- *$f(x)$, si x es punto de continuidad de f.*
- *$\dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$, si x es punto de discontinuidad de f.*

3 Desarrollo de las funciones pares e impares en Serie de Fourier

Definición (Función par e impar).- Una función $f(x)$ definida en el intervalo $[-p, p]$ donde $p > 0$ se llama

- *par si $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in [-p, p]$.*
- *impar si $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in [-p, p]$.*

Es fácil ver que la gráfica de una función par es simétrica respecto al eje de ordenadas mientras que una función impar es simétrica respecto al origen de coordenadas.
La serie de Fourier de una función par contiene sólo el término independiente y los términos en coseno, es decir, $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega x$

La serie de Fourier de una función impar contiene sólo los términos en seno, es decir, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n\omega x$

También es posible obtener un desarrollo de Fourier solo en senos o solo en cosenos para una función definida en $\left[0,p\right]$, sin más que hacer una extensión periódica impar o una extensión periódica par de dicha función (ver ejercicio resuelto 6).

4 Forma compleja de la Serie de Fourier. Espectro de amplitud.

Supongamos que la función $f(x)$ satisface las condiciones suficientes de desarrollabilidad en serie de Fourier. Entonces en el segmento $\left[-p,p\right]$ puede representarse mediante la serie

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega x+b_n\operatorname{sen} n\omega x),\quad \omega=\frac{\pi}{p}$$

Utilizando las fórmulas de Euler para la exponencial compleja

$$\left.\begin{aligned} e^{in\omega x}&=\cos n\omega x+i\operatorname{sen} n\omega x\\ e^{-in\omega x}&=\cos n\omega x-i\operatorname{sen} n\omega x\end{aligned}\right\}\Rightarrow \left.\begin{aligned}\cos n\omega x&=\frac{e^{in\omega x}+e^{-in\omega x}}{2}\\ \operatorname{sen} n\omega x&=\frac{e^{in\omega x}-e^{-in\omega x}}{2i}\end{aligned}\right]$$

y sustituyendo en la serie resulta

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n-ib_n}{2}e^{in\omega x}+\frac{a_n+ib_n}{2}e^{-in\omega x}\right]$$

LLamando

$$c_0=\frac{a_0}{2},\quad c_n=\frac{a_n-ib_n}{2},\quad c_{-n}=\frac{a_n+ib_n}{2}$$

la serie se transforma en

$$f(x)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[c_ne^{in\omega x}+c_{-n}e^{-in\omega x}\right]=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_ne^{in\omega x}+\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}e^{-in\omega x}=$$
$$=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_ne^{in\omega x}+\sum_{n=-\infty}^{-1}c_ne^{in\omega x}$$

Abreviadamente,

$$\boxed{f(x)=c_0+\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}c_ne^{in\omega x}}$$

que es la representación compleja del desarrollo en serie de Fourier de $f\left(x\right)$. A los coeficientes c_n se les llama coeficientes complejos de Fourier de la función $f\left(x\right)$ y pueden obtenerse a partir de los coeficientes reales:

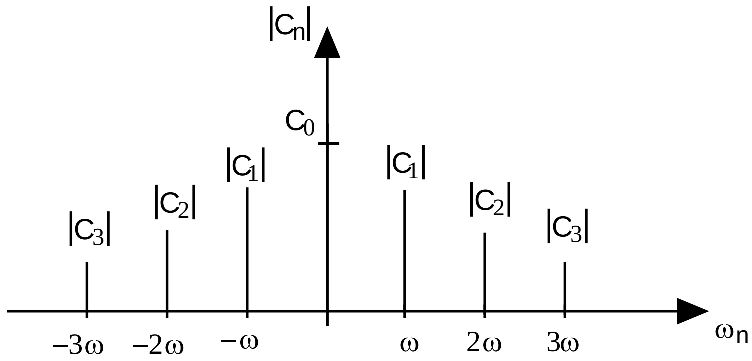
$$c_n=\frac{a_n-ib_n}{2}\qquad\qquad c_{-n}=\frac{a_n+ib_n}{2}\qquad\qquad n\in\mathbb{N}$$

O bien directamente,

$$c_n = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)e^{-in\omega x}dx, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Definición (Espectro de amplitud).- Se llama espectro complejo de amplitud de $f(x)$ a la gráfica resultante de representar la amplitud $|c_n|$ frente a la frecuencia angular $n\omega$.

Nótese que el espectro de amplitud de $f(x)$ es una gráfica formada por un conjunto de puntos discretos, correspondientes a las frecuencias discretas $\omega_n = n\omega = \dfrac{n\pi}{p}$ y se extiende a frecuencias negativas.



$$|c_n| = \left|\frac{a_n - ib_n}{2}\right| = \\ = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^{\,2} + b_n^{\,2}}$$

5 Derivación e integración de Series de Fourier

A continuación se presentan dos teoremas que establecen las condiciones para poder escribir nuevos desarrollos de Fourier mediante integración o derivación de otros conocidos.

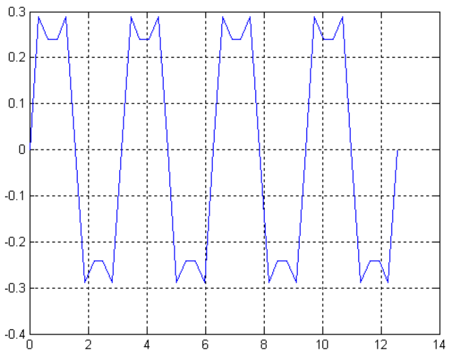
Teorema (Integración de series de Fourier).- La integral de cualquier función 2p- periódica, que cumpla el criterio de Dirichlet, se puede hallar integrando término a término la serie de Fourier de la función en el interior del intervalo $[-p, p]$.

Teorema (Derivación de series de Fourier).- Si $f(x)$ es una función periódica continua en el intervalo $[-p, p]$, con $f(-p) = f(p)$, y su derivada $f'(x)$ satisface las condiciones de Dirichlet en este intervalo, entonces la serie de Fourier de $f'(x)$ se puede obtener derivando término a término la serie de $f(x)$. La serie obtenida converge a $f'(x)$ en las condiciones del criterio de Dirichlet.

Ejercicios propuestos

1 Con la herramienta de **representación de armónicos** de la página http://personales.unican.es/alvareze/CalculoWeb/CalculoII/descartesJS/armonicos-JS/armonico.html analiza el significado de la amplitud, la frecuencia y la fase en una onda cosenoidal.

2 (a) ¿Qué observas en la gráfica de la figura? ¿Cuál crees que es el periodo fundamental de la función?



(b) Si la ecuación de la función es

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{sen}2t+\frac{1}{3}\operatorname{sen}6t+\frac{1}{5}\operatorname{sen}10t\right),$$

comprueba cuáles de los siguientes valores son periodo de $f(t)$:

$T=\pi/2,\ T=\pi,\ T=2\pi$ ¿Cuál es su frecuencia angular?

Solución: $T=\pi$ es el periodo propio; $T=2\pi$ también es periodo. Frecuencia angular: $\omega=2$

3 a) Obtener el periodo fundamental y la frecuencia angular de la función

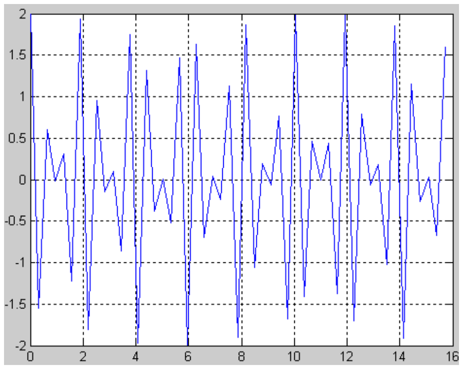
$$f(t)=\cos\frac{t}{3}+\cos\frac{t}{4}.$$

b) Sea $f(t)$ una función de periodo T ¿Cuál sería el periodo de la función $f(at),\ a>0$?

Solución: a) $T=24\pi$, $\omega=1/12$ b) T/a

4 Se considera la función $f(t)=\cos 10t+\cos\left((10+\pi)t\right)$. Razonar si su periodo fundamental es $T=\dfrac{2\pi}{5}$. En caso negativo, ¿cuál sería?

La figura muestra la gráfica de la función.



Solución: No es periódica.

5 En la herramienta de **representación de series de Fourier** de la página siguiente http://personales.unican.es/alvareze/CalculoWeb/CalculoII/descartesJS/armonicos-JS/fourier1.html pulsa sobre el botón ejemplos para ver cuál es el desarrollo en serie de Fourier de distintas funciones periódicas. Observa cómo aumentando el número de armónicos se consigue una mejor aproximación a la función

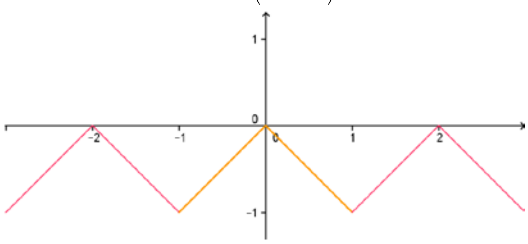
6 Desarrollar la función 2-periódica $f(x)$ definida en [-1, 1] de la forma

$$f(x)=\begin{cases}x, & si\quad x\in[-1,0]\\ -x, & si\quad x\in[0,1]\end{cases}$$

Analizar la convergencia de la serie obtenida

Solución:

$$f(x)=-\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2},\ \forall x\in\mathbb{R}$$



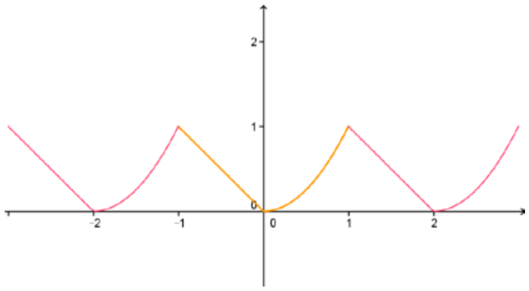
7 Desarrollar en serie de Fourier la siguiente función periódica

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & 0\le x<1 \\ -x & -1\le x<0 \end{cases}$$

Solución:

$$f(x)=\frac{5}{12}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4}{\pi^2\left(2n-1\right)^2}\cos\left(\left(2n-1\right)\pi x\right)+$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}+\frac{2}{\pi^2\left(2n\right)^2}\cos\left(2n\pi x\right)-$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^3\left(2n-1\right)^3}\operatorname{sen}\left(\left(2n-1\right)\pi x\right)$$

para $-1\le x\le 1$



8 Ejecuta la **presentación "Series de Fourier"** que encontrarás en la página de la asignatura en Moodle.
En esta presentación se analiza cómo, conocido el desarrollo en serie de Fourier de una función $f(x)$, es posible obtener la serie de Fourier de una nueva función, siempre que esta nueva función sea el resultado de hacer una de las transformaciones siguientes en la función de partida:

- Escalado horizontal (cambio de período).
- Escalado vertical.
- Desplazamiento horizontal.
- Desplazamiento vertical.

Después de ver la presentación contesta razonadamente a estas preguntas, considerando

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<\pi \\ 2\pi-x, & \pi\le x<2\pi \end{cases}$$

$$g(t)=\begin{cases} \pi t, & 0\le t<1 \\ 2\pi-\pi t, & 1\le t<2 \end{cases}.$$

1. ¿Qué relación hay entre las funciones $f(x)$ y $g(t)$?
2. ¿y entre sus series de Fourier?

9 En este ejercicio se obtiene el desarrollo en serie de Fourier de la función vista en la presentación del ejercicio anterior y se dibuja la aproximación de la función sumando n armónicos.

Se considera la función 4-periódica definida por:

$$f(x)=2-\left|x\right|,\quad x\in\left[-2,2\right]$$

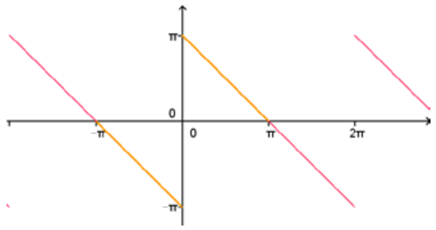
Se pide:

1. ¿Cuál es la frecuencia angular de $f(x)$?, ¿Es una función par o impar? ¿Es continua? ¿Cumple el criterio de Dirichlet?
2. Dibuja con Matlab la gráfica de la función en el intervalo $\left[-4,4\right]$.
3. Calcula, resolviendo las integrales con Matlab, los coeficientes del desarrollo de Fourier de $f(x)$.
4. Escribe la serie de Fourier de $f(x)$ y justifica la convergencia de la serie a la función utilizando el criterio de Dirichlet.
5. A partir de la serie obtenida, calcula la suma de la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$.
   Comprueba el resultado sumando esta serie con Matlab.
6. Dibuja, en una misma figura, la gráfica de $f(x)$ y la gráfica de la aproximación que se obtiene utilizando los cuatro primeros armónicos no nulos del desarrollo de Fourier, función $g\left(x\right)$,
   $$g(x)=1+\frac{8}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{2}+\frac{1}{7^2}\cos\frac{7\pi x}{2}\right)$$
   Indica con una leyenda la curva que corresponde a la función y a la aproximación.
7. Ejecuta el fichero sierra.m para dibujar aproximaciones de $f(x)$ utilizando los n primeros armónicos de su serie de Fourier.

10 Desarrollar la función $f(x)=\pi-x,\quad 0\le x\le\pi$ en serie de Fourier de senos y en serie de Fourier de cosenos, justificando la convergencia de cada desarrollo.

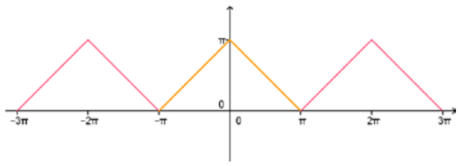
Solución: a) senos:

$$\pi-x=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} nx}{n},\quad 0<x\le\pi$$



b) cosenos:

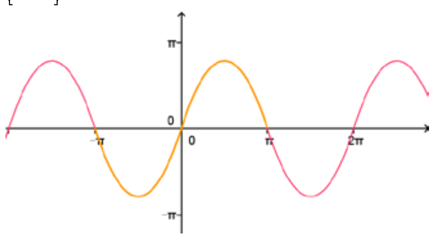
$$\pi - x = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}, \qquad 0 \le x \le \pi$$



11 Determinar el desarrollo en serie de Fourier de senos y en serie de Fourier de cosenos de la función $f(x) = x\left(\pi - x\right)$ en $\left[0, \pi\right]$

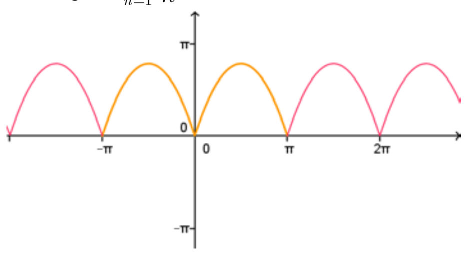
Solución: En serie de senos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{\pi\left(2n-1\right)^3}\operatorname{sen}\left(\left(2n-1\right)x\right)$$ para $x \in \left[0, \pi\right]$



En serie de cosenos

$$f(x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\left(2n\,x\right)$$ para $x \in \left[0, \pi\right]$



12 1. Calcular el desarrollo en serie de Fourier de la función de periodo 2 definida en $\left(-1, 1\right)$ por la ecuación $f(t) = U(t) - U(t-1)$ donde

$$U(t-c) = \begin{Bmatrix} 1 & si & t > c \\ 0 & si & t < c \end{Bmatrix}$$

es la función escalón unitario

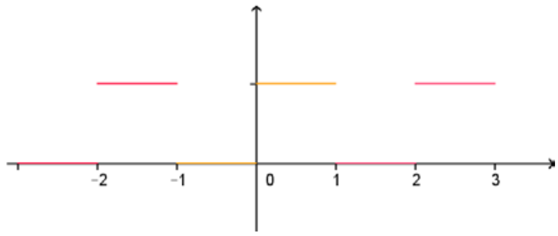
2. Calcular $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$

3. A partir de la serie de Fourier de la función $f(t)$, obtener la serie de Fourier en forma compleja de la función

$$g(t) = \begin{cases} 0, & -\pi < t < 0 \\ 5, & 0 < t < \pi \end{cases}$$

Solución: 1)

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\operatorname{sen} n\pi t, \quad \forall t \ne k, \ k \in \mathbb{Z}$$



2) $\pi / 4$ 3)

$$g(t) = \frac{5}{2} + \frac{5i}{2\pi}\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\ne 0}}^{n=\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n}e^{i\,n\,t}, \quad t \ne k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

13 Escribir la serie de Fourier en sus formas armónica y compleja para la función de período $2p$,

$$f(t) = \frac{2}{p}t, \quad 0 < t < 2p$$

Justificar la convergencia de la serie obtenida.

Solución:

$$f(t) = 2 + \frac{2}{\pi}\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\ne 0}}^{\infty}\frac{i}{n}e^{in\frac{\pi}{p}t}, \qquad 0 < t < 2p$$

14 Hallar la serie de Fourier de la función definida por

$$f(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2\frac{x}{3}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

¿Cuál es el periodo propio y la frecuencia angular de la función?

Solución:

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}\cos\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}\cos 2x\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$T = 3\pi, \ \ \omega = 2/3$$

Test de autoevaluación

1 El término constante del desarrollo en serie de Fourier de la función

$f(x)=\begin{cases}\pi, & -\pi\le x\le 0\\ x, & 0<x<\pi\end{cases}$ es,

A) $\pi/4$.

B) $3\pi/4$.

C) $\pi/2$.

D) Ninguna de las anteriores.

2 El desarrollo en serie de Fourier de la función $f(x)=\begin{cases}1, & -\pi<x\le 0\\ -\frac{1}{2}, & 0<x<\pi\end{cases}$ es:

A) $\frac{1}{4}-\frac{3}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2n-1)x}{2n-1}$

B) $\frac{1}{4}-\frac{3}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}2nx}{2n}$

C) $\frac{1}{4}+\frac{3}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2n-1)x}{2n-1}$

D) Ninguna de las anteriores.

3 El periodo propio de la función

$f(t)=3\cos 3t+3\operatorname{sen}3t-\frac{1}{2}\operatorname{sen}9t$, es

A) $\pi/3$

B) $2\pi/9$

C) $2\pi/3$

D) Ninguna de las anteriores.

4 Se sabe que la serie de Fourier de la función $f(x)=\begin{cases}A, & si\quad 0<x<\pi\\ 0, & si\quad \pi<x<2\pi\end{cases}$ es:

$f(x)=\frac{A}{2}+\frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\operatorname{sen}(2n-1)x,$

$x\ne k\pi\quad (k\in\mathbb{Z})$.

Entonces la serie de Fourier de la función

$g(x)=\begin{cases}2A, & si\quad 0<x<T/2\\ 0, & si\quad T/2<x<T\end{cases}$ es:

A) $g(x)=A+\frac{4A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}\operatorname{sen}(2n\frac{2\pi}{T}x),$

$x\ne k\frac{T}{2}$

B) $g(x)=A+\frac{4A}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\operatorname{sen}(2n-1)\frac{2\pi}{T}x,$

$x\ne k\frac{T}{2}$

c) $g(x)=A+\frac{4A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\operatorname{sen}(2n-1)\frac{2\pi}{T}x,$

$x\ne k\frac{T}{2}$

D) Ninguna de las anteriores.

5 Al desarrollar la función $f(x)=x|x|$, $-\pi\le x\le\pi$ en serie compleja de Fourier, los coeficientes no nulos, cumplen:

A) Todos son reales

B) Todos son imaginarios puros.

C) Todos son complejos con parte real e imaginaria no nula.

D) Ninguna de las anteriores.

6 Decir cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera:

A) El producto de una función par por una impar es una función par.

B) El producto de dos funciones impares es una función impar.

C) La derivada de una función par es una función par.

D) Ninguna de las anteriores.

7 Se considera la función de periodo $T=2$, definida en el intervalo $(-1,1)$ por la ecuación $f(t)=U(t)-U(t-1)$. El coeficiente complejo de la serie de Fourier de $f(t)$ es:

A) $C_n=\frac{i(\cos n\pi-1)}{n\pi}$

B) $C_n=\frac{i(\cos n\pi-1)}{2n\pi}$

C) $C_n=\frac{(\cos n\pi-1)}{n\pi}$.

D) Ninguna de las anteriores.

8 Los coeficientes reales de la serie de Fourier de la función de la cuestión 7, son:

A) $a_n = 0,\ b_n = \dfrac{1-\cos n\pi}{n\pi}$.

B) $a_n = \dfrac{2(\cos n\pi - 1)}{n\pi},\ b_n = 0$.

C) $a_n = 0,\ b_n = -\dfrac{2}{(2n-1)\pi}$.

D) Ninguna de las anteriores.

9 Si la serie de Fourier de la función $f(x) = 2x$ para $-\pi \le x \le \pi$, es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n}(-1)^{n+1} \operatorname{sen} nx$$

Se puede deducir que la suma de la serie numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ es:

A) $-\pi / 4$.

B) $\pi / 4$.

C) $\pi / 2$

D) Ninguna de las anteriores.

10 Dada la función de periodo 4, definida por $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le 1 \\ 1, & 1 \le t \le 4 \end{cases}$ El coeficiente complejo de la serie de Fourier de $f(t)$ es:

A) $C_n = \dfrac{i}{n\pi}\left(1 - e^{-\frac{in\pi}{2}}\right), \quad n \in \mathbb{Z},\ n \ne 0$.

B) $C_n = \dfrac{i}{2n\pi}\left(1 - e^{-\frac{in\pi}{2}}\right), \quad n \in \mathbb{Z},\ n \ne 0$

C) $C_n = \dfrac{1}{n\pi}\left(1 - e^{-\frac{in\pi}{2}}\right), \quad n \in \mathbb{Z},\ n \ne 0$

D) Ninguna de las anteriores.

Soluciones del Test:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b	a	c	c	b	d	b	a	b	b

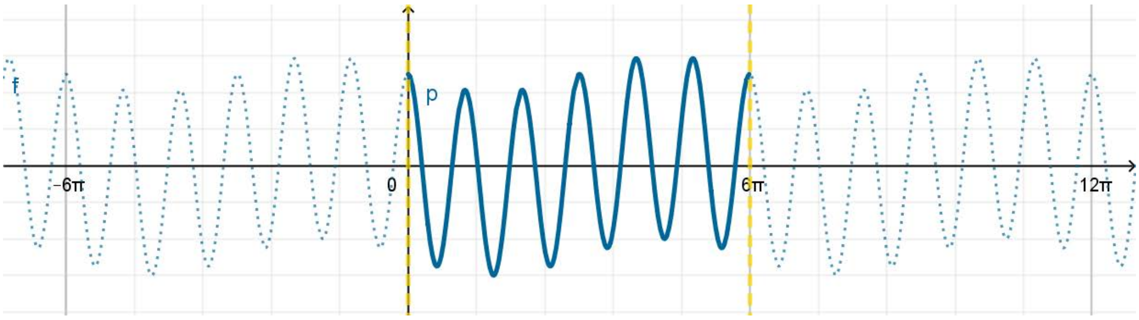
Ejercicios resueltos

FUNCIONES PERIÓDICAS. ARMÓNICOS

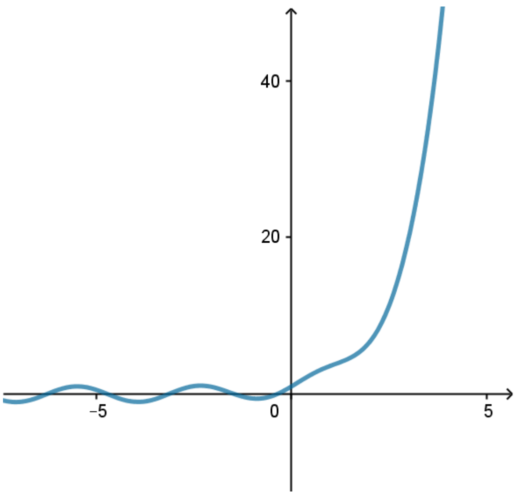
1 Dadas las funciones $g(x)=5\cos(2x)-sen\left(\frac{x}{3}\right)$ y $h(x)=sen(2x)+e^{x}$, ¿son periódicas? Si es así, determina su periodo.

Solución

La función $g(x)=5\cos(2x)-sen\left(\frac{x}{3}\right)$ es periódica de periodo $6\pi = m.c.m(\pi, 6\pi)$



La función $h(x)=sen(2x)+e^{x}$ no es periódica.



2 Se considera la función $f(t)$ periódica de periodo 2π definida de la forma

$$f(t)=\begin{cases} 2t(\pi-t) & 0\le t\le\pi \\ 2t(\pi+t) & -\pi\le t<0 \end{cases}$$

siendo su serie de Fourier: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{\pi(2n-1)^2}\operatorname{sen}\left((2n-1)t\right)$.

Se pide:

a) Determinar la frecuencia angular y el periodo de los 3 primeros armónicos no nulos.

b) Escribir el código Matlab para representar la suma de los 10 primeros armónicos no nulos en el intervalo $[-5\pi,5\pi]$ junto con la gráfica de la función.

Solución a)

Los 3 primeros armónicos no nulos son

$$f_1(t)=\frac{16}{\pi}sen(t) \qquad f_2(t)=\frac{16}{9\pi}sen(3t) \qquad f_3(t)=\frac{16}{25\pi}sen(5t)$$

- El periodo de $f_1(t)$ es 2π y su frecuencia angular es 1
- El periodo de $f_2(t)$ es $\frac{2\pi}{3}$ y su frecuencia angular es 3
- El periodo de $f_3(t)$ es $\frac{2\pi}{5}$ y su frecuencia angular es 5

Solución b)

El código Matlab para representar la suma podría ser:

```
%Forma 1
x1=linspace(-pi,0);
x2=linspace(0,pi);
y1=2*x1.*(pi+x1);
y2=2*x2.*(pi-x2);
hold on
for k=-2:2
    x=x1+2*k*pi;
    plot(x,y1)
    x=x2+2*k*pi;
    plot(x,y2)
end
hold on
t=linspace(-5*pi,5*pi);
suma=0;
for k=1:10
    suma=suma+16/(pi*(2*k-
1)^2)*sin((2*k-1)*t);
end
hold on
plot(t,suma,'r')
hold off
```

```
%Forma 2
%Representación de la función
x1=linspace(-pi,0);
x2=linspace(0,pi);
y1=2*x1.*(pi+x1);
y2=2*x2.*(pi-x2);
xc=[x1 x2];yc=[y1 y2];
hold on
plot(xc,yc)
plot(xc+2*pi,yc)
plot(xc-2*pi,yc)
%Representación de los
%10 armónicos
syms x
n=1:10;
nter=sum(16*sin((2*n-
1)*x)./(pi*(2*n-1).^2));
vx=linspace(-5*pi,5*pi);
sumandos=subs(nter,x,vx);
plot(vx,sumandos)
hold off
axis equal
```

DESARROLLO EN SERIE DE FOURIER. CONVERGENCIA

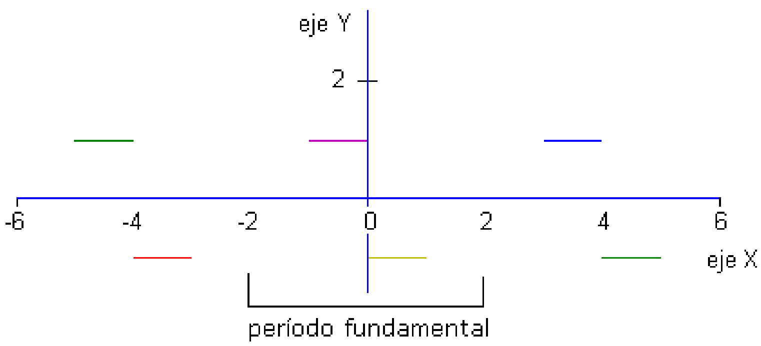
3 Hallar el desarrollo en serie de Fourier de la función de período $T = 4$, definida como

$$f(t) = \begin{cases} 0, & si \quad -2 < t < -1 \\ 1, & si \quad -1 < t < 0 \\ -1, & si \quad 0 < t < 1 \\ 0, & si \quad 1 < t < 2 \end{cases}$$

Estudiar la convergencia de la serie de Fourier en el intervalo $\left[-2, 2\right]$.

Solución

El período de la función es $T = 4$, luego la frecuencia fundamental o frecuencia del primer armónico de la serie de Fourier es $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{\pi}{2}$.




```
x1=[-2 -1];x2=[-1 0];x3=[0 1];x4=[1 2];
y1=[0 0];y2=[1 1];y3=[-1 -1];y4=[0 0];
hold on
plot(x1,y1,x2,y2,x3,y3,x4,y4)
plot(x1+4,y1,x2+4,y2,x3+4,y3,x4+4,y4)
plot(x1-4,y1,x2-4,y2,x3-4,y3,x4-4,y4)
plot([-6 6],[0 0],'b')
plot([0 0],[-4 4],'b')
hold off
axis equal
xlabel('eje X');ylabel('eje Y')
```

A la vista de la gráfica, por tratarse de una función impar, es decir $f\left(-t\right) = -f\left(t\right) \quad \forall t \in \mathbb{R}$, los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier nulos serán $a_0 = a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. En cuanto a los coeficientes b_n se obtienen así

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-2}^{2} \underbrace{\underbrace{f(t)}_{impar}\underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{2}\right)}_{impar}}_{par} dt = \frac{1}{2}2\int_{0}^{2} f(t)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{2}\right)dt = \int_{0}^{1}(-1)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{2}\right)dt$$

$$b_n = \left[\frac{\cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)}{\frac{n\pi}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{n\pi}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)-1\right), \text{ para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Luego el desarrollo en serie de Fourier de $f(t)$ es

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)-1}{n}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{2}\right), \qquad \forall t \in [-2,2]-\{-1, 0, 1\}$$

En cuanto a la convergencia de la serie de Fourier en el intervalo $[-2,2]$, la serie converge a $f(t)$ en todos los puntos donde la función es continua, tal como muestra la expresión anterior. En los puntos de discontinuidad de salto de $f(t)$, la serie converge al valor promedio del salto; concretamente, se verifica

$$\begin{cases} \text{si} \quad t=-1, \quad \text{la serie converge a } \dfrac{f(-1)^- + f(-1)^+}{2} = \dfrac{1}{2} \\ \text{si} \quad t=0, \quad \text{la serie converge a } \dfrac{f(0)^- + f(0)^+}{2} = 0 \\ \text{si} \quad t=1, \quad \text{la serie converge a } \dfrac{f(1)^- + f(1)^+}{2} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

4

a) Determina el desarrollo en serie de Fourier de la función $2\pi -$ periódica

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ \pi - x & 0 \le x < \pi \end{cases}$$

b) Justifica donde converge la serie a la función f.

Solución a)

Los coeficientes de la serie de Fourier son

$$a_o = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\pi - x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\pi x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\pi - x)\cos(nx)\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[(\pi - x)\frac{\operatorname{sen}(n\,x)}{n} - \frac{\cos(n\,x)}{n^2}\right]_{x=0}^{x=\pi} =$$

$$= \frac{-\cos(n\,\pi)+1}{\pi n^2} = \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}$$

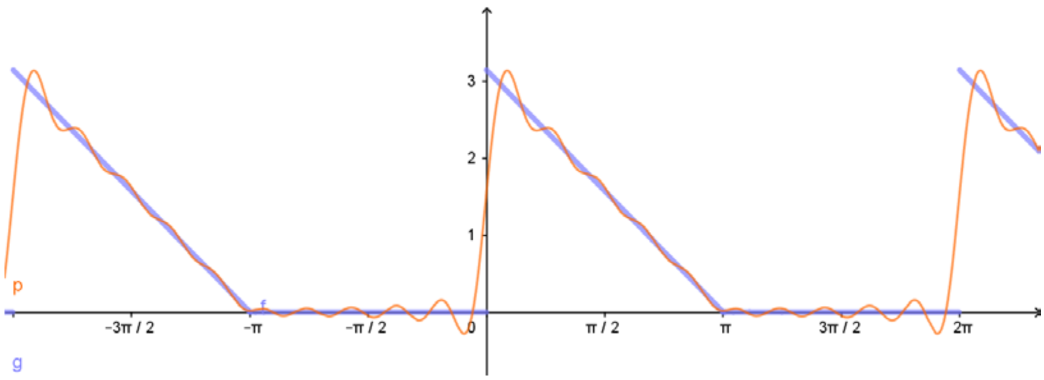
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,sen(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\pi - x)\,sen(nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-(\pi - x)\frac{\cos(n\,x)}{n} - \frac{\operatorname{sen}(n\,x)}{n^2}\right]_{x=0}^{x=\pi} = \frac{1}{n}$$

El desarrollo en serie de Fourier es

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}\cos(nx) + \frac{1}{n}\,sen(nx)\right) =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{(2n-1)^2\,\pi}\cos((2n-1)x) + \frac{1}{n}\,sen(nx)\right) \qquad x \in \mathbb{R} - \{2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$$



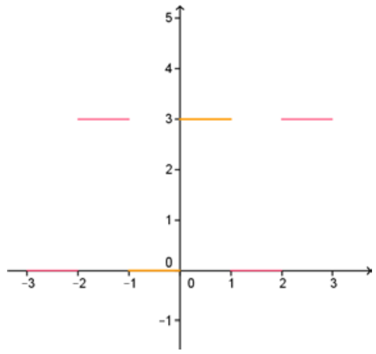
5 (a) Calcular la serie de Fourier de la función 2-periódica definida en el intervalo $[-1,1)$ de la forma siguiente $f(t) = \begin{cases} 0 & si \;\; -1 \le t \le 0 \\ 3 & si \;\; 0 < t < 1 \end{cases}$

b) Estudiar la convergencia de la serie obtenida.

c) Obtener el valor de la serie: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$

Solución a)

Se tiene que $T = 2, p = 1, w = \pi$. La función no es par ni impar.



$$a_o = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\,dx = \int_0^1 3dx = 3$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos(nwx)\,dx = \int_0^1 3\cos(n\pi x)\,dx = 3\left.\frac{sen(n\pi x)}{n\pi}\right|_{x=0}^{x=1} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\,sen(nwx)\,dx = \int_0^1 3sen(n\pi x)\,dx = 3\left.\frac{-\cos(n\pi x)}{n\pi}\right|_{x=0}^{x=1} =$$

$$= 3\frac{-(-1)^n + 1}{n\pi} = \begin{cases} 0 & n \ \ par \\ \dfrac{6}{n\pi} & n \ \ impar \end{cases}$$

La serie de Fourier es

$$S(x) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{(2n-1)\pi}\,sen((2n-1)\pi x)$$

Solución b)

Se tiene que

$$S(x) = f(x) \qquad x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$$
$$S(k) = \frac{f(k^+) + f(k^-)}{2} = \frac{3}{2} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Solución c)

Considerando $x = \frac{1}{2}$, se tendrá

$$3 = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{(2n-1)\pi}\,sen\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$3 = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{6(-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi} \Rightarrow \qquad \frac{3}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{6(-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi} \Rightarrow \qquad \frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)}$$

6 a) Justificando la respuesta, determinar los valores de x para los cuales es cierta la siguiente igualdad

$$\frac{3\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2}\right)\cos(nx)-\frac{1}{n}sen(nx)\right]=f(x)$$

siendo $f(x)$ la función $2\pi-$ periódica definida en $[-\pi,\pi]$ de la forma

$$f(x)=\begin{cases}\pi & -\pi<x\le 0\\ x & 0<x<\pi\end{cases}$$

b) Calcular el valor de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$

Solución a)

Calculamos el desarrollo en serie de Fourier de la función $f(x)$ periódica de periodo $T=2\pi$, $w=1$, $p=\pi$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\pi dx+\int_{0}^{\pi}xdx\right)=\frac{1}{\pi}\left(\pi^2+\frac{\pi^2}{2}\right)=\frac{3\pi}{2}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\pi\cos(nx)\,dx+\int_{0}^{\pi}x\cos(nx)\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\left.\frac{\pi sen(nx)}{n}\right|_{x=-\pi}^{x=0}+\left.\left(\frac{xsen(nx)}{n}+\frac{\cos(nx)}{n^2}\right)\right|_{x=0}^{x=\pi}\right]=\frac{1}{\pi}\frac{(-1)^n-1}{n^2}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)sen(nx)\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\pi sen(nx)\,dx+\int_{0}^{\pi}xsen(nx)\,dx\right)=$$

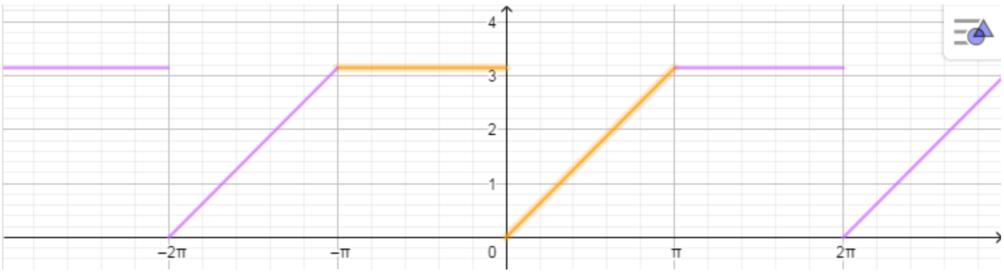
$$=\frac{1}{\pi}\left[\left.\frac{-\pi\cos(nx)}{n}\right|_{x=-\pi}^{x=0}+\left.\left(-\frac{x\cos(nx)}{n}+\frac{sen(nx)}{n^2}\right)\right|_{x=0}^{x=\pi}\right]=\frac{1}{\pi}\left(-\pi\frac{1-(-1)^n}{n}-\pi\frac{(-1)^n}{n}\right)=\frac{-1}{n}$$

El desarrollo en serie de Fourier de la función es

$$S(x)=\frac{3\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2}\right)\cos(nx)-\frac{1}{n}sen(nx)\right]$$

Esta serie converge a los siguientes valores

$$S(x)=f(x) \quad si\ x\neq 2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$$
$$S(x)=\frac{\pi}{2} \quad si\ x=2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$$



Solución b)

En el caso en el que x=0 se cumple

$$S(0)=\frac{3\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2}\right)\cos(0)-\frac{1}{n}sen(0)\right]=\frac{\pi}{2}$$

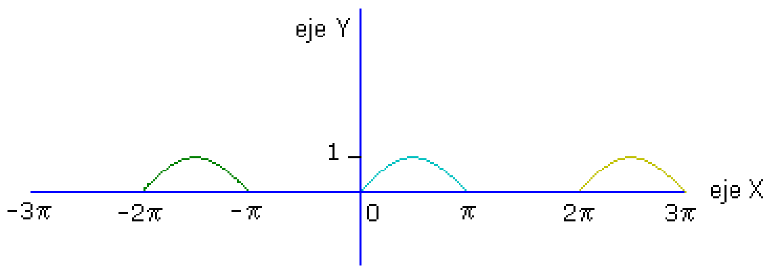
$$\frac{3\pi}{4}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi(2n-1)^2}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{-2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{-\pi}{4}\Rightarrow\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}}$$

7 Obtener el desarrollo en serie de Fourier de la función de período 2π, definida como

$$f(t)=\begin{cases}0 & si\ -\pi<t<0\\ \operatorname{sen} t & si\ \ 0<t<\pi\end{cases}$$

Estudiar la convergencia de la serie en el intervalo $[-\pi,\pi]$.

Solución




```
x1=linspace(0,pi);x2=[pi 2*pi];
y1=sin(x1);y2=[0,0];
hold on
plot(x1,y1,x2,y2)
plot(x1+2*pi,y1,x2+2*pi,y2)
plot(x1-2*pi,y1,x2-2*pi,y2)
plot([-6 12],[0 0],'b')
plot([0 0],[-6 6],'b')
hold off
axis equal
xlabel('eje X');ylabel('eje Y')
```

La función $f\left(t\right)$ es periódica de período 2π, luego la frecuencia fundamental vale 1. La serie de Fourier que representa a dicha función $f\left(t\right)$ será

$$f\left(t\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nt+b_n\operatorname{sen}nt$$

Calculamos el valor de los coeficientes de la serie, utilizando las fórmulas de Euler, así

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(t\right)\cos\left(nt\right)dt=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{0}^{\pi}\operatorname{sen}t\cos\left(nt\right)dt$$

La función subintegral se debe expresar de otra forma, utilizando una relación de trigonometría, para poderla integrar de forma inmediata

$$\operatorname{sen}a\cos b=\frac{\operatorname{sen}\left(a+b\right)+\operatorname{sen}\left(a-b\right)}{2}\quad\rightarrow\quad\operatorname{sen}t\cdot\cos\left(nt\right)=\frac{\operatorname{sen}t\left(1+n\right)+\operatorname{sen}t\left(1-n\right)}{2}$$

Sustituyendo queda

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\operatorname{sen}t\left(1+n\right)+\operatorname{sen}t\left(1-n\right)}{2}dt=\frac{-1}{2\pi}\left[\frac{\cos t\left(1+n\right)}{1+n}+\frac{\cos t\left(1-n\right)}{1-n}\right]_0^{\pi}$$

$$a_n=\frac{-1}{2\pi}\left\{\frac{\cos\pi\left(1+n\right)}{1+n}+\frac{\cos\pi\left(1-n\right)}{1-n}-\frac{1}{1+n}-\frac{1}{1-n}\right\}=\frac{-1}{2\pi}\left\{\frac{-\cos n\pi}{1+n}-\frac{\cos n\pi}{1-n}-\frac{1}{1-n}-\frac{1}{1+n}\right\}$$

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{2\cos n\pi}{1-n^2}+\frac{2}{1-n^2}\right\}=\frac{1+\cos n\pi}{\pi\left(1-n^2\right)}\ ,\ n\neq 1;$$

calculamos ahora de forma particular el coeficiente a_1, ya que la expresión general de a_n no nos sirve para $n=1$ porque quedaría cero en el denominador

$$a_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}t\cos t\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}2t\,dt=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{-\cos 2t}{2}\right]_0^{\pi}=0$$

Por otra parte, $b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}t\operatorname{sen}nt\,dt$, teniendo en cuenta la relación

$$\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b=\frac{\cos\left(a-b\right)-\cos\left(a+b\right)}{2}\quad\rightarrow\quad\operatorname{sen}t\operatorname{sen}nt=\frac{\cos t\left(1-n\right)-\cos t\left(1+n\right)}{2}$$

$$b_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left\{\cos t\left(1-n\right)-\cos t\left(1+n\right)\right\}dt=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\operatorname{sen}t\left(1-n\right)}{1-n}-\frac{\operatorname{sen}t\left(1+n\right)}{1+n}\right]_0^{\pi}$$

$$b_n=\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\operatorname{sen}\pi\left(1-n\right)}{1-n}-\frac{\operatorname{sen}\pi\left(1+n\right)}{1+n}\right\}=\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\operatorname{sen}n\pi}{1-n}+\frac{\operatorname{sen}n\pi}{1+n}\right\}=0\ ,\quad n\neq 1$$

calculamos también de forma particular el coeficiente b_1 para evitar la división por cero.

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} t \operatorname{sen} t dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(1-\cos 2t\right)dt = \frac{1}{2\pi}\left[t - \frac{\operatorname{sen} 2t}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}$$

La serie de Fourier quedará así

$$f(t) = \frac{1}{\pi} + b_1 \operatorname{sen} t + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{\pi(1-n^2)}\cos(nt) = \frac{1}{\pi} + \frac{\operatorname{sen} t}{2} - \frac{2}{\pi}\left\{\frac{\cos 2t}{3} + \frac{\cos 4t}{15} + \frac{\cos 6t}{35} + \ldots\right\}$$

La serie converge a $f(t)$ en todos los puntos del intervalo $[-\pi, \pi]$, porque en ellos la función es continua.

DESARROLLO DE LAS FUNCIONES PARES E IMPARES EN SERIE DE FOURIER. EXTENSIÓN PAR E IMPAR

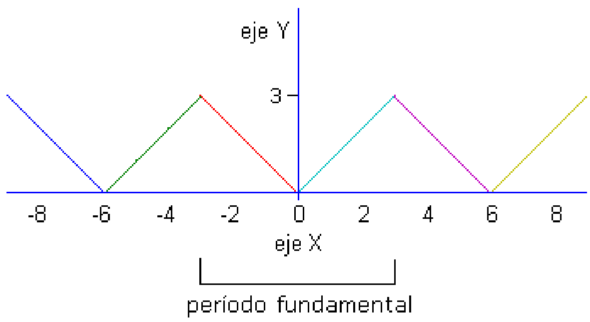
8

Obtener el desarrollo en serie de Fourier de la función de período 2π, definida como

$$f(t) = \begin{cases} -t & si \quad -3 < t < 0 \\ t & si \quad 0 < t < 3 \end{cases}$$

Estudiar la convergencia de la serie en el intervalo $[-3, 3]$.

Solución:




```
x1=[-3 0];x2=[0 3];
y1=[3 0];y2=[0,3];
hold on
plot(x1,y1,x2,y2)
T=6;
plot(x1+T,y1,x2+T,y2)
plot(x1-T,y1,x2-T,y2)
plot([-3-T 3+T],[0 0],'b')
plot([0 0],[-6 6],'b')
hold off
axis equal
xlabel('eje X');ylabel('eje Y')
```

En este caso, el período de la función es $T = 6$, siendo la frecuencia fundamental $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{3}$. Por otra parte, la función es par, ya que verifica $f(-t) = f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$. En consecuencia, tendremos $b_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Luego la serie de Fourier quedará así

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{n\pi t}{3}\right)$$

Calculamos el valor de los coeficientes de la serie

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-3}^{3}\underbrace{\underbrace{f(t)}_{par}\underbrace{\cos\left(\frac{n\pi t}{3}\right)}_{par}}_{par}dt=\frac{1}{3}2\int_{0}^{3}t\cos\left(\frac{n\pi t}{3}\right)dt\,,$$

aplicando el método de integración por partes:

$$\left\{\begin{matrix} u=\dfrac{2t}{3} & \rightarrow & du=\dfrac{2dt}{3} \\ dv=\cos\left(\dfrac{n\pi t}{3}\right) & \rightarrow & v=\dfrac{3\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{n\pi t}{3}\right)}{n\pi} \end{matrix}\right\}$$

sustituyendo queda

$$a_n=\left[uv\right]_0^3-\int_0^3 vdu=\left[\frac{2t}{3}\frac{3\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi t}{3}\right)}{n\pi}\right]_0^3-\int_0^3\frac{2\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi t}{3}\right)}{n\pi}dt$$

$$a_n=\left[\frac{2t}{3}\frac{3\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi t}{3}\right)}{n\pi}+\frac{6\cos\left(\frac{n\pi t}{3}\right)}{\left(n\pi\right)^2}\right]_0^3=\frac{6\,\mathrm{sen}\left(n\pi\right)}{n\pi}+\frac{6\cos\left(n\pi\right)}{\left(n\pi\right)^2}-\frac{6}{\left(n\pi\right)^2}=\frac{6\left(\cos\left(n\pi\right)-1\right)}{\left(n\pi\right)^2}\,,\quad n\neq 0$$

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-3}^{3}\underbrace{f(t)}_{par}dt=\frac{1}{3}2\int_0^3 tdt=\frac{2}{3}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^3=3$$

Sustituyendo estos coeficientes en la serie se obtiene

$$f(t)=\frac{3}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n^2\pi^2}\left(\cos\left(n\pi\right)-1\right)\cos\left(\frac{n\pi t}{3}\right)=\frac{3}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n^2\pi^2}\left(\left(-1\right)^n-1\right)\cos\left(\frac{n\pi t}{3}\right)$$

que también puede expresarse así

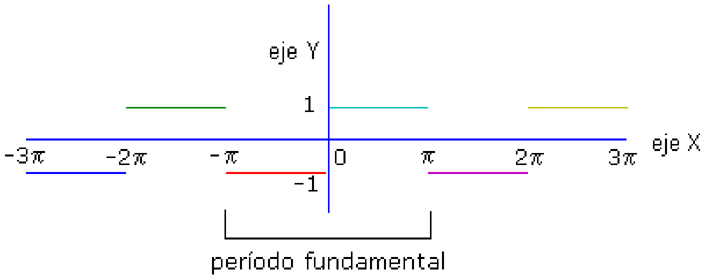
$$f(t)=\frac{3}{2}-\frac{12}{\pi^2}\left(\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)+\frac{1}{3^2}\cos\left(\frac{3\pi t}{3}\right)+\frac{1}{5^2}\cos\left(\frac{5\pi t}{3}\right)...\right)$$

La serie de Fourier converge a $f(t)\quad\forall t\in\left[-3,3\right]$, ya que la función es continua en todos los puntos del intervalo $\left[-3,3\right]$.

9 (a) Definir la serie de Fourier de la función $f(t)=\left\{\begin{matrix} -1\ , & -\pi<t<0 \\ 1\ , & 0<t<\pi \end{matrix}\right\}$ en el intervalo $\left[-\pi,\pi\right]$, sabiendo que se trata de una función periódica de período 2π.

b) Estudiar la convergencia de la serie obtenida en dicho intervalo. Aplicar los resultados obtenidos en el estudio de la convergencia de la serie para hallar la suma de la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n-1}}{(2n-1)}$.

Solución a)




```
x1=[-pi 0];x2=[0 pi];
y1=[-1 -1];y2=[1 1];
hold on
plot(x1,y1,x2,y2)
T=2*pi;
plot(x1+T,y1,x2+T,y2)
plot(x1-T,y1,x2-T,y2)
plot([-pi-T pi+T],[0 0],'b')
plot([0 0],[-6 6],'b')
hold off
axis equal
```

La función es impar, pues verifica $f\left(-t\right)=-f\left(t\right)\quad \forall t\in\mathbb{R}$. Los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier nulos serán $a_0=a_n=0\quad \forall n\in\mathbb{N}$, quedando la serie de Fourier así $f\left(t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n \operatorname{sen} nt$, pues la frecuencia fundamental es $\omega=1$.

Calculamos los coeficientes no nulos

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\underbrace{f\left(t\right)}_{impar}\underbrace{\operatorname{sen}\left(nt\right)}_{impar}}_{par}dt=\frac{1}{\pi}2\int_{0}^{\pi}\operatorname{sen}\left(nt\right)dt=\left[-\frac{2\cos\left(nt\right)}{n\pi}\right]_0^{\pi}=$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left(-\cos\left(n\pi\right)+1\right)=\frac{2}{n\pi}\left(1-\left(-1\right)^n\right)$$

sustituyendo en la serie quedará

$$f\left(t\right)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1-\left(-1\right)^n\right)}{n}\operatorname{sen} nt=\frac{4}{\pi}\left(\frac{\operatorname{sen} t}{1}+\frac{\operatorname{sen} 3t}{3}+\frac{\operatorname{sen} 5t}{5}+\ldots\right)$$

La serie converge a $f(t)\ \forall t \in [-\pi,\pi]-\{-\pi, 0, \pi\}$, donde la función es continua. En los puntos restantes del intervalo tendremos

$$\begin{cases} si \quad t=\pm\pi, \quad la\ serie\ converge\ a\ \dfrac{f(-\pi)^{+}+f(\pi)^{-}}{2}=\dfrac{-1+1}{2}=0 \\ si \quad t=0, \quad la\ serie\ converge\ a\ \dfrac{f(0)^{-}+f(0)^{+}}{2}=\dfrac{-1+1}{2}=0 \end{cases}$$

Solución b)

La serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)}$ coincide con la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{sen}\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2n-1)}$, que es igual a la expresión entre paréntesis de la serie de Fourier si hacemos $t=\dfrac{\pi}{2}$. Como además sabemos que para $t=\dfrac{\pi}{2}$ la serie converge a $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, resulta

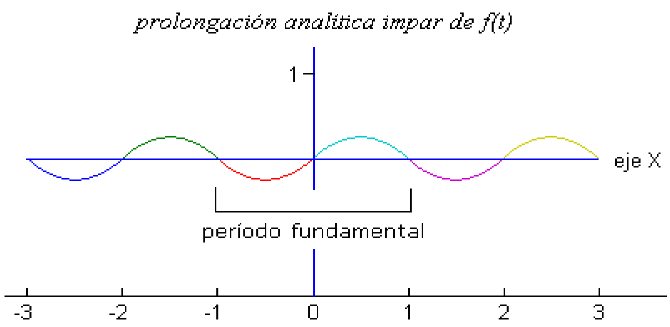
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1=\frac{4}{\pi}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}{1}+\frac{\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}}{3}+\frac{\operatorname{sen}\frac{5\pi}{2}}{5}+\ldots\right)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sen\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2n-1)}=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)}$$

despejando resulta $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)}=\frac{\pi}{4}$$

10 Hallar el desarrollo en serie de Fourier de senos y de cosenos en el intervalo $[0,1]$ para la función $f(t)=t-t^2,\ 0<t<1$.

Solución: Serie de senos

Para desarrollar en serie de Fourier de senos la función $f(t)$ en el intervalo $[0,1]$, se requiere prolongar analíticamente $f(t)$, construyendo una función periódica e impar, de período $T=2$. La frecuencia fundamental de esta función será $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=\pi$



```
x1=linspace(0,1);
x2=linspace(-1,0);
y1=x1-x1.^2;y2=-y1;
hold on
plot(x1,y1,x2,y2)
T=2;
plot(x1+T,y1,x2+T,y2)
plot(x1-T,y1,x2-T,y2)
plot([-1-T 1+T],[0 0],'b')
plot([0 0],[-2 2],'b')
hold off
```

Los coeficientes de la serie de Fourier de esta función impar serán

$$a_0 = a_n = 0\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-1}^{1} \underbrace{\underbrace{f(t)}_{impar}\underbrace{\operatorname{sen}(nt)}_{impar}}_{par} dt = 2\int_0^1 (t-t^2)\operatorname{sen}(n\pi t)dt\,,$$

La integral se resuelve aplicando el método de integración por partes dos veces

$$\left\{\begin{matrix} u = t - t^2 & \to & du = (1-2t)\,dt \\ dv = sen(n\pi t)\,dt & \to & v = -\dfrac{\cos(n\pi t)}{n\pi} \end{matrix}\right\}$$

sustituyendo queda

$$b_n = 2\left[-(t-t^2)\frac{\cos(n\pi t)}{n\pi}\right]_0^1 + 2\int_0^1 (1-2t)\frac{\cos(n\pi t)}{n\pi}dt = \left\{\begin{matrix} u = 1-2t & \to & du = -2dt \\ dv = \dfrac{\cos(n\pi t)}{n\pi}dt & \to & v = \dfrac{\operatorname{sen}(n\pi t)}{n^2\pi^2} \end{matrix}\right\}$$

Sustituyendo de nuevo queda

$$b_n = 2\left[-(t-t^2)\frac{\cos(n\pi t)}{n\pi} + (1-2t)\frac{\operatorname{sen}(n\pi t)}{n^2\pi^2}\right]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(n\pi t)}{n^2\pi^2}2dt$$

$$b_n = \left[-(t-t^2)\frac{\cos(n\pi t)}{n\pi} + (1-2t)\frac{\operatorname{sen}(n\pi t)}{n^2\pi^2} - \frac{2\cos(n\pi t)}{n^3\pi^3}\right]_0^1 = 2\left(-\frac{\operatorname{sen} n\pi}{n^2\pi^2} - \frac{2\cos(n\pi)}{n^3\pi^3} + \frac{2}{n^3\pi^3}\right)$$

$b_n = \dfrac{4}{n^3\pi^3}\left(1-(-1)^n\right)$, $\quad n \neq 0$. Para $n = 0$ tendremos $b_0 = 2\int_0^1 (t-t^2)\operatorname{sen}(0)dt = 0$;

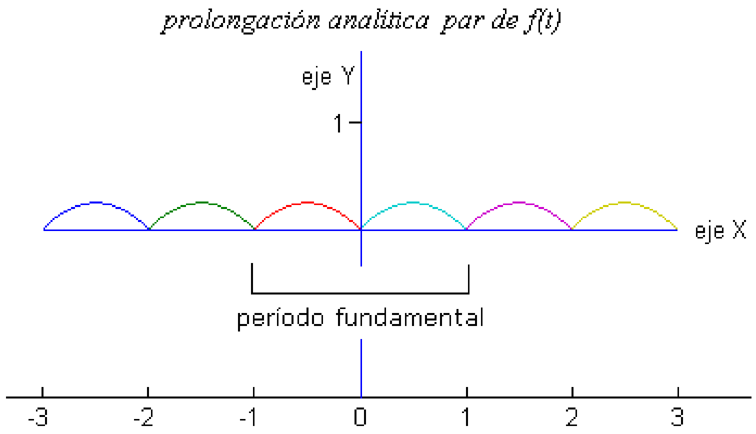
luego el desarrollo en serie de Fourier de senos de $f(t)$, en el intervalo $[0,1]$ quedará

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n\pi t = \frac{4}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^3}\operatorname{sen} n\pi t$$

Solución: Serie de cosenos

Para desarrollar en serie de Fourier de cosenos la función $f(t)$ en el intervalo $[0,1]$, se requiere prolongar analíticamente $f(t)$, construyendo una función periódica y par, de período $T=2$. La frecuencia fundamental de esta función será también $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \pi$.

```
x1=linspace(0,1);
x2=linspace(-1,0);
y1=x1-x1.^2;y2=y1;
hold on
plot(x1,y1,x2,y2)
T=2;
plot(x1+T,y1,x2+T,y2)
plot(x1-T,y1,x2-T,y2)
plot([-1-T 1+T],[0 0],'b')
plot([0 0],[-2 2],'b')
hold off
```



Los coeficientes nulos de la serie de Fourier de esta función par serán

$$b_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

por otra parte,

$$a_n = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} \underbrace{\underbrace{f(t)}_{par}\underbrace{\cos(n\pi t)}_{par}}_{par} dt = 2\int_0^1 (t-t^2)\cos(n\pi t)\,dt,$$

aplicando dos veces el método de integración por partes y sustituyendo queda

$$a_n = 2\left[(t-t^2)\frac{\operatorname{sen}(n\pi t)}{n\pi} + (1-2t)\frac{\cos(n\pi t)}{n^2\pi^2} + \frac{2\operatorname{sen}(n\pi t)}{n^3\pi^3}\right]_0^1 = 2\left(-\frac{\cos n\pi}{n^2\pi^2} + \frac{2\operatorname{sen}(n\pi)}{n^3\pi^3} - \frac{1}{n^2\pi^2}\right)$$

$a_n = \dfrac{-2}{n^2\pi^2}\left(1+(-1)^n\right), \quad n \neq 0$. Para $n=0$ tendremos $a_0 = 2\displaystyle\int_0^1 (t-t^2)dt = \frac{1}{3}$;

luego el desarrollo en serie de Fourier de cosenos de $f(t)$, en el intervalo $[0,1]$ quedará

$$f\left(t\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi t=\frac{1}{6}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\left(-1\right)^n}{n^2}\cos n\pi t$$

11 Se considera la función definida en el intervalo $\left[0,\pi\right]$ por $f(x)=\cos\dfrac{x}{2}$. Se pide:

a) Encontrar el desarrollo en serie de Fourier de senos de la función $f(x)$. Puedes ayudarte de algún programa para obtener los coeficientes.

b) Indica dónde converge la serie a la función justificando la respuesta.

c) Escribe el código que permitiría representar, en una misma figura, la gráfica de $f(x)$ en $\left[0,\pi\right]$ y sobre ella la gráfica de las aproximaciones que se obtienen utilizando los dos, cuatro y seis primeros armónicos no nulos de su desarrollo de Fourier. Indica el programa utilizado.

d) Calcular el valor de c_7 y c_{-7} del desarrollo complejo de la serie de Fourier.

Solución a)

Para obtener la serie de Fourier de senos, hacemos una extensión periódica impar de $f(x)$:

$$g(x)=\begin{cases}\cos\left(\dfrac{x}{2}\right), & 0<x<\pi\\ -\cos\left(\dfrac{x}{2}\right), & -\pi<x<0\end{cases}$$

La función $g(x)$ tiene periodo 2π y es impar por lo que su serie de Fourier es,

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\,\mathrm{sen}\,nx$$

Como $g(x)=f(x)$ en $(0,\pi)$, la serie de Fourier de $g(x)$ es la serie buscada. El único coeficiente de la serie es ,

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\,\mathrm{sen}\,nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{sen}\,nx\,dx$$

Resolvemos esta integral,

$$\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{sen}\,nx\,dx=$$

$$=-\left(\frac{\cos\left(2n+1\right)\frac{\pi}{2}}{2n+1}+\frac{\cos\left(2n-1\right)\frac{\pi}{2}}{2n-1}\right)+\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n-1}\right)=\frac{4n}{4n^2-1}$$

Por lo tanto, el coeficiente es ,

$$b_n = \frac{8}{\pi}\frac{n}{4n^2-1}$$

Y el desarrollo de Fourier es,

$$\cos\frac{x}{2} = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2-1}\operatorname{sen} nx, \qquad x \in \left(0,\pi\right]$$

De acuerdo con el Criterio de Dirichlet, la serie obtenida representa a la función periódica $g(x)$ donde es continua, por lo tanto representa a $f(x)$ en el intervalo $\left(0,\pi\right]$, ya que $g(x)$ es continua en $x=\pi$, pero tiene un salto finito en $x=0$.

```
%Forma 1
%representación de la función
x=linspace(0,pi); y=cos(x/2);
plot(x,y,'k');grid on;hold on
      N=6; %Número de términos
de la mayor suma parcial
buscada
y=0;
for k=1:N
    bk=k/(4*k^2-1)*sin(k*x);
    y=y+(8/pi)*bk;
end
plot(x,y);
legend('función','aprox')
axis equal;
hold off
```

```
%Forma 2
%Representación de la función
x1=linspace(0,pi);
y1=cos(x1/2);
hold on
plot(x1,y1)
%Representación de los
%6 armónicos
syms x
n=1:6;
nter=sum(8*n.*sin(n*x)./(pi*(4*n.^2-
1)));
sumandos=subs(nter,x,x1);
plot(x1,sumandos)
hold off
legend('función','aprox')
axis equal
```

DESARROLLOS DE FOURIER A PARTIR DE OTROS CONOCIDOS

10 Sabiendo que el desarrollo de Fourier de la función $f(x)$ es $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2n+1)x}{2n+1}$,

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{4}, & -\pi < x < 0 \\ \dfrac{\pi}{4}, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

justificar si las afirmaciones de los apartados a) y b) son ciertas o falsas.

a) La serie de Fourier de la función $g(x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2}, & -1 < x < 0 \\ \dfrac{\pi}{2}, & 0 < x < 1 \end{cases}$ es $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\operatorname{sen}(2n+1)\pi x}{2n+1}$

b) Se cumple $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$

Solución a)

$g(x)$ se obtiene mediante un escalado vertical y un escalado horizontal sobre $f(x)$. En efecto, si llamamos t a la variable de $f(x)$ y establecemos la proporción $\frac{x}{2\pi}=\frac{t}{2}$, se tiene

$$f(x) \underset{x=\pi t}{=} f(\pi t)=\begin{Bmatrix} -\frac{\pi}{4}, & -\pi<\pi t<0 \\ \frac{\pi}{4}, & 0<\pi t<\pi \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -\frac{\pi}{4}, & -1<t<0 \\ \frac{\pi}{4}, & 0<t<1 \end{Bmatrix}=\frac{1}{2}g(t)$$

Es decir la relación entre g y f es, $g(t)=2f(\pi t)$, o lo que es lo mismo $g(x)=2f(\pi x)$

Llevando esta relación a la serie de Fourier de $f(x)$ se obtiene la serie de Fourier de $g(x)$

$$g(x)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2n+1)\pi x}{2n+1}$$

Solución b)

Haciendo $x=\frac{\pi}{2}$ en la igualdad $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2n+1)x}{2n+1}$ y teniendo en cuenta que $f(x)$ es continua en este punto, se puede asegurar que,

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2n+1)\frac{\pi}{2}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

FORMA COMPLEJA DE LA SERIE DE FOURIER

13 Sea la función $f(t)=\begin{Bmatrix} 0 & -4<t<-2 \\ 3 & -2<t<2 \\ 0 & 2<t<4 \end{Bmatrix}$, de período $T=8$. Se pide:

a) Representar gráficamente $f(t)$.

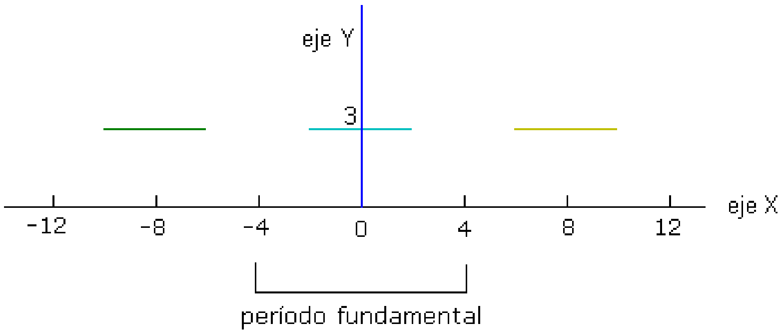
b) Obtener el desarrollo en serie de Fourier de la función $f(t)$, utilizando notación compleja.

c) Estudiar la convergencia de la serie de Fourier obtenida, en el intervalo $[-4,4]$.

d) Hallar la frecuencia fundamental ω correspondiente a $f(t)$. Obtener el espectro de amplitud de $f(t)$, indicando sobre la amplitud de los armónicos de $f(t)$ que tienen las frecuencias:

$$\omega=0,\quad \omega=\pi/4,\quad \omega=-\pi/4,\quad \omega=\pi/2,\quad \omega=-\pi/2,$$
$$\omega=3\pi/4,\quad \omega=-3\pi/4,\quad \omega=\pi,\quad \omega=-\pi$$

Solución a)




```
x1=[-4 -2];x2=[-2 2],x3=[2 4];
y1=[0 0];y2=[3 3];y3=[0 0]
hold on
plot(x1,y1,x2,y2,x3,y3)
T=8;
plot(x1+T,y1,x2+T,y2,x3+T,y3)
plot(x1-T,y1,x2-T,y2,x3-T,y3)
plot([-4-T 4+T],[0 0],'b')
plot([0 0],[-6 6],'b')
hold off
axis equal
```

Solución b)

El desarrollo en serie de Fourier de $f(t)$ utilizando notación compleja es

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega t} \quad ; \quad C_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega t} dt,$$

siendo $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ la frecuencia fundamental de la serie. En este caso, $\omega = \dfrac{2\pi}{8} = \dfrac{\pi}{4}$. Calculamos los coeficientes complejos de la serie

$$C_n = \frac{1}{8}\int_{-4}^{4} f(t) e^{-in\frac{\pi}{4}t} dt = \frac{1}{8}\int_{-2}^{2} 3\, e^{-in\frac{\pi}{4}t} \cdot dt = \frac{3}{8}\left[\frac{e^{-in\frac{\pi}{4}t}}{-i\, n\, \frac{\pi}{4}}\right]_{-2}^{2} = \frac{-3}{2in\pi}\left(e^{-in\frac{\pi}{2}} - e^{in\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$C_n = \frac{-3}{2in\pi}\left(-2i \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) = \frac{3}{n\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right), \qquad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

Como esta expresión no permite sustituir $n = 0$, calculamos aparte el coeficiente C_0

$$C_0 = \frac{1}{8}\int_{-4}^{4} f(t)\, dt = \frac{1}{8}\int_{-2}^{2} 3\, dt = \frac{3}{2},$$ sustituyendo en la serie queda

$$f(t) = \frac{3}{2} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{3}{n\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) e^{in\frac{\pi}{4}t}$$

Solución c)

La serie de Fourier converge a $f(t) \quad \forall t \in [-4,4]-\{-2,2\}$, es decir en todos los puntos del intervalo donde la función es continua. En los dos puntos de discontinuidad tendremos

$$\begin{cases} si \quad t=-2, \quad la\ serie\ converge\ a \quad \dfrac{f(-2)^- + f(-2)^+}{2} = \dfrac{3}{2} \\ si \quad t=2, \quad la\ serie\ converge\ a\ \dfrac{f(2)^- + f(2)^+}{2} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Solución d)

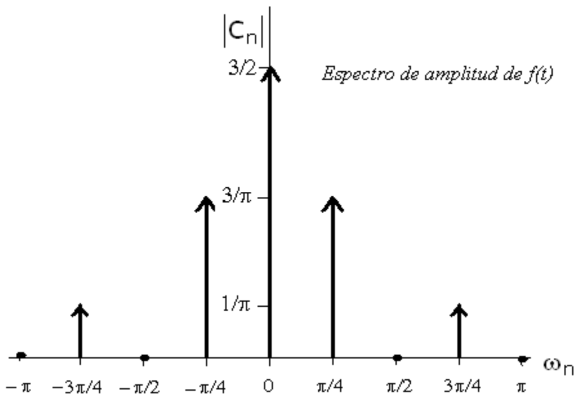
El espectro de amplitud de $f(t)$ es la gráfica de $|C_n|$ en función de la frecuencia de los armónicos $\omega_n = n \cdot \omega, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Calculamos $|C_n|$, resultando

$$|C_n| = \left| \frac{3}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right|, \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

Construimos una tabla de valores de las amplitudes que después representaremos en el espectro de amplitudes de $f(t)$

Frecuencia $n\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$3\frac{\pi}{4}$	$-3\frac{\pi}{4}$	π	$-\pi$
Armónico *n*	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4
Amplitud $\lvert C_n \rvert$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{\pi}$	$\frac{3}{\pi}$	0	0	$\frac{1}{\pi}$	$\frac{1}{\pi}$	0	0

La representación gráfica de las amplitudes queda así



14

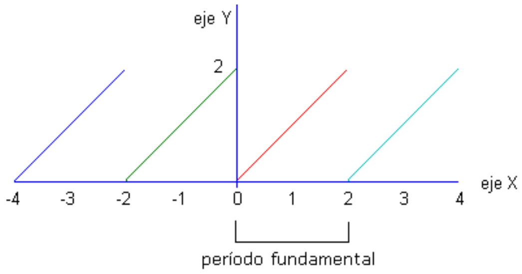
a) Obtener el desarrollo en serie de Fourier utilizando notación compleja para la función periódica de período $T=2$, definida así:

$$f(t) = t, \quad 0 < t < 2; \quad f(t+2) = f(t), \forall t \in \Re$$

b) Representar gráficamente el espectro de amplitud de $f(t)$, señalando la amplitud de los armónicos de frecuencias:

$\omega = 0$, $\omega = \pi$, $\omega = 2\pi$, $\omega = 3\pi$ y $\omega = 4\pi$.

Solución a)




```
x1=[0 2];y1=x1;
hold on
plot(x1,y1)
T=2;
plot(x1+T,y1)
plot(x1-T,y1)
plot([-1-T 2+T],[0 0],'b')
plot([0 0],[-3 3],'b')
hold off
axis equal
xlabel('eje X');ylabel('eje Y')
```

La serie de Fourier se expresa $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega t}$, siendo la frecuencia fundamental de la serie $\omega=\frac{2\pi}{2}=\pi$. Calculamos los coeficientes complejos integrando por partes

$$C_n=\frac{1}{2}\int_0^2 te^{-in\pi t}dt=\left\{\begin{array}{l} u=t \quad \to \quad du=dt \\ dv=e^{-in\pi t}dt \to v=\dfrac{e^{-in\pi t}}{-in\pi}\end{array}\right\}=\frac{1}{2}\left\{\left[t\left(\frac{e^{-in\pi t}}{-in\pi}\right)\right]_0^2+\int_0^2\frac{e^{-in\pi t}}{in\pi}dt\right\}$$

$$C_n=\frac{1}{2}\left[\frac{-te^{-in\pi t}}{in\pi}+\frac{e^{-in\pi t}}{-i^2n^2\pi^2}\right]_0^2=\frac{1}{2}\left(\frac{-2e^{-in2\pi}}{in\pi}+\frac{e^{-in2\pi}}{n^2\pi^2}-\frac{1}{n^2\pi^2}\right)$$

$$C_n=\frac{1}{2}\left(\frac{2i\left(\cos 2n\pi-i\operatorname{sen}2n\pi\right)}{n\pi}+\frac{\cos 2n\pi-i\operatorname{sen}2n\pi-1}{n^2\pi^2}\right)=\frac{i}{n\pi}$$

Hemos tenido en cuenta que $\cos 2n\pi=1$ y $\operatorname{sen}2n\pi=0$. Para el caso $n=0$ lo calculamos directamente, así $C_0=\frac{1}{2}\int_0^2 t\,dt=1$; sustituyendo todo lo anterior, el desarrollo en serie de Fourier queda

$$f(t)=1+\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{i}{n\pi}e^{in\pi t}$$

Solución b)

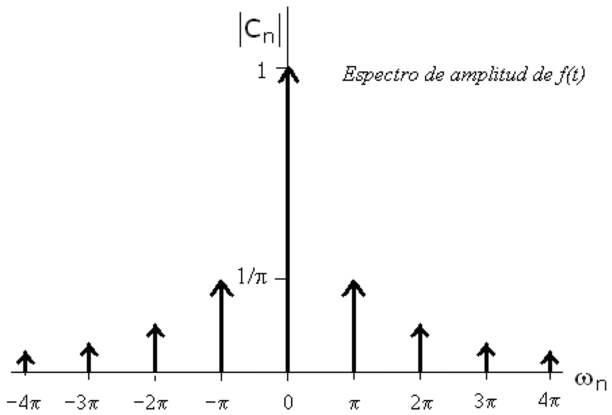
Hallamos el espectro de amplitud de $f(t)$. Para ello, calculamos $\left|C_n\right|$, resultando

$$|C_n| = \left|\frac{i}{n\pi}\right| = \frac{1}{|n|\pi}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

Construimos una tabla de valores de las amplitudes que después representaremos en el espectro de amplitudes de $f(t)$

Frecuencia $n\pi$	0	π	$-\pi$	2π	-2π	3π	-3π	4π	-4π
Armónico *n*	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4
Amplitud $\|C_n\|$	1	$\frac{1}{\pi}$	$\frac{1}{\pi}$	$\frac{1}{2\pi}$	$\frac{1}{2\pi}$	$\frac{1}{3\pi}$	$\frac{1}{3\pi}$	$\frac{1}{4\pi}$	$\frac{1}{4\pi}$

La representación gráfica de las amplitudes queda así



15 Se considera la función 4-periódica definida de la forma

$$f(t) = 2 - |t| \text{ siendo } t \in [-2, 2]$$

a) Calcular la serie de esta función indicando los valores de t para los cuáles converge a la función $f(t)$. Justifica la respuesta.

b) Obtener el coeficiente c_4 de la serie compleja de Fourier.

c) Calcular el valor de la serie numérica siguiente: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

Solución a)

La función es periódica de periodo T=4 (p=2). Al ser $f(t) = 2 - |t|$ una función par en el intervalo [-2,2], la serie de Fourier será de la forma:

$$S(t) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nwt)$$

siendo

$$w=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{2} \qquad a_o=\frac{2}{p}\int_0^p f(t)\,dt \qquad a_n=\frac{2}{p}\int_0^p f(t)\cos(nwt)\,dt$$

Se tiene que

$$a_o=\frac{2}{p}\int_0^p f(t)\,dt=\int_0^2(2-t)\,dt=\left[2t-\frac{t^2}{2}\right]_{t=0}^{t=2}=2$$

$$a_n=\frac{2}{p}\int_0^p f(t)\cos(nwt)\,dt=\int_0^2(2-t)\cos(nwt)\,dt=$$

$$\underset{\begin{cases}u=2-t\rightarrow du=-dt\\ dv=\cos(nwt)dt\rightarrow v=\frac{sen(nwt)}{nw}\end{cases}}{=}\left.(2-t)\frac{sen(nwt)}{nw}\right|_{t=0}^{t=2}+\int_0^2\frac{sen(nwt)}{nw}dt=$$

$$=-\left.\frac{\cos(nwt)}{n^2w^2}\right|_{t=0}^{t=2}\underset{w=\frac{\pi}{2}}{=}-4\frac{\cos(n\pi)-\cos(0)}{n^2\pi^2}=4\frac{-(-1)^n+1}{n^2\pi^2}=\begin{cases}0 & si\, n\, es\, par\\ \dfrac{8}{n^2\pi^2} & si\, n\ es\ impar\end{cases}$$

La serie de Fourier es

$$\mathrm{S}(t)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{(2n-1)^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)$$

Por el teorema de Dirichlet, dado que la función es continua en todo $\mathbb{R}$, se tiene que la serie de Fourier convergerá a la función en todo $\mathbb{R}$.

Solución b)

$$c_4=\frac{a_4-ib_4}{2}=0$$

También podría hacerse calculando la integral

$$c_4=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}(2-|t|)e^{-2\pi it}dt=\frac{1}{4}\left(\int_{-2}^{0}(2+t)e^{-2\pi it}dt+\int_0^t(2-t)e^{-2\pi it}dt\right)$$

Solución c)

Para calcular el valor de la serie numérica, tenemos en cuenta que

$$f(0)=\mathrm{S}(0) \qquad \Rightarrow \qquad 2=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{(2n-1)^2\pi^2}\cos(0)$$

$$\Rightarrow \qquad 2=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{(2n-1)^2\pi^2} \qquad \Rightarrow \qquad 1=\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

17

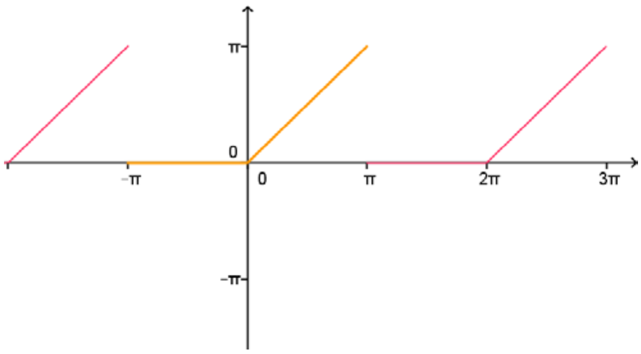
Dada la función $2\pi-$ periódica definida como $f(t)=\begin{cases} 0 & -\pi \le t \le 0 \\ t & 0 < t < \pi \end{cases}$, se pide,

a) Calcular su desarrollo en serie de Fourier indicando en qué puntos converge a la función f.

b) Calcular la expresión compleja de la serie de Fourier y dibujar su espectro de amplitud.

c) Obtener el valor de la siguiente serie numérica: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

Solución a)



$$S(t) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\cos(2k-1)t}{(2k-1)^2} + \frac{(-1)^k \pi}{2k^2} \operatorname{sen} kt \right)$$

Solución b)

Basta sustituir t por 0 en la expresión de $S(t)$ y tener en cuenta que

$$S(0) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\cos 0}{(2k-1)^2} + \frac{(-1)^k \pi}{2k^2} \operatorname{sen} 0 \right)$$

$$0 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

luego

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}, \quad \frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

18

Se considera la función definida en el intervalo $[0,\pi]$ por la función $f(x)=\operatorname{sen}\frac{x}{2}$

Se pide

a) Obtener la serie de Fourier de senos de $f(x)$.

b) Escribe, a partir de la serie obtenida en el apartado a), la expresión compleja de Fourier.

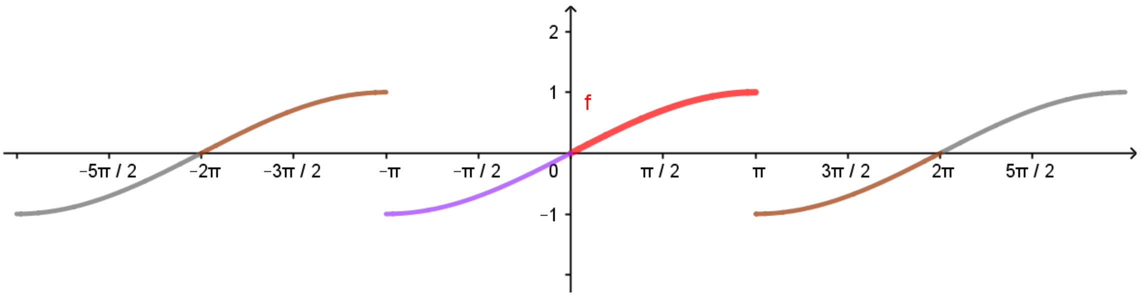
c) Calcula el valor aproximado de $\operatorname{sen}(1/2)$ con los cuatro primeros términos no nulos de la serie de Fourier.

d) Escribe las órdenes Matlab/Octave/Geogebra, para representar la gráfica de $f(x)$ en $[0,\pi]$ y la gráfica de la aproximación que se obtiene utilizando los cuatro primeros armónicos no nulos del desarrollo de Fourier calculado.

Solución a)

Para obtener la serie de Fourier de senos, se consideraría la extensión periódica impar de $f(x)$:

$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}\dfrac{x}{2}, & 0 < x < \pi \\ \operatorname{sen}\dfrac{x}{2}, & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

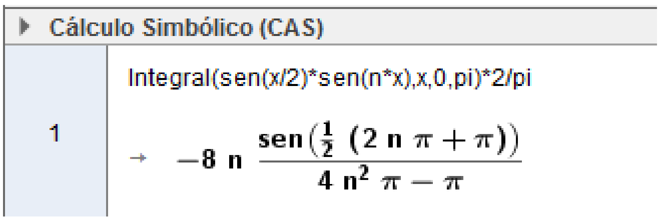


La función $g(x)$ tiene periodo 2π y es impar por lo que su serie de Fourier es,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx$$

Como $g(x) = f(x)$ en $(0,\pi)$, la serie de Fourier de $g(x)$ es la serie buscada. Los coeficientes a calcular son,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\operatorname{sen} nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \operatorname{sen}\frac{x}{2}\operatorname{sen} nx\,dx$$



El valor de la integral es

$$b_n = \frac{-8n\ sen\left(\dfrac{\pi}{2}(2n+1)\right)}{\pi\left(4n^2-1\right)} = \frac{8n\left(-1\right)^{n+1}}{\pi\left(4n^2-1\right)}$$

y el desarrollo de Fourier pedido en $\left[0,\pi\right)$ es

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2}=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{4n^2-1}\operatorname{sen}nx$$

Solución b)

La forma compleja de las serie de fourier es

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2}=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{4n^2-1}\left(\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}\right)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{4n^2-1}\left(\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2}\right)(-i)$$

$$sen\left(\frac{x}{2}\right)=\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}c_n e^{inx}\qquad c_n=-\frac{8(-1)^{n-1}n}{2\pi\left(4n^2-1\right)}i\qquad n=\pm1,\pm2,\ldots$$

Calculando con ordenador los coeficientes sería

▸ Cálculo Simbólico (CAS)

1	Integral(sen(x/2)*exp(-i*n*x),x,-pi,pi)*1/(2*pi) $\rightarrow\ \dfrac{-2\,i\,n\,e^{in\pi}-2\,i\,n\,e^{-in\pi}}{4\,i^2\,n^2\,\pi+\pi}$

$$c_n=\frac{-2in\left(-1\right)^n-2in\left(-1\right)^n}{\left(1-4n^2\right)\pi}=i\frac{4\left(-1\right)^n n}{\left(1-4n^2\right)\pi}\qquad n=\pm1,\pm2,\ldots$$

Solución c)

El valor aproximado de

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}\approx\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{4}\frac{(-1)^{n-1}n}{4n^2-1}\operatorname{sen}nx$$

con matlab es 0.558691462134401

```
n=1:4;
sum((-1).^(n-1).*n.*sin(n)./(4*n.^2-1))*8/pi
```

Con geogebra

▸ Cálculo Simbólico (CAS)

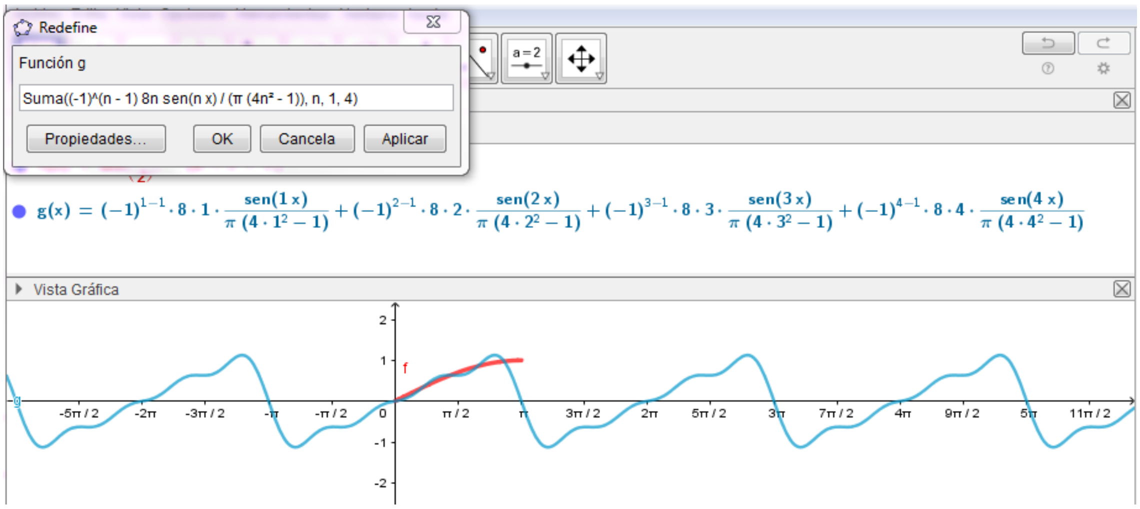
2	Suma((-1)^(n-1)*n*sen(n)/(4*n^2-1),n,1,4)*8/pi $\rightarrow\ 8\cdot\dfrac{\frac{1}{3}\,\operatorname{sen}(1)-\frac{2}{15}\,\operatorname{sen}(2)+\frac{3}{35}\,\operatorname{sen}(3)-\frac{4}{63}\,\operatorname{sen}(4)}{\pi}$
3	8(1 / 3 sen(1) - 2 / 15 sen(2) + 3 / 35 sen(3) - 4 / 63 sen(4)) / π ≈ 0.55869

Solución d)

Representación con Matlab:

```
x=linspace(0,pi); y=sin(x/2);
plot(x,y);grid on;hold on
N=4; %Número de términos de la mayor suma parcial buscada
hold on
yk=0*x;
for k=1:N
    yk=yk+((-1)^(k-1)*8*k)/(pi*(4*k^2-1))*sin(k*x);
    plot(x,yk)
end
legend('función','aprox1','aprox2','aprox3','aprox4')
```

Con geogebra



Material de consulta

Armónicos: [Representación de armónicos]

Desarrollo en Series de Fourier: [Ejemplos de series de Fourier] Ver video

Autora: Elena Alvarez