POLINOMIOS DE TAYLOR

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Para poder seguir adecuadamente este tema, se requiere que el alumno repase y ponga al día sus conocimientos en los siguientes contenidos:

- Funciones elementales: gráfica, dominio, imagen, simetría y traslaciones.
- Definición de derivada. Tabla de derivadas.

POLINOMIOS DE TAYLOR. DEFINICIÓN Y CÁLCULO

1 Definición

Definición (Polinomio de Taylor).- Supongamos que $f(x)$ es una función derivable n veces en el punto $x = a$. Se define el **polinomio de Taylor** de grado n correspondiente a la función f en el punto $x = a$ como

$$T_n\left[f(x);a\right] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k}(a)}{k!}(x-a)^k =$$
$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n$$

En el caso en que $a = 0$ el polinomio se llama de MacLaurin.

Veamos algunas propiedades que nos permitirán obtener polinomios de Taylor a partir de otros conocidos

Sean f y g funciones que admiten polinomio de Taylor hasta el grado n en el punto a entonces se cumplen las propiedades siguientes:

- Linealidad: $T_n(\alpha f + \beta g; a) = \alpha T_n(f;a) + \beta T_n(g;a)$
- Derivación, integración: $\left[T_n(f;a)\right]' = T_{n-1}(f';a)$

Otras operaciones: Se puede obtener el polinomio de productos y cocientes de funciones a partir de los correspondientes a cada una de las funciones involucradas.

2 Resto enésmo

Definición (Resto n-ésimo de Taylor).- Sea f una función para la que existe $T_n\left[f(x);a\right]$. Se define el **resto n-ésimo de Taylor** correspondiente a la función f en el punto $x=a$, y lo escribiremos $R_n\left[f(x);a\right]$ como

$$R_n\left[f(x);a\right]=f(x)-T_n\left[f(x);a\right]$$

La expresión

$$f(x)=T_n\left[f(x);a\right]+R_n\left[f(x);a\right]$$

se llama **fórmula de Taylor de** $f(x)$ de grado n en el punto $x=a$.

En las proximidades del punto $x=a$ se verifica no sólo que el resto enésimo es pequeño (infinitésimo) sino que se hace pequeño en comparación con $(x-a)^n$. Esto se expresa en el siguiente teorema.

TEOREMA DE TAYLOR: Si f es derivable n veces en el punto $x=a$ y $R_n\left[f(x);a\right]$ es su correspondiente resto de Taylor entonces

$$\lim_{x\to a}\frac{R_n\left[f(x);a\right]}{(x-a)^n}=0$$

Resto de Lagrange

$$R_n\left[f(x);a\right]=\frac{f^{(n+1}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

siendo c un punto intermedio entre a y x.

Resto de Cauchy. Sea f es una función derivable $n+1$ veces en un intervalo abierto I, que contenga al punto $x=a$. Si $R_n\left[f(x);a\right]$ es el resto enésimo de Taylor correspondiente a la función f en el punto $x=a$ entonces:

$$R_n\left[f(x);a\right]=\frac{f^{(n+1}(c)}{n!}(x-c)^n(x-a)$$

siendo c un punto intermedio entre a y x.

Resto Integral

$$R_n\left[f(x);a\right]=\int_a^x \frac{f^{(n+1}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt$$

definido si la derivada $n+1$ de f es integrable en el intervalo I.

APLICACIÓN DE LOS POLINOMIOS DE TAYLOR. CÁLCULO DE LÍMITES INDETERMINADOS

3 Infinitésimos. Definición

En el cálculo de límites de funciones surgen las mismas indeterminaciones que en el caso de sucesiones y se aplican las mismas técnicas para su resolución. Una de esas técnicas consiste en la comparación de los órdenes de infinitud o los órdenes de magnitud de los infinitésimos que producen estas indeterminaciones.

Definición (Infinitésimo).- Una función $\varphi(x)$ es un **infinitésimo** para $x=a$ si tiende a cero cuando x se aproxima al punto a, es decir, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$

PROPOSICION.-

- La suma, diferencia y producto de infinitésimos para $x=a$ es un infinitésimo para $x=a$
- El producto de un infinitésimo para $x=a$ por una función acotada en un entorno del punto a es un infinitésimo para $x=a$.

4 Orden de un infinitésimo

Definición (Infinitésimos del mismo orden, orden superior y orden inferior).- Se dice que

- $\varphi(x)$ y $\mu(x)$ son dos **infinitésimos del mismo orden** para $x=a$ si $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varphi(x)}{\mu(x)}=\lambda \quad con\ \lambda\neq 0,\ \lambda\neq\infty$. En este caso se escribe $\varphi(x)=O\big(\mu(x)\big)$.
- $\varphi(x)$ y $\mu(x)$ son **equivalentes** para $x=a$ si $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varphi(x)}{\mu(x)}=1$
- $\varphi(x)$ es **de orden superior** a $\mu(x)$ para $x=a$ si $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varphi(x)}{\mu(x)}=0$.

  En este caso se escribe $\varphi(x)=o\big(\mu(x)\big)$

Definición (Infinitésimos de orden p).- Decimos que un **infinitésimo** es **de orden** p para $x=a$ si $\varphi(x)=O\left((x-a)^p\right)$ es decir, si $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varphi(x)}{(x-a)^p}=\lambda \quad con\ \lambda\neq 0,\ \lambda\neq\infty$

PROPOSICION.- El orden de un infinitésimo para $x=a$ no varía al sumarle o restarle otro de orden superior para $x=a$.

Consideremos ahora $\varphi(x)$ un infinitésimo de orden p para $x=a$, esto significa que

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{(x-a)^p}=\lambda \quad con\ \lambda\neq 0,\ \lambda\neq\infty$$

En este caso se tiene que:

$$\varphi(x)-\lambda(x-a)^p=o\left((x-a)^p\right)\Leftrightarrow \varphi(x)=\lambda(x-a)^p+o\left((x-a)^p\right)$$

5 Parte principal de un infinitésimo

Definición (Parte principal de un infinitésimo).- Si $\varphi(x)$ un infinitésimo de orden p para $x=a$ y se cumple $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varphi(x)}{(x-a)^p}=\lambda \quad con\ \lambda\neq 0,\ \lambda\neq\infty$

La expresión $\lambda(x-a)^p$ se llama **parte principal** de dicho infinitésimo.

Nótese que $\varphi(x)$ es un infinitésimo equivalente a su parte principal.

PRINCIPIO DE SUSTITUCION.- Si en la expresión de un límite se sustituye un infinitésimo que sea factor o divisor por su parte principal o por otro equivalente, el valor del límite no se ve alterado.

IMPORTANTE: Cuando los infinitésimos aparezcan como sumandos la sustitución de un infinitésimo por otro equivalente puede conducir en general a errores.

Tabla de equivalencias
Si $x \to 0$ entonces $\operatorname{sen} x \approx x$
Si $x \to 0$ entonces $1-\cos x \approx \dfrac{x^2}{2}$
Si $x \to 0$ entonces $\operatorname{tg} x \approx x$
Si $x \to 0$ entonces $\log\left(1+x\right) \approx x$. Esta equivalencia se puede expresar de la siguiente manera: si $x \to 1$ entonces $\log\left(x\right) \approx x-1$
Si $x \to 0$ entonces $\log\left(1+x^k\right) \approx x^k \qquad \left(k>0\right)$
Si $x \to 0$ entonces $a^x - 1 \approx x \log a$
Si $x \to 0$ entonces $\operatorname{arcsen} x \approx x$
Si $x \to 0$ entonces $\operatorname{arctg} x \approx x$
Si $x \to 0$ entonces $\left(1+x\right)^a \approx 1+ax$
Si $x \to 0$ entonces $P_n\left(x\right) \approx \text{término de menor grado}$

Cálculo de la parte principal utilizando polinomios de Taylor

Sea $y=f\left(x\right)$ una función que es un infinitésimo para $x=a$ con todas sus derivadas nulas hasta el orden $k-1$ en el punto a y cumpliendo $f^{(k}\left(a\right) \neq 0$.

Utilizando la fórmula de Taylor se tendrá:

$$f\left(x\right)=\frac{f^{(k}\left(a\right)}{k!}\left(x-a\right)^k+o\left(\left(x-a\right)^k\right)$$

De esta expresión se deduce que el orden del infinitésimo $y=f\left(x\right)$ para $x=a$ es k y su parte principal es $\dfrac{f^{(k}\left(a\right)}{k!}\left(x-a\right)^k$.

6 Infinitos

Definición (Infinitos).- Una función $\omega(x)$ es un **infinito** para $x = a$ si tiende a infinito cuando x se aproxima al punto a, es decir, si $\lim\limits_{x \to a} \omega(x) = \infty$

OBSERVACION.- Todo lo visto anteriormente para infinitésimos puede aplicarse a infinitos teniendo en cuenta que si $\omega(x)$ es un infinito para $x = a$ entonces

$$\varphi(x) = \frac{1}{\omega(x)} \quad \text{es un infinitésimo para } x = a$$

En particular, la sustitución de infinitos en la expresión de un límite se rige por las mismas reglas que las de los infinitésimos.

Definición (Infinitos de orden inferior, superior).- Sean $\omega(x)$ y $\tau(x)$ dos infinitos para $x = a$ se dice que:

- $\omega(x)$ es un **infinito de orden inferior** a $\tau(x)$ para $x = a$ si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\omega(x)}{\tau(x)} = 0$
- $\omega(x)$ es un **infinito de orden superior** a $\tau(x)$ para $x = a$ si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\omega(x)}{\tau(x)} = \infty$
- $\omega(x)$ es un **infinito del mismo orden** que $\tau(x)$ para $x = a$ si

$$\lim_{x \to a} \frac{\omega(x)}{\tau(x)} = \lambda \quad con\ \lambda \neq 0,\ \lambda \neq \infty$$

En el caso particular de que $\lambda = 1$ entonces se dice que son **equivalentes**.

Definición (Infinito de orden p).- Decimos que un **infinito** $\omega(x)$ para $x = a$ es **de orden** p si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\omega(x)}{\dfrac{1}{(x-a)^p}} = \lambda \quad con\ \lambda \neq 0,\ \lambda \neq \infty$

A continuación, se dan en la tabla los denominados *órdenes fundamentales de infinitud* para x tendiendo a infinito. Según se avance de izquierda a derecha en las columnas los órdenes de infinitud van decreciendo.

Potencial - Exponencial	Exponencial	Potencial	Logaritmo
x^{ax} $a>0$	b^{x} $b>1$	x^{c} $c>0$	$\left(\log_q x\right)^p$ $q>1 \quad p>0$

APLICACIÓN DE LOS POLINOMIOS DE TAYLOR. ESTUDIO LOCAL DE UNA FUNCIÓN

7 Extremo relativo y absoluto

Definición (Extremo relativo).- Sea $y=f(x)$ una función real definida sobre un dominio D. Decimos que f tiene

- un **mínimo relativo** en un punto $a\in D$ si existe un intervalo $(a-r,a+r)$ contenido en D de forma que $f(x)>f(a)$ para $x\in(a-r,a+r)$, $x\neq a$.
- un **máximo relativo** en un punto $a\in D$ si existe un intervalo $(a-r,a+r)$ contenido en D de forma que $f(x)<f(a)$ para $x\in(a-r,a+r)$, $x\neq a$.

Si un punto es mínimo o máximo relativo se dice que es un **extremo relativo o local.**

Definición (Extremo absoluto).- Sea $y=f(x)$ una función real definida sobre un dominio D. Decimos que f alcanza

- su valor **mínimo absoluto** en un punto $a\in D$ si $f(x)>f(a)$ para $x\in D$, $x\neq a$.
- su valor **máximo absoluto** en un punto $a\in D$ si $f(x)<f(a)$ para $x\in D$, $x\neq a$.

Si un punto es mínimo o máximo absoluto se dice que es un **extremo absoluto o global.**

PROPOSICIÓN.- Consideremos una función $y = f(x)$ con derivadas hasta el orden $n+1$ en el punto a, entonces se podrá escribir

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)$$

Supongamos que $f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n-1}(a) = 0$, entonces

- Si n es par y $f^{(n}(a) > 0$ entonces en el punto a la función tiene un mínimo local.
- Si n es par y $f^{(n}(a) < 0$ entonces en el punto a la función tiene un máximo local.
- Si n es impar en el punto a hay un punto de inflexión.

APLICACIÓN DE LOS POLINOMIOS DE TAYLOR. DERIVACIÓN NUMÉRICA

En este apartado se considera el caso en que solo se conoce el valor de una función en n puntos, $x_o, x_1, \ldots, x_n$, equiespaciados. En este caso, se puede calcular una aproximación de la derivada en $x = a$, $f'(a)$, siendo a cualquiera de estos n puntos, utilizando diferencia progresiva, diferencia regresiva o diferencia centrada.

8 Diferencia progresiva $f'(a) \approx \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Para acotar el error que se comete en esta aproximación hay que tener en cuenta la fórmula de Taylor de grado 1,

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + R_1$$

Luego

$$f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \frac{R_1}{h}$$

Como $R_1 = O(h^2)$, entonces el error de truncamiento

$$|Error| = \left| f'(a) - \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right| = O(h)$$

Una cota del error podría obtenerse considerando que $\dfrac{R_1}{h} = \dfrac{f''(t)}{2!}h$ con $t \in [a, a+h]$

Si M es una cota de $|f''(t)|$ en $[a, a+h]$ entonces una cota del error será:

$$|Error| = \left|\frac{R_1}{h}\right| \leq \frac{M}{2!}h$$

9 Diferencia central $f'(a) \approx \dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$

Para acotar el error que se comete en esta aproximación hay que tener en cuenta la fórmula de Taylor de grado 2, y las expresiones

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + O(h^3)$$

$$f(a-h) = f(a) - \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + O(h^3)$$

Restando

$$f(a+h) - f(a-h) = f'(a)2h + O(h^3)$$

es decir,

$$f'(a) = \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} - \frac{O(h^3)}{2h}$$

Luego, el error de truncamiento

$$|Error| = \left| f'(a) - \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} \right| = O(h^2)$$

Observación: Es interesante ver que la diferencia centrada aproxima mejor el valor de la derivada que las diferencias progresivas y regresivas, ya que en el primer caso el error es un infinitésimo de orden 2 mientras que en los restantes casos es de orden 1.

Ejercicios propuestos

1 Hallar la derivada enésima de

a) $f(x) = \operatorname{sen} x$ en x=0

b) $f(x) = \cos x$ en x=0

c) $f(x) = e^x$ en x=0

d) $f(x) = \log(1+x)$ en x=0

e) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$

f) $f(x) = \dfrac{4x}{(x-1)^2(x+1)}$

g) $f(x) = \log\big((3-x)(2-x)\big)$ en $|x| < 2$.

h) $f(x) = a\cos(ax)$

Solución:

$$\left\{ \begin{array}{l} f^{(2n}(x) = (-1)^n \operatorname{sen}(x) \\ f^{(2n+1}(x) = (-1)^n \cos(x) \end{array} \right\} \quad n = 0,1,2,\ldots$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f^{(2n}(0) = 0 \\ f^{(2n+1}(0) = (-1)^n \end{array} \right\}$$

También

$$f^{(n}(x) = \operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \qquad f^{(n}(0) = \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

b)

$$\left\{ \begin{array}{l} f^{(2n}(x) = (-1)^n \cos(x) \\ f^{(2n+1}(x) = (-1)^{n+1} \operatorname{sen}(x) \end{array} \right\} \quad n = 0,1,2,\ldots$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f^{(2n}(0) = (-1)^n \\ f^{(2n+1}(0) = 0 \end{array} \right\}$$

También

$$f^{(n}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \qquad f^{(n}(0) = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

c) $f^{(n}(x) = e^x \qquad f^{(n}(0) = 1$

d) $f^{(n}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}$

$$f^{(n}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

e) $f^{(n}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{2}\left[\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}} - \dfrac{1}{(x+1)^{n+1}}\right]$

f) $f^{(n}(x) = (-1)^n n! \cdot \left[\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}} + \dfrac{2(n+1)}{(x-1)^{n+2}} - \dfrac{1}{(x+1)^{n+1}}\right]$

g)

$f^{(n}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\left[\dfrac{1}{(x-3)^n} + \dfrac{1}{(x-2)^n}\right]$

h) $f^{(n}(x) = a^{n+1}\cos\left(ax + \dfrac{n\pi}{2}\right)$

2

Calcular, mediante la diferencial, una aproximación de cos(155º) y dar una cota del error cometido.

Solución:

$$\cos(155^o) = \cos\left(\frac{31\pi}{36}\right) \cong -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{72} = -0,9097$$

$$|\mathrm{Error}| < \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{36}\right)^2$$

3

Dada la función $y = \sqrt{1 - \dfrac{x}{2}}$

1. Calcula el polinomio de Taylor de grado 3 de la función alrededor del punto *a*= 0.
2. Calcula, mediante el polinomio anterior, un valor aproximado de $\sqrt{0,5}$.
3. Halla una cota del error cometido en dicha aproximación.
4. Comprueba con Matlab cómo mejora la aproximación cuanto mayor sea el grado del polinomio de Taylor utilizado. Escribe una tabla con las aproximaciones que dan los polinomios de Taylor de grados 3, 5, 20.
5. Escribe la fórmula de Taylor de orden n y acota el resto enésimo. Utiliza esta acotación para añadir a la tabla anterior las cotas del error correspondientes a los polinomios de grados 5 y 20.
6. Representa en una figura la gráfica de la función y la gráfica de los polinomios de grados 3, 5 y 20 en el intervalo $[0.5, 1.5]$

Solución: 1) $T_3 = 1 - \dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{32}x^2 - \dfrac{1}{128}x^3$

2) $\sqrt{0,5} \simeq \dfrac{91}{128}$

3) $|Error| < \dfrac{15\cdot 2^{7/2}}{256\cdot 4!} < \dfrac{15\cdot 2^4}{256\cdot 4!} = \dfrac{5}{128}$

5) $\sqrt{1-\dfrac{x}{2}} = 1 - \dfrac{1}{4}x - \displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{(2k-3)!!}{2^{2k}\,k!}x^k -,$

$$-\frac{(2n-1)!!}{2^{2n+2}(n+1)!}\left(1-\frac{c}{2}\right)^{-(2n+1)/2} \quad c\in(0,x)$$

4

Se considera $f(x) = \log\left(\dfrac{x+2}{2x-2}\right)$. Se pide:

1. Calcula el dominio de la función $f(x)$.
2. Escribe la fórmula de Taylor de orden n de $f(x)$ en $a=4$ con el resto de Lagrange.
3. Calcula una cota del error cometido cuando se aproxima $\log\left(\dfrac{6'1}{6'2}\right)$ por el polinomio de Taylor grado 3.
4. ¿Cuál es el grado del polinomio de Taylor de $f(x)$ en $a=4$ que habría que considerar para aproximar $\log\left(\dfrac{6'1}{6'2}\right)$ con un error menor que 10^{-1}? ¿y para que el error sea menor que 10^{-6}?
5. Comprueba con Matlab los resultados de los apartados anteriores y representa la curva y los polinomios obtenidos en el intervalo $[3.9, 4.3]$

Solución: 1) $dom\ f = (-\infty,-2)\cup(1,\infty)$ 2)

$$T_n = \frac{-1}{6}(x-4) + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\left(\frac{1-2^n}{6^n}\right)(x-4)^n$$

$$R_n = \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{1}{(c+2)^{n+1}} - \frac{1}{(c-1)^{n+1}}\right)(x-4)^{n+1}$$

3) $|R_3| < \dfrac{1}{4\cdot 10^4}\left[\dfrac{1}{6^4} + \dfrac{1}{3^4}\right]$

4) Polinomio de grado 0. 5) Polinomio de grado 3.

5

Determinar el orden y la parte principal de los infinitésimos siguientes cuando $x \to 0$

(a) $f(x) = \operatorname{sen}^2 2x + \cos x - 1$

(b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{3x^3}{\operatorname{sen} x + 16x^5}}$

Solución: (a) Infinitésimo de orden 2, la parte principal es $\dfrac{7x^2}{2}$ (b) Infinitésimo de orden 1, la parte principal es $\sqrt{3}\,x$ para $x \to 0^+$ y $-\sqrt{3}\,x$ para $x \to 0^-$.

6

1. Obtener los extremos relativos de la función $f(x) = x^4 \cdot e^{-x^2}$.
2. Hallar los extremos absolutos de la función $f(x) = x^{2/3} \cdot (5 - 2x)$ en el intervalo [-1, 2].
3. Calcular los máximos y mínimos de la función: $f(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x$
4. Demostrar que la función: $f(x) = e^x - x - \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^3}{3!}$ tiene un mínimo en $x = 0$.

Solución:

1. Como $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0,\ f^{(4}(0) = 24 > 0$ la función tiene un mínimo relativo en x = 0, cuyo valor es $f(0) = 0$. Además tiene dos máximos relativos, que valen lo mismo, $f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = \dfrac{4}{e^2}$.
2. Los puntos críticos de la función $f(x)$ en el intervalo [-1, 2] son: x = 0 (f no es derivable en dicho punto); x = 1 (porque $f'(1) = 0$); x = -1 y x = 2 (extremos del intervalo).
3. Máximo absoluto de $f(x)$ en [-1, 2] es $f(-1) = 7$. Mínimo absoluto de $f(x)$ en [-1, 2] es $f(0) = 0$

   Máximo relativo de $f(x)$ en [-1, 2] es $f(1) = 3$, $x = -1$ es un mínimo relativo y absoluto, $f(-1) = -1$
4. Se cumple $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$ y $f^{iv}(0) = 1 > 0$

Test de autoevaluación

1

El polinomio $x^3 - 2x^2$, en potencias de $x - 1$ se escribe:

A) $(x-1)^3 - (x-1)^2 + (x-1) - 1$.

B) $(x-1)^3 + (x-1)^2 + (x-1) - 1$.

C) $(x-1)^3 + (x-1)^2 - (x-1) - 1$.

D) Ninguna de las anteriores.

2

Si aproximamos en un entorno del punto x=2 por Taylor una función mediante un polinomio de tercer grado, el error que se comete:

A) Es nulo en x=2.

B) Es menor que si el polinomio fuera de 4° grado.

C) Es independiente de la distancia entre el punto en el que se desea la aproximación y punto x=2.

D) Depende exclusivamente de valor que toma la derivada cuarta en x=2.

3

El valor de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \operatorname{arctg} \dfrac{x}{2}}{(\operatorname{sen} 2x)^2 \cos(\operatorname{sen} x)}$ es:

A) $1/2$

B) $1/4$

C) 1

D) Ninguna de las anteriores.

4

La derivada enésima de $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$ en $x = 0$ es

A) $f^{(n}(0) = (-1)^n n!\left(-\dfrac{3}{4}(n-2) + (n-1)\dfrac{7}{8}\right)$

B) $f^{(n}(0) = (-1)^n (n+1)!\left(1 - 2^{-(n+1)}\right)$

C) $f^{(n}(0) = (-1)^n \left(1 - 2^{-(n+1)}\right)$

D) Ninguna de las anteriores.

5 Sea $f(x)$ un infinitésimo de orden 2 para $x = a$, y $g(x)$ un infinitésimo de orden 3 para $x = a$ entonces

A) $f(x) + g(x)$ podría no ser un infinitésimo para $x = a$

B) $f(x) + g(x)$ es un infinitésimo para $x = a$ de orden 3

C) $f(x) + g(x)$ es un infinitésimo para $x = a$ de orden 2

D) Ninguna de las anteriores.

6 Justificar si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

A) El polinomio de MacLaurin de grado $2n$ de la función $f(x) = e^{x^2}$ es:

$$1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{n!}$$

B) Sea la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$, entonces el polinomio de Taylor de grado 4 correspondiente a f en el punto $a = 1$ es: $A - 10x + Bx^2 - 5x^3 + x^4$, donde A y B son números naturales.

C) El polinomio de Taylor de grado 4 de la función $f(x) = \log x$ en el punto $a = 1$ es

$$(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4}$$

D) Si $f(x)$ tiene un extremo relativo en a y es dos veces derivable en a entonces $f''(a) \neq 0$

7 Dados los infinitésimos para $x \to 0$

$f(x) = sen^2(3x)$ $\quad g(x) = 1 - e^{3x}$

$h(x) = \log(3 - 3x)$ $\quad k(x) = arctg(6x^2)$

podemos afirmar que:

A) Todos son equivalentes.

B) Sólo son equivalentes g y h.

C) Sólo son equivalentes f y h.

D) No se cumple ninguna de las afirmaciones anteriores

8 La función $f(x) = x^4 \cos(x)$ tiene en el origen:

A) Un punto de inflexión.

B) Un máximo.

C) Un mínimo.

D) No se cumple ninguna de las afirmaciones anteriores.

Soluciones del Test:

1	2	3	4	5	6	7	8
C	A	D	D	C	1,2,3 Ciertas	D	C

Ejercicios resueltos

POLINOMIOS DE TAYLOR

1 a) Considerar el polinomio de grado 3, $p(x) = 2x^3 + 3x^2 - 7x + 1$. Comprobar que el polinomio queda perfectamente determinado si se conocen el valor de las función y de las tres primeras derivadas en el punto 0.

b) Expresa en potencias de $(x-2)$ el polinomio $p(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x + 2$

c) Expresa en potencias de $(x+1)$ el polinomio $p(x) = x^5 + 2x^4 - x^2 + x + 1$.

Solución apartado a)

$$p(x)=2x^3+3x^2-7x+1 \qquad \frac{p(0)}{0!}=\boxed{1}$$

$$p'(x)=6x^2+6x-7 \qquad \frac{p'(0)}{1!}=\boxed{-7}$$

$$p''(x)=12x+6 \qquad \frac{p''(0)}{2!}=\boxed{3}$$

$$p'''(x)=12 \qquad \frac{p'''(0)}{3!}=\boxed{2}$$

Se considera ahora un punto cualquiera, por ejemplo, a=-1 y se realizan las divisiones sucesivas por $x-a=x-\left(-1\right)=x+1$

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 3 & -7 & 1 \\ -1 & & -2 & -1 & 8 \\ \hline & 2 & 1 & -8 & 9 \end{array} \qquad 2x^3+3x^2-7x+1=\left(2x^2+x-8\right)(x+1)+9$$

$$\begin{array}{c|ccc} & 2 & 1 & -8 \\ -1 & & -2 & 1 \\ \hline & 2 & -1 & -7 \end{array} \qquad 2x^3+3x^2-7x+1=((2x-1)(x+1)-7)(x+1)+9$$

$$\begin{array}{c|cc} & 2 & -1 \\ -1 & & -2 \\ \hline & 2 & -3 \end{array} \qquad \begin{aligned} 2x^3+3x^2-7x+1 &= ((2(x+1)-3)(x+1)-7)(x+1)+9= \\ &=2(x+1)^3-3(x+1)^2-7(x+1)+9 \end{aligned}$$

Puede comprobarse también que

$$p(x)=2x^3+3x^2-7x+1 \qquad \frac{p(-1)}{0!}=\boxed{9}$$

$$p'(x)=6x^2+6x-7 \qquad \frac{p'(-1)}{1!}=\boxed{-7}$$

$$p''(x)=12x+6 \qquad \frac{p''(-1)}{2!}=\boxed{-3}$$

$$p'''(x)=12 \qquad \frac{p'''(-1)}{3!}=\boxed{2}$$

Solución apartado b)

Consultar el siguiente enlace

https://www.giematic.unican.es/funciones/ejercicios/ejpolTaylor1.htm

Solución apartado c)

Consultar el siguiente enlace

https://www.giematic.unican.es/funciones/ejercicios/ejpolTaylor2.htm

2

Se considera la función $f(x)=\sqrt[3]{x}$ determinar el polinomio de Taylor de grado 2 en a=8.

Solución

$$f(x)=\sqrt[3]{x}=x^{1/3} \qquad f(8)=2$$

$$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-2/3} \qquad f'(8)=\frac{1}{12}$$

$$f''(x)=-\frac{2}{9}x^{-5/3} \qquad f''(8)=-\frac{1}{144}$$

El polinomio de Taylor de grado 2 es

$$T_2(x)=f(8)+f'(8)(x-8)+\frac{f''(8)}{2!}(x-8)^2=$$

$$=2+\frac{1}{12}(x-8)-\frac{1}{288}(x-8)^2$$

3

Un dipolo eléctrico consiste en dos cargas eléctricas de igual magnitud y signos opuestos. Si las cargas son q y –q y hay una distancia d entre ellas, entonces el campo eléctrico E en el punto P en la figura es

$$E=\frac{q}{D^3}-\frac{q}{(D+d)^2}$$

Al desarrollar esta expresión para E por el polinomio de Taylor de grado 1 en d/D, demuestre que E es aproximadamente proporcional a $E=\frac{1}{D^3}$ cuando P está alejado del dipolo.

Nota: Ejercicio del libro *Trascendentes tempranas* de Stewart.

Solución

$$E=\frac{q}{D^2}-\frac{q}{D^2\left(1+\frac{d}{D}\right)^2}=\frac{q}{D^2}-\frac{q}{D^2}\left(1+\frac{d}{D}\right)^{-2} \qquad (1)$$

Considerando el polinomio de Taylor de grado 1 en el punto O de la función $f(x)=(1+x)^{-2}$ entonces

$$f(x)=(1+x)^{-2} \qquad f(0)=1$$

$$f'(x)=-2(1+x)^{-3} \qquad f'(0)=-2$$

$$f(x)=(1+x)^{-2}\approx 1-2x \text{ cuando } x\to 0$$

Cuando P está alejado del dipolo, d/D toma valores próximos a 0,

$$\left(1+\frac{d}{D}\right)^{-2}\approx 1-2\frac{d}{D}$$

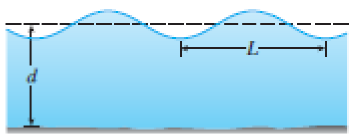
Sustituyendo ese valor en la expresión (1)

$$E=\frac{q}{D^2}-\frac{q}{D^2\left(1+\frac{d}{D}\right)^2}=\frac{q}{D^2}-\frac{q}{D^2}\left(1+\frac{d}{D}\right)^{-2}\approx\frac{q}{D^3}-\frac{q}{D^2}\left(1-2\frac{d}{D}\right)=\frac{2qd}{D^3}$$

$$E\approx 2qd\frac{1}{D^3}$$

4 Si una onda de agua de longitud L se desplaza con una velocidad v a través de un cuerpo de agua de profundidad d como en la figura, entonces

$$v^2=\frac{gL}{2\pi}\tanh\frac{2\pi d}{L} \quad \text{donde} \quad \tanh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$



a) Si el agua es profunda, demuestre que $v=\sqrt{\frac{gL}{2\pi}}$

b) Si el agua es poco profunda, utilice un polinomio de Taylor para tanh para demostrar que $v\approx\sqrt{gd}$. Así, en agua poco profunda, la velocidad de una onda tiende a ser independiente de la longitud de onda.

Nota: Ejercicio del libro *Trascendentes tempranas* de Stewart.

Solución apartado a) Si d es profunda $\tanh\frac{2\pi d}{L}\approx 1$

Por lo tanto

$$v^2\approx\frac{gL}{2\pi} \qquad v\approx\sqrt{\frac{gL}{2\pi}}$$

Solución apartado b) Considerando

$$f(x)=\tanh(x) \qquad\qquad f(0)=0$$

$$f'(x)=\frac{2e^{2x}\left(e^{2x}+1\right)-2e^{2x}\left(e^{2x}-1\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^2}=\frac{4e^{4x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2} \qquad\qquad f'(0)=1$$

el polinomio de Taylor de grado 1 de la función tangente hiperbólica es

$$f(x)=\tanh(x)\approx f(0)+f'(0)x=x \quad \text{cuando } x\to 0$$

Por lo tanto, cuando es poco profunda

$$v^2=\frac{gL}{2\pi}\tanh\frac{2\pi d}{L}\approx\frac{gL}{2\pi}\frac{2\pi d}{L}=gd\Rightarrow v\approx\sqrt{gd}$$

5 Dada la función $f(x)=\sqrt{1+3x}$ utilizar el polinomio de grado 3 para dar un valor aproximado de $f(0.3)$ estimando el error cometido.

Solución

$$f(x)=\sqrt{1+3x}=(1+3x)^{1/2} \qquad \to f(0)=1$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}(1+3x)^{-1/2}(3) \qquad \to f'(0)=\frac{3}{2}$$

$$f''(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)(1+3x)^{-\frac{3}{2}}(3)^2 \qquad \to f''(0)=\frac{-3^2}{2^2}$$

$$f'''(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)(1+3x)^{-\frac{5}{2}}(3)^3 \qquad \to f'''(0)=\frac{(-1)\cdot(-3)\cdot 3^3}{2^3}$$

El polinomio de Taylor de grado 3: $T_3(x)=1+\frac{3}{2}x-\frac{9}{8}x^2+\frac{27}{16}x^3$. La aproximación sería

$$f(0.3)=\sqrt{1.9}\approx T_3(0.3)=1+\frac{3}{2}\cdot 0.3-\frac{9}{8}\cdot 0.3^2+\frac{27}{16}\cdot 0.3^3=$$

Para encontrar una cota del error cometido en esta aproximación, calculamos el resto de Taylor de orden 3. Como

$$f^{iv}(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)(1+3x)^{-\frac{7}{2}}(3)^4$$

se tiene que

$$R_3(0.3) = \frac{f^{(iv}(c)}{4!}x^4 = \frac{-1\cdot 3\cdot 5\cdot 3^4}{2^4\ \ 4!}(1+3c)^{-\frac{7}{2}}(0.3)^4 \qquad \text{con } c\in(0,0.3)$$

Teniendo en cuenta que

$$0 < c < 0.3 \Rightarrow 1 < 1+3c < 1.3 \Rightarrow (1.3)^{-7/2} < (1+3c)^{-7/2} < 1$$

el error de aproximar $f(0.3)=\sqrt{1.9}$ por $T_3(0.3)$ se puede acotar por el siguiente valor:

$$|R_3(0.3)| = \left|\frac{5\cdot 3^8}{2^7\ 10^4\,(1+3c)^{\frac{7}{2}}}\right| \le \frac{5\cdot 3^8}{2^7\ 10^4} \qquad c\in(0,0.3)$$

6

Se considera la función $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$

a) Calcula una estimación del error de la aproximación de $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ por su polinomio de Taylor de grado 2 en el punto $a=0$ cuando x pertenece al intervalo $0\le x\le \dfrac{1}{2}$

b) Calcula para esta función la diferencial en $a=0$ e $\Delta x = 0.5$. Haz un bosquejo de esta función y representa el valor obtenido.

c) ¿Puedes dar una cota del error que se comete al aproximar $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ por 1?

Solución apartado a)

Consideramos la función $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ derivando

$$f(x) = (1+x)^{-1/2} \qquad \to f(0)=1$$

$$f'(x) = \frac{-1}{2}(1+x)^{-3/2} \qquad \to f'(0) = \frac{-1}{2}$$

$$f''(x) = \frac{1\cdot 3}{2^2}(1+x)^{-5/2} \qquad \to f''(0) = \frac{3}{4}$$

El polinomio de Taylor de grado 2 es:

$$T_2(f(x),0) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2$$

Utilizando el resto de Lagrange el error es

$$|f(x) - T_2(f(x);0)| = \left|\frac{f'''(c)}{3!}x^3\right| = \left|\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3 3!}(1+c)^{-7/2}\,x^3\right|$$

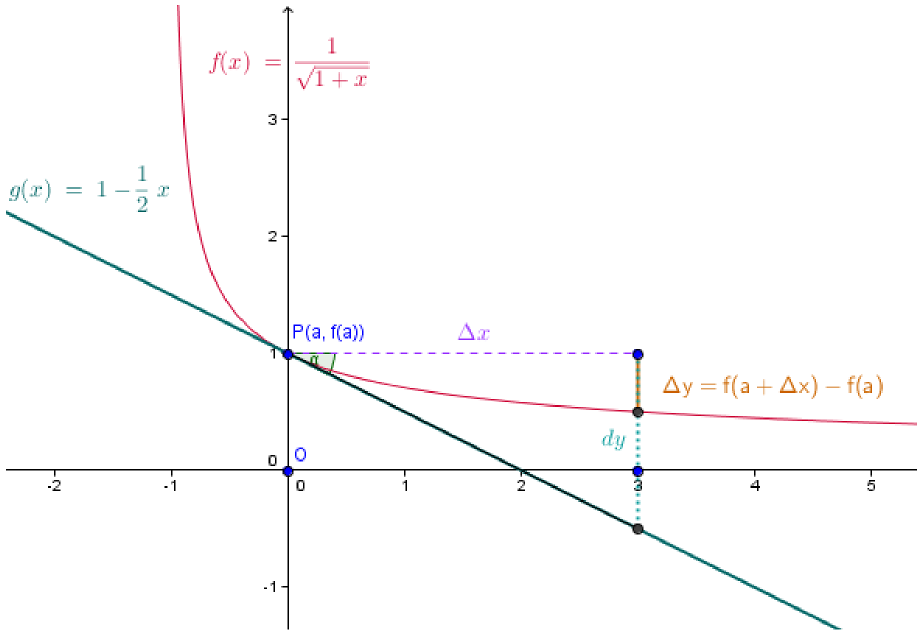
donde c es un punto intermedio entre o y x. Si $0 \le x \le \frac{1}{2}$ una estimación del error es

$$\left|\frac{5}{16}(1+c)^{-7/2}x^3\right| \underset{\substack{0\le c\le x\le \frac{1}{2} \\ 1\le 1+c\le 1+x \\ (1+x)^{-7/2}\le(1+c)^{-7/2}\le 1}}{\le} \frac{5}{16}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{2^7}$$

Solución apartado b)

La diferencial es:

$$dy = f'(0)\Delta x = \frac{-1}{2}\cdot 0,5 = -0,25$$



Para que se vea mejor la gráfica se ha considerado un incremento de valor $\Delta x = 3$.

Solución apartado c)

Se está pidiendo calcular una cota del error de sustituir $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ por $f(0)=1$.

Es decir acotar Δy que sabemos que para incrementos pequeños se puede aproximar por la diferencial, luego, $\Delta y \approx -0.25$.

Otra forma es utilizar el resto de Lagrange

$$\Delta y = f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0) = \frac{f'(c)}{1!}x \quad con\ 0 < c < \frac{1}{2}$$

es decir,

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)-f(0)\right|=\left|-\frac{1}{2}(1+c)^{-3/2}\,x\right| \quad con\ 0<c<\frac{1}{2}$$

Por el mismo razonamiento que antes

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)-f(0)\right|=\left|-\frac{1}{2}(1+c)^{-3/2}\,x\right|\leq\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=0.25$$

7 Considerando la función $f(x)=\sqrt{4-x}$, calcular aproximadamente $\sqrt{3.5}$ utilizando un polinomio de Taylor de grado 3 en un punto adecuado. Dar una cota del error cometido en la aproximación.

Solución

Se considera la función $f(x)=\sqrt{4-x}$, el punto $a=0$ para obtener el polinomio de Taylor de grado 3

$$f(x)=\sqrt{4-x}\approx T_3(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

Como

$$f(x)=\sqrt{4-x} \quad\rightarrow\quad f(0)=2$$

$$f'(x)=-\frac{1}{2}(4-x)^{-1/2} \quad\rightarrow\quad f'(0)=-\frac{1}{4} \quad\rightarrow\quad \frac{f'(0)}{1!}=-\frac{1}{4}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4}(4-x)^{-3/2} \quad\rightarrow\quad f''(0)=-\frac{1}{4\cdot 2^3} \quad\rightarrow\quad \frac{f''(0)}{2!}=-\frac{1}{2^6}$$

$$f'''(x)=-\frac{3}{8}(4-x)^{-5/2} \quad\rightarrow\quad f'''(0)=-\frac{3}{8\cdot 2^5} \quad\rightarrow\quad \frac{f'''(0)}{3!}=-\frac{1}{2^9}$$

se tiene

$$f(x)=\sqrt{4-x}\approx T_3(x)=2-\frac{1}{2^2}x-\frac{1}{2^6}x^2-\frac{1}{2^9}x^3$$

Por lo tanto

$$f(0.5)=\sqrt{4-0.5}=\sqrt{3.5}\approx T_3(x)=2-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^8}-\frac{1}{2^{12}}=\frac{7663}{4096}$$

El error de la aproximación viene dado por $R_3(0.5)=\frac{f^{(4}(c)}{4!}0.5^4$ siendo c un punto intermedio entre 0 y 0.5. En este caso,

$$R_3(0.5)=\frac{f^{(4}(c)}{4!}0.5^4=\frac{-15}{2^4\cdot 4!\,(4-c)^{7/2}}0.5^4 \qquad\Rightarrow\left|R_3(0.5)\right|<\frac{15}{2^8\cdot 4!}$$

Donde se ha utilizado que

$$f^{iv}(x) = -\frac{15}{16}(4-x)^{-7/2} \qquad \rightarrow \qquad f^{iv}(c) = \frac{-15}{2^4(4-c)^{7/2}}$$

$$0 < c < 0.5 \quad \Rightarrow \quad 1 < 4-0.5 < 4-c < 4 \;\Rightarrow\; 1 < (4-c)^{7/2} \Rightarrow (4-c)^{-7/2} < 1$$

8 Dada la función $f(x) = \sqrt{1-x}$, se pide:

a) Calcular el valor aproximado de $\frac{1}{\sqrt{2}}$, utilizando la diferencial primera en el punto 0.

b) Hallar una cota del error cometido en la aproximación anterior.

c) Escribir el código Matlab que permita obtener la aproximación de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ con el polinomio de Taylor de grado 20 en el punto 0.

Solución apartado a)

Como $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ cuando x=1/2 , la aproximación pedida es:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = f\left(\frac{1}{2}\right) \approx f(0) + f'(0)\left(\frac{1}{2} - 0\right)$$

Teniendo en cuenta que

$$f(0) = 1 \qquad f'(x) = -\frac{1}{2}(1-x)^{-1/2} \Rightarrow f'(0) = \frac{-1}{2}$$

se concluye que

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Solución apartado b)

Utilizando la fórmula del resto de Lagrange, el error de la aproximación es:

$$R_2 = \frac{f''(c)}{2!}\left(\frac{1}{2} - 0\right)^2 = \frac{-\frac{1}{4}(1-c)^{-3/2}}{8} = \frac{-1}{32(1-c)^{3/2}} \quad con \quad c \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

Teniendo en cuenta que si $0 < c < \frac{1}{2}$, se cumple que:

$$-\frac{1}{2} < -c < 0 \;\; , \;\; \frac{1}{2} < 1-c < 1 \qquad\qquad 1 < \frac{1}{1-c} < 2\,,$$

la acotación del error es

$$\left|R_2\right| = \left|\frac{-1}{32\left(1-c\right)^{3/2}}\right| < \frac{1}{32}2^{3/2} = \frac{\sqrt{2}}{16} < \frac{1.5}{16} \qquad con \quad c \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

9 Dada la función $f\left(x\right) = \sqrt{4-2x}$, se pide Calcular el valor aproximado de $\sqrt{4'2}$ utilizando la diferencial y el polinomio de Taylor de grado 3. Acotar en ambos casos el error cometido.

Solución

Para calcular $\sqrt{4'2}$ se considera a=0 y x=-0.1 ya que se debe cumplir

$$\sqrt{4'2} = \sqrt{4-2x}$$

Utilizando la diferencial

$$f\left(-0.1\right) - f\left(0\right) \approx dy = f'\left(0\right)\cdot\left(-0.1\right) \Rightarrow f\left(-0.1\right) \approx f\left(0\right) - f'\left(0\right)\cdot 0{,}1 = 2 + \frac{0.1}{2} = 2.05$$

El error de la aproximación es

$$R_1\left(x\right) = \frac{f''\left(c\right)}{2!}x^2$$ siendo c un punto intermedio entre 0 y x

En este caso

$$\left|R_1\left(-0.1\right)\right| = \frac{0.1^2}{2!\left(4-2c\right)^{3/2}} \le \frac{0.1^2}{2\cdot 2^3} \qquad \text{(-0.1<c<0)}$$

Utilizando el polinomio de Taylor de grado 3

$$T_3\left(x\right) = f\left(0\right) + f'\left(0\right)\cdot x + \frac{f''\left(0\right)}{2}\cdot x^2 + \frac{f'''\left(0\right)}{3!}x^3$$

$$T_3\left(x\right) = 2 - \frac{x}{2} + \frac{-\frac{1}{2^3}}{2}\cdot x^2 + \frac{-3\frac{1}{2^5}}{3!}x^3 = 2 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{16} + \frac{x^3}{64}$$

$$T_3\left(-0.1\right) = 2 + \frac{0.1}{2} - \frac{0.1^2}{16} - \frac{0.1^3}{64} \approx 2.0494$$

El error de la aproximación es

$$R_3\left(x\right) = \frac{f^{(4}\left(c\right)}{4!}x^4$$ siendo c un punto intermedio entre 0 y x

En este caso

$$\left|R_4\left(-0.1\right)\right| = \frac{15\cdot 0.1^4}{4!\left(4-2c\right)^{7/2}} \le \frac{5\cdot 0.1^4}{2^{10}} \qquad \text{(-0.1<c<0)}$$

POLINOMIO DE TAYLOR DE GRADO N.

10 Calcular la derivada enésima de la función $f(x)=\sqrt{4-2x}$

Solución

Para calcular la derivada enésima de la función $f(x)=\sqrt{4-2x}=(4-2x)^{\frac{1}{2}}$ se deriva sucesivamente la función

$$f'(x)=\frac{1}{2}(4-2x)^{-\frac{1}{2}}(-2)=-(4-2x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x)=-(4-2x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'''(x)=-3(4-2x)^{-\frac{5}{2}}$$

$$f^{(4}(x)=-3\cdot 5(4-2x)^{-\frac{7}{2}}$$

...

$$f^{(n}(x)=-3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-3)(4-2x)^{-\frac{2n-1}{2}}=-(2n-3)!!\,(4-2x)^{-\frac{2n-1}{2}}$$

11 Dada la función $f(x)=\sqrt{1+3x}$, escribir su polinomio de Taylor de orden n centrado en el punto 0.

Solución

$$f(x)=\sqrt{1+3x}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}(1+3x)^{-1/2}(3) \quad\rightarrow f'(0)=\frac{3}{2}$$

$$f''(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)(1+3x)^{-\frac{3}{2}}(3)^2 \quad\rightarrow f''(0)=\frac{-3^2}{2^2}$$

$$f'''(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)(1+3x)^{-\frac{5}{2}}(3)^3 \quad\rightarrow f'''(0)=\frac{(-1)\cdot(-3)\cdot 3^3}{2^3}$$

$$f^{iv}(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)\left(\frac{-5}{2}\right)(1+3x)^{-\frac{7}{2}}(3)^4 \quad\rightarrow f^{iv}(0)=\frac{(-1)\cdot(-3)\cdot(-5)\cdot 3^4}{2^4}$$

...

$$f^{(n}(x)=\frac{(-1)(-3)(-5)\ldots(2n-3)}{2^n}(1+3x)^{-\frac{2n-1}{2}}(3)^4$$
$$\rightarrow f^{(n}(0)=\frac{(-1)(-3)(-5)\ldots(2n-3)}{2^n}(3)^4$$

El polinomio de Taylor de grado n en a=0 es

$$T_n(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(n}(0)}{n!}x^n$$

$$T_n(x)=1+\frac{3}{2}x-\frac{3^2}{2^2\cdot 2!}x^2+\frac{1\cdot 3\cdot 3^3}{2^3\cdot 3!}x^3+\ldots+\frac{(-1)^n\,1\cdot 3\ldots(2n-3)}{2^n\;\;n!}3^{n+1}x^n$$

12 a) Dada la función $f(x)=\log\left(1-\frac{x}{2}\right)$, se pide calcular, utilizando un polinomio de Taylor, un valor aproximado de $\log(0.5)$ con un error menor que 10^{-2}.

b) Escribir las órdenes Matlab necesarias para calcular el valor aproximado de $\log(0.5)$ por el polinomio obtenido en el apartado a.

Solución apartado a)

Como se pide obtener un valor aproximado para log(0.5) se tendrá que $\log\left(1-\frac{x}{2}\right)=\log\left(\frac{1}{2}\right)$ para $x=1$. Tomamos $a=0$.

En este ejercicio se trata de escribir el resto del polinomio de Taylor de grado n de la función f en el punto $a=0$ cuando el valor de $x=1$ y, una vez acotado, analizar para qué valor de n se podría asegurar que el resto es menor que 10^{-2}. La expresión del resto de orden n en general es:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\qquad c\in(a,x)$$

En este caso

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1}(c)}{(n+1)!}\qquad c\in(0,1)$$

Calculamos entonces la derivada de orden $n+1$ de f.

$$f(x)=\log\left(1-\frac{x}{2}\right)$$

$$f'(x)=\frac{1}{1-\frac{x}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{x-2}=(x-2)^{-1}$$

$$f''(x) = (-1)(x-2)^{-2}$$

$$f'''(x) = (-1)(-2)(x-2)^{-3} \quad \dots$$

$$f^{(n}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(x-2)^{-n}$$

El resto del polinomio de Taylor de grado n para $a = 0$ y $x = 1$ tiene por expresión:

$$R_n(1) = \frac{(-1)^n \, n! \ (c-2)^{-(n+1)}}{(n+1)!} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)(c-2)^{n+1}} \qquad c \in (0,1)$$

Acotando el resto:

$$|R_n(1)| = \left| \frac{1}{(n+1)(c-2)^{n+1}} \right| < \frac{1}{n+1} \qquad c \in (0,1)$$

Para asegurar que el resto sea menor que 10^{-2}, basta elegir n cumpliendo

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{100}$$

es decir, $n = 100$.

Para calcular el valor aproximado de 0.5 calculamos la aproximación por el polinomio de Taylor de grado 100

$$T_{100}(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(100}(0)}{100!}x^{100}$$

Siendo $f(0) = 0$, $\frac{f^{(n}(0)}{n!} = -\frac{(n-1)!}{n!\,2^n} = \frac{1}{n \cdot 2^n}$ y $x = 1$. Es decir,

$$T_{100}(1) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 2^2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} \dots - \frac{1}{100 \cdot 2^n}$$

Solución apartado b)

```
n=1:100; v=-1./(n.*2.^n);sum(v)
```

Para representar la función $f(x)$ junto con su polinomio utilizando el comando plot se puede utilizar las siguientes instrucciones:

```
%Gráfica de la función
x=0:0.1:0.5; plot(x,log(1-x/2))
%Gráfica del polinomio
pol=0;
```

```
for k=1:100
    pol=pol-1/(k*2^k)*x.^k;
end
pause()
hold on
plot(x,pol)
hold off
```

13 Calcular mediante el polinomio de Taylor con un error menor que una décima el valor de $\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$ Representar de forma aproximada la gráfica de la función y del polinomio de Taylor obtenido.

Solución

Observamos que $\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}} = e^{-2/3}$. Una posibilidad para hacer el ejercicio es tomar como función $f(x) = e^x$. El punto donde desarrollaremos será a=0 y el punto donde aproximaremos la función por el polinomio de Taylor será $x = -\frac{2}{3}$

Como

$$f^{(n}(x) = e^x \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow f^{(n}(0) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

es sencillo ver que la fórmula de Taylor es

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(f,x)$$

donde $R_n(f,x) = \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}$ siendo c un punto intermedio entre 0 y x.

Haciendo $x = -\frac{2}{3}$ se tiene que el error al sustituir $f\left(-\frac{2}{3}\right) = e^{-2/3}$ por el polinomio de Taylor de grado n en el punto –2/3 es

$$\left|R_n\left(f, -\frac{2}{3}\right)\right| = \left|\frac{e^c\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{(n+1)!}\right| \text{ siendo } -\frac{2}{3} < c < 0$$

Como

$$\left|R_n\left(f, -\frac{2}{3}\right)\right| = \left|\frac{e^t\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{(n+1)!}\right| \underset{\substack{-\frac{2}{3}<t<0 \\ \Rightarrow e^t<e^0=1}}{\leq} \frac{1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)!}$$

Hay que encontrar el valor de n que hace

$$\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}\left(n+1\right)!} < \frac{1}{10} \Leftrightarrow 10 \cdot 2^{n+1} < 3^{n+1}\left(n+1\right)! \qquad \text{(I)}$$

ya que así se tendrá:

$$\left|R_n\left(f, -\frac{2}{3}\right)\right| \le \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}\left(n+1\right)!} < \frac{1}{10}$$

Dando valores a n en la desigualdad (I)

$$n = 1 \Rightarrow 10 \cdot 2^2 < 3^2 \cdot 2! \qquad NO$$

$$n = 2 \Rightarrow 10 \cdot 2^3 < 3^3 \cdot 3! \qquad SI$$

Luego el polinomio buscado es el segundo

$$\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}} = e^{-2/3} \cong 1 + \frac{-2}{3} + \frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^2}{2!} = 1 - \frac{2}{3} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$$

14 Considera la función $y = \log\left(2x - 1\right)$

a) Escribe la expresión del polinomio de Taylor de grado n en el punto $a = 1$ y el resto de Taylor.

b) Dibuja la gráfica correspondiente a los polinomios de Taylor de grado 3 y 4 de esta función en un intervalo que contenga al punto $a = 1$ sin utilizar la herramienta `taylortool` para hacer la representación.

c) Calcula el error relativo cometido al aproximar la función logaritmo por los polinomios anteriores en el punto $x = \dfrac{3}{2}$.

Nota: el error relativo es $x = \dfrac{valor\ obtenido - valor\ real}{valor\ \ real}$

d) Si consideráramos el punto $x = 1.1$, ¿se obtendría mejor o peor aproximación? ¿Qué resultado teórico justificaría la respuesta dada a la pregunta anterior? Enuncia dicho resultado.

Solución apartado a)

$$f\left(x\right) = \log\left(2x - 1\right) \qquad \rightarrow f\left(1\right) = 0$$

$$f'\left(x\right) = \frac{2}{2x - 1} = 2\left(2x - 1\right)^{-1} \qquad \rightarrow f'\left(1\right) = 2$$

$$f''\left(x\right) = \left(-1\right)\left(2x - 1\right)^{-2} 2^2 \qquad \rightarrow f'\left(1\right) = -2^2$$

$$f'''(x) = (-1)(-2)(2x-1)^{-3}\, 2^3 \qquad \to f''(1) = (-1)(-2)2^3$$

...

$$f^{(n}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(2x-1)^{-n}\, 2^n \qquad \to f^{(n}(1) = (-1)^{n-1}(n-1)!2^n$$

El polinomio de Taylor de grado n en a=1 es

$$T_n(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \ldots + \frac{f^{(n}(1)}{n!}(x-1)^n$$

$$T_n(x) = 2(x-1) - \frac{2^2}{2!}(x-1)^2 + \frac{2^4}{3!}(x-1)^3 + + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!\, 2^n}{n!}(x-1)^n =$$

$$T_n(x) = 2(x-1) - 2(x-1)^2 + \frac{8}{3}(x-1)^3 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}\, 2^n}{n}(x-1)^n$$

El resto de Taylor de orden n es:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1}(c)}{(n+1)!}(x-1)^{n+1}$$ siendo c un punto intermedio entre a=1 y x

$$R_n(x) = \frac{(-1)^n\, n!\, (2c-1)^{-(n+1)}\, 2^{n+1}}{(n+1)!}(x-1)^{n+1} = \frac{(-1)^n\, 2^{n+1}}{(n+1)\,(2c-1)^{n+1}}(x-1)^{n+1}$$

siendo c un punto intermedio entre a=1 y x.

Solución apartado b)

```
t3=inline('2*(x-1)-2*(x-1).^2+8/3*(x-1).^3')
t4=inline('2*(x-1)-2*(x-1).^2+8/3*(x-1).^3-4*(x-1).^4')
x=0.6:0.1:1.5;
plot(x,t3(x),x,t4(x))
hold on
%Dibujamos la función
plot(x,log(2*x-1),'r')
hold off
```

Solución apartado c)

```
(t3(3/2)-log(2))/log(2)
(t4(3/2)-log(2))/log(2)
```

Solución apartado d)

Se obtiene mejor aproximación en el punto $x = 1.1$. La justificación teórica para garantizar que en el punto 1.1 se obtiene mejor aproximación se debe al Teorema de Taylor.

INFINITÉSIMOS

15 Encontrar un infinitésimo equivalente a la función $f\left(x\right)=e^{x}-e^{\operatorname{sen} x}$ en $x=0$.

Solución

Utilizando polinomios de Taylor analizamos el orden de la primera derivada no nula en el punto $x=0$. Se tiene que:

$$f'\left(x\right)=e^{x}-e^{senx}\cos x \Rightarrow f'\left(0\right)=0$$

$$f''\left(x\right)=e^{x}-e^{senx}\cos^{2}x+e^{senx}senx \quad \Rightarrow f''\left(0\right)=0$$

$$f'''\left(x\right)=e^{x}-e^{senx}\cos^{3}x+e^{senx}2\cos xsenx+e^{senx}senx\cos x+e^{senx}\cos x$$
$$\Rightarrow f'''\left(1\right)=1\neq 0$$

Aplicando la fórmula de Taylor:

$$f\left(x\right)=f\left(0\right)+\frac{f'\left(0\right)}{1!}x+\frac{f''\left(0\right)}{2!}x^{2}+\frac{f'''\left(0\right)}{3!}x^{3}+R_{3}=\frac{1}{6}x^{3}+R_{3}$$

donde el resto es un infinitésimo de orden superior a tres. Por lo tanto $f\left(x\right)$ es un infinitésimo de orden 3 y su parte principal es $\frac{1}{6}x^{3}$.

16 Determinar un infinitésimo equivalente para $x=0$ de la función $f\left(x\right)=\left(\cos x-1\right)\left(\log\left(1+x\right)-x\right)$.

Solución

Basta tener en cuenta el primer término no nulo del polinomio de Taylor en el punto $a=0$ para afirmar que

$$\cos x-1\approx-\frac{x^{2}}{2}$$
$$\log\left(1+x\right)-x\approx-\frac{x^{2}}{2}$$

Por lo tanto $f\left(x\right)\approx\frac{x^{4}}{4}$

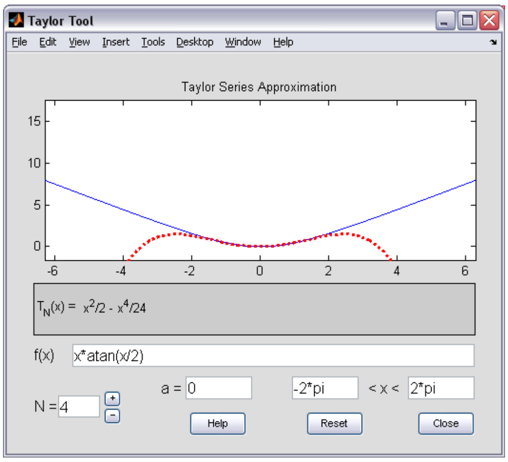
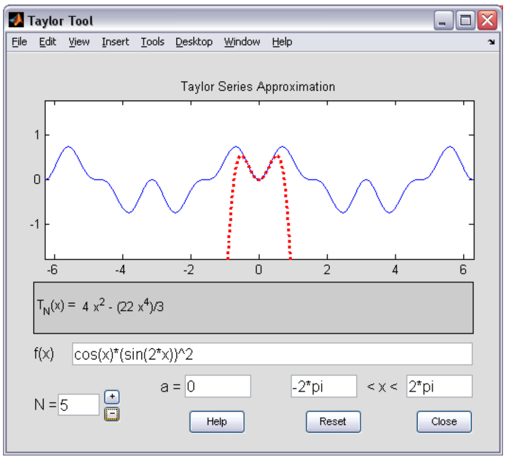
17 Utilizando polinomios de Taylor calcular los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}{\cos x\left(\operatorname{sen}2x\right)^{2}}=\frac{1}{8}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x-x\cos x}{x\left(1-\cos x\right)}=\frac{2}{3}$

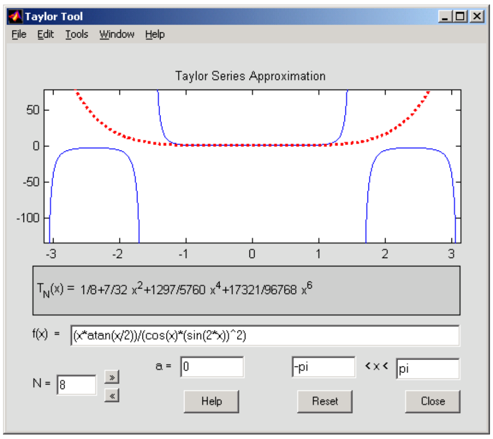
c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\left(x-senx\right)^{2}}{\left(xsenx\right)^{3}}=\frac{1}{36}$ d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-\cos\left(ax\right)-sen\left(ax\right)}{x^{2}}=a^{2}\ \left(a\neq 0\right)$

Solución apartado a)

La parte principal de las funciones infinitesimales del numerador y del denominador son:

Función: $f_1(x) = x\,arctg\left(\dfrac{x}{2}\right) \approx \dfrac{x^2}{2}$	Función: $f_2(x) = \cos(x)\left[sen(2x)\right]^2 \approx 4x^2$
	

El polinomio de Taylor en x=0 de $f(x) = \dfrac{x\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{2}}{\cos x\,(\mathrm{sen}\,2x)^2}$ es:

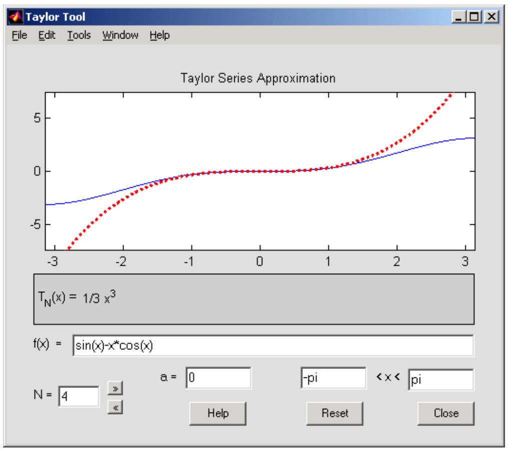


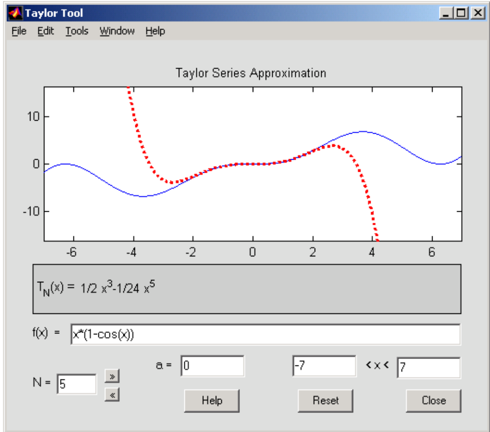
Se cumple entonces, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\,arctg\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\cos x\,(sen2x)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^2}{2}}{4x^2} = \frac{1}{8}$

Solución apartado b)

La parte principal de las funciones infinitesimales del numerador y del denominador son:

Función: $f_1(x) = senx - x\cos x \approx \dfrac{1}{3}x^3$	Función: $f_2(x) = x(1-\cos x) \approx \dfrac{1}{2}x^3$



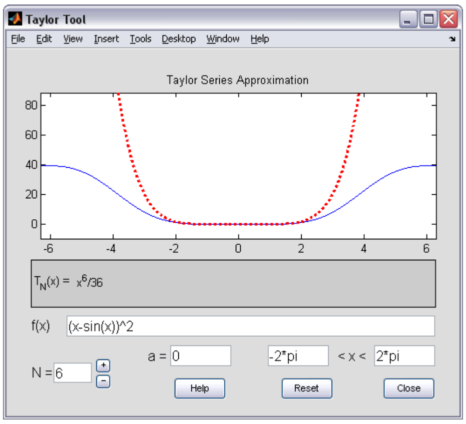


Luego, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{senx - x\cos x}{x\left(1 - \cos x\right)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{1}{3}x^3}{\frac{1}{2}x^3} = \dfrac{2}{3}$

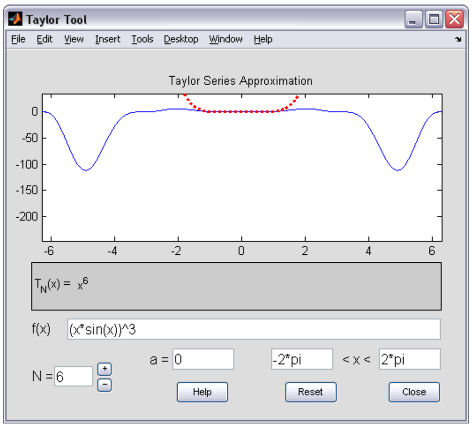
Solución apartado c)

La parte principal de las funciones infinitesimales del numerador y del denominador son:

Función: $f_1\left(x\right) = \left(x - senx\right)^2 \approx \dfrac{x^6}{36}$



Función: $f_2\left(x\right) = \left(xsenx\right)^3 \approx x^6$



Luego, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\left(x - senx\right)^2}{\left(xsenx\right)^3} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{1}{36}x^6}{x^6} = \dfrac{1}{36}$

Solución apartado d)

Debemos calcular $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{ax} - \cos\left(ax\right) - sen\left(ax\right)}{x^2}$ siendo a es un número real no nulo.

Llamamos

$$f_1\left(x\right) = e^{ax} - \cos\left(ax\right) - sen\left(ax\right)$$

Entonces

$$f_1'(x) = ae^{ax} + a\,sen(ax) - a\cos(ax) \quad \Rightarrow f_1'(0) = 0$$

$$f_1''(x) = a^2e^{ax} + a^2\cos(ax) + a^2 sen(ax) \quad \Rightarrow f_1''(0) = 2a^2$$

Luego $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax} - \cos(ax) - sen(ax)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{a^2x^2}{x^2} = a^2$

EXTREMOS

18

Determinar qué tipo de extremo tiene la función $f(x) = x^4 + 1$ en el origen.

Solución

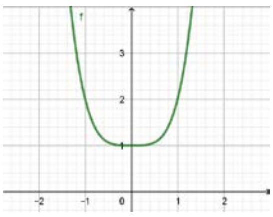
Teniendo en cuenta que

$$f(x) = x^4 + 1 = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{iv}(0)}{4!}x^4$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{f^{iv}(0)}{4!} = 1 \\ f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\begin{cases} f^{iv}(0) = 24 > 0 \\ f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0 \end{cases}$$

y la función tiene un mínimo en el punto 0



19

Determinar si la función $f(x) = x^{20}\,\mathrm{sen}(2x)\,\mathrm{tg}(x^3)$ tiene un máximo o un mínimo en el punto $a = 0$. Justificar la respuesta.

Solución

Utilizando infinitésimos equivalentes para $a = 0$

$$f(x) = x^{20}\,\mathrm{sen}(2x)\,\mathrm{tg}(x^3) \approx x^{20}\cdot 2x\cdot x^3 = 2x^{24}$$

Esto significa que la fórmula de Taylor de la función $f(x)$ en el punto $a = 0$ es

$$f(x) = 2x^{24} + R_{24}$$

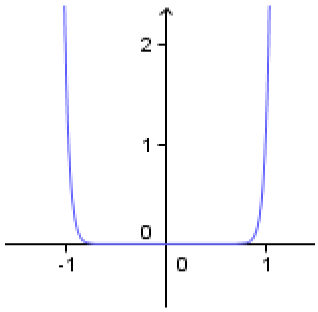
En consecuencia, la primera derivada no nula de $f(x)$ en dicho punto es la de orden 24, par, y además es positiva pues

$$f(x) = 2x^{24} + R_{24} = \frac{f^{(24}(0)}{24!}x^{24} + R_{24} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{f^{(24}(0)}{24!} = 2$$

$$\Rightarrow \qquad f^{(24}(0) = 2 \cdot 24! > 0$$

Se concluye entonces que la función tiene un mínimo en el punto 0.

La imagen siguiente muestra la gráfica de la función:



Material de consulta

Proyecto Lemat: https://www.bdmat.com/lemat/

Tema: Sucesiones y series. Nivel 3.

Autora: Elena Alvarez