

## Convocatoria de ayudas de Proyectos de Investigación Fundamental no orientada

### RESUMEN DE LA MEMORIA EN ESPAÑOL

**TITULO DEL PROYECTO:** Combinatoria y complejidad de estructuras geométricas discretas

**INVESTIGADOR PRINCIPAL:** Francisco Santos Leal

<p>RESUMEN (breve y preciso, exponiendo sólo los aspectos más relevantes y los objetivos propuestos):</p> <p>Se propone el estudio de diversos problemas relacionados con la combinatoria y la complejidad de ciertos objetos geométricos. La elección de temas se ha hecho con vistas a las aplicaciones, algoritmos, y conexiones con otras áreas. Nuestros objetivos se estructuran en cuatro líneas de investigación, no totalmente disjuntas.</p> <p><b>Línea 1:</b> <u>Grafos y complejos de caras de polítopos.</u> El principal objetivo en este bloque es entender ciertas cuestiones sobre poliedros y polítopos, en especial sus grafos. Esto incluye continuar investigando preguntas relacionadas con la Conjetura de Hirsch, recientemente refutada por el IP de este proyecto.</p> <p><b>Línea 2:</b> <u>Polítopos reticulares y su relación con geometría algebraica.</u> Los polítopos reticulares (es decir, polítopos con coordenadas enteras) aparecen frecuentemente en el contexto de la geometría tórica y tropical.</p> <p><b>Línea 3:</b> <u>Combinatoria de configuraciones.</u> Aquí nos centramos en varias preguntas sobre configuraciones de puntos, ya sea en el plano o en dimensión superior: número de cruce, números de <math>k</math>-conjuntos y rectas o planos bisectores, <math>j</math>-caras, <math>g</math>-vectores.</p> <p><b>Línea 4:</b> <u>Grafos geométricos.</u> Aquí consideramos diversas estructuras en el plano, especialmente pseudotriangulaciones, multitriangulaciones y su generalización común a través de arreglos de pseudorrectas con soporte dado a priori.</p>
---

## INTRODUCCION

Este proyecto tiene como objetivo avanzar en el conocimiento en varios problemas de combinatoria y complejidad de objetos geométricos. Los problemas tienen muchas veces relaciones con algoritmos o problemas de optimización. Por ejemplo, el IP de esta solicitud, Francisco Santos, ha resuelto recientemente la Conjetura de Hirsch, un problema de *teoría de politopos* pero con implicaciones para la complejidad del „método del simplex“ de programación lineal (uno de los diez „Algoritmos matemáticos del Siglo XX, según la revista *Computing in Science and Technology* [DS2000]).

El proyecto es continuación del MTM2008-04699-C03-02, aunque el equipo ha sido reducido por diversas razones. La propuesta actual tiene un EDP de cuatro miembros: Francisco Santos, Pedro Ramos, David Orden y Neila Campos. Los tres primeros son profesores numerarios e investigadores bastante activos, la cuarta es una estudiante doctoral. El proyecto también cuenta con tres miembros extranjeros: Vincent Pilaud (Université de Paris VII), Jesús de Loera (University of California Davis) y Oswin Aichholzer (Technische Universität Graz). Los dos primeros continúan del proyecto actual, y el tercero está pensado para fortalecer la línea de trabajo sobre grafos geométricos y configuraciones de puntos.

El proyecto se estructura en las siguientes cuatro líneas de investigación (no del todo disjuntas). En cada una de ellas proponemos varios objetivos concretos. Algunos de ellos son bastante ambiciosos, de modo que el objetivo no es tanto resolverlos del todo como avanzar sobre ellos:

### Línea 1: Grafos y complejos de caras de politopos.

- 1.1 Encontrar familias de politopos con diámetro super-lineal y/o demostrar cotas superiores polinómicas para dichos diámetros.
- 1.2 Estudiar otras preguntas relacionadas con la Conjetura de Hirsch y algoritmos de programación lineal. Encontrar contra-ejemplos más pequeños, demostrar la conjetura o propiedades similares para clases específicas de politopos, estudiar la „conjetura de Hirsch continua“ de Deza et al., etc.
- 1.3 Entender cómo la estructura de un producto cartesiano de grafos puede ayudar a decidir su politopicalidad.

### Línea 2: Politopos reticulares y su relación con geometría algebraica.

- 2.1 Demostrar o refutar: para todo 3-politopo, su tercera dilatación tiene una triangulación unimodular. ¿Hay un  $k$  tal que la  $k$ -ésima dilatación de un 4-politopo tiene una triangulación unimodular?
- 2.2 Demostrar la conjetura de Oda, al menos en algunos casos particulares: todo politopo suave (es decir, simple y con conos normales unimodulares) posee una triangulación unimodular.
- 2.3 Estudiar el tamaño mínimo de triangulaciones de productos de simples. Más concretamente: (a) encontrar una fórmula explícita para el tamaño mínimo de las triangulaciones del producto de tres politopos. (b) intentar mejorar las cotas superiores e inferiores para el caso del cubo.

### Línea 3: Combinatoria de configuraciones de puntos.

- 3.1 Demostrar o refutar las siguientes conjeturas: (1) Para todo entero positivo  $n$ , todos los dibujos rectilíneos con mínimo número de curvas del grafo  $K_{3n}$  son 3-descomponibles. (2) Para todo entero positivo  $n$ , hay un dibujo rectilíneo con mínimo número de curvas del grafo  $K_{3n}$  que es 3-simétrico.
- 3.2 Encontrar propiedades estructurales de los conjuntos que maximizan los números de rectas bisectoras en dimensión 2 y planos bisectores en dimensión 3.
- 3.3 Encontrar una demostración de la no-negatividad del  $g$ -vector para configuraciones de puntos de dimensión 3 (o superior) que no use el Teorema Generalizado de la Cota Inferior.

### Línea 4: Grafos geométricos.

4.1 Estudiar la politopicalidad del grafo de flips entre arreglos de pseudo-triangulaciones con soporte dado a priori. Estudiar las propiedades del retículo de Tamari asociado.

4.2 Estudiar la complejidad de una tensegridad via el número mínimo de átomos en que se descompone.

### **HISTORIAL DEL GRUPO**

Los tres miembros senior del equipo de trabajo han publicado o escrito una veintena de artículos recientemente (publicados en 2008 o más tarde) sobre temas estrachamente relacionados con los propuestos. Muchos de estos artículos han sido colaboraciones con otros grupos de reconocido prestigio internacional, como los siguientes:

- El grupo de B. Sturmfels (U. C. Berkeley), prof. T. Theobald (U. Frankfurt), and prof. J. Richter-Gebert (T.U. Munich) sobre geometría tropical.
- El grupo de Christian Haase y Andreas Paffenholz (Frankfurt), que incluye a Diane Maclagan (Warwick), y otros colaboradores, en relación a politopos reticulares. En particular, Haase, Paffenholz, Lindsay Piechnik y Santos están escribiendo un survey sobre triangulaciones unimodulares.
- Los grupos de geometría computacional de las U. Politécnica de Madrid (Manuel Abellanas) y U. Politécnica de Catalunya (Ferran Hurtado) han trabajado con nosotros en temas relacionados con la línea 3.
- El grupo de algoritmos geométricos de la Freie Universität Berlin (Günter Rote, Günter Ziegler) y en el Smith College (Ileana Streinu) han sido una colaboración estrecha en el tema de rigidez y pseudotriangulaciones.
- El grupo de Bernardo Ábrego y Silvia Fernández-Merchant (California State University Northridge), Gelasio Salazar (Universidad Autónoma de San Luis Potosí), y otros, bastante activo en el estudio del número de cruces,  $j$ -aristas, etc ha colaborado con Ramos y Orden recientemente.
- El grupo de teoría algorítmica de politopos de la Universidad de California Davis es un estrecho colaborador nuestro. Su líder, Jesús de Loera, acaba de publicar con F. Santos un libro sobre Triangulaciones en la editorial Springer-Verlag. De Loera está muy interesado en colaborar con nosotros en la geometría de la programación lineal (Línea 1). Por ello ha aceptado ser miembro de este proyecto.
- Recientemente hemos colaborado con Michel Pocchiola (U. de Paris VI) hasta el punto de que F. Santos ha codirigido con él la tesis de Vincent Pilaud, leída en 2010. Pilaud continuará siendo miembro del proyecto.
- El grupo de Franz Aurenhammer y Oswin Aichholzer en la Technische Universität Graz está bien establecido en el área de combinatoria de configuraciones de puntos, y los profesores Orden y Ramos han tenido una estrecha colaboración con él en el pasado reciente (una acción integrada en 2007, un sabático de Ramos en Graz en 2009-2010, encuentros coorganizados, como uno que se celebrará en Castro Urdiales en Mayo de 2011, etc. Por esa razón hemos invitado a Oswin Aichholzer a ser un miembro del proyecto.

Solicitamos **2 becarios predoctorales**, uno basada en la Universidad de Cantabria y otro en la de Alcalá. El IP del proyecto ha dirigido cuatro tesis doctorales en los últimos diez años (Azaola 2001, Orden 2003, Sabariego 2008, Pilaud 2010). Pedro Ramos ha dirigido una (Raquel Viaña 2005). David Orden no ha dirigido aún ninguna debido a su juventud, pero es ahora suficientemente maduro y tiene interés en hacerlo.