

# Obtención de la forma canónica de Jordan.

## Aspectos prácticos

A lo largo del documento consideraremos  $f : V \rightarrow V$  un endomorfismo y  $A$  la matriz coordenada de  $f$  con respecto a una base  $B$ , es decir:

$$A = M_B(f).$$

Representamos por  $P_A(X)$  el polinomio característico de  $A$  (o de  $f$ ) y por  $m_A(X)$  el polinomio mínimo. Los casos que se analizan corresponden a la dimensión del espacio vectorial  $V$  y a la forma de los polinomios  $P_A(X)$  y  $m_A(X)$ .

### 1. Dimensión 2: $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{K})$

#### 1.1. $P_A(X) = m_A(X) = (X - \alpha)(X - \beta)$

En este caso la matriz  $A$  es diagonalizable. Para encontrar la forma diagonal realizamos los siguiente pasos:

1. Determinar los subespacios  $V_1 = \ker(A - \alpha Id_2)$  y  $V_2 = \ker(A - \beta Id_2)$ .
2. Escoger dos vectores  $v_1 \in V_1$  y  $v_2 \in V_2$ .
3. Construir la matriz de cambio de base  $P$  cuyas columnas son los vectores  $v_1$  y  $v_2$ , es decir:  $P = [v_1, v_2]$ .
4. La forma canónica de Jordan es:  $P^{-1} A P = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$

#### 1.2. $P_A(X) = (X - \alpha)^2, m_A(X) = (X - \alpha)$

Este es un caso trivial, corresponde a la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

#### 1.3. $P_A(X) = (X - \alpha)^2, m_A(X) = (X - \alpha)^2$

1. Determinar el subespacio  $V_1 = \ker(A - \alpha Id_2)$ .
2. Encontrar  $v \notin V_1$ , vector que **no** pertenece al subespacio  $V_1$ .
3. Construir la matriz de cambio de base  $P$  cuyas columnas son los vectores  $(A - \alpha Id_2)v$  y  $v$ . Es decir  $P = [(A - \alpha Id_2)v, v]$ .
4. La forma canónica de Jordan es:  $P^{-1} A P = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$

## 2. Dimensión 3. $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{K})$

**2.1.**  $P_A(X) = m_A(X) = (X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma)$

La matriz  $A$  es diagonalizable. Proceder como en el caso 1.1. La forma canónica de Jordan es:

$$P^{-1} A P = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

**2.2.**  $P_A(X) = (X - \alpha)^2(X - \beta)$ ,  $m_A(X) = (X - \alpha)(X - \beta)$

La matriz  $A$  es diagonalizable. Proceder como en el caso 1.1 teniendo en cuenta que el subespacio  $V_1 = \ker(A - \alpha Id_3)$  tiene dimensión 2 y que, por lo tanto, se deben seleccionar dos vectores linealmente independientes en dicho subespacio. La forma canónica de Jordan es:

$$P^{-1} A P = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}$$

**2.3.**  $P_A(X) = (X - \alpha)^2(X - \beta)$ ,  $m_A(X) = (X - \alpha)^2(X - \beta)$

1. Determinar los subespacios  $V_1 = \ker((A - \alpha Id_3)^2)$  y  $V_2 = \ker(A - \beta Id_3)$ .
2. Encontrar un vector  $v_1 \in \ker((A - \alpha Id_3)^2)$  pero que **no** pertenezca a  $\ker(A - \alpha Id_3)$ .
3. Encontrar un vector  $v_2 \in \ker(A - \beta Id_3)$ .
4. Construir la matriz de cambio de base  $P$  cuyas columnas son los vectores  $(A - \alpha Id_3)v_1$ ,  $v_1$  y  $v_2$ . Es decir  $P = [(A - \alpha Id_3)v_1, v_1, v_2]$ .

5. La forma canónica de Jordan es:  $P^{-1} A P = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}$

**2.4.**  $P_A(X) = (X - \alpha)^3$ ,  $m_A(X) = (X - \alpha)$

Este es un caso trivial, corresponde a la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

**2.5.**  $P_A(X) = (X - \alpha)^3$ ,  $m_A(X) = (X - \alpha)^2$

1. Determinar los subespacios  $V_1 = \ker(A - \alpha Id_3)$  e  $I_1 = \text{Im}(A - \alpha Id_3)$ .
2. Encontrar un vector  $v_1 \in V_1$  que **no** pertenezca a  $I_1$ . Esto es:  $v_1 \in V_1 - I_1$ .

3. Encontrar un vector  $v_2$  que **no** pertenezca a  $V_1$ . Es decir:  $v_2 \notin V_1$ .
4. Construir la matriz de cambio de base  $P$  cuyas columnas son los vectores  $v_1, (A - \alpha Id_3)v_2$  y  $v_2$ . Es decir  $P = [v_1, (A - \alpha Id_3)v_2, v_2]$ .
5. La forma canónica de Jordan es:  $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$

**2.6.**  $P_A(X) = (X - \alpha)^3, m_A(X) = (X - \alpha)^3$

1. Determinar el subespacio  $V_1 = \ker((A - \alpha Id_3)^2)$ .
2. Encontrar un vector  $v$  que **no** pertenezca a  $V_1$ .
3. Construir la matriz de cambio de base  $P$  cuyas columnas son los vectores  $(A - \alpha Id_3)^2 v, (A - \alpha Id_3)v$  y  $v$ . Es decir  $P = [(A - \alpha Id_3)^2 v, (A - \alpha Id_3)v, v]$ .
4. La forma canónica de Jordan es:  $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$