

**UNIVERSIDAD DE CANTABRIA**  
**DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA**  
**ELÉCTRICA Y ENERGÉTICA**

# **F.E.M.S INDUCIDAS EN LOS DEVANADOS DE LAS MÁQUINAS ELÉCTRICAS**

**Miguel Ángel Rodríguez Pozueta**

© 2010, Miguel Ángel Rodríguez Pozueta  
Universidad de Cantabria (España)  
Departamento de Ingeniería Eléctrica y Energética

*Está permitida la reproducción total o parcial de este documento con la condición  
inexcusable de citar su autor y su carácter gratuito.*

*Este documento puede descargarse gratuitamente desde esta Web:*

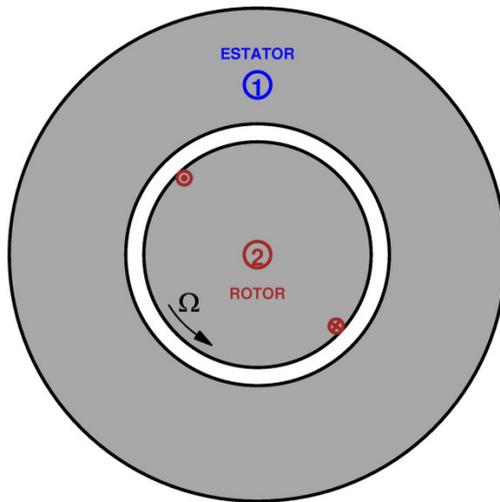
<http://personales.unican.es/rodrigma/primer/publicaciones.htm>

# F.E.M.S INDUCIDAS EN LOS DEVANADOS DE LAS MÁQUINAS ELÉCTRICAS

Miguel Ángel Rodríguez Pozueta

## F.E.M. EN UNA ESPIRA DIAMETRAL

### F.e.m. de rotación



*Fig. 1: Máquina eléctrica con una espira diametral en el rotor*

Considérese una espira de paso diametral situada en el rotor de una máquina eléctrica (Fig. 1). La inducción magnética en el entrehierro,  $B$ , de esta máquina varía con la coordenada angular  $\alpha$  de forma no necesariamente sinusoidal, pero sí simétrica. Por lo tanto, la distribución espacial de  $B$  en el entrehierro es así:

- La distribución de  $B$  en el entrehierro se repite cada par de polos.
- En dos polos consecutivos las distribuciones de  $B$  son similares, pero de signos opuestos.
- Existe un eje de simetría del campo magnético en el centro de cada polo.

De momento se aceptará que la inducción  $B$  no se mueve ni tampoco varía con el tiempo (por ejemplo, campo magnético originado por un devanado del estator alimentado con corriente continua). El rotor gira con una velocidad angular constante de  $\Omega$  rad/s; es decir,  $n$  r.p.m.

El movimiento de la espira en el seno de un campo magnético origina que sobre ella se induzca una f.e.m.  $e_{\text{esp}}$ , la cual se puede obtener mediante la Ley de Faraday:

$$e_{\text{esp}} = - \frac{d \Phi}{d t} \quad (1)$$

$\Phi$  es el flujo de la espira, el cual varía con el tiempo debido al movimiento de la espira (pues la inducción  $B$  no varía con el tiempo). El valor máximo de  $\Phi$  es  $\Phi_{\text{Max}}$ <sup>1</sup>:

<sup>1</sup> En este texto se llama  $\Phi_{\text{Max}}$  al flujo por polo debido a la totalidad de la inducción magnética del entrehierro,  $\Phi_M$  al flujo por polo debido al primer armónico de la inducción magnética en el entrehierro y  $\Phi_{hM}$  al flujo por polo producido por el armónico en el espacio de orden  $h$  de la inducción magnética en el entrehierro.

$$\Phi_{\text{Max}} = t_p l_{\delta} B_{\text{med}} = t_p l_{\delta} (\alpha_i B_{\text{Max}}) \quad (2)$$

$$\alpha_i = \frac{B_{\text{med}}}{B_{\text{Max}}} \leq 1; \quad t_p = \frac{\pi d}{2 p}$$

$B_{\text{Máx}}$  es el valor máximo de la inducción magnética en el entrehierro y  $B_{\text{med}}$  es su valor medio a lo largo de un polo.  $t_p$  es el paso polar medido como longitud de arco de circunferencia.  $d$  y  $l_{\delta}$  son el diámetro y la longitud axial efectiva del entrehierro, respectivamente. Si la inducción  $B$  se distribuye de forma perfectamente sinusoidal a lo largo del entrehierro, el parámetro  $\alpha_i$  vale  $2/\pi = 0,637$ .

La f.e.m. inducida en la espira, calculada mediante la relación (1), tiene la frecuencia  $f$  y el periodo  $T$ :

$$f = \frac{n p}{60} = \frac{\Omega p}{2 \pi} \quad (3)$$

$$T = \frac{1}{f}$$

Se puede demostrar que la variación de esta f.e.m. ( $e_{\text{esp}}$ ) a lo largo del tiempo tiene la misma forma que la variación de la inducción  $B$  en el espacio (es decir, la variación de  $B$  según la coordenada angular  $\alpha$  a lo largo del entrehierro).

Seguidamente se va a justificar esta propiedad de la f.e.m. de rotación en una espira diametral.

Primero es preciso que señalar que en una espira de paso diametral, por simetría, sus dos lados están sometidos a la acción de inducciones magnéticas de igual valor absoluto, pero de signos opuestos, que inducen en ellos f.e.m.s de igual valor y sentidos opuestos. Esto hace que en la espira ambas f.e.m.s queden conectadas en serie y, por consiguiente, la f.e.m. de rotación de la espira  $e_{\text{esp}}$  sea igual al doble de la inducida en uno de sus lados.

La f.e.m. de uno de los lados de una espira es proporcional a su velocidad y a la inducción magnética  $B$  a la que está sometido. Si la espira gira a velocidad constante, la f.e.m. de uno de sus lados va tomando en cada instante un valor proporcional a la inducción magnética en el entrehierro  $B$  que en ese momento lo afecta. Esto hace que, a medida que la espira se mueve, uno de sus lados vaya "viendo" los diferentes valores que  $B$  tiene a lo largo del entrehierro y su f.e.m. vaya variando en el tiempo de la misma manera que la variación de la inducción  $B$  en el espacio a lo largo del entrehierro (es decir, la variación de  $B$  con la coordenada angular  $\alpha$ ). Como la f.e.m. de una espira diametral es el doble de la f.e.m. de uno de sus lados, se deduce finalmente que la f.e.m. de una espira diametral varía a lo largo del tiempo de la misma forma que la inducción magnética en el entrehierro  $B$  varía en función de la coordenada angular  $\alpha$ .

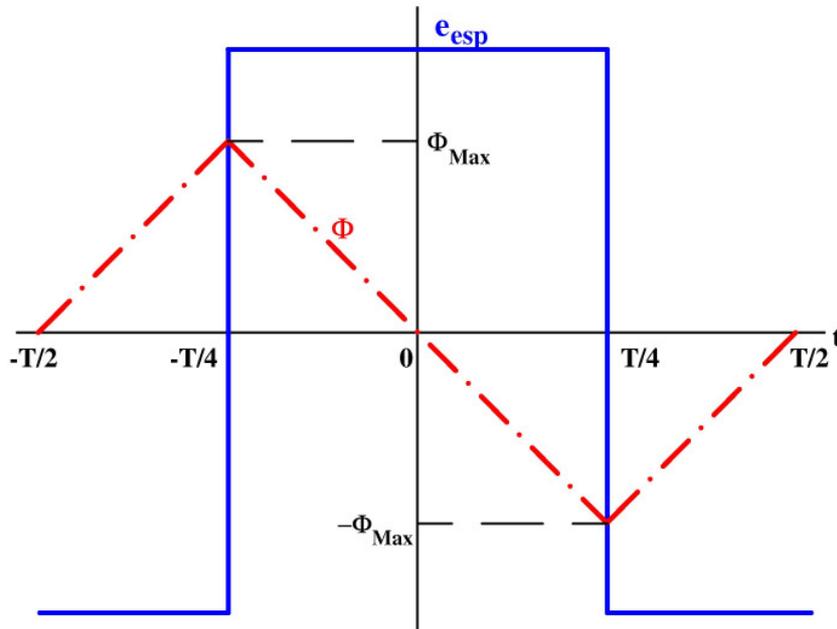
Esto es cierto para la f.e.m. de rotación de una espira de paso diametral, pero no para la f.e.m. de rotación de una fase completa (como se verá más adelante, la f.e.m. en una fase varía en el tiempo de una manera más próxima a la sinusoide que la variación de la inducción  $B$  en el espacio según la coordenada angular  $\alpha$ ). En efecto, en una fase hay espiras colocadas en ranuras diferentes y sometidas, por lo tanto, a la acción de inducciones magnéticas diferentes. Esto hace que la f.e.m. de la fase sea la consecuencia de la acción simultánea de los valores de la inducción magnética  $B$  en varios puntos del entrehierro y ya no resulta que esta f.e.m. tenga la misma forma en el tiempo que la inducción del entrehierro  $B$  en el espacio.

Al ser las ondas de B y de  $e_{\text{esp}}$  simétricas su valor medio es nulo. Sin embargo, se puede definir la f.e.m. media en un semiperiodo  $E_{\text{esp med}}$  de la siguiente manera:

$$E_{\text{esp med}} = \frac{1}{T/2} \int_{-T/4}^{T/4} e_{\text{esp}} dt \quad (4)$$

En la expresión (4) se ha tomado el origen de tiempos en el momento en que la f.e.m.  $e_{\text{esp}}$  es máxima positiva, por lo que el semiperiodo considerado va desde los instantes  $-T/4$  y  $+T/4$  y dura, evidentemente,  $T/2$ . Teniendo en cuenta la Ley de Faraday (1), de la expresión (4) se deduce que

$$E_{\text{esp med}} = \frac{1}{T/2} \left[ \int_{-T/4}^{T/4} -\frac{d\Phi}{dt} dt \right] = \frac{2}{T} [\Phi|_{t=-T/4} - \Phi|_{t=+T/4}] \quad (5)$$



*Fig. 2: Ejemplo de ondas de flujo y de f.e.m. en una espira diametral*

Dadas las simetrías de las ondas de B y de  $e_{\text{esp}}$ , si en el instante inicial  $e_{\text{esp}}$  es máximo, en los instantes  $-T/4$  y  $+T/4$  toma valores nulos. Por lo tanto, teniendo en cuenta la relación (1), esto significa que en los instantes  $-T/4$  y  $+T/4$  el flujo  $\Phi$  tiene derivada nula (en la Fig. 2 se muestra un ejemplo de ondas de flujo y de f.e.m. simétricas, aunque tengan una forma bastante distinta a la sinusoidal que es a la que se acercan estas ondas en una máquina real). Esto es, en dichos instantes  $\Phi$  alcanza los valores máximo ( $+\Phi_{\text{Max}}$ ) y mínimo ( $-\Phi_{\text{Max}}$ ). Además, al tener la f.e.m.  $e_{\text{esp}}$  signo positivo entre  $-T/4$  y  $+T/4$ , la relación (1) indica que el flujo  $\Phi$  es decreciente en este intervalo. De todo lo anterior se deduce que el flujo toma su valor máximo ( $+\Phi_{\text{Max}}$ ) en el instante  $-T/4$  y mínimo ( $-\Phi_{\text{Max}}$ ) en el instante  $+T/4$ :

$$E_{\text{esp med}} = \frac{2}{T} [\Phi_{\text{Max}} - (-\Phi_{\text{Max}})] = \frac{2}{T} [2 \Phi_{\text{Max}}] \quad (6)$$

$$\boxed{E_{\text{esp med}} = 4 f \Phi_{\text{Max}}} \quad (7)$$

La expresión (7) es válida cualquiera que sea la forma de la onda de  $e_{\text{esp}}$ , siempre que sea simétrica. El valor eficaz de esta f.e.m.,  $E_{\text{esp}}$ , se puede calcular utilizando el factor de forma  $k_f$  que se define así:

$$k_f = \frac{\text{Valor eficaz de la f.e.m. de la espira}}{\text{Valor medio de la f.e.m. de la espira}} = \frac{E_{\text{esp}}}{E_{\text{esp med}}} \quad (8)$$

Como en una espira diametral las ondas de  $e_{\text{esp}}$  en el tiempo y de B en el espacio son iguales, se tiene también que

$$k_f = \frac{\text{Valor eficaz de B}}{\text{Valor medio de B}} \quad (9)$$

Recuérdese que la relación (9) sólo es aplicable para la f.e.m. de rotación de una espira de paso diametral (que es cuando las ondas de f.e.m. en el tiempo y de inducción B en el espacio son iguales).

A partir de las relaciones (7) y (8) se tiene que

$$E_{\text{esp}} = 4 k_f f \Phi_{\text{Max}} \quad (10)$$

Si la onda de B es sinusoidal sucede que el factor de forma  $k_f$  vale 1,11. De ahí se deduce la definición del factor relativo de forma  $K_f$ :

$$K_f = \frac{1,11}{k_f}$$

En el caso que se ha estudiado hasta ahora aparece f.e.m. inducida en la espira porque su flujo varía en el tiempo debido a su movimiento, no a que la inducción B sea función del tiempo. Por esta razón se dice que esta f.e.m. inducida es una f.e.m. de rotación. Realmente para que aparezca una f.e.m. de rotación en la espira lo que debe suceder es que exista un movimiento relativo de la espira con respecto al campo magnético. Esto sucede cuando la espira se mueve y el campo está inmóvil, que es lo que se ha considerado hasta ahora; pero también aparece f.e.m. de rotación cuando un campo giratorio actúa sobre una espira inmóvil o cuando ambos, la espira y el campo magnético, giran con velocidades distintas y, por lo tanto, existe una velocidad relativa entre ambos.

### F.e.m. de transformación

Considérese ahora que la espira está inmóvil y que la inducción B varía con el tiempo (además de variar en el espacio según la coordenada angular  $\alpha$ ). También aparecerá ahora una f.e.m. inducida sobre la espira que se denomina f.e.m. de transformación (es debida a la variación temporal de B y no al movimiento). La variación temporal de B origina que el flujo en la espira varíe en el tiempo entre los valores  $-\Phi_{\theta\text{Max}}$  y  $+\Phi_{\theta\text{Max}}$ , los cuales dependen de la posición en la que está detenida la espira. Así, si la distribución espacial de B es perfectamente sinusoidal y  $\theta$  es el ángulo eléctrico entre la posición donde B alcanza su valor máximo y el eje magnético (o eje polar) de la espira, sucede que

$$\Phi_{\theta\text{Max}} = \Phi_{\text{Max}} \cdot \cos \theta \quad (11)$$

En la expresión anterior  $\Phi_{\text{Max}}$  es el valor del flujo por polo en el momento en el que la inducción magnética  $B$  es máxima en el tiempo.

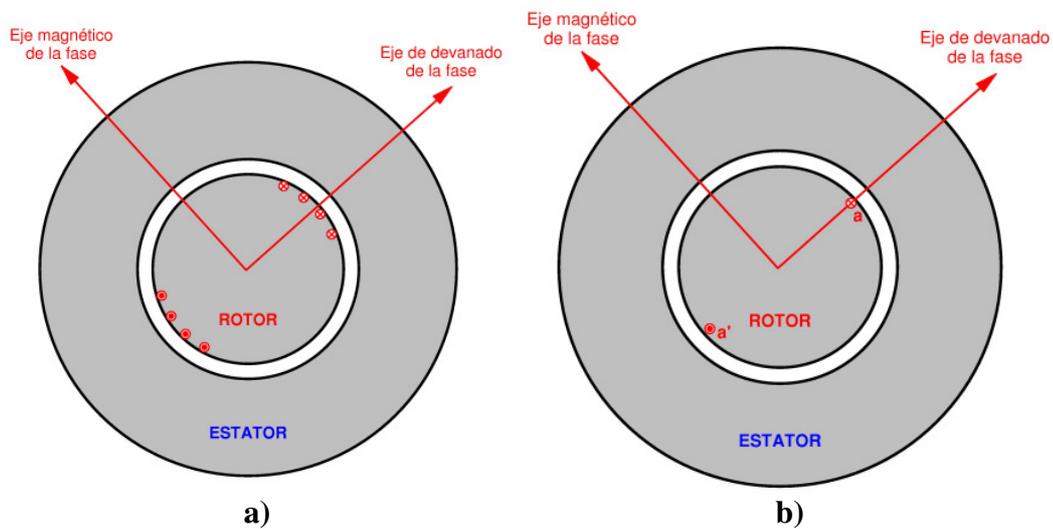
Sea cual sea la forma de la onda espacial de  $B$  se puede aplicar una relación similar a la (10) para calcular la f.e.m. de transformación:

$$E_{\text{esp}} = 4 k_f f \Phi_{\theta\text{Max}}$$

Sin embargo, hay que tener en cuenta que ahora las ondas de  $e_{\text{esp}}$  y de  $B$  no son de igual forma. Por lo tanto, para el cálculo de la f.e.m. de transformación el factor de forma  $k_f$  se puede obtener a partir de la relación (8), pero no de la relación (9). La frecuencia  $f$  ahora es la misma frecuencia a la que varía la inducción  $B$  con el tiempo.

Es posible que se produzcan a la vez f.e.m.s de rotación y de transformación sobre una espira diametral cuando la inducción magnética en el entrehierro  $B$  varía con el tiempo y simultáneamente exista una velocidad relativa de giro del devanado con respecto al campo magnético.

### F.E.M. EN UNA FASE



*Fig. 3: a) Ejes de simetría de una fase; b) Espira media (a-a') de la fase de la Fig. 3a.*

Ahora se va a considerar no una sola espira diametral, sino una fase completa situada en el rotor y con bobinas distribuidas que pueden tener el paso acortado. Esta fase tiene  $N$  espiras efectivas en serie (espiras de una rama en paralelo) y su factor de bobinado es  $\xi_b$ .

En una fase hay espiras colocadas en ranuras diferentes y, por lo tanto, sometidas en un momento dado a la acción de flujos magnéticos diferentes. Se puede demostrar que el valor eficaz,  $E$ , de la f.e.m total de esta fase se obtiene así:

$$E = N \xi_b E_{\text{esp}} \quad (12)$$

En esta expresión  $E_{\text{esp}}$  es la f.e.m. en la espira diametral media de la fase. Es decir, es la f.e.m. en una espira de paso diametral cuyos ejes de simetría coinciden con los ejes de simetría (magnético (o polar) y de devanado (o interpolar)) de la fase completa (Fig. 3).

Luego, la f.e.m. de rotación inducida sobre una fase vale:

$$E = 4 k_f N \xi_b f \Phi_{\text{Max}} \quad (13)$$

Que en el caso sinusoidal da lugar a ( $k_f = 1,11$ ;  $4 k_f = 4,44$ ):

$$E = 4,44 N \xi_b f \Phi_{\text{Max}} \quad (14)$$

Como se anticipó en un apartado anterior y se comprobará más adelante al analizar el contenido armónico de esta f.e.m., a diferencia de lo que sucede en la f.e.m. de rotación de una espira diametral, ahora ya no se verifica que la f.e.m. de rotación de una fase varíe en el tiempo de la misma manera que la inducción magnética del entrehierro B varía en el espacio según la coordenada angular  $\alpha$ . De hecho, la f.e.m. de fase va a ser una onda más sinusoidal que la inducción del entrehierro B, lo cual sirve para conseguir un funcionamiento mejor de la máquina.

En el caso de la f.e.m. de transformación se utilizarían las expresiones (13) y (14) con  $\Phi_{\theta\text{Max}}$  (flujo máximo en el tiempo de la espira diametral media de la fase) en lugar del flujo por polo  $\Phi_{\text{Max}}$ . Cuando la inducción magnética B varía sinusoidalmente a lo largo del entrehierro el valor de  $\Phi_{\theta\text{Max}}$  se obtiene mediante la relación (11).

## ARMÓNICOS TEMPORALES DE LA F.E.M. INDUCIDA

### Armónicos de la f.e.m. de rotación en una fase debidos a los armónicos espaciales de la onda de inducción B en el entrehierro

Sea una fase situada en el rotor sobre la que actúa una inducción B que en el entrehierro varía de una forma no perfectamente sinusoidal y, en consecuencia, existen armónicos espaciales de B. Por otra parte, la inducción B es inmóvil y, además, no varía con el tiempo. Por lo tanto, sobre la fase aparece una f.e.m. de rotación cuyo valor eficaz se puede calcular mediante la relación (13). Pero también es posible analizar esta f.e.m. como la suma de las f.e.m.s inducidas por cada uno de los armónicos espaciales de la inducción B.

El armónico h de la distribución espacial de la inducción magnética en el entrehierro tiene un valor máximo  $B_{hM}$  y da lugar a un flujo por polo  $\Phi_{hM}$  así:

$$\Phi_{hM} = \frac{d \cdot l_\delta}{h \cdot p} B_{hM} \quad (15)$$

El armónico h de la inducción magnética B es una onda sinusoidal de  $h \cdot p$  pares de polos que induce sobre la fase una f.e.m. de frecuencia  $f_h$  y de valor eficaz  $E_h$  que se calculan mediante expresiones análogas a la (3) y a la (14), respectivamente:

$$f_h = \frac{n h p}{60} = \frac{\Omega h p}{2\pi} \quad (16)$$

$$f_h = h \cdot f_1 \quad (17)$$

$$E_h = 4,44 N \xi_{bh} f_h \Phi_{hM} \quad (18)$$

Mediante la relación (16) se aprecia que cada armónico  $h$  de la distribución espacial de  $B$  da lugar a un armónico en el tiempo de la f.e.m. de frecuencia  $f_h$ . Además, en este caso, la relación (17) indica que la frecuencia  $f_h$  es  $h$  veces superior a la frecuencia ( $f_1$ ) del primer armónico de f.e.m. Luego, el armónico espacial de orden  $h$  de la inducción  $B$  origina un armónico temporal de f.e.m. cuyo orden también es  $h$ .

La expresión (18) muestra que los armónicos  $h$  de la inducción  $B$  distintos al fundamental dan lugar a f.e.m.s pequeñas, incluso aunque su valor máximo  $B_{hM}$  no sea pequeño. En efecto, de acuerdo con la relación (18), el valor eficaz  $E_h$  depende del factor de bobinado  $\xi_{bh}$  que, normalmente, será bastante menor que el correspondiente al primer armónico,  $\xi_b$ . Por lo tanto, utilizando un devanado que dé lugar a factores de devanado  $\xi_{bh}$  adecuados se consigue reducir el contenido armónico de la f.e.m., logrando así que ésta tenga una forma más sinusoidal en el tiempo que la que tiene la distribución espacial de la inducción magnética  $B$  en el entrehierro.

En el caso más general, la f.e.m de rotación se produce cuando ambos, la fase y el campo magnético, giran con distintas velocidades. Si el armónico  $h$  de la inducción  $B$  gira con velocidad  $n_h$  r.p.m (o  $\Omega_h$  rad/s), la velocidad relativa de la fase con respecto al campo es  $(n-n_h)$  (o  $(\Omega-\Omega_h)$ ). Luego, en este caso la expresión (16) se convierte en:

$$f_h = \frac{(n - n_h) h p}{60} = \frac{(\Omega - \Omega_h) h p}{2\pi} \quad (19)$$

y la expresión (17) sólo se cumplirá si todos los armónicos de  $B$  giran con la misma velocidad (todas las  $n_h$  (o todas las  $\Omega_h$ ) son iguales).

Observando la relación (19) se comprueba que se pueden dar los siguientes casos:

1. *Campo magnético en el entrehierro inmóvil (todas las velocidades  $n_h$  son nulas) y devanado girando a la velocidad  $n$ .* Este es el caso estudiado inicialmente y se comprobó que cada armónico espacial de  $B$  da lugar a un armónico temporal de la f.e.m. cuya frecuencia  $f_h$  viene dada por la expresión (17).
2. *Devanado inmóvil ( $n = 0$ ) y campo magnético del entrehierro giratorio de forma que todos los armónicos espaciales de  $B$  giran a igual velocidad (para todos los armónicos de  $B$  se verifica que  $n_h = n_1$ ).* Al igual que en el caso anterior, cada armónico espacial de  $B$  da lugar a un armónico temporal de la f.e.m. cuya frecuencia  $f_h$  también viene dada por la relación (17).
3. *Devanado inmóvil ( $n = 0$ ) y campo magnético del entrehierro giratorio originado por un devanado polifásico con armónicos espaciales alimentado por un sistema polifásico de corrientes perfectamente sinusoidales en el tiempo (Teorema de Ferraris).* En este caso los armónicos espaciales de  $B$  giran con velocidades diferentes, de forma que

$$n_h = \frac{n_1}{h} \quad (20)$$

Mediante la relación (19) se comprueba que ahora todos los armónicos espaciales de B generan f.e.m.s de la misma frecuencia (todas las frecuencias  $f_h$  valen  $f_h = f_1$ ). Por lo tanto, no hay armónicos temporales de f.e.m. La f.e.m. total es una senoide perfecta debida a la suma de las f.e.m.s de igual frecuencia que inducen los armónicos espaciales de B.

4. *Devanado girando ( $n \neq 0$ ) y campo magnético del entrehierro giratorio originado por un devanado polifásico con armónicos espaciales alimentado por un sistema polifásico de corrientes perfectamente sinusoidales en el tiempo (Teorema de Ferraris).* Este caso corresponde a la misma situación que el anterior cuando el rotor ya no está inmóvil, sino que gira con una velocidad  $n$ . Ahora cada armónico espacial de B da lugar a un armónico temporal de la f.e.m. cuya frecuencia  $f_h$  viene dada por la relación (19), pero no se verifican ni la relación (17) ni la (20). (Ahora, ya no sucede que todos los armónicos espaciales de B dan lugar a f.e.m.s de igual frecuencia (ya no ocurre que  $f_h = f_1$ ) y, por lo tanto, hay armónicos temporales de f.e.m.).
5. *Devanado inmóvil ( $n = 0$ ) y campo magnético del entrehierro giratorio de forma que los armónicos espaciales de B giran a velocidades  $n_h$  no contempladas en los casos anteriores.* En este caso, cada armónico espacial de B da lugar a un armónico temporal de la f.e.m. cuya frecuencia  $f_h$  viene dada por la relación (19), pero no se verifica la relación (17).
6. *Devanado girando ( $n \neq 0$ ) y campo magnético del entrehierro giratorio con velocidad diferente a la del devanado ( $n_h \neq 0$  y  $n_h \neq n$ ).* Al igual que en el caso anterior, cada armónico espacial de B da lugar a un armónico temporal de la f.e.m. cuya frecuencia  $f_h$  viene dada por la relación (19), pero no se verifica la relación (17). Un caso particular de éste es cuando el campo magnético giratorio es debido a un devanado polifásico alimentado con corrientes polifásicas (Teorema de Ferraris), que ya se ha contemplado anteriormente (caso 4).
7. *Devanado girando ( $n \neq 0$ ) y campo magnético del entrehierro giratorio de forma que los armónicos espaciales de B giran a la misma velocidad que la del devanado (se cumple para todos los armónicos espaciales  $h$  que  $n_h = n$ ).* En este caso no existe movimiento relativo ente el devanado y el campo y no existe f.e.m. de rotación. Si B es variable en el tiempo lo que sí puede haber es una f.e.m. de transformación.

### **Armónicos de la f.e.m. de transformación en una fase**

Ahora se trata de ver la acción de un campo magnético inmóvil, variable con el tiempo y que presenta armónicos espaciales sobre un devanado también inmóvil (o bien cuando ambos, el devanado y el campo magnético giran a igual velocidad, no existiendo, por lo tanto, velocidad relativa entre ambos).

En este caso, las variaciones de flujo que ve cada fase del devanado y que originan las f.e.m.s inducidas no son debidas al movimiento relativo del devanado con respecto al campo magnético, sino a la variación temporal de éste. Esto significa que los armónicos temporales que tiene la f.e.m. inducida sobre la fase son originados sólo por los armónicos temporales de la inducción en el entrehierro B y, en consecuencia, los armónicos espaciales de B no dan lugar a armónicos en la f.e.m.

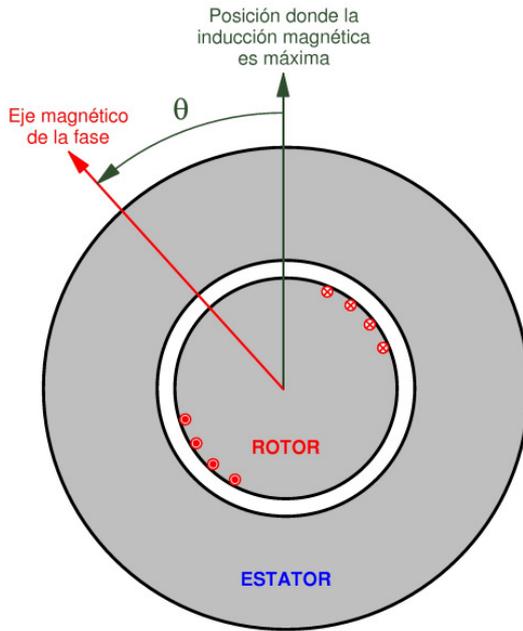
Por lo tanto, si la inducción B varía en el tiempo de forma perfectamente sinusoidal (es decir, B carece de armónicos temporales) sucederá que todos los armónicos espaciales de B dan lugar a f.e.m.s sinusoidales de igual frecuencia y no originan armónicos de f.e.m.

Cuando la inducción magnética en el entrehierro B no tiene armónicos temporales (varía sinusoidalmente en el tiempo) pero sí armónicos espaciales, se la puede representar por medio de una relación como la siguiente

$$B = \left( \sum_{\substack{h=1 \\ h=\text{impar}}}^{\infty} B_{hM} \text{sen} (h(\alpha - \delta_h)) \right) \text{sen} (\omega t - \varphi)$$

En el momento que el campo magnético es máximo en el tiempo el armónico espacial  $h$  de la distribución de  $B$  en el entrehierro -cuyo un valor máximo en el tiempo y en el espacio es  $B_{hM}$ - genera un flujo por polo  $\Phi_{hM}$  que se puede calcular mediante la relación (15) y que da lugar a que la espira diametral media de la fase tenga un flujo máximo en el tiempo  $\Phi_{\theta hM}$ . El valor de este flujo  $\Phi_{\theta hM}$  se puede determinar utilizando una expresión análoga a la (11):

$$\Phi_{\theta hM} = \Phi_{hM} \cdot \cos (h \theta) \quad (21)$$



*Fig. 4: F.e.m. de transformación en una fase*

En la fórmula anterior  $\theta$  es el ángulo eléctrico entre el lugar donde la inducción en el entrehierro  $B$  alcanza su valor máximo en el espacio y el eje magnético (o polar) de la fase (Fig. 4).

Si  $f$  es la frecuencia con que la inducción  $B$  varía en el tiempo, todos sus armónicos espaciales generan sobre una fase (la cual no tiene movimiento relativo con respecto a  $B$ ) f.e.m.s con esta misma frecuencia y sus valores eficaces se pueden calcular usando la siguiente fórmula

$$E_h = 4,44 N \xi_{bh} f \Phi_{\theta hM} \quad (22)$$

En esta expresión,  $E_h$  no indica valor eficaz del armónico temporal  $h$  de la f.e.m. (pues ahora la f.e.m. no tiene armónicos), sino que representa el valor eficaz de la f.e.m. inducida por el armónico espacial  $h$  del campo magnético.

Cuando la inducción magnética en el entrehierro  $B$  no varía sinusoidalmente ni en el espacio ni en el tiempo tiene a la vez armónicos espaciales (de orden  $h$ ) y temporales (de orden  $h'$ ). Entonces se la puede representar por medio de una relación como la siguiente

$$B = \sum_{\substack{h=1 \\ h=\text{impar}}}^{\infty} \sum_{\substack{h'=1 \\ h'=\text{impar}}}^{\infty} B_{hh'M} \text{sen} (h(\alpha - \delta_h)) \text{sen} (h'\omega t - \varphi_{h'})$$

La f.e.m. de transformación que aparecerá entonces sobre una fase sin movimiento relativo con respecto a este campo magnético tendrá armónicos temporales cuyos órdenes son los mismos ( $h'$ ) que la inducción  $B$ . Los armónicos espaciales de  $B$  (de orden  $h$ ) no generan armónicos temporales adicionales en la f.e.m.

### Armónicos de la f.e.m. de rotación en un devanado trifásico

Ahora se trata de un devanado trifásico equilibrado (formado por tres fases de igual geometría y desfasadas entre sí un ángulo de  $120^\circ$  eléctricos) sometido a la acción de un campo magnético invariable en el tiempo y que tiene un movimiento relativo con respecto a dicho campo magnético. Esta velocidad relativa puede deberse a que el campo es inmóvil y el devanado gira, a que sea el campo el que gira y el devanado el que esté quieto o a que ambos, campo magnético y devanado, giren con diferentes velocidades. La inducción magnética  $B$  es constante en el tiempo y varía de una forma no perfectamente sinusoidal a lo largo del entrehierro según la coordenada espacial  $\alpha$ . Por consiguiente, la inducción magnética en el entrehierro  $B$  permanece invariable en el tiempo y tiene armónicos espaciales.

La f.e.m. inducida sobre cada fase del devanado trifásico en estas condiciones ha sido analizada anteriormente. Se obtuvo que cada armónico espacial de la inducción magnética  $B$  origina una f.e.m. cuya frecuencia viene dada por la relación (19) y cuyo valor eficaz se calcula mediante la expresión (18).

El desfase de  $120^\circ$  eléctricos en la posición de las tres fases del devanado trifásico da lugar a que el armónico espacial de  $B$  cuyo orden es  $h$  genere en las tres fases unas f.e.m.s de rotación desfasadas en el tiempo un ángulo

$$\gamma_h = h \cdot 120^\circ \quad (23)$$

Esto permite establecer la siguiente clasificación de los armónicos:

1. Los armónicos espaciales de  $B$  de orden  $h = 6 \cdot k + 1$ , donde  $k$  es un número entero positivo (luego,  $h = 1, 7, 13, 19, \dots$ ), dan lugar, según la relación (23), a f.e.m.s de fase desfasadas en el tiempo ángulos de  $120^\circ = -240^\circ$ . Es decir, estos armónicos de  $B$  dan lugar un sistema trifásico de f.e.m.s de secuencia directa.
2. Los armónicos espaciales de  $B$  de orden  $h = 6 \cdot k - 1$ , donde  $k$  es un número entero positivo (luego,  $h = 5, 11, 17, \dots$ ), dan lugar, según la relación (23), a f.e.m.s de fase desfasadas en el tiempo ángulos de  $-120^\circ = 240^\circ$ . Es decir, estos armónicos de  $B$  dan lugar un sistema trifásico de f.e.m.s de secuencia inversa.
3. Los armónicos espaciales de  $B$  de orden  $h = 3 \cdot k$ , donde  $k$  es un número entero positivo impar (luego,  $h = 3, 9, 15, \dots$ ), dan lugar, según la relación (23), a f.e.m.s de fase desfasadas en el tiempo ángulos de  $360^\circ = 0^\circ$ . Es decir, no existe desfase entre las f.e.m.s de fase y estos armónicos de  $B$  dan lugar un sistema trifásico de f.e.m.s de secuencia homopolar.

En un devanado trifásico los armónicos espaciales múltiplos de tres de la inducción magnética  $B$  originan f.e.m.s de rotación en las fases que forman un sistema homopolar. Es decir, para estos armónicos de la inducción  $B$  las f.e.m.s inducidas en las tres fases tienen el mismo valor eficaz y están en fase. La frecuencia de estas f.e.m.s viene dada por la relación (19); por lo tanto, sólo en los casos en los que se cumpla también la relación (17) estas f.e.m.s inducidas por los terceros armónicos espaciales de la inducción  $B$  serán los terceros armónicos temporales de las f.e.m.s de fase.

Si el devanado está conectado en estrella, las f.e.m.s de línea (entre fases) se obtienen por diferencia de las f.e.m.s de fase. Por lo tanto, en las f.e.m.s de línea no tienen componentes homopolares.

Si el devanado está conectado en triángulo, para uno de estos armónicos el conjunto de las tres f.e.m.s de fase quedan conectadas en serie y formando un circuito cerrado. Estas tres f.e.m.s se suman dando lugar a una f.e.m. total dentro del triángulo igual al triple de una de ellas. Esto origina una corriente de circulación por el interior del triángulo que genera un campo magnético opuesto al que está generando la f.e.m. y que prácticamente lo anula, por lo que estas f.e.m.s de fase son muy pequeñas. Además, esta corriente interna del triángulo provoca unas caídas de tensión en las tres fases, las cuales compensan a estas reducidas f.e.m.s de fase. Es decir, no habrá componentes homopolares en las tensiones de línea del triángulo.

Por consiguiente, en un devanado trifásico no existen armónicos temporales en las tensiones de línea que sean inducidos por los armónicos espaciales de B múltiplos de tres.

Los *demás armónicos espaciales* de la inducción magnética B originan f.e.m.s de rotación en las fases que forman sistemas trifásicos equilibrados, bien de secuencia directa o bien de secuencia inversa. Por lo tanto, si la conexión es estrella dan lugar f.e.m.s de línea cuya amplitud es  $\sqrt{3}$  veces mayor que la de las respectivas f.e.m.s de fase. En el caso de que la conexión sea triángulo, estas f.e.m.s de fase son iguales a sus correspondientes f.e.m.s de línea.

Cuando las fases del devanado se encuentran en el caso 1 o en el caso 2 de f.e.m. de rotación estudiados anteriormente se cumple la relación (17). Por consiguiente, en estos casos cada armónico espacial h de la inducción B origina un armónico temporal de la f.e.m. de fase cuyo orden es también h. Esto significa que los armónicos espaciales de B cuyo orden es múltiplo de tres dan lugar a armónicos temporales de f.e.m. de orden también múltiplo de tres. De acuerdo con lo que se acaba de analizar, las tensiones de línea carecerán de los armónicos temporales generados por los armónicos espaciales de B múltiplos de tres. Por lo tanto, en estos casos las tensiones de línea no tendrán armónicos temporales múltiplos de tres.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] CORTES CHERTA. 1994. *Curso moderno de máquinas eléctricas rotativas. 5 tomos*. Barcelona: Editores Técnicos Asociados.
- [2] FRAILE MORA, J. 2008. *Máquinas eléctricas*. Madrid: McGraw-Hill Interamericana.
- [3] IVANOV-SMOLENSKI. 1984. *Máquinas eléctricas. Tomo I*. Moscú: Editorial Mir.
- [4] KOSTENKO y PIOTROVSKI. 1979. *Máquinas eléctricas. Tomo II*. Moscú: Editorial Mir.
- [5] SANZ FEITO. 2002. *Máquinas eléctricas*. Madrid: Pearson Educación.
- [6] SERRANO IRIBARNEGARAY. 1989. *Fundamentos de máquinas eléctricas rotativas*. Barcelona: Marcombo Boixareu Editores.