

## Capítulo III

### Métodos analíticos de análisis cinemático.



1

## Capítulo III

### Análisis cinemático de mecanismos

- III.1 Análisis cinemático de mecanismos. Métodos gráficos.
- III.2 Métodos analíticos de análisis cinemático.
  - 1. Introducción.
  - 2. Mecanismo cuadrilátero articulado.
  - 3. Mecanismo biela-manivela.
  - 4. Ejercicios propuestos.
- III.3 Métodos numéricos de análisis cinemático.

2

## Capítulo III: Tema 2

### Métodos analíticos de análisis cinemático

1. Introducción.
2. Mecanismo cuadrilátero articulado.
  1. Problema de posición.
  2. Problema de velocidades.
  3. Problema de aceleración.
3. Mecanismo biela-manivela.
  1. Problema de posición.
  2. Problema de velocidades.
  3. Problema de aceleraciones.
4. Ejercicios propuestos.

3

## Capítulo III: Tema 2

### Métodos analíticos de análisis cinemático



4

## Introducción

Los métodos analíticos tratan de llegar a una expresión matemática de las variables cinemáticas de posición, velocidad y aceleración, en función de los parámetros que definen las dimensiones del mecanismo analizado y las variables cinemáticas de entrada.

Normalmente estos métodos se basan en tres tipos de enfoques matemáticos: trigonométrico, números complejos y análisis vectorial. En cualquiera de los casos se trata de plantear las denominadas **ecuaciones de cierre** o **ecuaciones de lazo**. Estas ecuaciones representan las restricciones del movimiento del mecanismo de forma matemática empleando cualquiera de los tres enfoques mencionados.

En este apartado se estudiará el método analítico de Raven, uno de los más utilizados, y que permite obtener con relativa facilidad las ecuaciones analíticas del mecanismo cuadrilátero articulado y biela-manivela.

5

## Capítulo III: Tema 2 Métodos analíticos de análisis cinemático

2. Mecanismo cuadrilátero articulado.
  1. Problema de posición.
  2. Problema de velocidades.
  3. Problema de aceleración.

6

## Problema de posición

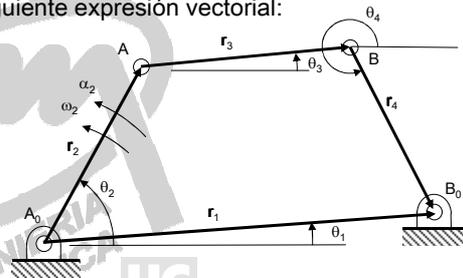
### Mecanismo cuadrilátero articulado:

Para la determinación de la posición inicial se plantea la ecuación de cierre del mecanismo que tiene la siguiente expresión vectorial:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4$$

$$r_1 e^{i\theta_1} = r_2 e^{i\theta_2} + r_3 e^{i\theta_3} + r_4 e^{i\theta_4}$$

$$\left. \begin{aligned} r_1 \cos \theta_1 &= r_2 \cos \theta_2 + r_3 \cos \theta_3 + r_4 \cos \theta_4 \\ r_1 \operatorname{sen} \theta_1 &= r_2 \operatorname{sen} \theta_2 + r_3 \operatorname{sen} \theta_3 + r_4 \operatorname{sen} \theta_4 \end{aligned} \right\}$$



Sistema algebraico que puede ser resuelto para obtener los valores de  $\theta_3$  y  $\theta_4$  en función de los valores conocidos de  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  y  $r_4$ . Se puede utilizar un método numérico para su resolución o métodos trigonométricos para la resolución de este tipo de ecuaciones.

7

## Problema de posición

Para obtener la posición inicial se puede emplear un procedimiento trigonométrico

$$s = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \theta_2}$$

$$r_4^2 = s^2 + r_3^2 - 2sr_3 \cos \phi$$

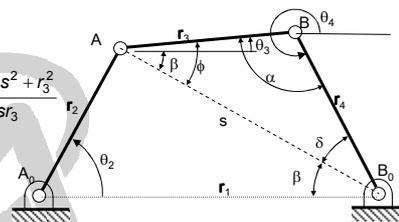
$$s \operatorname{sen} \beta = r_2 \operatorname{sen} \theta_2$$

$$r_4 \operatorname{sen} \delta = r_3 \operatorname{sen} \phi$$

$$\phi = a \cos \frac{-r_4^2 + s^2 + r_3^2}{2sr_3}$$

$$\beta = a \operatorname{sen} \left( \frac{r_2}{s} \operatorname{sen} \theta_2 \right)$$

$$\delta = a \operatorname{sen} \left( \frac{r_3}{r_4} \operatorname{sen} \phi \right)$$



Ahora podemos obtener los ángulos que definen las posiciones de las barras como,

$$\theta_3 = \phi - \beta \quad \theta_4 = 360^\circ - (\beta + \delta)$$

Hay que tener en cuenta que las expresiones planteadas pueden variar en función de la posición relativa de los elementos. Así por ejemplo, si el ángulo  $\theta_2$  es mayor que  $180^\circ$  o si se considera la solución cruzada frente a la solución abierta.

8

## Problema de posición

Para establecer la posición de un punto cualquiera sobre un eslabón cualquiera es necesario plantear formulación adicional. En el caso del elemento 2 se tendrá,

$$\mathbf{h}_2 = \mathbf{g}_2 = g_2 \mathbf{e}^{i\lambda_2} \quad \lambda_2 = \theta_2 + \phi_2$$

$$\left. \begin{aligned} x_{p_2} &= g_2 \cos \lambda_2 = g_2 \cos(\theta_2 + \phi_2) \\ y_{p_2} &= g_2 \sin \lambda_2 = g_2 \sin(\theta_2 + \phi_2) \end{aligned} \right\}$$

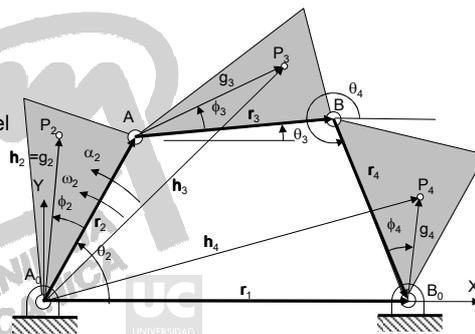
En el caso del punto P<sub>3</sub> y P<sub>4</sub> sobre el elemento 3 y 4 respectivamente,

$$\mathbf{h}_3 = \mathbf{r}_2 + \mathbf{g}_3 \mathbf{e}^{i\lambda_3} \quad \lambda_3 = \theta_3 + \phi_3$$

$$\left. \begin{aligned} x_{p_3} &= r_2 \cos \theta_2 + g_3 \cos(\theta_3 + \phi_3) \\ y_{p_3} &= r_2 \sin \theta_2 + g_3 \sin(\theta_3 + \phi_3) \end{aligned} \right\}$$

$$\mathbf{h}_4 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{g}_4 \mathbf{e}^{i\lambda_4} \quad \lambda_4 = \theta_4 - \phi_4 + 180$$

$$\left. \begin{aligned} x_{p_4} &= r_1 + g_4 \cos(\theta_4 - \phi_4 + 180) \\ y_{p_4} &= g_4 \sin(\theta_4 - \phi_4 + 180) \end{aligned} \right\}$$



En esta expresión se ha considerado un signo (-) afectando al ángulo  $\phi_4$  dado su sentido. Este signo puede ser positivo en otros casos.

9

## Problema de velocidades

Para la determinación de las velocidades se considera de nuevo la ecuación de cierre,

$$r_1 \mathbf{e}^{i\theta_1} = r_2 \mathbf{e}^{i\theta_2} + r_3 \mathbf{e}^{i\theta_3} + r_4 \mathbf{e}^{i\theta_4}$$

Sin pérdida de generalidad se puede considerar que el elemento fijo forma un ángulo  $\theta_1=0$ . Entonces, reordenando la ecuación queda como,

$$r_2 \mathbf{e}^{i\theta_2} + r_3 \mathbf{e}^{i\theta_3} + r_4 \mathbf{e}^{i\theta_4} - r_1 = 0$$

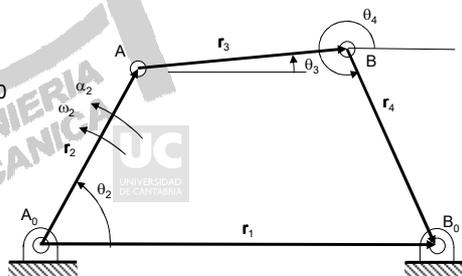
Derivando con respecto al tiempo,

$$i r_2 \frac{d\theta_2}{dt} \mathbf{e}^{i\theta_2} + i r_3 \frac{d\theta_3}{dt} \mathbf{e}^{i\theta_3} + i r_4 \frac{d\theta_4}{dt} \mathbf{e}^{i\theta_4} = 0$$

$$i r_2 \omega_2 \mathbf{e}^{i\theta_2} + i r_3 \omega_3 \mathbf{e}^{i\theta_3} + i r_4 \omega_4 \mathbf{e}^{i\theta_4} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} r_3 \omega_3 \sin \theta_3 + r_4 \omega_4 \sin \theta_4 &= -r_2 \omega_2 \sin \theta_2 \\ r_3 \omega_3 \cos \theta_3 + r_4 \omega_4 \cos \theta_4 &= -r_2 \omega_2 \cos \theta_2 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} r_3 \omega_3 \cos \theta_3 + r_4 \omega_4 \cos \theta_4 &= -r_2 \omega_2 \cos \theta_2 \end{aligned} \right\}$$



10

## Problema de velocidades

$$\left. \begin{aligned} r_3 \omega_3 \operatorname{sen} \theta_3 + r_4 \omega_4 \operatorname{sen} \theta_4 &= -r_2 \omega_2 \operatorname{sen} \theta_2 \\ r_3 \omega_3 \cos \theta_3 + r_4 \omega_4 \cos \theta_4 &= -r_2 \omega_2 \cos \theta_2 \end{aligned} \right\}$$

que es un sistema de ecuaciones donde las únicas incógnitas son  $\omega_3$  y  $\omega_4$ , y por tanto puede resolverse empleando, por ejemplo, la regla de Cramer,

$$\omega_3 = \frac{\begin{vmatrix} -r_2 \omega_2 \operatorname{sen} \theta_2 & r_4 \operatorname{sen} \theta_4 \\ -r_2 \omega_2 \cos \theta_2 & r_4 \cos \theta_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} r_3 \operatorname{sen} \theta_3 & r_4 \operatorname{sen} \theta_4 \\ r_3 \cos \theta_3 & r_4 \cos \theta_4 \end{vmatrix}} = \frac{-r_2 \omega_2 \operatorname{sen} \theta_2 r_4 \cos \theta_4 + r_4 \operatorname{sen} \theta_4 r_2 \omega_2 \cos \theta_2}{r_3 \operatorname{sen} \theta_3 r_4 \cos \theta_4 - r_4 \operatorname{sen} \theta_4 r_3 \cos \theta_3}$$

Operando,

$$\omega_3 = \frac{-r_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_4)}{r_3 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_4)} \omega_2$$

e igualmente para  $\omega_4$ ,

$$\omega_4 = \frac{r_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_3)}{r_4 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_4)} \omega_2$$

11

## Problema de velocidades

En el caso de un punto cualquiera sobre el eslabón 2 será necesario formular,

$$\mathbf{g}_2 = g_2 e^{i\lambda_2}$$

Derivando respecto del tiempo se obtiene la velocidad. Es decir,

$$\mathbf{v}_{P_2} = \frac{d\mathbf{g}_2}{dt} = i g_2 \frac{d\lambda_2}{dt} e^{i\lambda_2}$$

donde,

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = \frac{d(\theta_2 + \phi_2)}{dt} = \omega_2$$

Por tanto,

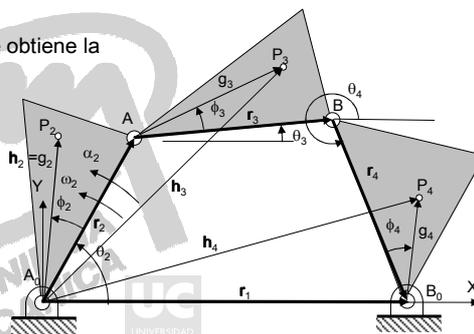
$$\mathbf{v}_{P_2} = i g_2 \omega_2 e^{i(\theta_2 + \phi_2)}$$

Separando en parte real e imaginaria,

$$v_{P_2x} = -g_2 \omega_2 \operatorname{sen}(\theta_2 + \phi_2)$$

$$v_{P_2y} = g_2 \omega_2 \cos(\theta_2 + \phi_2)$$

12



## Problema de velocidades

En el caso del punto  $P_3$  la velocidad será,

$$V_{P_3} = \frac{dg_3}{dt} = ir_2\omega_2 e^{i\theta_2} + ig_3\omega_3 e^{i(\theta_3 + \phi_3)}$$

Separando en parte real e imaginaria,

$$V_{P_3,x} = -r_2\omega_2 \text{sen} \theta_2 - g_3\omega_3 \text{sen}(\theta_3 + \phi_3)$$

$$V_{P_3,y} = r_2\omega_2 \text{cos} \theta_2 + g_3\omega_3 \text{cos}(\theta_3 + \phi_3)$$

De la misma forma para el punto  $P_4$ ,

$$V_{P_4} = \frac{dg_4}{dt} = \frac{dr_1}{dt} + ig_4 \frac{d\lambda_4}{dt} e^{i\lambda_4} = ig_4\omega_4 e^{i\lambda_4}$$

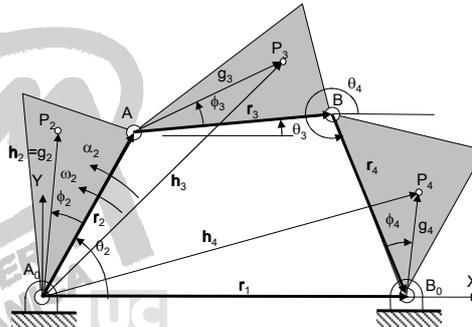
Separando parte real e imaginaria,

$$V_{P_4,x} = -g_4\omega_4 \text{sen}(\theta_4 - \phi_4 + 180)$$

$$V_{P_4,y} = +g_4\omega_4 \text{cos}(\theta_4 - \phi_4 + 180)$$

Las velocidades de cada punto se pueden obtener determinado el módulo y argumento. Esto es,

$$V_i = \sqrt{V_{ix}^2 + V_{iy}^2} \quad \varphi_i = a \tan \frac{V_{iy}}{V_{ix}}$$



13

## Problema de aceleraciones

Considerando de nuevo la expresión,

$$ir_2 \frac{d\theta_2}{dt} e^{i\theta_2} + ir_3 \frac{d\theta_3}{dt} e^{i\theta_3} + ir_4 \frac{d\theta_4}{dt} e^{i\theta_4} = 0$$

Derivando otra vez respecto del tiempo,

$$-r_2 \left( \frac{d\theta_2}{dt} \right)^2 e^{i\theta_2} - r_3 \left( \frac{d\theta_3}{dt} \right)^2 e^{i\theta_3} - r_4 \left( \frac{d\theta_4}{dt} \right)^2 e^{i\theta_4} + ir_2 \frac{d^2\theta_2}{dt^2} e^{i\theta_2} + ir_3 \frac{d^2\theta_3}{dt^2} e^{i\theta_3} + ir_4 \frac{d^2\theta_4}{dt^2} e^{i\theta_4} = 0$$

O en forma compacta,

$$-r_2\omega_2^2 e^{i\theta_2} - r_3\omega_3^2 e^{i\theta_3} - r_4\omega_4^2 e^{i\theta_4} + ir_2\alpha_2 e^{i\theta_2} + ir_3\alpha_3 e^{i\theta_3} + ir_4\alpha_4 e^{i\theta_4} = 0$$

Reordenando y separando en parte real e imaginaria se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas,

$$\left. \begin{aligned} -r_3\alpha_3 \text{sen} \theta_3 - r_4\alpha_4 \text{sen} \theta_4 &= r_2\omega_2^2 \text{cos} \theta_2 + r_3\omega_3^2 \text{cos} \theta_3 + r_4\omega_4^2 \text{cos} \theta_4 + r_2\alpha_2 \text{sen} \theta_2 \\ r_3\alpha_3 \text{cos} \theta_3 + r_4\alpha_4 \text{cos} \theta_4 &= r_2\omega_2^2 \text{sen} \theta_2 + r_3\omega_3^2 \text{sen} \theta_3 + r_4\omega_4^2 \text{sen} \theta_4 - r_2\alpha_2 \text{cos} \theta_2 \end{aligned} \right\}$$

donde las incógnitas son  $\alpha_3$  y  $\alpha_4$ .

14

## Problema de aceleraciones

Resolviendo por Cramer se obtiene,

$$\alpha_3 = \frac{\begin{vmatrix} r_2\omega_2^2 \cos \theta_2 + r_3\omega_3^2 \cos \theta_3 + r_4\omega_4^2 \cos \theta_4 + r_2\alpha_2 \operatorname{sen} \theta_2 & -r_4 \operatorname{sen} \theta_4 \\ r_2\omega_2^2 \operatorname{sen} \theta_2 + r_3\omega_3^2 \operatorname{sen} \theta_3 + r_4\omega_4^2 \operatorname{sen} \theta_4 - r_2\alpha_2 \cos \theta_2 & r_4 \cos \theta_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -r_3 \operatorname{sen} \theta_3 & -r_4 \operatorname{sen} \theta_4 \\ r_3 \cos \theta_3 & r_4 \cos \theta_4 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{(r_2\omega_2^2 \cos \theta_2 + r_3\omega_3^2 \cos \theta_3 + r_4\omega_4^2 \cos \theta_4 + r_2\alpha_2 \operatorname{sen} \theta_2) r_4 \cos \theta_4 - r_3 \operatorname{sen} \theta_3 r_4 \cos \theta_4 + r_4 \operatorname{sen} \theta_4 r_3 \cos \theta_3}{r_3 \cos \theta_3 r_4 \cos \theta_4 - r_4 \operatorname{sen} \theta_4 r_3 \cos \theta_3} +$$

$$= \frac{r_2 \operatorname{sen} \theta_4 (r_2\omega_2^2 \operatorname{sen} \theta_2 + r_3\omega_3^2 \operatorname{sen} \theta_3 + r_4\omega_4^2 \operatorname{sen} \theta_4 - r_2\alpha_2 \cos \theta_2) - r_3 \operatorname{sen} \theta_3 r_4 \cos \theta_4 + r_4 \operatorname{sen} \theta_4 r_3 \cos \theta_3}{r_3 \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_3)}$$

$$= \frac{r_2\omega_2^2 \cos \theta_2 \cos \theta_4 + r_3\omega_3^2 \cos \theta_3 \cos \theta_4 + r_4\omega_4^2 \cos^2 \theta_4 + r_2\alpha_2 \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_4 - r_3 \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_3)}{r_3 \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_3)}$$

$$+ \frac{r_2\omega_2^2 \operatorname{sen} \theta_2 \operatorname{sen} \theta_4 + r_3\omega_3^2 \operatorname{sen} \theta_3 \operatorname{sen} \theta_4 + r_4\omega_4^2 \operatorname{sen}^2 \theta_4 - r_2\alpha_2 \cos \theta_2 \operatorname{sen} \theta_4}{r_3 \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_3)}$$

$$= \frac{r_2\omega_2^2 \cos(\theta_2 - \theta_4) + r_3\omega_3^2 \cos(\theta_3 - \theta_4) + r_4\omega_4^2 + r_2\alpha_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_4)}{r_3 \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_3)}$$

$$= \frac{r_2\omega_2^2 \cos(\theta_2 - \theta_4) + r_3\omega_3^2 \cos(\theta_3 - \theta_4) + r_4\omega_4^2}{r_3 \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_3)} - \frac{\alpha_2 r_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_4)}{r_3 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_4)}$$

$$= \frac{r_2\omega_2^2 \cos(\theta_2 - \theta_4) + r_3\omega_3^2 \cos(\theta_3 - \theta_4) + r_4\omega_4^2}{r_3 \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_3)} + \frac{\alpha_2 \omega_3}{\omega_2}$$

15

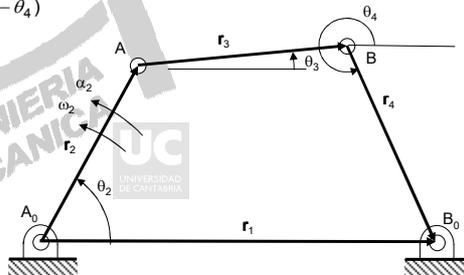
## Problema de aceleraciones

Reordenando,

$$\alpha_3 = \frac{\omega_3}{\omega_2} \alpha_2 - \frac{r_2\omega_2^2 \cos(\theta_2 - \theta_4) + r_3\omega_3^2 \cos(\theta_3 - \theta_4) + r_4\omega_4^2}{r_3 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_4)}$$

De la misma forma para  $\alpha_4$ ,

$$\alpha_4 = \frac{\omega_4}{\omega_2} \alpha_2 - \frac{r_2\omega_2^2 \cos(\theta_2 - \theta_3) + r_4\omega_4^2 \cos(\theta_3 - \theta_4) + r_3\omega_3^2}{r_4 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_4)}$$



16

## Problema de aceleraciones

Para el punto  $P_2$  la aceleración será,

$$\mathbf{A}_{P_2} = ig_2\alpha_2 e^{i(\theta_2 + \phi_2)} - g_2\omega_2^2 e^{i(\theta_2 + \phi_2)}$$

Separando parte real e imaginaria,

$$A_{P_2,x} = -g_2\alpha_2 \text{sen}(\theta_2 + \phi_2) - g_2\omega_2^2 \cos(\theta_2 + \phi_2)$$

$$A_{P_2,y} = g_2\alpha_2 \cos(\theta_2 + \phi_2) - g_2\omega_2^2 \text{sen}(\theta_2 + \phi_2)$$

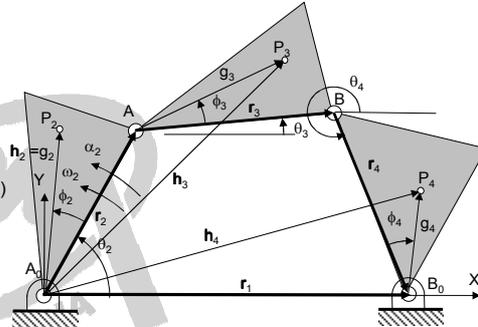
En el caso del punto  $P_3$ ,

$$\mathbf{A}_{P_3} = ir_2\alpha_2 e^{i\theta_2} - r_2\omega_2^2 e^{i\theta_2} + ig_3\alpha_3 e^{i(\theta_3 + \phi_3)} - g_3\omega_3^2 e^{i(\theta_3 + \phi_3)}$$

Separando en parte real e imaginaria,

$$A_{P_3,x} = -r_2(\alpha_2 \text{sen} \theta_2 + \omega_2^2 \cos \theta_2) - g_3(\alpha_3 \text{sen}(\theta_3 + \phi_3) + \omega_3^2 \cos(\theta_3 + \phi_3))$$

$$A_{P_3,y} = r_2(\alpha_2 \cos \theta_2 - \omega_2^2 \text{sen} \theta_2) + g_3(\alpha_3 \cos(\theta_3 + \phi_3) - \omega_3^2 \text{sen}(\theta_3 + \phi_3))$$



17

## Problema de aceleraciones

Finalmente, para el punto  $P_4$  se obtiene,

$$\mathbf{A}_{P_4} = ig_4\alpha_4 e^{i\lambda_4} - g_4\omega_4^2 e^{i\lambda_4}$$

Separando parte real e imaginaria,

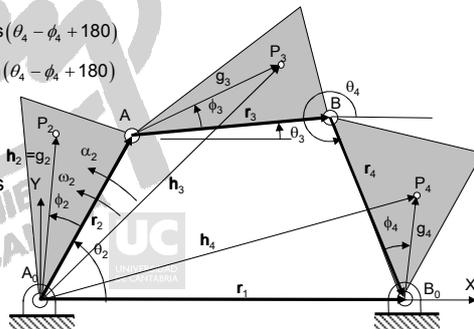
$$A_{P_4,x} = -g_4\alpha_4 \text{sen}(\theta_4 - \phi_4 + 180) - g_4\omega_4^2 \cos(\theta_4 - \phi_4 + 180)$$

$$A_{P_4,y} = +g_4\alpha_4 \cos(\theta_4 - \phi_4 + 180) - g_4\omega_4^2 \text{sen}(\theta_4 - \phi_4 + 180)$$

Las componentes globales de aceleración se determinan de la misma forma que en el caso de las velocidades, esto es,

$$A_i = \sqrt{A_{ix}^2 + A_{iy}^2}$$

$$\varphi_i = a \tan \frac{A_{iy}}{A_{ix}}$$



18

## Capítulo III: Tema 2

### Métodos analíticos de análisis cinemático

3. Mecanismo biela-manivela.
  1. Problema de posición.
  2. Problema de velocidades.
  3. Problema de aceleraciones.



19

## Problema de posición

### Mecanismo biela-manivela:

Únicamente se considera en este apartado la velocidad y aceleración del elemento 3 y la deslizadera. No se ha incluido el caso de un punto cualquiera. Si fuese necesario obtener la velocidad y aceleración de un punto cualquiera de un elemento del mecanismo se procederá como en el caso anterior en el mecanismo cuadrilátero articulado.

Para el análisis de la posición se parte de la ecuación vectorial de lazo cerrado siguiente.

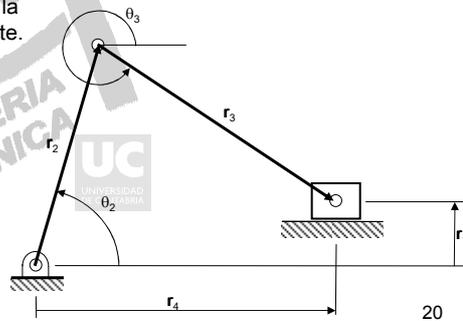
$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_4 = \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3$$

$$r_1 e^{i\theta_1} + r_4 e^{i\theta_4} = r_2 e^{i\theta_2} + r_3 e^{i\theta_3}$$

$$\left. \begin{aligned} r_4 &= r_2 \cos \theta_2 + r_3 \cos \theta_3 \\ r_1 &= r_2 \operatorname{sen} \theta_2 + r_3 \operatorname{sen} \theta_3 \end{aligned} \right\}$$

$$\theta_3 = \operatorname{asen} \left( \frac{r_1}{r_3} - \frac{r_2}{r_3} \operatorname{sen} \theta_2 \right)$$

$$r_4 = r_2 \cos \theta_2 + r_3 \cos \left[ \operatorname{asen} \left( \frac{r_1}{r_3} - \frac{r_2}{r_3} \operatorname{sen} \theta_2 \right) \right]$$



## Problema de velocidades

Para la obtención de las velocidades se deriva la ecuación de lazo cerrado expresada en forma compleja respecto del tiempo. Es decir,

$$V_4 e^{i\theta_4} = ir_2 \omega_2 e^{i\theta_2} + ir_3 \omega_3 e^{i\theta_3}$$

que separada en parte real e imaginaria produce el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{aligned} V_4 &= -r_2 \omega_2 \operatorname{sen} \theta_2 - r_3 \omega_3 \operatorname{sen} \theta_3 \\ 0 &= r_2 \omega_2 \cos \theta_2 + r_3 \omega_3 \cos \theta_3 \end{aligned}$$

Su resolución conduce a,

$$\omega_3 = \frac{-r_2 \omega_2 \cos \theta_2}{r_3 \cos \theta_3}$$

$$V_4 = -r_2 \omega_2 \operatorname{sen} \theta_2 + r_2 \omega_2 \cos \theta_2 \tan \theta_3$$

que son las velocidades del mecanismo en función de la velocidad de entrada.

21

## Problema de aceleraciones

De nuevo se toma la ecuación de lazo cerrado expresada en forma compleja y se deriva esta vez dos veces respecto del tiempo obteniendo la siguiente expresión,

$$A_4 e^{i\theta_4} = -r_2 \omega_2^2 e^{i\theta_2} + ir_2 \alpha_2 e^{i\theta_2} - r_3 \omega_3^2 e^{i\theta_3} + ir_3 \alpha_3 e^{i\theta_3}$$

Expresando es expresión compleja en forma algebraica produce,

$$\begin{cases} A_4 = -r_2 \omega_2^2 \cos \theta_2 - r_2 \alpha_2 \operatorname{sen} \theta_2 - r_3 \omega_3^2 \cos \theta_3 - r_3 \alpha_3 \operatorname{sen} \theta_3 \\ 0 = -r_2 \omega_2^2 \operatorname{sen} \theta_2 + r_2 \alpha_2 \cos \theta_2 - r_3 \omega_3^2 \operatorname{sen} \theta_3 + r_3 \alpha_3 \cos \theta_3 \end{cases}$$

que es un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas cuya solución produce,

$$\alpha_3 = \frac{r_2 \omega_2^2 \operatorname{sen} \theta_2 - r_2 \alpha_2 \cos \theta_2 + r_3 \omega_3^2 \operatorname{sen} \theta_3}{r_3 \cos \theta_3}$$

$$A_4 = -r_2 \omega_2^2 \cos \theta_2 - r_2 \alpha_2 \operatorname{sen} \theta_2 - r_3 \omega_3^2 \cos \theta_3 - (r_2 \omega_2^2 \operatorname{sen} \theta_2 - r_2 \alpha_2 \cos \theta_2 + r_3 \omega_3^2 \operatorname{sen} \theta_3) \tan \theta_3$$

Con lo que queda resuelto el problema de aceleraciones.

22

## Capítulo III: Tema 2

### Métodos analíticos de análisis cinemático

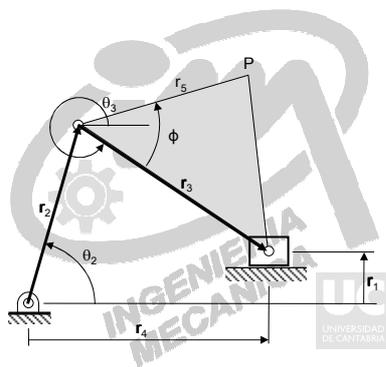
#### 4. Ejercicios propuestos.



23

## Ejercicios propuestos

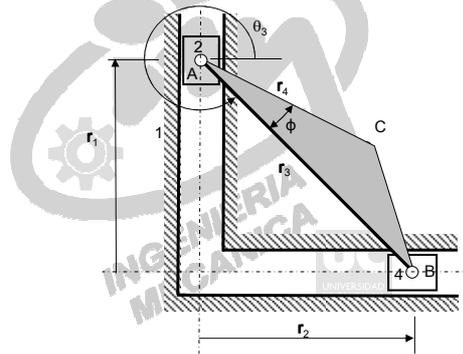
Considerando como elemento de entrada el elemento 2, determinar empleando el método de Raven la posición, velocidad y aceleración de P.



24

## Ejercicios propuestos

Considerando como elemento de entrada el elemento 2 (coordenada  $r_1$ ), determinar empleando el método de Raven la posición, velocidad y aceleración de los puntos A, B y P, y la velocidad angular del triángulo ABC.



25