Capitulo II

Teoría de curvatura

R. Sancibrián, Ing. Mecánica

Capitulo II
Movimiento Plano

II.1 Aspectos generales del movimiento plano.
II.2 Teoría de la curvatura.
1. Teorema de Hartman.
2. Euler-Savary.
3. Circunferencia de inflexiones y circunferencia de Bresse.
4. Construcciones gráficas.
5. Teorema de Bobillier y construcción de Aronhold.
6. Generalización de la fórmula de Euler-Savary.
7. Aplicaciones de la fórmula de Euler-Savary.

II.3 Estudio del mecanismo cuadrilátero articulado.

R. Sancibrián, Ing. Mecánica

Capitulo II: Tema 2
Teoría de curvatura

1. Teorema de Hartman.
   1. Aspectos previos del Teorema de Hartman.
   2. Enunciado y demostración del Teorema de Hartman.
2. Euler-Savary.
   1. Fórmula de Euler-Savary.
   2. Criterio de signos.
3. Circunferencia de inflexiones y circunferencia de Bresse.
   1. Circunferencia de las inflexiones.
   2. Circunferencia de Bresse y polo de aceleraciones.
4. Construcciones gráficas.
   1. Construcción gráfica 1.
   2. Construcción gráfica 2.
5. Teorema de Bobillier y construcción de Aronhold.
   1. Teorema de Bobillier.
   2. Teorema de Aronhold.
6. Generalización de la fórmula de Euler-Savary.
   1. Introducción. Perfiles conjugados.
   2. Euler-Savary generalizado.
   3. Fórmula de E-S generalizado.
7. Aplicaciones de la fórmula de Euler-Savary.

Capítulo II: Tema 2

1. Teorema de Hartman.
   1. Aspectos previos del Teorema de Hartman.
   2. Enunciado y demostración del Teorema de Hartman.

Aspectos previos del teorema de Hartman

En este apartado vamos a estudiar el teorema de Hartman que nos permitirá obtener la relación entre un punto del plano móvil, el polo de dicho plano móvil y el centro de curvatura de la trayectoria recorrida por el punto.

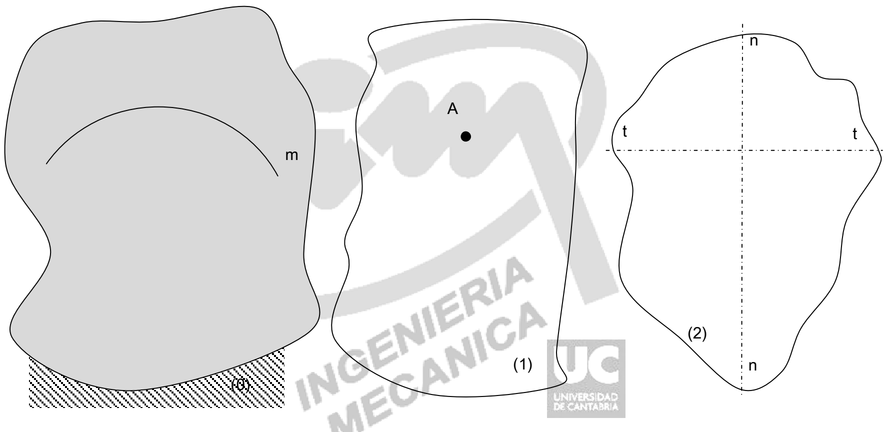
Pero antes introducimos en el teorema de Hartman existen algunas cuestiones preliminares que nos ayudarán a entender dicho teorema.

En esta introducción al teorema de Hartman vamos a considerar 3 planos en el movimiento:

- El plano fijo (0).
- El plano móvil (1) que contiene el punto A el cual recorre la trayectoria m sobre el plano fijo (0).
- El plano móvil (2) compuesto por la normal (n) y la tangente (t) a la trayectoria y que tiene un punto de coincidencia con el plano (1) que es el punto A.

Aspectos previos del teorema de Hartman

El plano fijo (0) El plano móvil (1) El plano móvil (2)



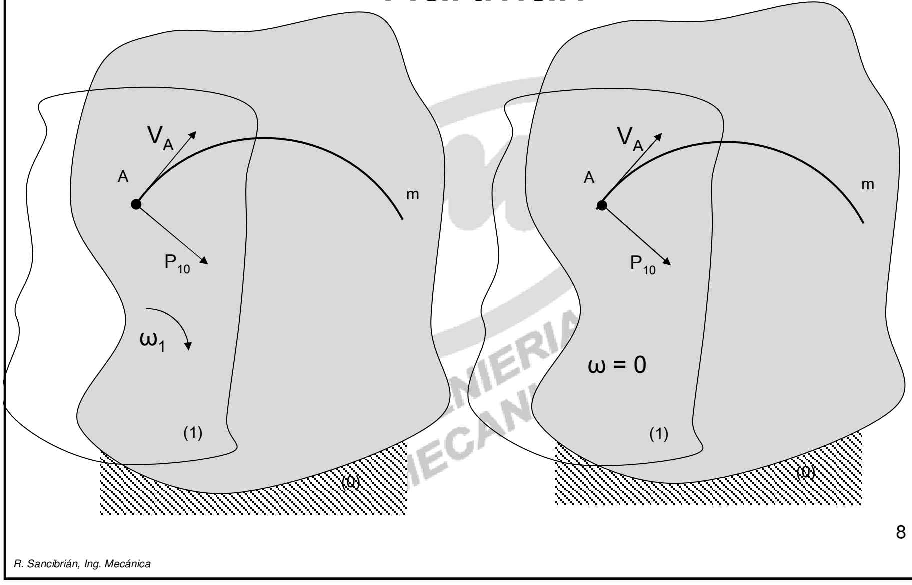
Aspectos previos del teorema de Hartman

Movimiento del plano 1 sobre el plano 0

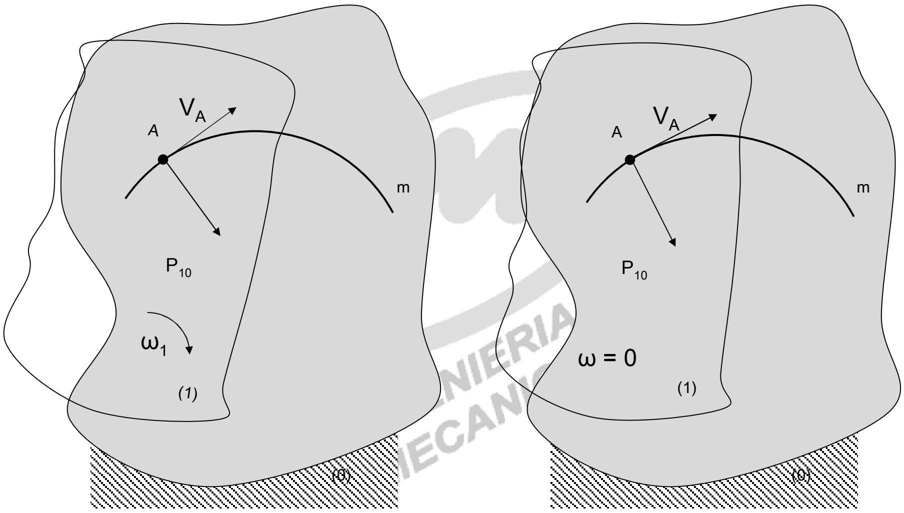
Condición: que el punto A del plano 1 recorra la trayectoria m del plano 0.

A continuación se muestran dos casos y se comparan.

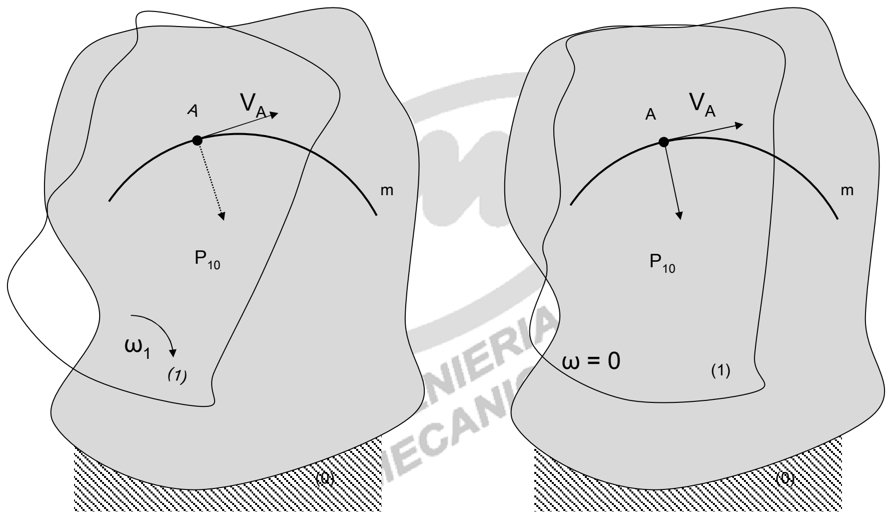
Aspectos previos del teorema de Hartman



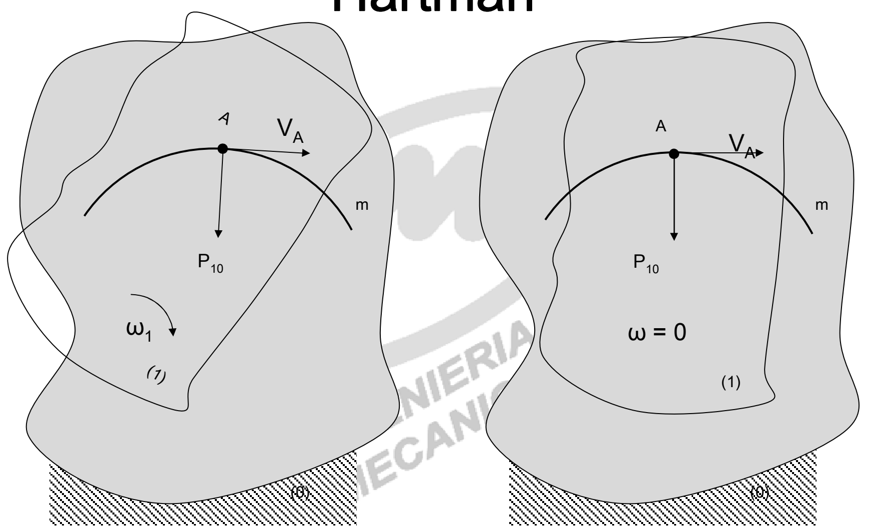
Aspectos previos del teorema de Hartman



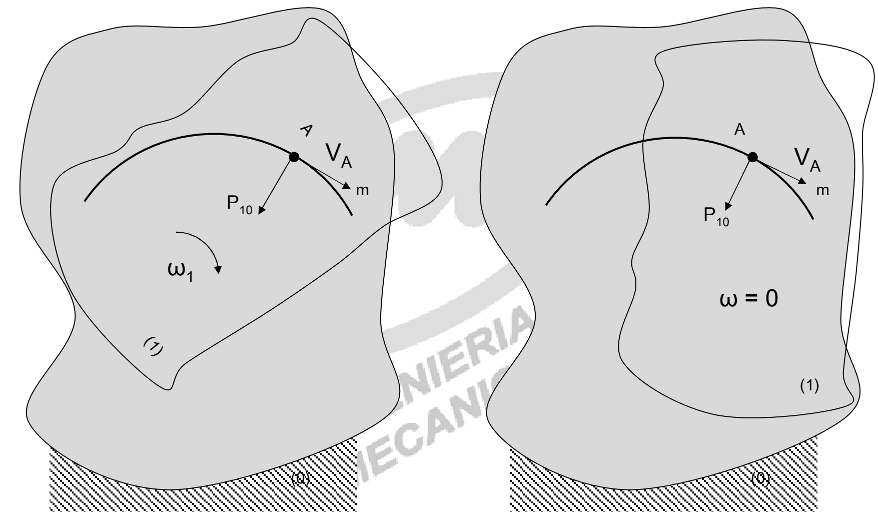
Aspectos previos del teorema de Hartman



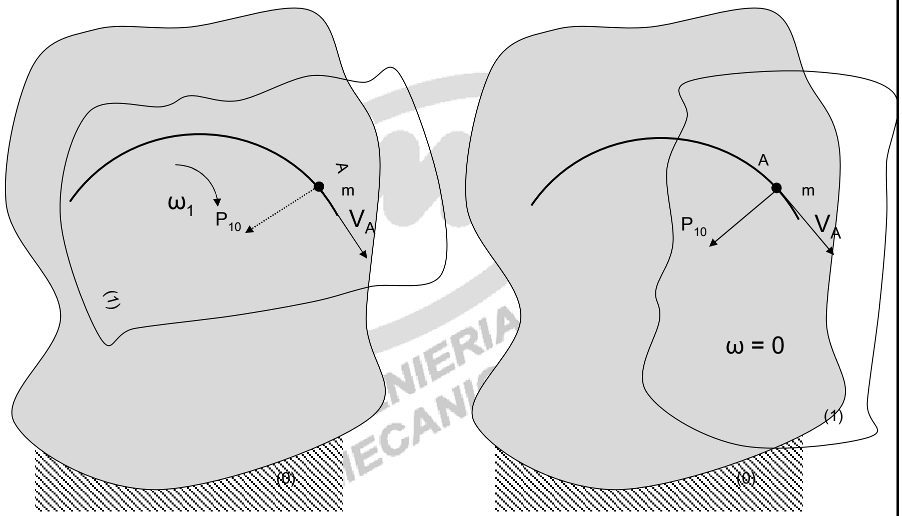
Aspectos previos del teorema de Hartman



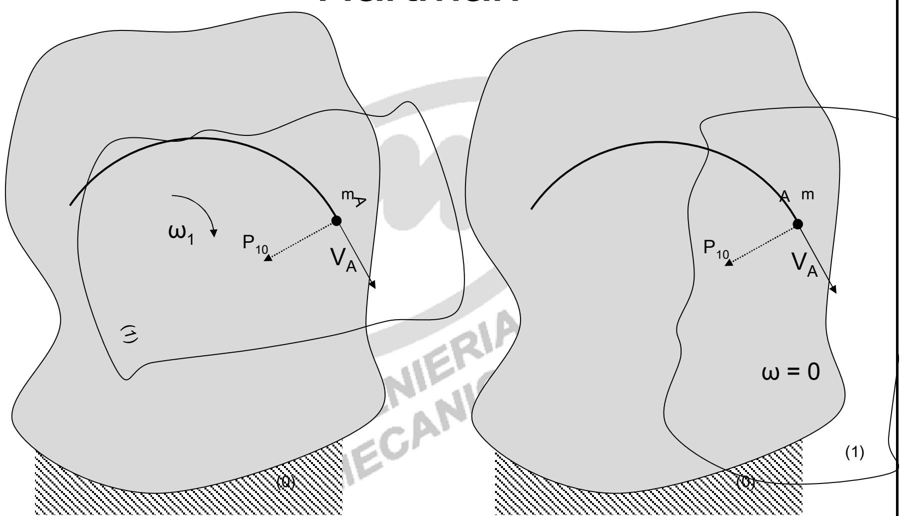
Aspectos previos del teorema de Hartman



Aspectos previos del teorema de Hartman



Aspectos previos del teorema de Hartman



Aspectos previos del teorema de Hartman

Movimiento del plano 1 sobre el plano 0:

1. La condición de que un solo punto, el A, recorra la trayectoria m no condiciona completamente el movimiento del plano 1 sobre el cero, ya que pueden darse infinitos desplazamientos entre posiciones cumpliendo con esta condición.
2. Por tanto, la posición del polo P_{10} no está definida. Sin embargo, sí conocemos la dirección en la que se encuentra este polo, ya que debe estar situado en la normal a la trayectoria. La condición de que el punto A recorra la trayectoria define la dirección de la normal.

Cinemática y Dinámica de Máquinas. II.2 Teoría de la curvatura

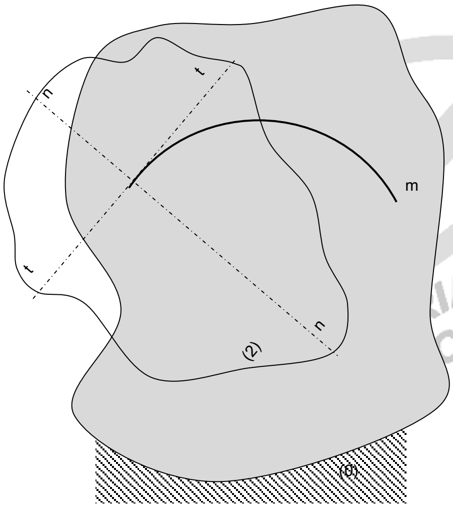
Aspectos previos del teorema de Hartman

Movimiento del plano 2 sobre el plano 0

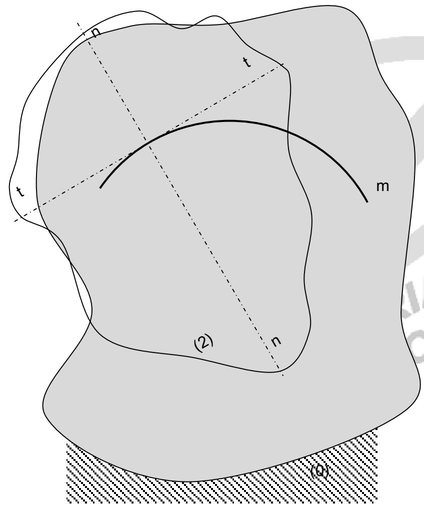
Condiciones:

1. El punto de corte entre tangente y normal debe coincidir con el movimiento del punto A.
2. La recta t debe ser siempre tangente a la trayectoria y la recta n debe ser normal a la misma.

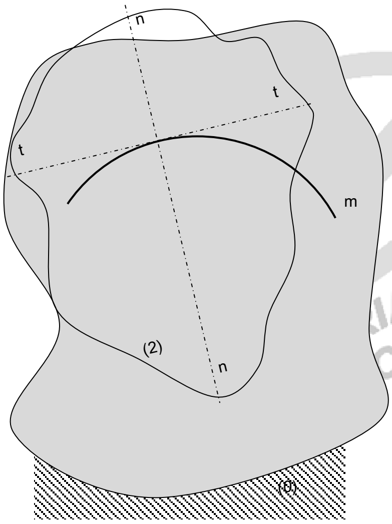
Aspectos previos del teorema de Hartman



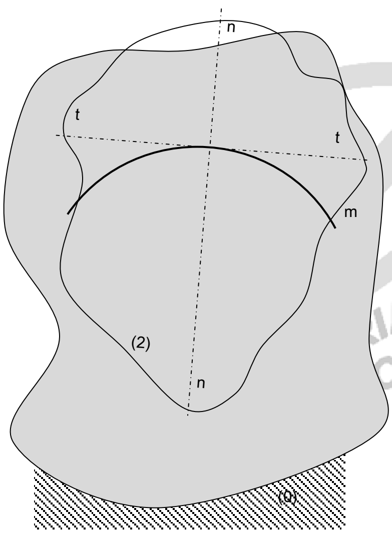
Aspectos previos del teorema de Hartman



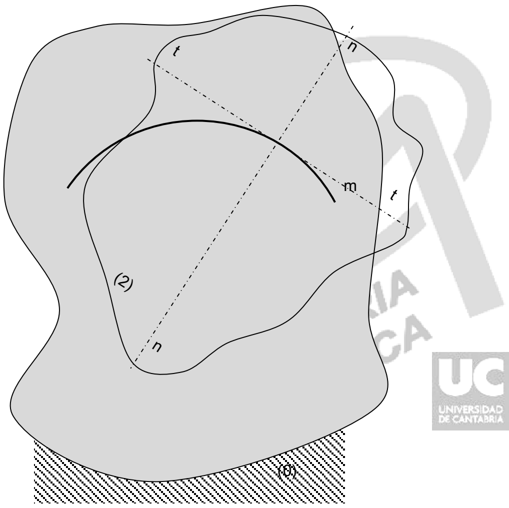
Aspectos previos del teorema de Hartman



Aspectos previos del teorema de Hartman

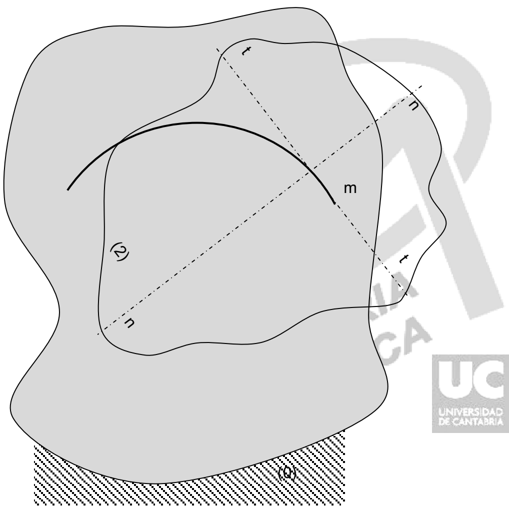


Aspectos previos del teorema de Hartman



R. Sancibrián, Ing. Mecánica

Aspectos previos del teorema de Hartman



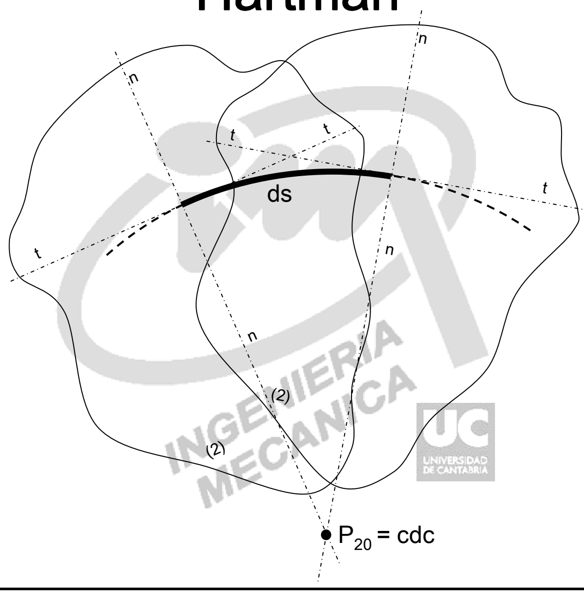
R. Sancibrián, Ing. Mecánica

Aspectos previos del teorema de Hartman

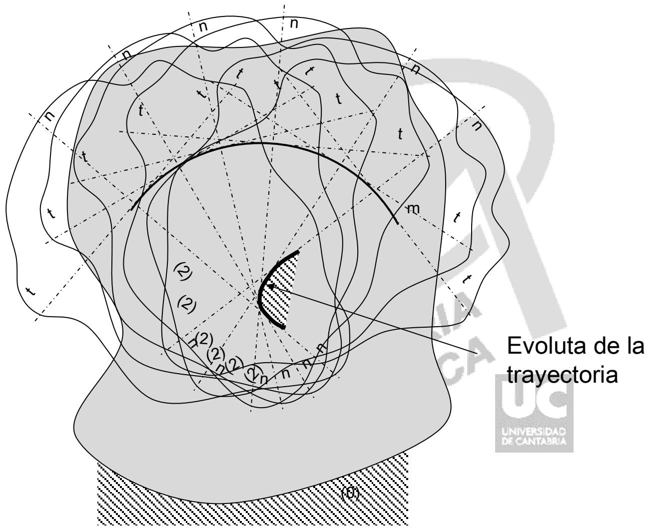
Movimiento del plano 2 sobre el plano 0:

- En este caso, la condición de normal y tangente a la trayectoria restringe completamente el movimiento y, por tanto, la posición del plano 2 con respecto al plano 0 es conocida en cualquier instante.
- Al estar completamente restringido el movimiento la posición del polo P_{20} también lo está.

Aspectos previos del teorema de Hartman



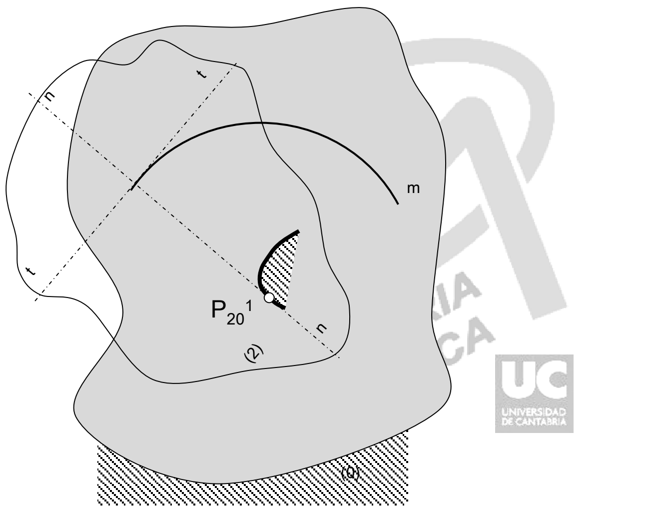
Aspectos previos del teorema de Hartman



25

Cinemática y Dinámica de Máquinas. II.2 Teoría de la curvatura

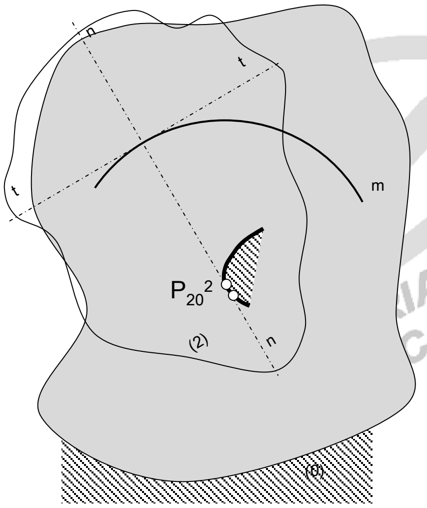
Aspectos previos del teorema de Hartman



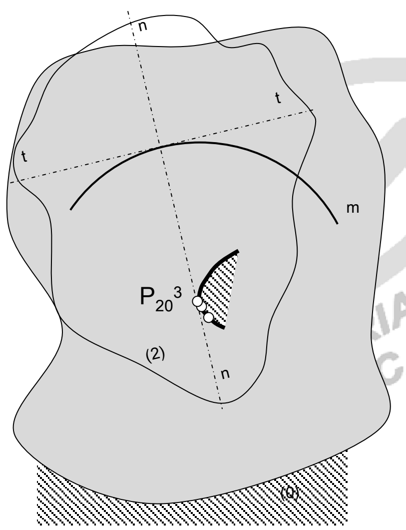
26

R. Sancibrián, Ing. Mecánica

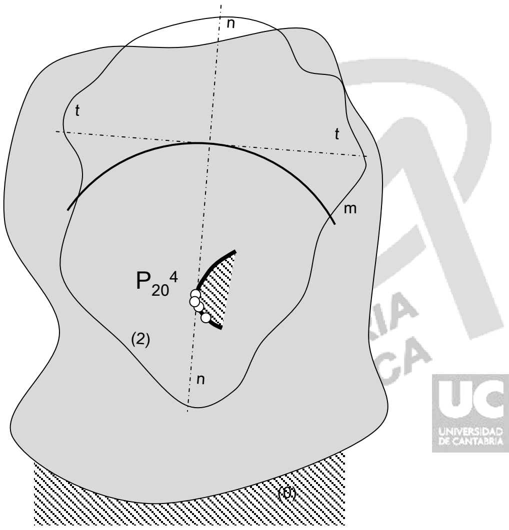
Aspectos previos del teorema de Hartman



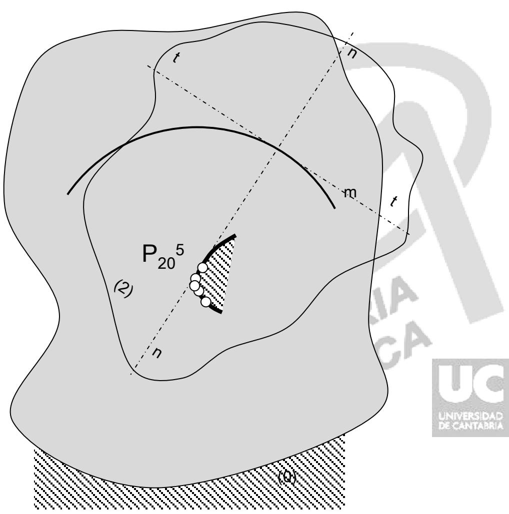
Aspectos previos del teorema de Hartman



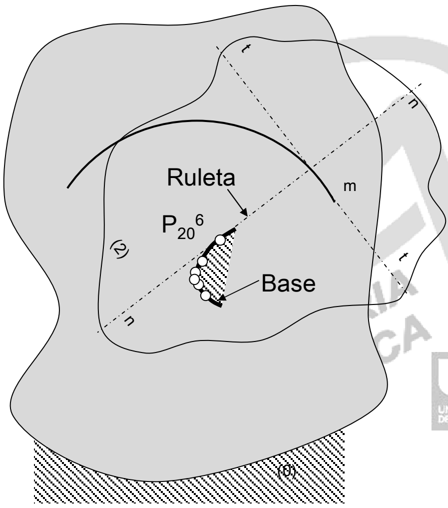
Aspectos previos del teorema de Hartman



Aspectos previos del teorema de Hartman



Aspectos previos del teorema de Hartman



Aspectos previos del teorema de Hartman

Conclusiones sobre el movimiento del plano 2 sobre el plano 0:

- El movimiento está perfectamente definido.
- El polo P_{20} puede determinarse como intersección de dos rectas normales separadas por un ds.
- El polo P_{20} es a la vez el centro de curvatura de la trayectoria para esa posición.
- La base del movimiento del plano 2 sobre el plano 0 coincide con la evoluta de la trayectoria.

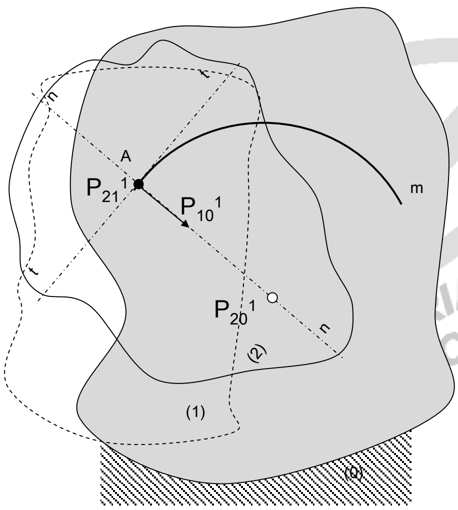
Aspectos previos del teorema de Hartman

Movimiento de los tres planos.

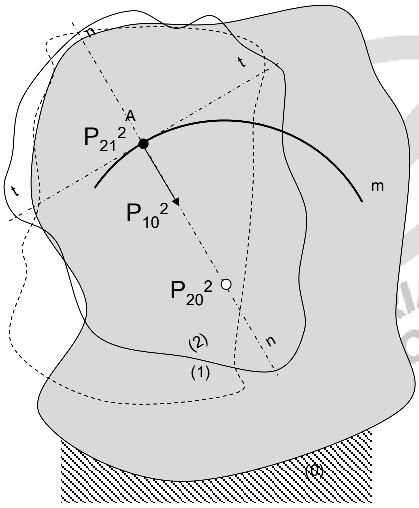
- Ahora hacemos coincidir el movimiento de los tres planos: el plano fijo (1), el móvil (1) y el móvil (2).
- Durante el movimiento se mantendrán las condiciones anteriormente citadas y además el punto de corte de las rectas n y t coincidirá con el punto A.

La última de estas condiciones implica que el polo del movimiento del plano 1 con respecto al (2) coincide con el punto A, ya que tiene que tener las misma velocidad en el plano (1) y (2).

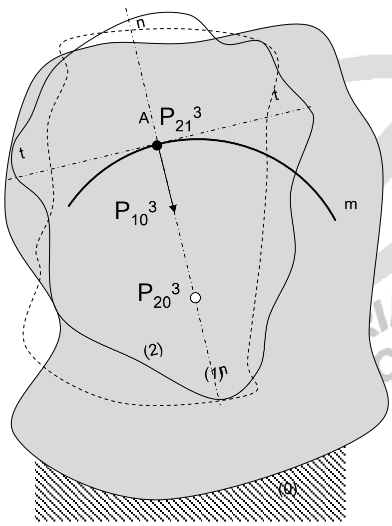
Aspectos previos del teorema de Hartman



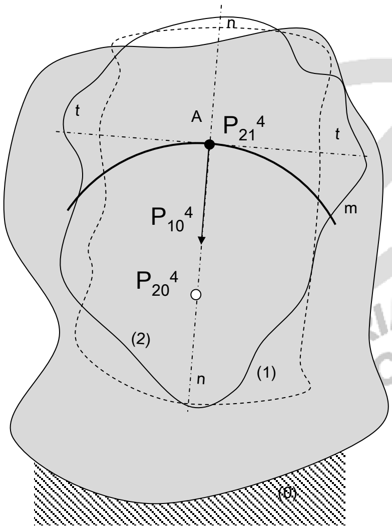
Aspectos previos del teorema de Hartman



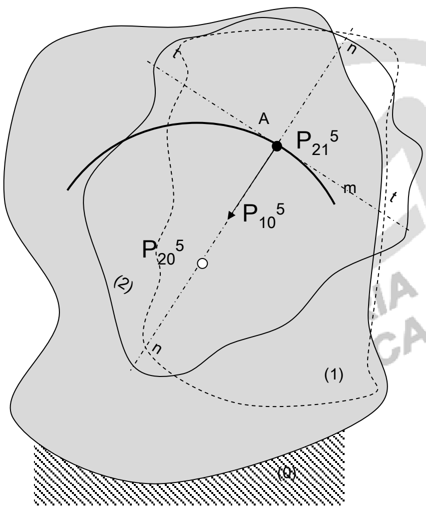
Aspectos previos del teorema de Hartman



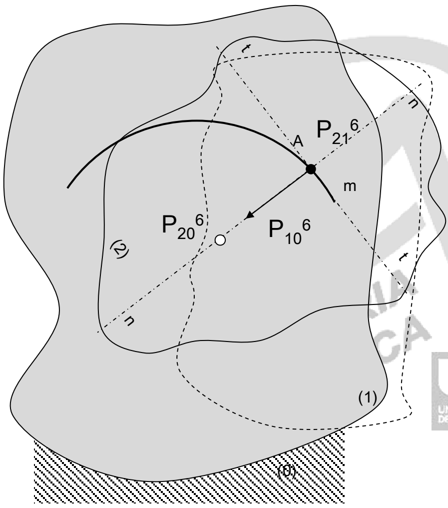
Aspectos previos del teorema de Hartman



Aspectos previos del teorema de Hartman



Aspectos previos del teorema de Hartman



Aspectos previos del teorema de Hartman

Conclusiones generales:

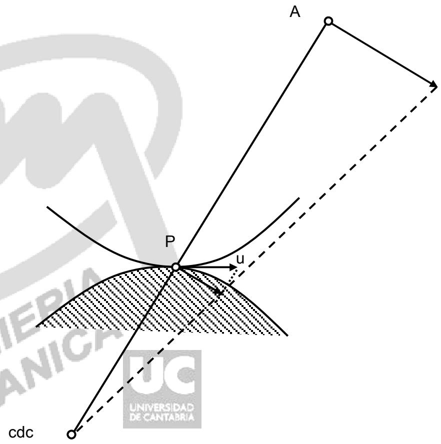
- Como puede observarse, los tres polos: P_{10}, P_{12} y P_{20} están permanentemente alineados (lo que está de acuerdo con el teorema de Aronhold).
- Con los datos del problema, de los tres polos se conoce la posición exacta de dos de ellos (P_{21}, P_{20}) y la dirección en la que se encuentra el tercero (P_{10}).
- Además, el centro de curvatura de la trayectoria que recorre un punto A es el polo del plano asociado a la normal y tangente a la trayectoria en la que se mueve dicho punto.
- La evoluta de la trayectoria es la base del movimiento del plano (2) con respecto al plano (0).

Enunciado y demostración del Teorema de Hartman

Enunciado del teorema de Hartman:

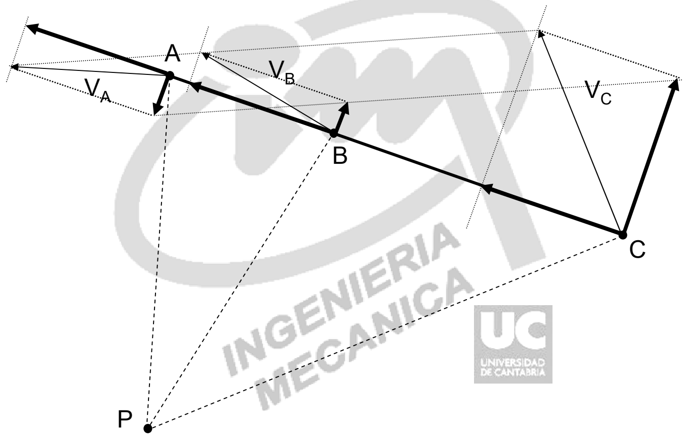
El extremo del vector velocidad de un punto, el centro de curvatura de la trayectoria y la componente paralela a la velocidad del punto del vector velocidad de cambio de polo, están alineados.

Para demostrar este teorema veremos dos demostraciones: A y B. La primera de ellas, la A, es una demostración más intuitiva y la segunda, la B, más matemática.

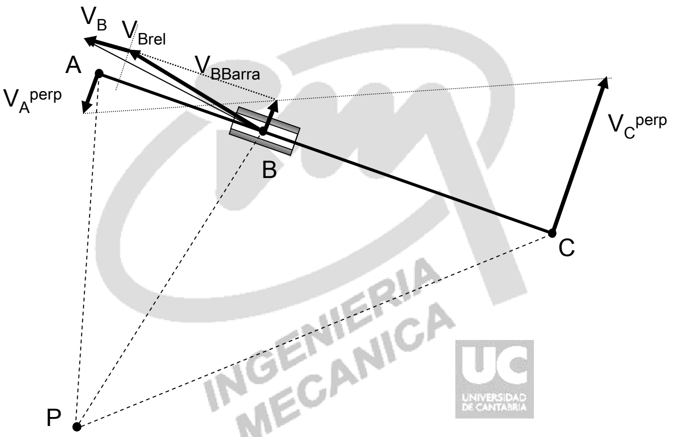


Enunciado y demostración del Teorema de Hartman

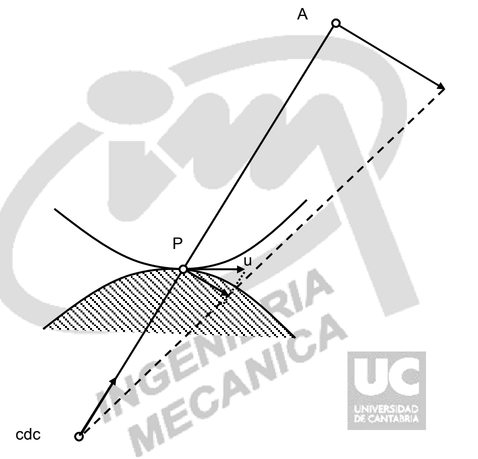
Demostración A



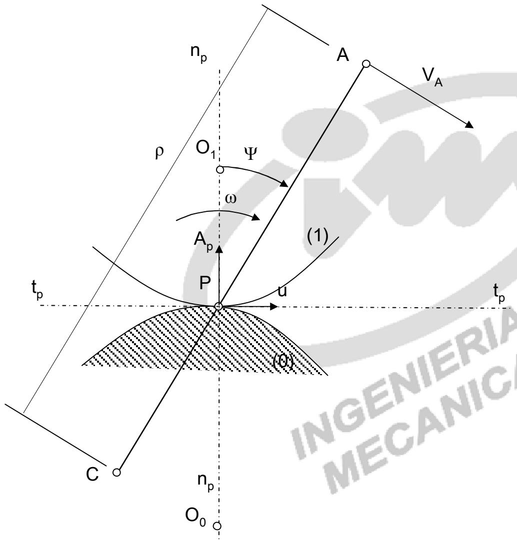
Enunciado y demostración del Teorema de Hartman



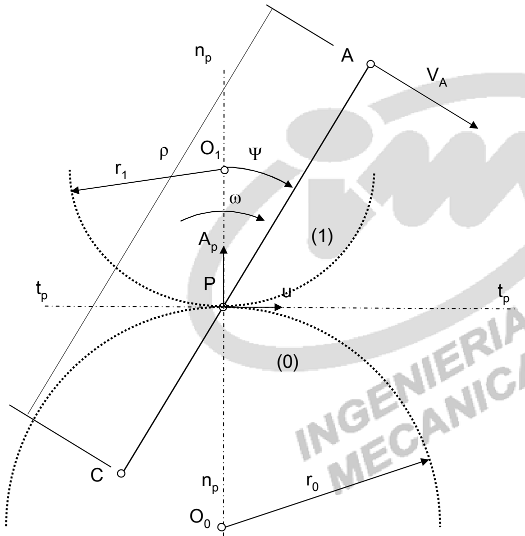
Enunciado y demostración del Teorema de Hartman



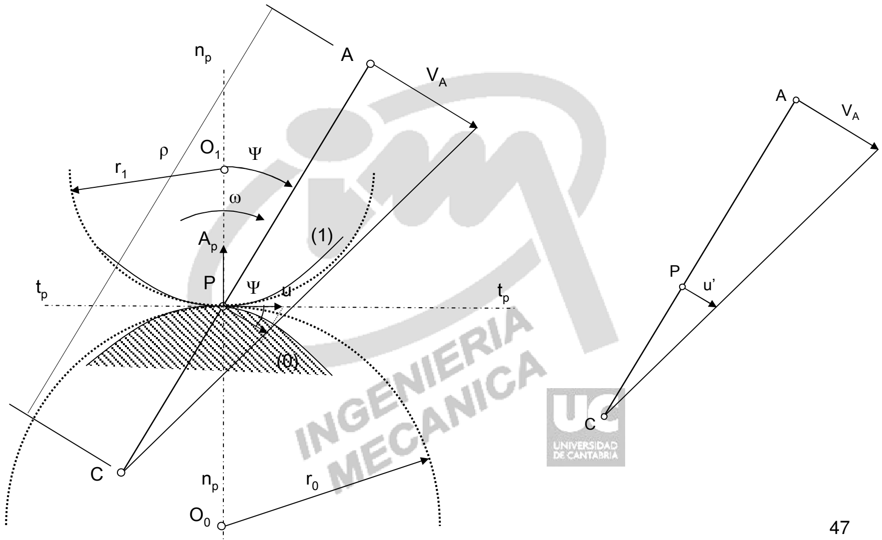
Enunciado y demostración del Teorema de Hartman



Enunciado y demostración del Teorema de Hartman



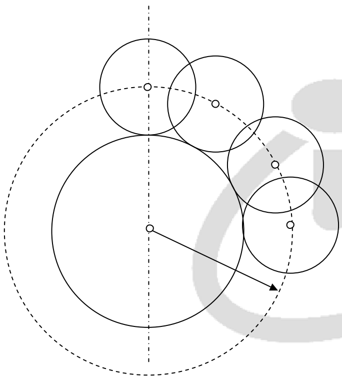
Enunciado y demostración del Teorema de Hartman

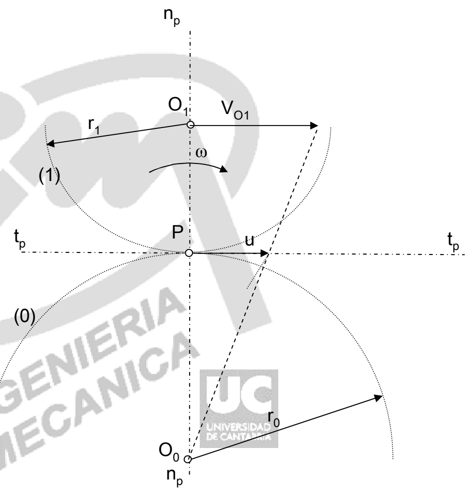


Capítulo II: Tema 2

2. Euler-Savary.
   1. Fórmula de Euler-Savary.
   2. Criterio de signos.

Fórmula de Euler-Savary (E-S)

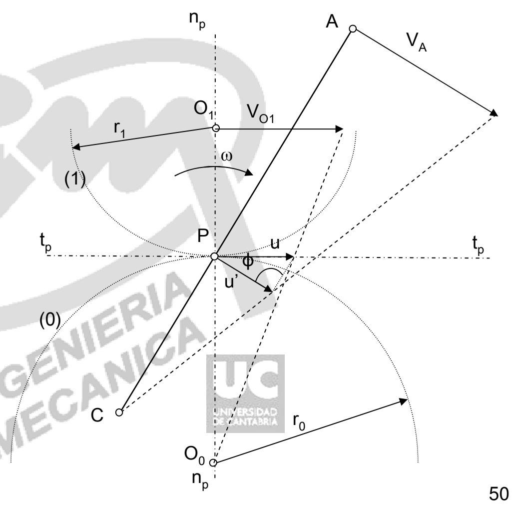




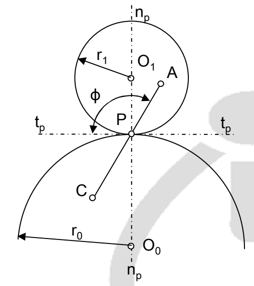
$$\boxed{\frac{1}{r_o}+\frac{1}{r_1}=\frac{\omega}{u}=\text{cte}}$$

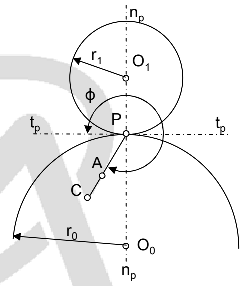
Fórmula de Euler-Savary (E-S)

$$\boxed{\left(\frac{1}{PA}+\frac{1}{CP}\right)\text{sen}\phi=\frac{1}{r_o}+\frac{1}{r_1}=\frac{\omega}{u}=\text{cte}}$$



Criterio de signos

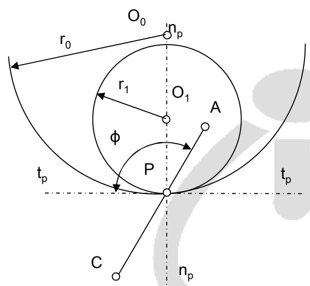


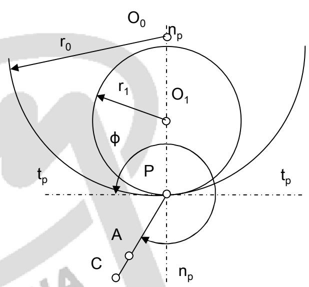


$$\left(\frac{1}{PA}+\frac{1}{CP}\right)\operatorname{sen}\phi=\frac{1}{r_o}+\frac{1}{r_1}$$

$$\left(\frac{1}{-PA}+\frac{1}{CP}\right)\operatorname{sen}\phi=\frac{1}{r_o}+\frac{1}{r_1}$$

Criterio de signos

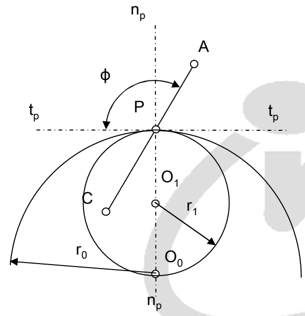


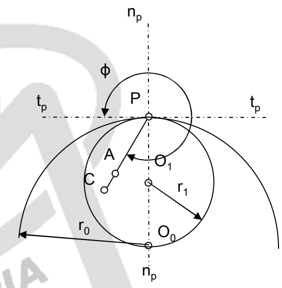


$$\left(\frac{1}{PA}+\frac{1}{CP}\right)\operatorname{sen}\phi=\frac{1}{-r_o}+\frac{1}{r_1}$$

$$\left(\frac{1}{-PA}+\frac{1}{CP}\right)\operatorname{sen}\phi=\frac{1}{-r_o}+\frac{1}{r_1}$$

Criterio de signos





$$\left(\frac{1}{PA}+\frac{1}{CP}\right)\operatorname{sen}\phi=\frac{1}{r_o}+\frac{1}{-r_1}$$

$$\left(\frac{1}{-PA}+\frac{1}{CP}\right)\operatorname{sen}\phi=\frac{1}{r_o}+\frac{1}{-r_1}$$

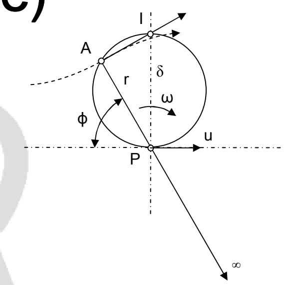
Capítulo II: Tema 2

3. Circunferencia de inflexiones y circunferencia de Bresse.
   1. Circunferencia de las inflexiones.
   2. Circunferencia de Bresse y polo de aceleraciones.

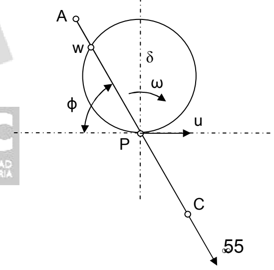
Circunferencia de las inflexiones (circunf. de Hire)

Definición: los puntos del plano móvil (1) que no tienen aceleración normal por estar en un punto de inflexión de la trayectoria (curvatura ∞).

$$r = \delta \operatorname{sen}\phi$$

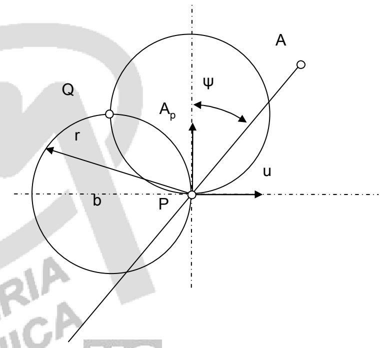


$$PA^2 = WA \cdot CA$$



Circunferencia de Bresse. Polo de aceleraciones

Definición: Es el lugar geométrico de los puntos del plano móvil que tienen aceleración tangencial nula.



$$r = -b \cos\psi$$

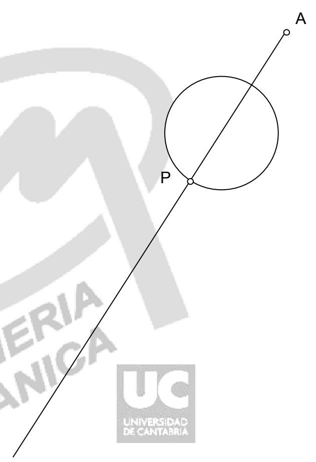
Capítulo II: Tema 2

4. Construcciones gráficas.
   1. Construcción gráfica 1.
   2. Construcción gráfica 2.

Construcción gráfica 1

Enunciado:

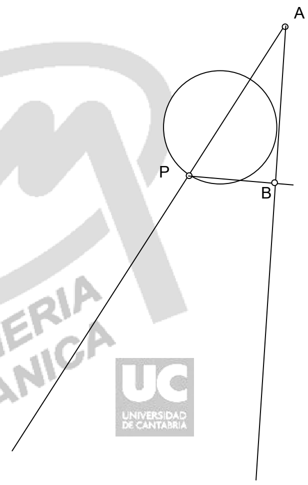
Dada la circunferencia de las inflexiones y conocido el polo, calcular el cdc de la trayectoria del punto A:



Construcción gráfica 1

Paso 1:

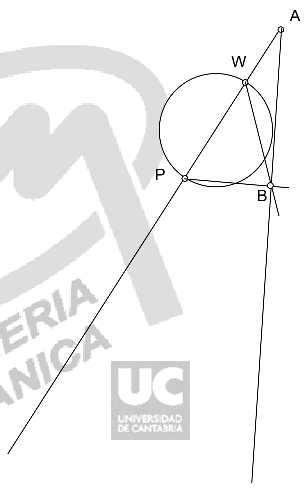
Se trazan por A y B dos rectas arbitrarias que se cortan en el punto B.



Construcción gráfica 1

Paso 2:

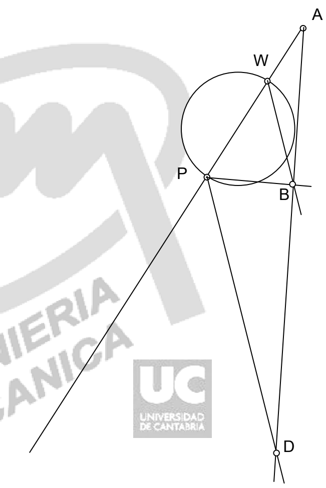
Se obtiene el punto W como intersección de la recta AP con la circunferencia de las inflexiones, y se une dicho punto con el punto B.



Construcción gráfica 1

Paso 3:

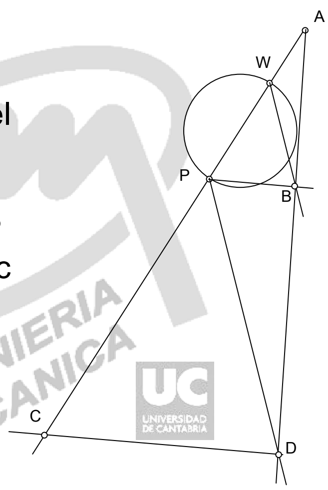
Se traza una recta paralela a WB por el punto P, obteniendo el punto D en el punto de corte con la recta AB.



Construcción gráfica 1

Paso 4:

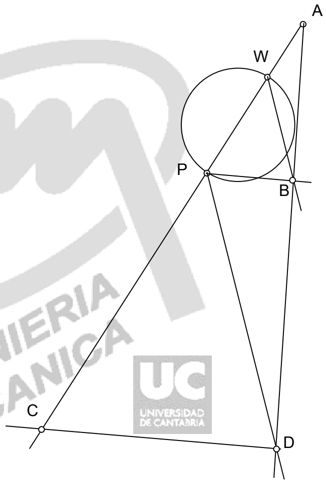
Finalmente se traza por el punto D una recta paralela a la recta PB, y donde corta a la recta AP se obtiene el punto C, cdc de la trayectoria de A.



Construcción gráfica 1

$$\left.\begin{aligned}\frac{PA}{WA}&=\frac{DA}{BA}\\ \frac{CA}{PA}&=\frac{DA}{BA}\end{aligned}\right\}\quad \frac{PA}{WA}=\frac{CA}{PA}$$

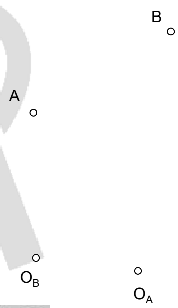
$$\boxed{PA^2 = WA \cdot CA}$$



Construcción gráfica 2

Enunciado:

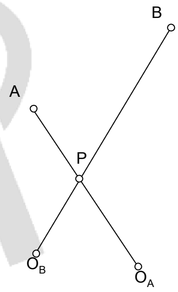
Hallar tres puntos de la circunferencia de las inflexiones, conocidos dos puntos (A y B) y sus respectivos centros de curvaturas (O_A y O_B).



Construcción gráfica 2

Paso 1:

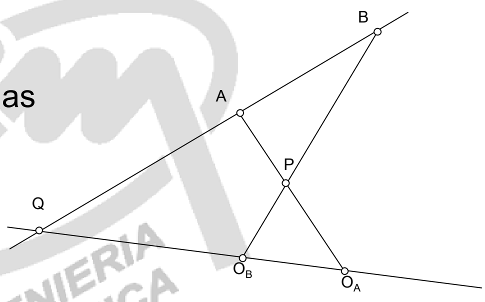
El polo P es el primer punto de la circunferencia de las inflexiones, ya que puede obtenerse directamente en la intersección de las dos rectas que unen los puntos con sus centros de curvatura.



Construcción gráfica 2

Paso 2:

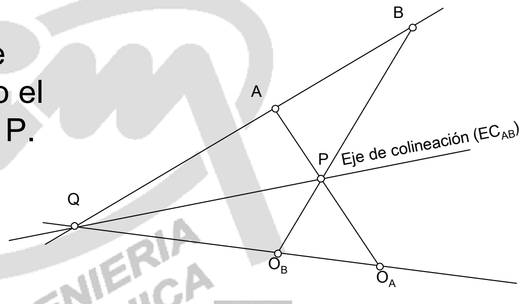
Se obtiene el punto Q como intersección de las rectas AB y O_AO_B.



Construcción gráfica 2

Paso 3:

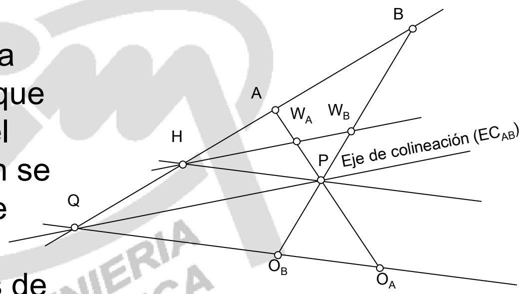
Se obtiene el Eje de Colineación uniendo el punto Q con el polo P.



Construcción gráfica 2

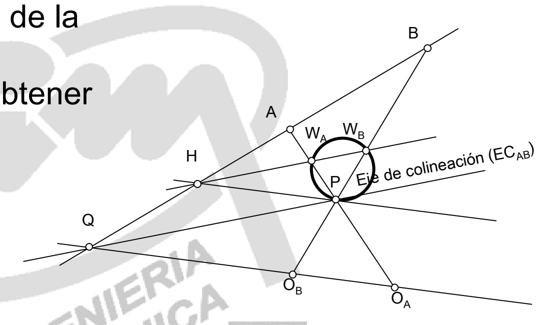
Paso 4:

Se traza por P una recta paralela a O_AO_B hasta que corte a la recta AB en el punto H. A continuación se traza otra recta por este punto paralela al eje de colineación. Los puntos de corte con AO_A y BO_B son puntos de la circunferencia de las inflexiones.

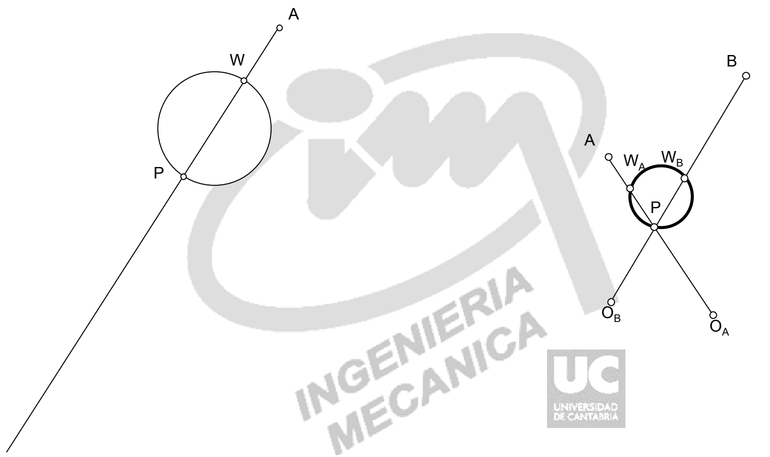


Construcción gráfica 2

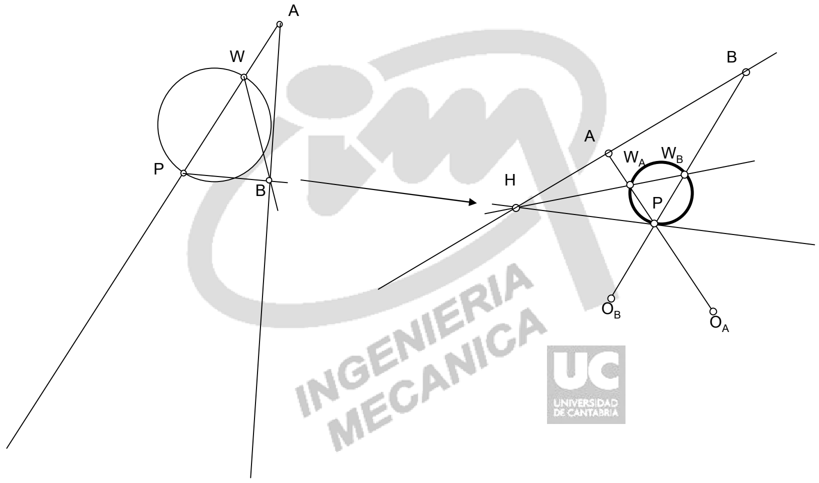
Conocidos tres puntos de la circunferencia de las inflexiones se puede obtener dicha circunferencia.



Construcción gráfica 2

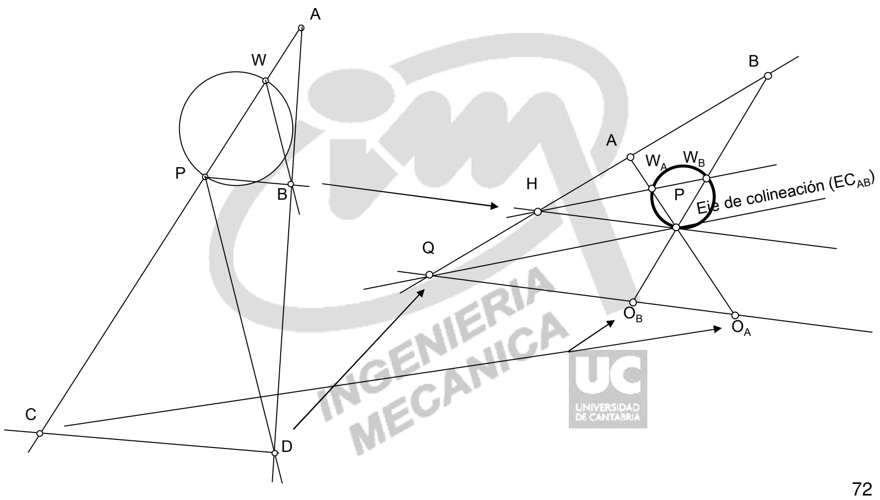


Construcción gráfica 2



Cinemática y Dinámica de Máquinas. II.2 Teoría de la curvatura

Construcción gráfica 2



Capítulo II: Tema 2

5. Teorema de Bobillier y construcción de Aronhold.
    1. Teorema de Bobillier.
    2. Teorema de Aronhold.

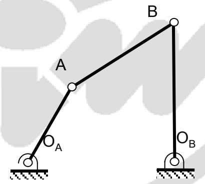
Cinemática y Dinámica de Máquinas. II.2 Teoría de la curvatura

Teorema de Bobillier

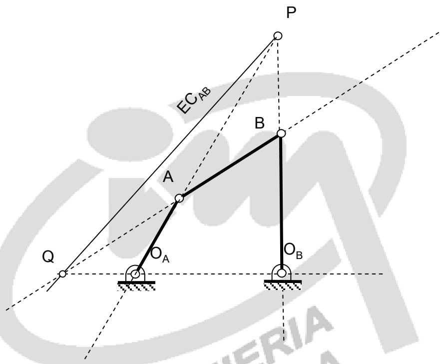
"La bisectriz del ángulo que forman las normales a la trayectoria de dos puntos coincide con la bisectriz del ángulo que forman la dirección de la velocidad de cambio de polo (o tangente polar) y el eje de colineación".

R. Sancibrián, Ing. Mecánica

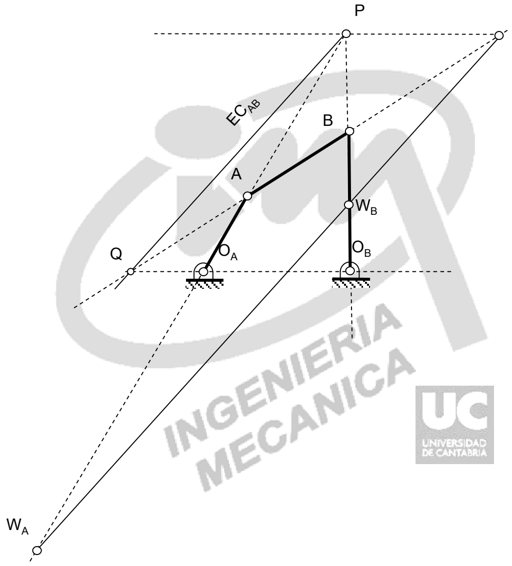
Teorema de Bobillier



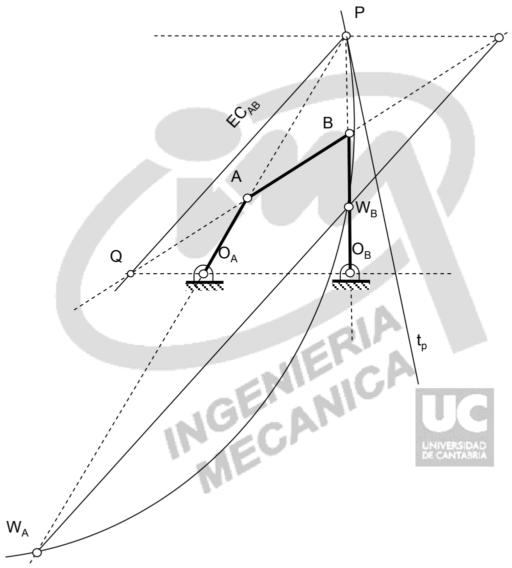
Teorema de Bobillier



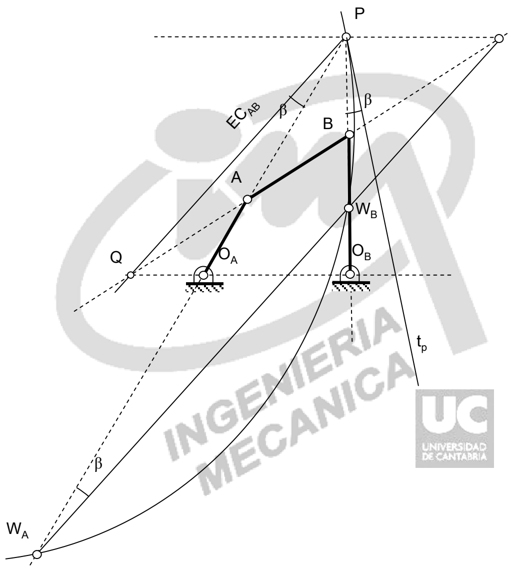
Teorema de Bobillier



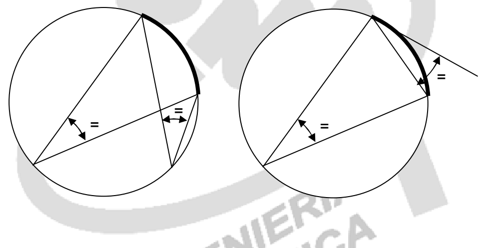
Teorema de Bobillier



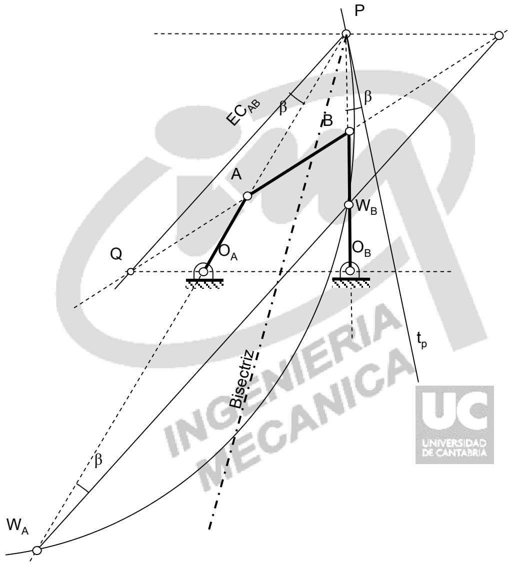
Teorema de Bobillier



Teorema de Bobillier



Teorema de Bobillier

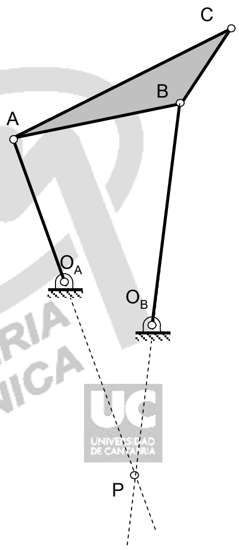


R. Sancibrián, Ing. Mecánica

Construcción de Aronhold

<u>Enunciado:</u> Dados dos puntos, A y B, y sus respectivos centros de curvatura, OA y OB, se desea hallar el centro de curvatura de un tercer punto C del mismo plano móvil.

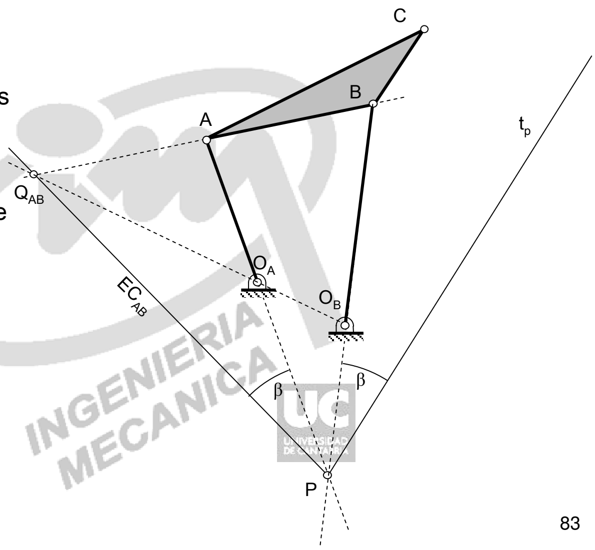
<u>Paso 1:</u> determinamos el polo P.



R. Sancibrián, Ing. Mecánica

Construcción de Aronhold

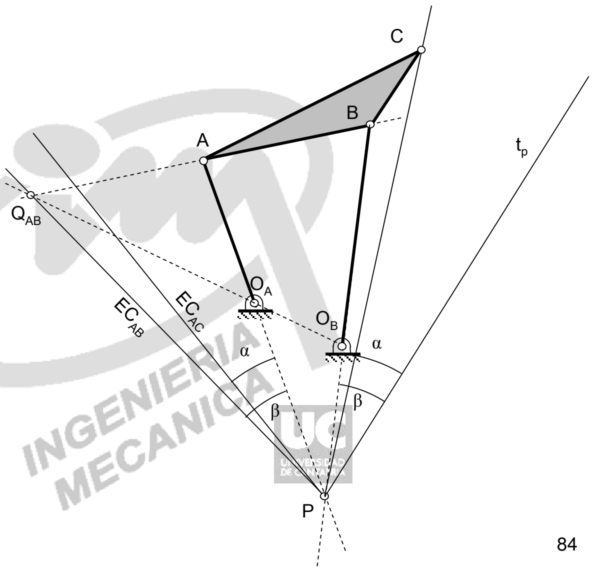
Paso 2: determinamos el eje de colineación con los puntos A y B, y a continuación obtenemos la tangente polar empleando el teorema de Bobillier.



Cinemática y Dinámica de Máquinas. II.2 Teoría de la curvatura

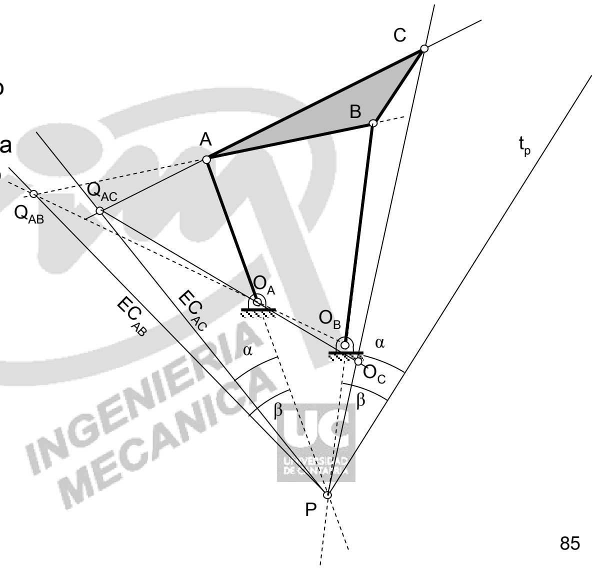
Construcción de Aronhold

Paso 3: Aplicando de nuevo el teorema de Bobillier se determina el eje de colineación AC.



Construcción de Aronhold

Paso 4: Uniendo el punto Q_{AC} con el centro de curvatura de la trayectoria de A de obtiene el centro de curvatura de la trayectoria de C como punto de corte de esta recta con la recta PC.



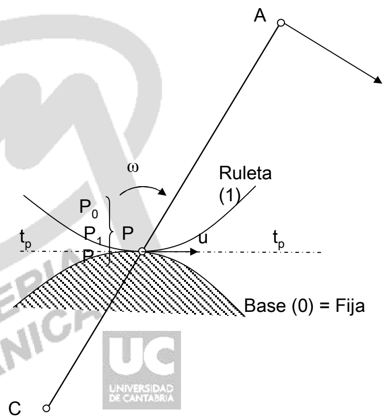
Capítulo II: Tema 2

6. Generalización de la fórmula de Euler-Savary.
   1. Introducción. Perfiles conjugados.
   2. Euler-Savary generalizado.
   3. Fórmula de E-S generalizado.

Introducción. Perfiles conjugados

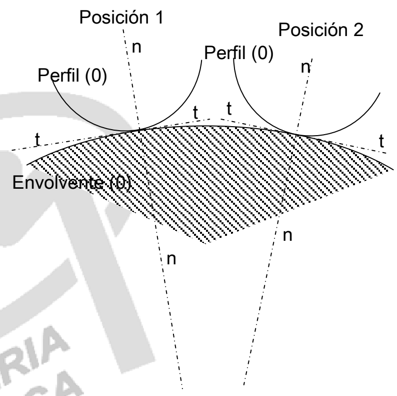
Hasta ahora hemos considerado que la base es una curva fija (nuestro sistema de referencia). Esto implica que en el polo P existan 3 puntos:

- P_0: punto del plano fijo (Base) y por tanto de velocidad nula.
- P_1: punto del plano móvil (ruleta) y velocidad nula por condición de polo.
- P: punto matemático que representa las sucesivas posiciones del polo sobre el plano fijo. Sus velocidad u, se denomina velocidad de cambio de polo.



Introducción. Perfiles conjugados

Ahora consideramos un plano fijo (0) y otro móvil (1) en el que tenemos en todo instante una tangente en común t. Pero a diferencia del caso anterior en el contacto existe rodadura y deslizamiento.



Envolvente: se dice que una curva en un plano fijo es la envolvente de otra curva en el plano móvil (denominada **perfil**) si en todo instante tienen una tangente en común.

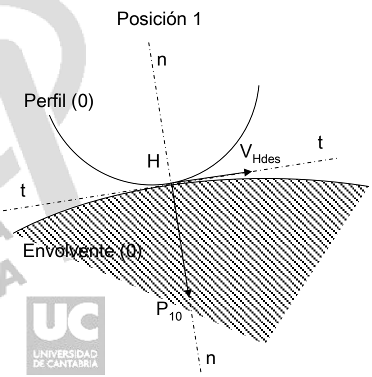
A ambas curvas (perfil y envolvente) se las denomina **perfiles conjugados**.

Introducción. Perfiles conjugados

En el punto H de nuevo existen tres puntos:

- H_0: Perteneciente a la envolvente (plano fijo) y de velocidad nula.
- H_1: Perteneciente al perfil (1) y de velocidad la velocidad de deslizamiento del perfil sobre la envolvente (V_{Hdes}).
- H: Punto matemático de contacto. Su velocidad es distinta de cero.

El polo del movimiento relativo de una curva y su envolvente está situado sobre la normal a la tangente en el punto de contacto (H), ya que la velocidad de H_1 debe estar en la dirección de la tangente (de lo contrario el perfil penetra o se aleja de la envolvente).



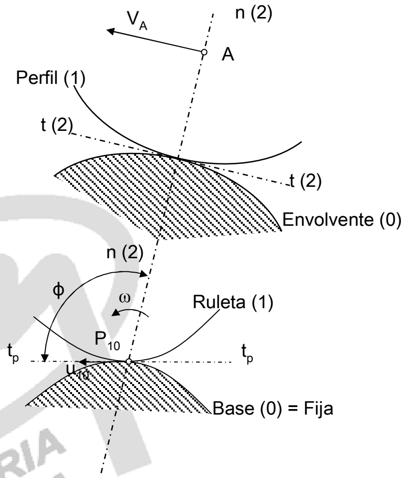
Euler-Savary Generalizado

De forma similar a como se realizó en el teorema de Hartman vamos a considerar 3 planos en el movimiento:

- El plano (0): es el plano fijo y en el se encuentran situados tanto la envolvente como la base.
- El plano (1): es el plano móvil al que pertenecen la ruleta, el perfil y el punto A.
- El plano (2): que es el segundo plano móvil compuesto por la normal (n) y la tangente (t) al perfil y la envolvente en el punto de contacto entre ambas curvas.

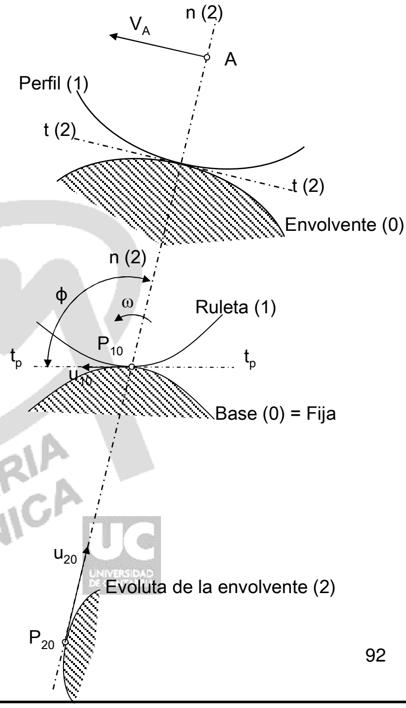
A continuación se seguirán los pasos siguientes:

- Localización de los 3 polos del movimiento relativo.
- Velocidades de cambio de polo en los tres casos.
- Bases y ruletas en los movimientos relativos.



P_{10}: como se ha explicado anteriormente este polo debe estar situado sobre la recta normal en el punto de contacto entre perfil y evolvente. Suponemos su localización así como las curvas Base y Ruleta.

La velocidad de cambio de polo u_{10} debe estar sobre la tangente polar.



P_{20}: Como se ha demostrado (teorema de Hartman) un plano móvil formado por tangente y normal a una trayectoria tiene su polo en el centro de curvatura de la trayectoria. En este caso la trayectoria es la superficie de la curva evolvente.

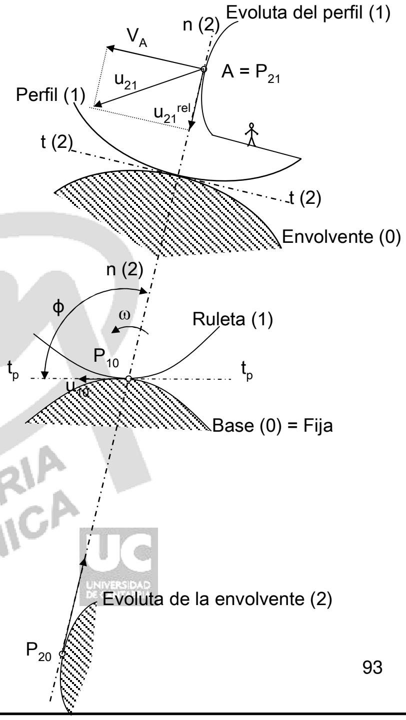
Además, la base del movimiento 20 será la evoluta de la envolvente y por tanto la velocidad de cambio de polo u_{20} tendrá la dirección de la recta normal.

P_{21}: Si invertimos el movimiento y la curva fija es el perfil y la móvil la envolvente, siendo el perfil la trayectoria descrita por el punto de corte entre normal y tangente. Por la misma razón que en el caso anterior el polo P_{21} debe estar situado en el cdc del perfil.

Además, igual que antes, la base del movimiento relativo 21 será la evoluta del perfil y la velocidad de cambio de polo u_{21} será tangente a esta curva.

Sin embargo, esta velocidad será relativa, es decir u_{21}^{rel}, ya que es la velocidad que observa el observador situado sobre el perfil.

Para obtener la velocidad de cambio de polo total es necesario componerla con la velocidad del punto V_A.



Cinemática y Dinámica de Máquinas. II.2 Teoría de la curvatura

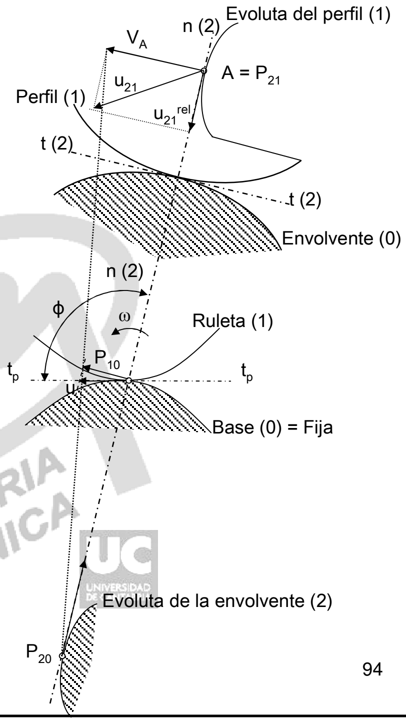
Como puede observarse, P_{20}, P_{21} y P_{10} son tres puntos que se mueven permanentemente alineados.

Por tanto, como se demostró anteriormente, se debe cumplir que los extremos de la componentes de la velocidad perpendiculares a la recta que une los tres puntos deben estar alineadas.

Conclusión:

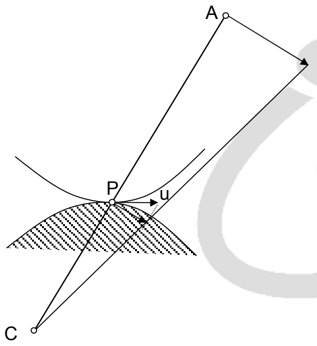
Si los tres puntos están permanentemente alineados se puede aplicar el teorema de Hartman y la fórmula de Euler-Savary. En este caso se denomina a la fórmula: Euler-Savary generalizado:

$$\boxed{\left(\frac{1}{P_{20}P_{10}} + \frac{1}{P_{10}A}\right)\operatorname{sen}\phi = \text{cte}}$$



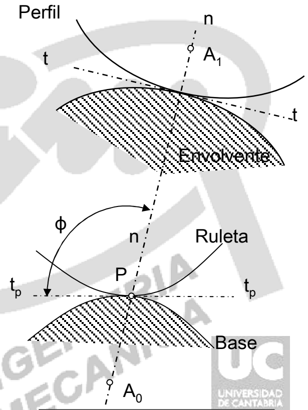
Fórmula de E-S Generalizado

E-S Estándar



$$\left(\frac{1}{\mathrm{PA}}+\frac{1}{\mathrm{CP}}\right)\mathrm{sen}\phi=\mathrm{cte}$$

E-S Generalizado



$$\left(\frac{1}{\mathrm{A_0P}}+\frac{1}{\mathrm{PA_1}}\right)\mathrm{sen}\phi=\mathrm{cte}$$

A_0: cdc de la envolvente.

A_1: cdc del perfil.

P: Polo entre el plano del perfil y la envolvente.