



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA
*DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA
ELÉCTRICA Y ENERGÉTICA*



CAMPO MAGNÉTICO EN EL ENTREHIERRO DE LAS MÁQUINAS ELÉCTRICAS SIMÉTRICAS

Miguel Ángel Rodríguez Pozueta

ABREVIATURAS UTILIZADAS EN EL TEXTO:

° eléctrico	Grado eléctrico (se refiere a ángulos eléctricos medidos en grados sexagesimales)
c.a.	Corriente alterna
c.c.	Corriente continua
f.c.e.m.	Fuerza contraelectromotriz
f.e.m.	Fuerza electromotriz
f.m.m.	Fuerza magnetomotriz

© 2011, Miguel Ángel Rodríguez Pozueta

Universidad de Cantabria (España)

Departamento de Ingeniería Eléctrica y Energética

Está permitida la reproducción total o parcial de este documento con la condición inexcusable de citar su autor y su carácter gratuito.

Este documento puede descargarse gratuitamente desde esta Web:

<http://personales.unican.es/rodrigma/primer/publicaciones.htm>

ÍNDICE

ÍNDICE

CAMPO MAGNÉTICO EN EL ENTREHIERRO DE LAS MÁQUINAS ELÉCTRICAS SIMÉTRICAS

Introducción	1
Propiedades del campo magnético. Teorema de Ampère	1
Campos eléctrico y magnético	1
Propiedades del campo magnético	3
Teorema de Ampère	4
Condiciones de contorno del campo magnético en el límite entre dos medios materiales distintos	6
Enlaces de flujo	7
Inductancias	8
Máquinas eléctricas simétricas y equilibradas	9
Circuitos magnéticos	9
Fases simétricas	9
Devanados simétricos y equilibrados	10
Máquinas simétricas y equilibradas	10
Hipótesis simplificadoras. Máquina eléctrica ideal	11
Convenios adoptados	12
Convenios relativos a los ángulos	12
Convenios relativos a la inducción magnética en el entrehierro	13
Campos magnéticos total, común y de dispersión. Flujo por polo	15
Fuerza magnetomotriz y tensión magnética del entrehierro	15
Fuerza magnetomotriz del entrehierro \mathcal{F}	15
Tensión magnética del entrehierro F_{δ}	17
Cálculo de la inducción magnética en el entrehierro de una máquina eléctrica simétrica	18
Obtención de la f.m.m. en el entrehierro \mathcal{F}	19
Determinación de la tensión magnética F_{δ}	20

ÍNDICE

Cálculo de la inducción magnética B	21
Inducción magnética creada por el devanado inductor de una máquina eléctrica simétrica e ideal de polos salientes	23
Distribución de la f.m.m. \mathcal{F} y de la tensión magnética F_{δ} en el entrehierro	23
Distribución de la inducción magnética en el entrehierro B	23
F.m.m. de un devanado concentrado con una sola bobina de paso diametral por par de polos	25
F.m.m. de un devanado monofásico distribuido	30
F.m.m. de un devanado monofásico	32
Armónicos de ranura	36
Capas de corriente	37
F.m.m. de un devanado monofásico alimentado con corriente alterna	40
F.m.m. de un devanado polifásico. Teorema de Ferraris	43
Teorema de Leblanc	48
Resumen del campo magnético en el entrehierro creado por diferentes bobinados	49
Devanado de polos salientes alimentado con c.c.	49
Devanados en máquinas de entrehierro δ constante	49
Devanado monofásico alimentado con corriente continua	50
Devanado monofásico alimentado con corriente alterna	50
Devanado trifásico alimentado con corriente alterna trifásica ..	51
Bibliografía	52
Apéndices	
<i>Apéndice A.</i> Entrehierro equivalente. Factor de Carter	53
<i>Apéndice B.</i> Permeancia específica del entrehierro	56

NOTA: Cada número de página de este índice actúa como un hiperenlace a la página correspondiente

CAMPO MAGNÉTICO EN EL ENTREHIERRO DE LAS MÁQUINAS ELÉCTRICAS SIMÉTRICAS

Miguel Ángel Rodríguez Pozueta

INTRODUCCIÓN

El estudio del campo magnético en el entrehierro de las máquinas eléctricas es muy importante, ya que este campo es el origen de todos los fenómenos que provocan la conversión de energía mecánica en eléctrica, o viceversa, en la máquina.

En el presente texto se comienza este estudio repasando algunas propiedades de los campos magnéticos e indicando las hipótesis simplificadoras y los convenios que se van a adoptar a la hora de analizar los campos magnéticos en las máquinas eléctricas y que se van a mantener a lo largo de todo el libro.

También aquí se procede a definir con precisión dos magnitudes ligadas al campo magnético y que se van a utilizar con frecuencia en los capítulos siguientes: la fuerza magnetomotriz (f.m.m.) y la tensión magnética del entrehierro.

A continuación se explica cómo se puede obtener la inducción magnética en el entrehierro de una máquina simétrica haciendo uso de las hipótesis, convenios y magnitudes definidas anteriormente y aplicando el Teorema de Ampère.

Seguidamente, se procede al cálculo de la inducción magnética en un caso sencillo como es la originada por el devanado inductor de una máquina de polos salientes.

Finalmente, se presenta el estudio de las fuerzas magnetomotrices debidas a devanados distribuidos (bobinados de tambor), mono o polifásicos.

PROPIEDADES DEL CAMPO MAGNÉTICO. TEOREMA DE AMPÈRE

Campos eléctrico y magnético

Se denomina **campo** a una zona del espacio que goza de la propiedad de que en él se manifiesta un fenómeno físico. Así, por ejemplo, un campo gravitatorio es una zona del espacio que tiene la propiedad de que si se coloca una masa en uno de sus puntos sobre ella aparece una fuerza.

Los campos se caracterizan por una magnitud que varía de un punto a otro del espacio. Si esta magnitud es vectorial se trata de un **campo vectorial**.

Un **campo eléctrico** es una zona del espacio que tiene la propiedad física de que si se coloca una carga eléctrica en uno de sus puntos sobre ella aparece una fuerza.

Este campo vectorial se caracteriza por la magnitud *intensidad del campo eléctrico* \vec{E} que es el valor para cada punto del espacio de la fuerza que se ejercería sobre una carga de valor unidad situada en dicho punto. En el Sistema Internacional \vec{E} se mide en Voltios/metro (V/m).

Un campo eléctrico puede ser originado por la presencia de otras cargas eléctricas o por la existencia de un campo magnético variable en el tiempo.

Un **campo magnético** es una zona del espacio que tiene la propiedad de que si se coloca una carga eléctrica en movimiento en uno de sus puntos sobre ella aparece una fuerza. Normalmente las cargas en movimiento con las que se va a tratar en este texto son corrientes eléctricas circulando por un conductor.

Este campo vectorial se caracteriza por la magnitud **inducción magnética** \vec{B} que en el Sistema Internacional se mide en Teslas (T) y que se define a partir de la fuerza (fuerza de Lorentz) que aparece sobre una carga eléctrica q que se mueve con velocidad \vec{v} en el seno de un campo magnético:

$$\vec{F} = q (\vec{v} \times \vec{B})$$

(\times = Producto vectorial de vectores)

Un campo magnético puede ser originado por la presencia de otras cargas eléctricas en movimiento (normalmente corrientes eléctricas) y también por la existencia de campos eléctricos variables en el tiempo. Al analizar las máquinas eléctricas nos referiremos exclusivamente a campos magnéticos creados sólo por corrientes eléctricas.

La inducción magnética \vec{B} en un medio lineal e isótropo se puede expresar así:

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

La **permeabilidad magnética absoluta** μ es un parámetro que representa la influencia de las propiedades magnéticas del medio sobre \vec{B} . La **excitación magnética o intensidad magnetizante** \vec{H} es una magnitud que depende de las causas que crean el campo magnético (corrientes y variaciones del campo eléctrico) y es independiente de las características del medio. En el Sistema Internacional μ se mide en Henrios/metro (H/m) -unidad que también se denomina Newtons/Amperios² (N/A²) - y \vec{H} en Amperios/metro (A/m).

La **permeabilidad relativa** μ_r de un medio es un parámetro adimensional y se obtiene por cociente de su permeabilidad magnética μ entre la del vacío μ_0 ($\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7}$ H/m).

Las **líneas de inducción magnética** son líneas tangentes en cada uno de sus puntos al vector inducción magnética \vec{B} .

La concentración de líneas de inducción en una zona del espacio es proporcional al valor de la inducción magnética en dicha zona.

El **flujo magnético** Φ a través de una superficie S se obtiene mediante esta integral de superficie (Fig. 1):

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \bullet d\vec{S} \quad (1)$$

(\bullet = Producto escalar de vectores)

donde el vector $d\vec{S}$ en cada punto es perpendicular a la superficie S.

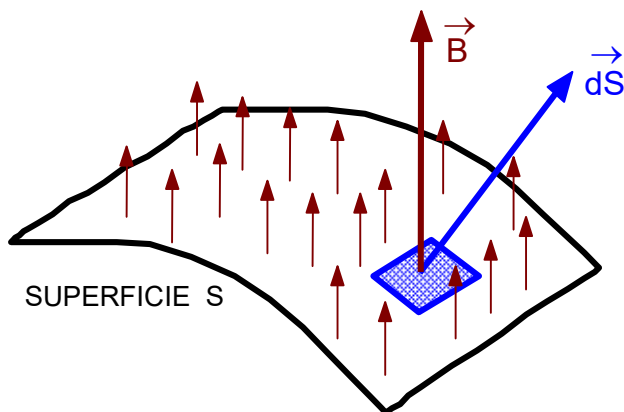


Fig. 1: Definición de flujo magnético Φ

Según el sentido de $d\vec{S}$ en la expresión (1) se habla de flujo entrante o saliente. En el caso de que S sea una superficie cerrada se toma usualmente $d\vec{S}$ con sentido saliente.

Propiedades del campo magnético

La inducción \vec{B} tiene divergencia nula en todos sus puntos, luego se trata de un campo solenoidal y posee estas propiedades:

- Carece de puntos fuente y sumidero; es decir, es imposible encontrar un polo magnético aislado. Aunque un imán sea troceado muchas veces, cada una de sus partes tendrá siempre dos polos magnéticos.
- Las líneas de inducción, por lo tanto, no podrán nacer en un punto y morir en otro. Esto significa que estas líneas son siempre cerradas.
- Como consecuencia de lo anterior, el flujo magnético a través de cualquier superficie cerrada es siempre nulo.
- La propiedad anterior conlleva el que los flujos magnéticos a través de superficies abiertas limitadas por el mismo contorno L (Fig. 2) son iguales.
- Aunque inicialmente el flujo es un concepto ligado a una superficie, la propiedad anterior permite definir el **flujo de una espira** (la cuál es un contorno cerrado) como el flujo que atraviesa cualquiera de las superficies limitadas por dicha espira.

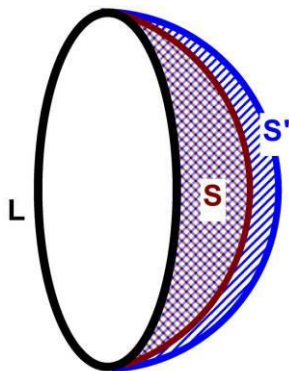


Fig. 2: Las superficies abiertas S y S' están limitadas por el mismo contorno L, luego están sometidas al mismo flujo magnético

De las propiedades que se acaban de exponer se deduce que el concepto de **polo magnético**, como zona fuente o sumidero de las líneas de inducción magnética, no tiene un sentido físico riguroso. Sin embargo, resulta cómodo utilizar esta noción de polo referida a un cuerpo que está en el seno de un campo magnético. De esta manera, un polo Norte de un cuerpo es una zona del mismo de donde salen líneas de inducción magnética hacia el exterior y un polo Sur es una zona del cuerpo donde penetran líneas de inducción magnética procedentes del exterior (Fig. 3).

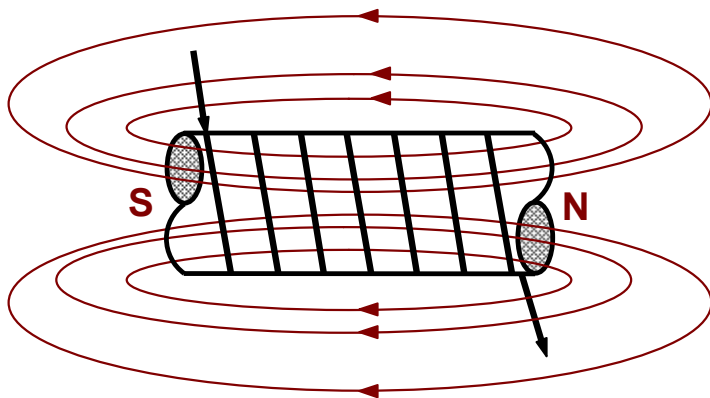


Fig. 3: Polos Norte y Sur de un solenoide

Las líneas del campo magnético creado por un conductor rectilíneo muy largo recorrido por una corriente eléctrica (Fig. 4) son circunferencias concéntricas cuyo centro está sobre el conductor y cuyo sentido viene dado por la **regla del sacacorchos**: *el sentido de las líneas de este campo magnético es el del giro de un sacacorchos para conseguir que avance en el sentido de la corriente eléctrica.*

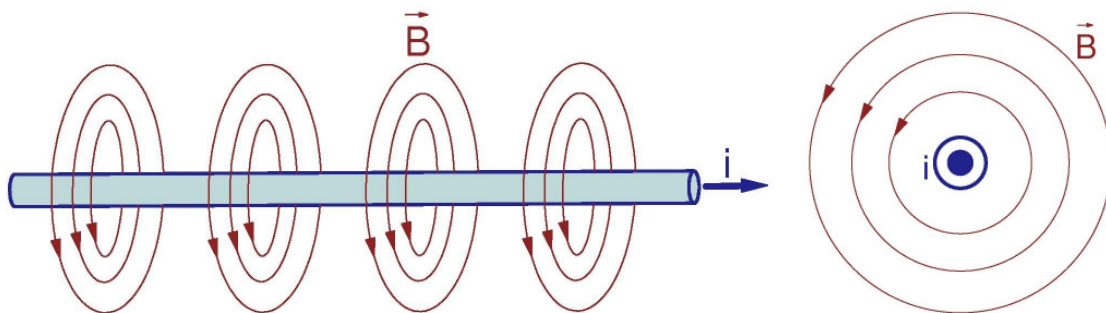


Fig. 4: Líneas del campo magnético originado por un conductor rectilíneo con corriente.

En el caso del campo magnético creado por una espira o una bobina con corriente (Fig. 3) también se puede usar la regla del sacacorchos, aunque aplicándola de una manera algo diferente: *si un sacacorchos imaginario gira en el sentido con el que la corriente eléctrica circula por la espira o bobina, dicho sacacorchos avanza con el mismo sentido que tienen las líneas de campo magnético en el interior de la espira o bobina.*

Teorema de Ampère

El Teorema de Ampère sirve para analizar campos magnéticos originados por corrientes eléctricas y viene dado por la siguiente expresión:

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_j i_j \quad (6)$$

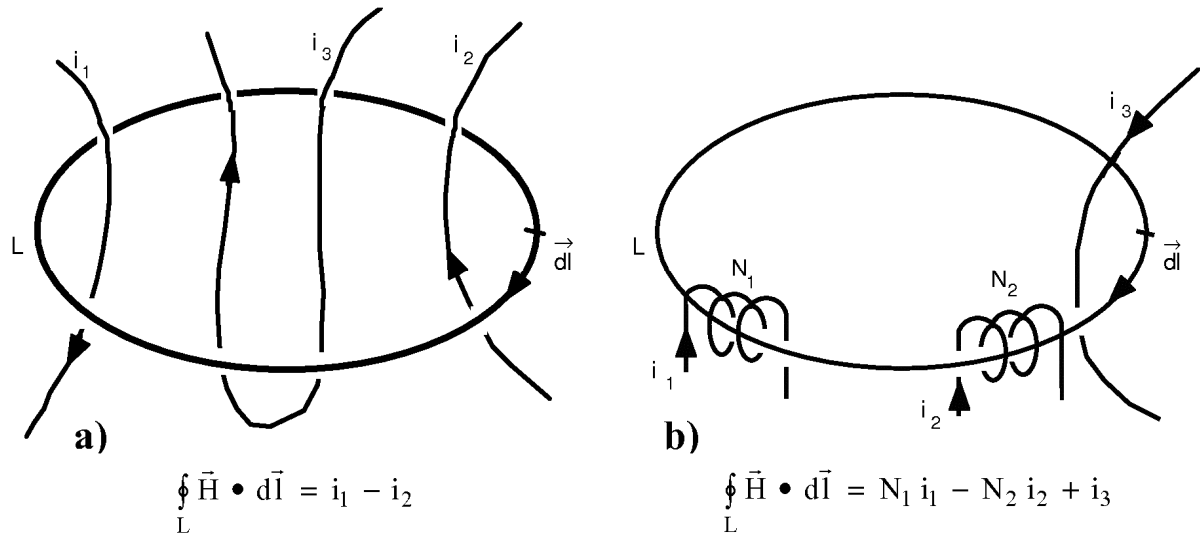


Fig. 5: Ejemplos de aplicación del Teorema de Ampère.

Este teorema dice que si se integra el vector excitación \vec{H} a lo largo del camino cerrado L (circulación de \vec{H} a lo largo de L) el resultado obtenido es igual a la suma de las corrientes que encierra el contorno L. Para ello es preciso tener en cuenta que se consideran positivas las corrientes dirigidas en el sentido de un sacacorchos cuando se lo gira en el sentido que se haya tomado como positivo para $d\vec{l}$ al realizar la integral anterior. Así, en la Fig. 5a, $d\vec{l}$ visto desde arriba, tiene sentido horario, por lo que la corriente i_1 es positiva y la corriente i_2 es negativa. La corriente i_3 tiene un efecto nulo y, por esta razón, no aparece a la derecha del signo =.

Si el camino L incluye bobinas a las que recorre por su interior (Fig. 5b), el Teorema de Ampère se puede escribir así:

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_j N_j \cdot i_j \quad (3)$$

En la expresión anterior N_j e i_j son, respectivamente, el número de espiras en serie y la corriente de la bobina j.

De esta manera, se puede considerar una corriente como la i_3 en la figura 5 como una bobina con una sola espira.

A la circulación $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l}$ se le denomina **fuerza magnetomotriz (f.m.m.)** del recorrido L y se la representa por \mathcal{F} . A pesar de su nombre, la magnitud fuerza magnetomotriz (f.m.m.) no es una fuerza. No confunda esta magnitud con la fuerza electromotriz (f.e.m.) de los circuitos eléctricos.

Se denomina **fuerza magnetomotriz de la bobina j** a la f.m.m. que existiría si no hubiera más corriente que la de la bobina j. Se lo representa por \mathcal{F}_j y su valor es igual al producto $N_j \cdot i_j$.

Por lo tanto, la ecuación (3) se puede escribir así:

$$\mathcal{F} = \sum_j \mathcal{F}_j \quad (4)$$

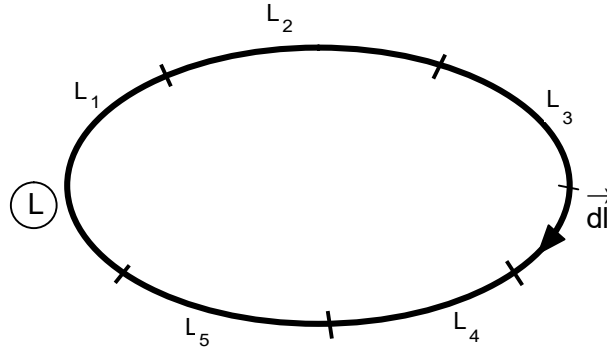


Fig. 6: Descomposición del recorrido L en los tramos L₁, L₂, ..., L₅.

Por otra parte, en muchas ocasiones el camino L interesa descomponerlo en varios tramos L₁, L₂, ... (Fig. 6) de tal forma que:

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{L_1} \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_{L_2} \vec{H} \cdot d\vec{l} + \dots = \sum_k \int_{L_k} \vec{H} \cdot d\vec{l}$$

Se denomina **diferencia de potencial magnético o caída de tensión magnética (F_k)** en el tramo L_k a

$$F_k = \int_{L_k} \vec{H} \cdot d\vec{l} \quad (5)$$

Luego, el Teorema de Ampère se puede expresar así:

$$\mathcal{F} = \sum_j \mathcal{F}_j = \sum_j F_j \quad (6)$$

Condiciones de contorno del campo magnético en el límite entre dos medios materiales distintos

Sean dos medios materiales de permeabilidades magnéticas absolutas μ_1 y μ_2 , respectivamente (permeabilidades relativas μ_{r1} y μ_{r2}), separados por una superficie donde la densidad de corriente J es nula en todos sus puntos (Fig. 7). En dicha superficie se cumplen las siguientes condiciones:

$$B_{n1} = B_{n2}$$

$$H_{t1} = H_{t2}$$

$$\frac{\text{tg } \alpha_1}{\text{tg } \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}}$$

donde B_n es la componente de la inducción magnética perpendicular a la superficie de separación y H_t es la componente de la excitación magnética paralela a dicha superficie. Los subíndices 1 y 2 se refieren a los dos medios materiales.

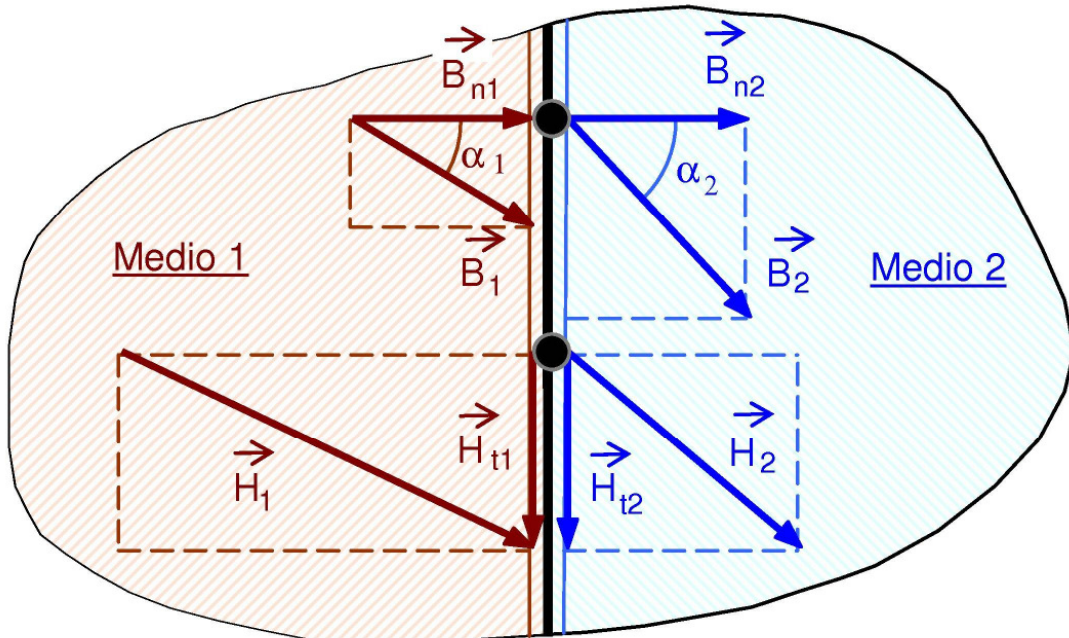


Fig. 7: Condiciones de contorno en el límite de dos medios magnéticos

En el caso de que el medio 1 sea un medio amagnético (con una permeabilidad prácticamente igual a la del vacío) y el medio 2 sea ferromagnético (con una permeabilidad elevada), se tiene que:

$$\mu_{r2} \gg \mu_{r1}$$

Luego

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}} \operatorname{tg} \alpha_2 \approx 0 \rightarrow \boxed{\alpha_1 \approx 0}$$

Por lo tanto, las líneas de inducción magnética en la superficie de separación entre un medio amagnético y un medio ferromagnético son perpendiculares a dicha superficie en el lado del medio amagnético.

Enlaces de flujo

Sabemos que la Ley de Faraday indica que en una espira atravesada por un flujo magnético Φ aparece una f.e.m. e tal que

$$e = - \frac{d \Phi}{d t}$$

Si tenemos una fase constituida por una o varias ramas en paralelo de N espiras en serie, la f.e.m. total inducida en la fase será igual a la suma de las N f.e.m.s inducidas en las espiras de una rama:

$$e = e_1 + e_2 + \dots + e_N = -\left(\frac{d\Phi_1}{dt} + \frac{d\Phi_2}{dt} + \dots + \frac{d\Phi_N}{dt}\right)$$

Y, por lo tanto, tenemos que

$$e = -\left(\frac{d\Phi_1}{dt} + \frac{d\Phi_2}{dt} + \dots + \frac{d\Phi_N}{dt}\right) = -\frac{d\psi}{dt}$$

Donde

$$\psi = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_N \quad (7a)$$

son los **enlaces de flujo** o **flujo total concatenado**¹ por la fase.

Si la fase pertenece a un devanado concentrado, de tal manera que todas sus espiras están sometidas simultáneamente al mismo flujo Φ , se cumplirá que

$$\psi = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_N = N \cdot \Phi \quad (7b)$$

Si, como es habitual en las máquinas eléctricas, la fase forma parte de un devanado distribuido, las espiras que la forman están sometidas a flujos diferentes. En el caso de que la inducción magnética que actúa sobre la fase esté distribuida sinusoidalmente en el espacio se cumple que

$$\psi = N \cdot \xi_b \cdot \Phi \quad (7c)$$

Los símbolos empleados en las fórmulas anteriores son:

- N es el número de espiras en serie de una de las ramas en paralelo de la fase.
- ξ_b es el factor de bobinado de la fase (en algunos textos este coeficiente se le designa como k o k_w). Este parámetro se define en este texto más adelante.
- Φ es el flujo que atravesaría a una espira de paso diametral situada de tal forma que sus ejes coincidieran con los de la fase (más adelante se definen los ejes de simetría de una fase).

Inductancias

Si una fase J recorrida por la corriente i_J genera una inducción magnética que al actuar sobre otra fase K hace que ésta reciba un flujo concatenado o enlaces de flujo ψ_{KJ} , se denomina **inductancia mutua** o **coeficiente de inducción mutua** entre K y J a este coeficiente:

¹ En los países de habla inglesa esta magnitud se suele representar por λ .

$$L_{KJ} = \frac{\Psi_{KJ}}{i_J}$$

En los medios magnéticos lineales (donde la permeabilidad magnética es constante) la inductancia mutua entre dos fases depende sólo de la geometría del sistema. Si las fases están situadas sobre un material ferromagnético, este coeficiente depende también del valor de las corrientes que circulen por los bobinados.

En el caso de que sea la misma fase K, recorrida por la corriente i_K , la que genera la inducción magnética y la que origina sobre sí misma los enlaces de flujo Ψ_K , se define otro coeficiente, análogo al anterior, denominado **inductancia propia**, **autoinductancia** o **coeficiente de autoinducción**:

$$L_K = \frac{\Psi_K}{i_K}$$

MÁQUINAS ELÉCTRICAS SIMÉTRICAS Y EQUILIBRADAS

La mayoría de las máquinas eléctricas son de construcción simétrica y a ellas se va a referir preferentemente este texto.

Circuitos magnéticos simétricos

El **circuito magnético** de una máquina es simétrico si lo son los núcleos magnéticos del estator y del rotor y si ambos tienen igual número de polos.

Fases simétricas

Una fase de un devanado es simétrica si posee estas propiedades:

- a) Su configuración se repite formando pares de polos idénticos.
- b) La configuración de la fase en dos polos consecutivos es la misma, pero cambiando el sentido de bobinado. Esto da lugar a que, cuando circula corriente por la fase, en dos polos contiguos las distribuciones de corriente sean iguales, pero de sentidos opuestos.
- c) La configuración de la fase en cada polo tiene un eje de simetría, de tal forma que dicha configuración es idéntica a la derecha e izquierda de dicho eje.

En virtud de lo que se acaba de exponer, en una fase simétrica se pueden establecer dos **ejes de simetría** por cada par de polos (Figs. 8 y 9). Estos ejes forman entre sí 90° eléctricos y son los siguientes:

- a) El **eje de devanado** o **eje interpolar** es el eje de simetría de la fase mencionado en el subapartado c) anterior. Por lo tanto, la distribución de corrientes que se origina cuando circula corriente por la fase es simétrica respecto a dicho eje. Este eje coincide con la *línea neutra* del campo magnético originado por la fase.

- b) El **eje magnético** o **eje polar** es el eje de antisimetría de la fase: cuando circula corriente por ella, la distribución de corriente toma igual forma a ambos lados de este eje, pero con signos opuestos.

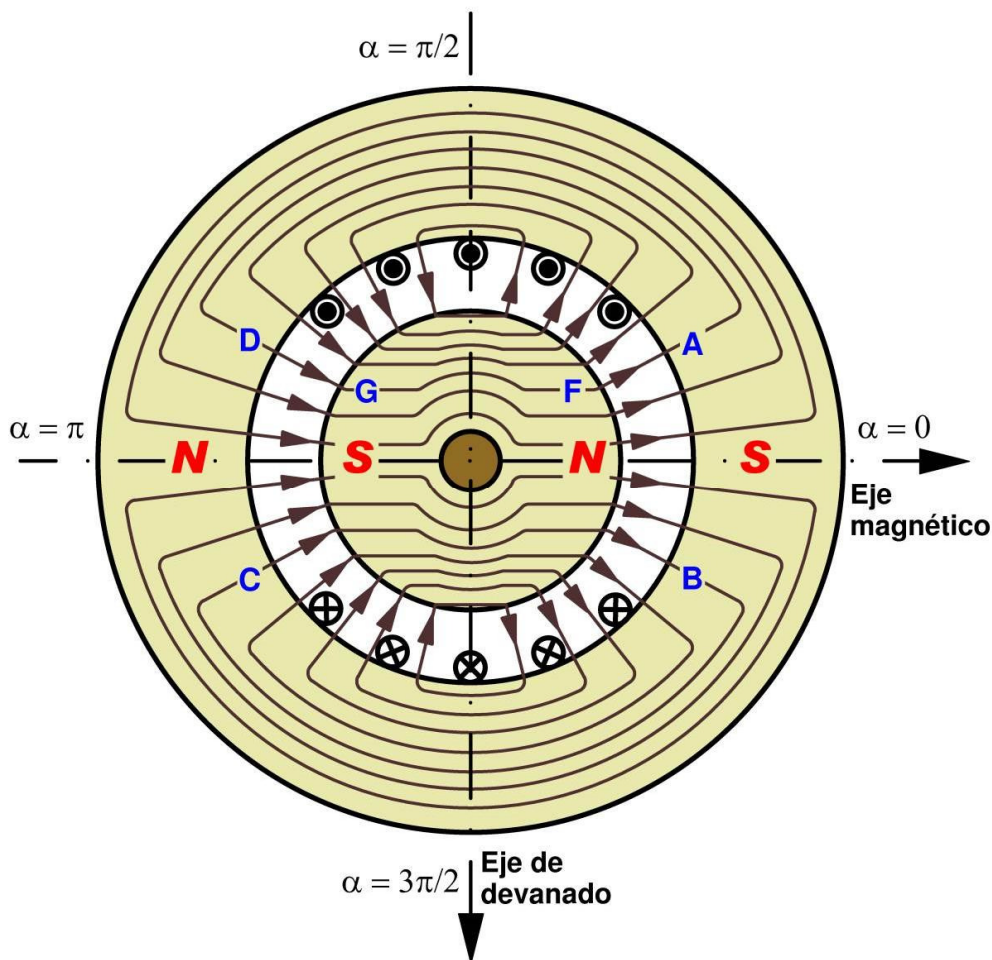


Fig. 8: Líneas de inducción magnética de una máquina simétrica, ideal, bipolar, sin polos salientes y con un devanado formado por cinco bobinas distribuidas de paso diametral.

Devanados simétricos y equilibrados

Un devanado se dice que es **simétrico** si lo son todas sus fases.

Un devanado polifásico de m fases es **equilibrado** si verifica lo siguiente:

- Todas sus fases son idénticas; es decir, tienen la misma configuración.
- Existe la misma separación entre cada par de fases consecutivas, siendo ésta igual a $2\pi/m$ radianes eléctricos.

Usualmente los devanados equilibrados también son simétricos.

Máquinas simétricas y equilibradas

Una máquina eléctrica es **simétrica** si es así:

- a) Su circuito magnético es simétrico.
- b) Todos sus devanados son simétricos.
- c) El circuito magnético y todos sus devanados tienen igual número de polos.
- d) La colocación de una fase sobre el núcleo magnético donde está ubicada es tal que los ejes magnéticos de la fase se superponen sobre los ejes de simetría de los polos del núcleo magnético.

Una máquina eléctrica simétrica es también **equilibrada** si todos sus devanados son equilibrados.

HIPÓTESIS SIMPLIFICATIVAS. MÁQUINA ELÉCTRICA IDEAL

Si se quisiera realizar el estudio del campo magnético en el entrehierro de una máquina eléctrica rotativa teniendo en cuenta todos los fenómenos que intervienen, éste sería muy complicado. Por esta razón se adoptan una serie de hipótesis simplificadoras que facilitan este análisis al desprestigiar fenómenos poco importantes en la formación del campo magnético de una máquina eléctrica. De todos modos, algunos de estos fenómenos se pueden tener en cuenta posteriormente mediante algunos factores de corrección.

En consecuencia, el estudio que se va a hacer versará sobre una máquina eléctrica ideal en la que se verifican estas hipótesis:

- a) Respecto a las piezas de hierro del circuito magnético se acepta lo siguiente:
 - a1) La permeabilidad del hierro es constante y, por tanto, no hay saturación. Esto permite aplicar el principio de superposición a las inducciones magnéticas.
 - a2) La permeabilidad del hierro, además, es mucho mayor que la del aire y se la puede suponer de valor infinito. Por consiguiente, a la hora de calcular la inducción magnética de la máquina sólo hay que considerar la reluctancia del entrehierro.
 - a3) El circuito magnético es ideal, es decir, no tiene pérdidas en el hierro. Además, la inducción magnética carece de componente paralela al eje de la máquina y la distribución de la inducción magnética es la misma en cualquier plano perpendicular al árbol de la máquina. Por tanto, bastará con estudiar la distribución de la inducción magnética en uno cualquiera de estos planos.
- b) Los conductores están distribuidos a ambos lados del entrehierro paralelamente al árbol de la máquina y su radio es despreciable. Por consiguiente, no se tiene en cuenta el efecto pelicular o skin de estos conductores.
- c) Por lo que se refiere al entrehierro se supone lo siguiente:
 - c1) No se tienen en cuenta las posibles variaciones de entrehierro debidas a la existencia de dientes y ranuras². Entonces en las máquinas con rotor y estator cilíndricos se aceptará que el espesor δ del entrehierro es constante.

² Véanse los apéndices del final de este texto.

- c2) Este espesor δ del entrehierro es muy pequeño comparado con los diámetros del rotor y del estator, por lo que puede despreciarse frente a éstos. Por consiguiente, en las máquinas sin polos salientes se aceptará que la inducción magnética prácticamente no varía en el entrehierro según la dirección radial y toma los mismos valores en las superficies interna del estator y externa del rotor.

A partir de ahora, mediante δ no se representará al espesor del entrehierro real o geométrico δ_g de la máquina (distancia de un diente del estator a un diente del rotor), sino al espesor del entrehierro equivalente; el cual, de acuerdo con la hipótesis c1, es liso (esto es, sin ranurado). Para calcular δ se utiliza el Factor de Carter, K_C : $\delta = K_C \cdot \delta_g$ (ver los apéndices al final de este texto).

CONVENIOS ADOPTADOS

A la hora de calcular la inducción magnética en el entrehierro se van adoptar una serie de convenios que luego se van a mantener a lo largo de todo el libro.

Es preciso indicar que otros autores usan convenios distintos, lo que debe ser tenido en cuenta por el lector si consulta otros libros.

Convenios relativos a los ángulos

- a) En una máquina simétrica todos los fenómenos se repiten igualmente en cada uno de sus p pares de polos. Por lo tanto, bastará con analizar lo que sucede en un único par de polos. Para ello se considerará una máquina equivalente con sólo dos polos donde sucede lo mismo que en uno cualquiera de los pares de polos de la máquina original.

En esta máquina de dos polos se trabajará con ángulos eléctricos α , de tal forma que será fácilmente extrapolable lo que suceda en ella a la máquina original.

Se sabe que $\alpha = p \cdot \alpha_g$. Luego, lo que en la máquina bipolar equivalente sucede en la posición dada por el ángulo α , en la máquina original de p pares de polos sucede en las posiciones dadas por el mismo ángulo eléctrico α , esto es, por estos ángulos geométricos:

$$\begin{aligned}\alpha_{g1} &= \frac{\alpha}{p} \\ \alpha_{g2} &= \frac{\alpha}{p} + \frac{2\pi}{p} \\ \alpha_{g3} &= \frac{\alpha}{p} + 2\frac{2\pi}{p} \\ &\vdots \\ \alpha_{gp} &= \frac{\alpha}{p} + (p-1)\frac{2\pi}{p}\end{aligned}$$

- b) Los ángulos se medirán tomando como sentido positivo el antihorario (Figs. 8 y 9).

En muchas ocasiones se va a representar la máquina eléctrica desarrollada, ya que así se simplificarán las figuras. En este caso, es costumbre dibujar el estator en la parte superior y el rotor en la parte inferior de la figura desarrollada. Pero esto da lugar a que, por el convenio adoptado, los ángulos aumenten de derecha a izquierda (Fig. 9); es decir, en sentido contrario al que usualmente se utiliza.

Por esta razón, las figuras de las máquinas desarrolladas que se van a dibujar en este texto serán imágenes especulares de las que se obtendrían desarrollando directamente la máquina (Fig. 9). Así, en estas figuras los ángulos aumentarán de izquierda a derecha, como es habitual. Esto hace que en estas figuras de máquinas desarrolladas no se cumpla la regla del sacacorchos entre corrientes y campos magnéticos.

- c) El origen de los ángulos (punto donde α es nulo) se elegirá en el lugar que más convenga en cada caso. Normalmente este origen se colocará sobre un eje magnético o un eje de devanado de una fase.

Convenios relativos a la inducción magnética en el entrehierro

Para analizar el comportamiento de una máquina eléctrica no es necesario conocer el valor de la inducción magnética \vec{B} en todos sus puntos, sino que basta con conocer el valor de esta magnitud en el entrehierro.

Aún más, aunque la transferencia de energía entre el estator y el rotor de la máquina exige, en virtud del Teorema de Poynting, que en el entrehierro \vec{B} tenga una componente tangencial no nula; va a ser suficiente con conocer la componente radial de la inducción magnética en el entrehierro.

Por lo tanto, a partir de ahora en lugar de la magnitud vectorial \vec{B} se utilizará la magnitud escalar B definida para cada posición α como el valor medio, según la dirección radial, de la componente radial de la inducción magnética en el entrehierro. Es decir, si $d\vec{l}$ es el vector diferencial de longitud según la dirección radial, B se obtiene así:

$$B = \frac{1}{\delta} \int_{\text{Entrehierro}} \vec{B} \cdot d\vec{l} \quad (8)$$

(\bullet = Producto escalar de vectores)

Según la definición anterior, el sentido positivo de B viene dado por el sentido positivo de $d\vec{l}$. Así pues, B es positiva en los lugares del entrehierro donde las líneas de inducción salen del rotor y entran al estator. Es decir, B es positiva en los polos Norte del rotor o en los polos Sur del estator.

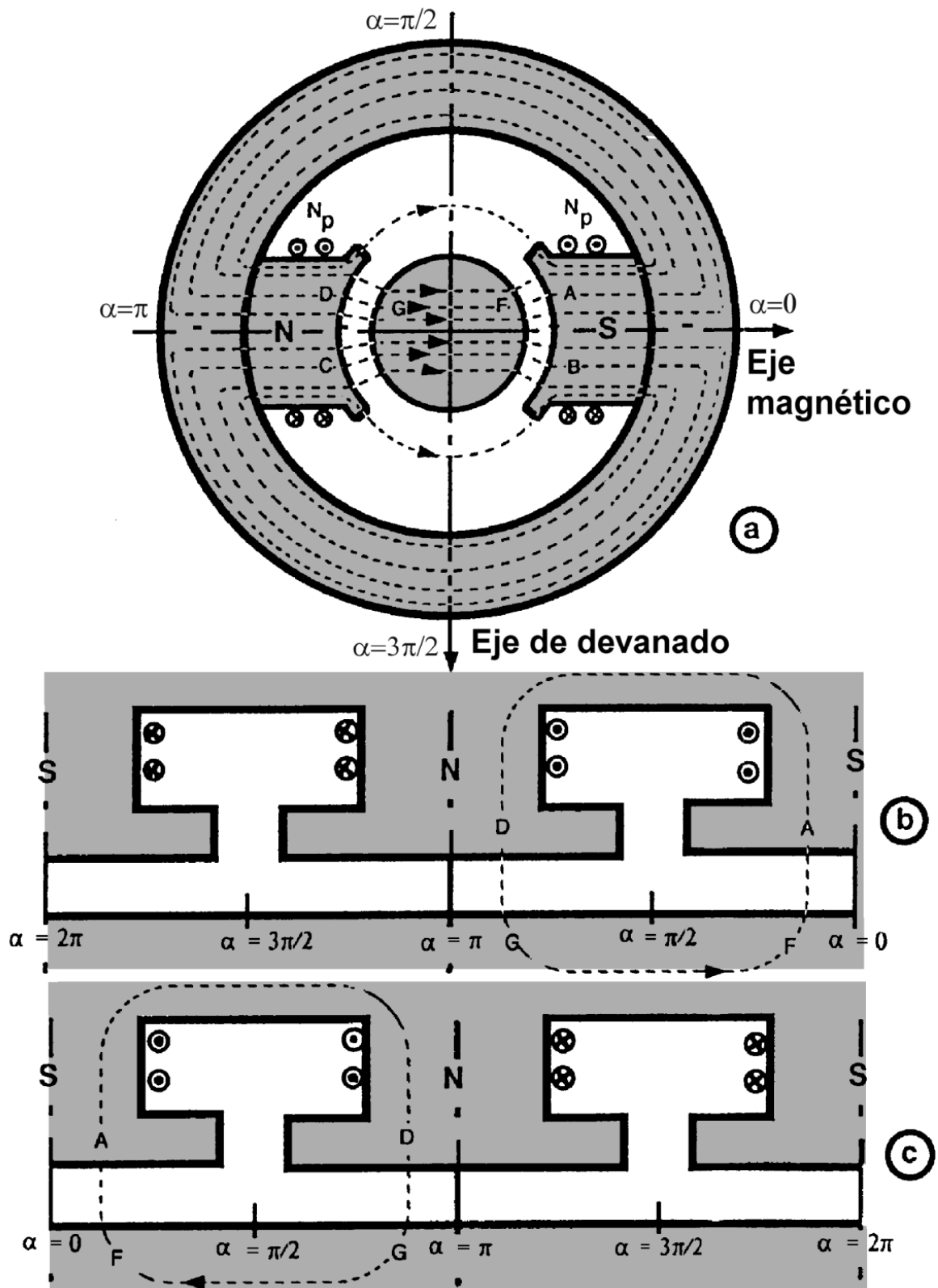


Fig. 9: a) Corte de una máquina bipolar de polos salientes; b) Desarrollo directo de la figura a); c) Imagen especular de la figura b).

CAMPOS MAGNÉTICOS TOTAL, COMÚN Y DE DISPERSIÓN. FLUJO POR POLO

Es sabido que una máquina eléctrica rotativa consiste básicamente en un circuito magnético, formado por el estator, el rotor y un entrehierro, y varios devanados situados en el estator y en el rotor.

Cuando estos devanados están recorridos por corrientes se genera un campo magnético **total** que se puede descomponer en dos:

- a) El campo magnético **común**, también denominado **principal** o **magnetizante**, es el que transmite energía entre los dos órganos de la máquina (estator y rotor) y sus líneas de inducción recorren la totalidad del circuito magnético común de la máquina (es decir, cruzan dos veces el entrehierro y circulan por el estator y el rotor atravesando todos los devanados y actuando sobre todos ellos).
- b) Los campos magnéticos de **dispersión**, también denominados de **fugas**, que no transmiten energía e incluyen el resto de las líneas de inducción.

Se denomina **flujo por polo** al flujo debido al campo magnético en el entrehierro que atraviesa a una espira de paso diametral colocada en la posición donde dicho flujo es máximo.

Cuando sólo se considera el primer armónico de la distribución de la inducción magnética en el entrehierro B , cuyo valor máximo es B_M , el flujo por polo vale

$$\Phi_M = \frac{d \cdot l_\delta}{p} B_M$$

En la relación anterior l_δ es la longitud axial del circuito magnético de la máquina para el campo magnético en el entrehierro y d es el diámetro del entrehierro.

FUERZA MAGNETOMOTRIZ Y TENSIÓN MAGNÉTICA DEL ENTREHIERRO

Fuerza magnetomotriz del entrehierro \mathcal{F}

Cuando se explicó el Teorema de Ampère se denominó fuerza magnetomotriz (f.m.m.) a la circulación del vector excitación \vec{H} a lo largo de una línea cerrada ($\mathcal{F} = \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l}$), la cual tiene un valor igual a las corrientes abrazadas por dicha línea cerrada. Por consiguiente, este concepto no está ligado a un punto del espacio, sino a un camino cerrado.

Sin embargo, sucede que por cada punto del entrehierro pasa una línea de inducción magnética, la cuál es cerrada y, además, corta al entrehierro dos veces. Si la máquina es simétrica, los lugares donde una línea de inducción corta al entrehierro ocupan dos posiciones simétricas respecto al eje de simetría de la distribución de corrientes que crean el campo magnético.

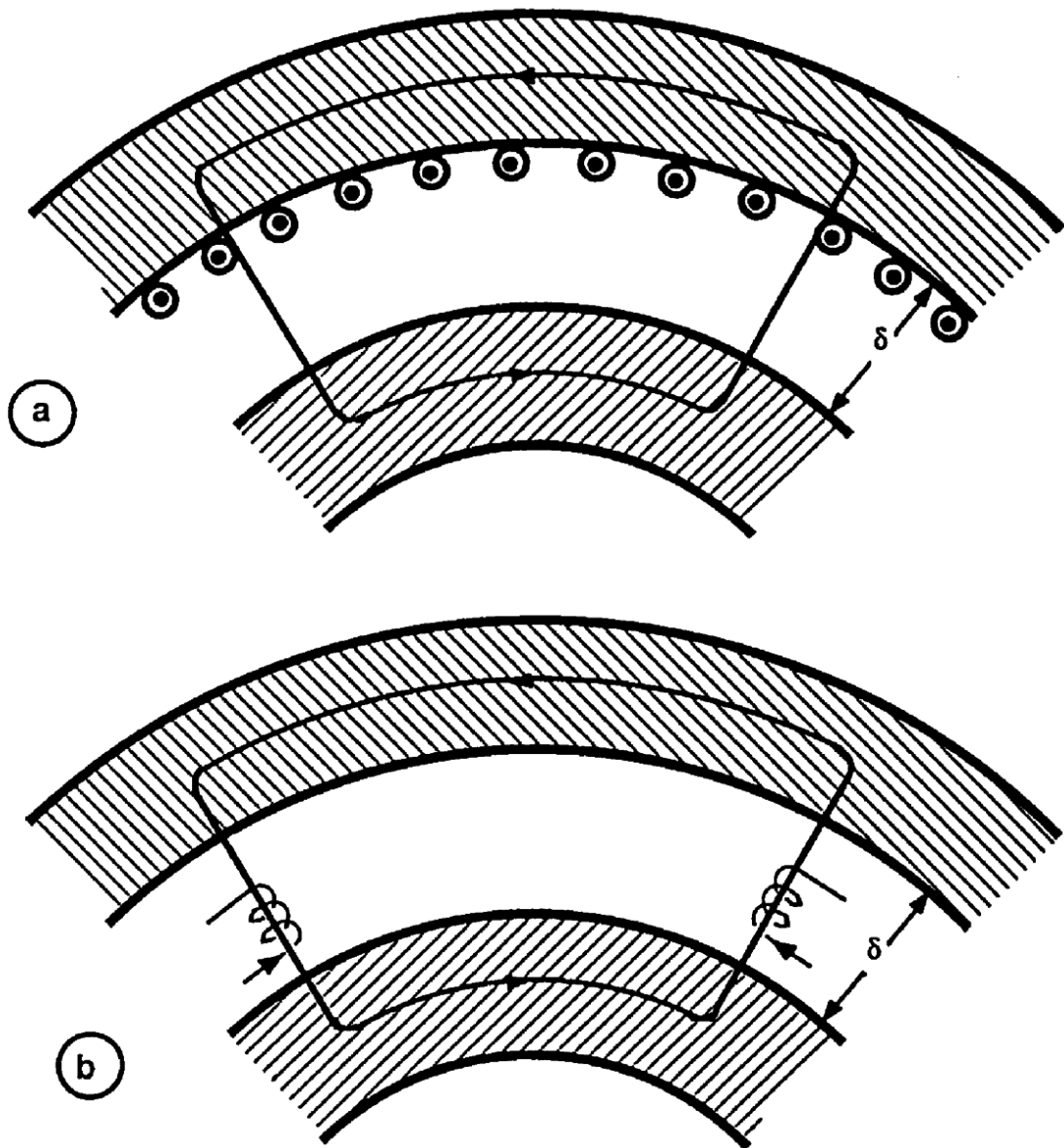


Fig. 10: Sustitución de las corrientes abrazadas por una línea de inducción magnética por dos solenoides equivalentes situados en el entrehierro

De una forma puramente convencional se puede suponer entonces que la f.m.m. de una línea de inducción magnética se concentra en las dos zonas de entrehierro que corta, convirtiéndose así en una función de la coordenada angular α . Esto significa el sustituir las corrientes distribuidas a lo largo del entrehierro que abraza una línea de inducción por dos pequeños solenoides equivalentes situados en el entrehierro según se representa en la Fig. 10. Estos solenoides proporcionan la misma f.m.m. dentro de las líneas de inducción que las corrientes originales. Además, si la máquina es simétrica el reparto de la f.m.m. en las dos zonas del entrehierro se hace a partes iguales; esto es, los dos solenoides equivalentes serán idénticos. Es preciso insistir que todo esto es simplemente una convención que resulta cómoda, pero que no quiere decir que realmente las corrientes abrazadas por una línea de inducción estén concentradas en las zonas de entrehierro por donde pasa.

Como consecuencia de lo anterior se define la **f.m.m. en un punto del entrehierro de una máquina eléctrica simétrica** (no necesariamente ideal) como la mitad de la f.m.m. de la línea de inducción magnética que pasa por el punto considerado. Por lo tanto, tiene un valor igual a la mitad de las corrientes abrazadas por la línea de inducción magnética que pasa por el punto considerado³.

A partir de ahora, salvo mención expresa en contra, cuando se utilice el símbolo \mathcal{F} o se hable de fuerza magnetomotriz (f.m.m.) se supone implícitamente que se está haciendo mención de la f.m.m. del entrehierro.

A la f.m.m. \mathcal{F} en un punto del entrehierro se le da el mismo signo que el que correspondería a la inducción magnética B que habría en dicho punto si la máquina fuera ideal. Luego, tiene signo positivo en las posiciones del entrehierro donde las líneas de campo salen del rotor hacia el estator.

La distribución de \mathcal{F} sólo depende de la distribución de corrientes a lo largo del entrehierro a que dan lugar los devanados de la máquina. Por lo tanto, no va a depender ni de la reluctancia de los núcleos magnéticos del rotor y del estator ni de la reluctancia del entrehierro; es decir, no estará influida por el valor del espesor δ del entrehierro. De esto resulta que las distribuciones de f.m.m. que se obtendrán más adelante para máquinas simétricas e ideales seguirán siendo válidas para máquinas con iguales devanados, pero que no sean ideales.

Es preciso resaltar que, por consiguiente, siempre es posible aplicar el principio de superposición a las f.m.m.s.

Tensión magnética del entrehierro F_δ

Se denomina **tensión magnética F_δ** del entrehierro a una magnitud función de la coordenada angular α y que está definida por esta integral a lo ancho del entrehierro (Fig. 11):

$$F_\delta = \int_{\text{Entrehierro}} \vec{H} \cdot d\vec{l} \quad (9)$$

En el entrehierro se verifica la ecuación (8) y que $\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H}$ (donde μ_0 es la permeabilidad magnética del aire). Además, en las zonas donde el entrehierro δ es pequeño, la tensión magnética sólo es debida a la componente radial del campo magnético. Luego:

$$F_\delta = \frac{\int_{\text{Entrehierro}} \vec{B} \cdot d\vec{l}}{\mu_0} = \frac{\delta}{\mu_0} B \quad (10)$$

³ Existe una definición más general, válida también para máquinas asimétricas, que dice que la f.m.m. en el entrehierro es igual a la integral según la circunferencia del entrehierro de la densidad lineal de corriente producida por las corrientes que circulan por los devanados de la máquina.

Recuérdese que en la expresión anterior δ representa al entrehierro equivalente, no al entrehierro geométrico δ_g (ver los apéndices).

Obsérvese que en cada posición angular α del entrehierro sucede que los signos de F_δ y B son iguales. Luego, el convenio de signos para F_δ es el mismo que para B : F_δ es positiva en los lugares del entrehierro donde las líneas de inducción salen del rotor y entran al estator.

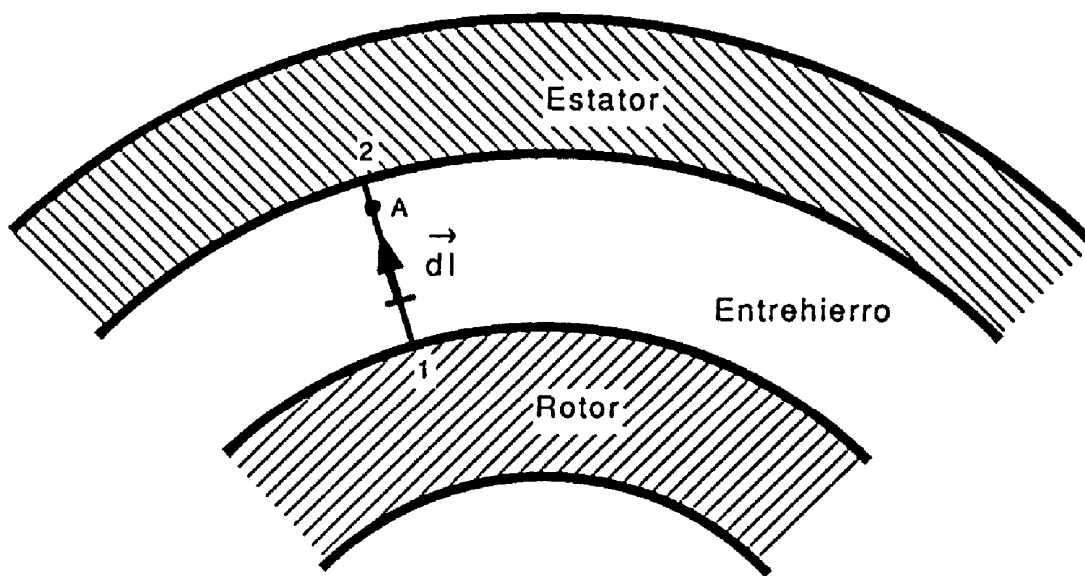


Fig. 11: La tensión magnética en el entrehierro para la coordenada α_A vale:

$$F_\delta(\alpha_A) = F_{12} = \int_1^2 \vec{H} \cdot d\vec{l}$$

Como se comprobará en el apartado siguiente (Ver la ecuación (16)), la tensión magnética es una magnitud que depende de la reluctancia del circuito magnético de la máquina, así como de la distribución de corrientes a lo largo del entrehierro debida a la disposición del bobinado.

CÁLCULO DE LA INDUCCIÓN MAGNÉTICA EN EL ENTREHIERRO DE UNA MÁQUINA ELÉCTRICA SIMÉTRICA

Tanto B como la f.m.m. \mathcal{F} o la tensión magnética F_δ del entrehierro de una máquina simétrica y sin pérdidas en el hierro varían en el espacio sólo con la coordenada angular α , tienen unas simetrías tales que sus distribuciones son idénticas en dos polos contiguos, pero cambiadas de signo, y tienen un eje de simetría en el centro de cada polo y un eje de antisimetría en cada línea neutra.

Así, por ejemplo, en las Figs. 8 y 9 se tiene que:

$$\begin{array}{lll}
 \mathcal{F}(\alpha_A) = -\mathcal{F}(\alpha_C) & \mathcal{F}(\alpha_A) = \mathcal{F}(\alpha_B) & \mathcal{F}(\alpha_B) = -\mathcal{F}(\alpha_C) \\
 F_\delta(\alpha_A) = -F_\delta(\alpha_C) & F_\delta(\alpha_A) = F_\delta(\alpha_B) & F_\delta(\alpha_B) = -F_\delta(\alpha_C) \\
 B(\alpha_A) = -B(\alpha_C) & B(\alpha_A) = B(\alpha_B) & B(\alpha_B) = -B(\alpha_C)
 \end{array}$$

Además, aún para máquinas no ideales siempre se puede aplicar el principio de superposición a la f.m.m. \mathcal{F} .

El proceso de cálculo de la inducción magnética B en el entrehierro de una máquina simétrica se realiza en tres etapas:

- a) Obtención de la f.m.m. \mathcal{F} del entrehierro.
- b) Determinación de la tensión magnética F_δ en el entrehierro a partir de la f.m.m. \mathcal{F} .
- c) Cálculo de la inducción magnética B a partir de la tensión magnética F_δ .

Obtención de la f.m.m. en el entrehierro \mathcal{F}

La f.m.m. \mathcal{F} en un punto del entrehierro de una máquina simétrica, no necesariamente ideal, se obtiene fácilmente a partir de la definición de \mathcal{F} . Lo que hay que hacer es sumar las corrientes abrazadas por la línea de inducción magnética que pasa por el punto considerado y dividir por dos. Para ello se tiene en cuenta que en una máquina simétrica una línea de inducción corta al entrehierro en dos puntos situados simétricamente respecto al eje de la distribución de corrientes que generan el campo magnético.

Al valor de \mathcal{F} así obtenido se le da el mismo signo que el que correspondería a la inducción magnética B en el mismo punto si la máquina fuera ideal.

Así, en las Figs. 8 y 9 para calcular la f.m.m. en el punto A, $\mathcal{F}(\alpha_A)$, se utiliza la línea de inducción ADGFA que corta al entrehierro también en el punto D, simétrico de A respecto al eje de la distribución de corrientes. Se cumplirá que:

$$\begin{array}{l}
 B(\alpha_D) = -B(\alpha_A) \\
 F_\delta(\alpha_D) = -F_\delta(\alpha_A) \\
 \mathcal{F}(\alpha_D) = -\mathcal{F}(\alpha_A)
 \end{array} \tag{11}$$

y que:

$$\mathcal{F}(\alpha_A) = |\mathcal{F}(\alpha_D)| = \frac{1}{2} \sum_{ADGFA} N \cdot i \tag{12}$$

Determinación de la tensión magnética F_{δ}

Para calcular el valor de la tensión magnética en una posición angular α del entrehierro de una máquina simétrica, no necesariamente ideal pero que carece de pérdidas en el hierro, se aplica el Teorema de Ampère en la línea de inducción que pasa por la posición angular considerada

Así, en las Figs. 8 y 9 a partir del Teorema de Ampère aplicado sobre la línea ADGFA se obtiene que:

$$\oint_{ADGFA} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_{ADGFA} N i \quad (13)$$

De la ecuación (12) se obtiene que:

$$\sum_{ADGFA} N \cdot i = 2 \mathcal{F}(\alpha_A) \quad (14)$$

y, además, sucede que:

$$\begin{aligned} \oint_{ADGFA} \vec{H} \cdot d\vec{l} &= \int_A^D \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_D^G \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_G^F \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_F^A \vec{H} \cdot d\vec{l} = \\ &= \int_{\text{Estator}} \vec{H} \cdot d\vec{l} - F_{\delta}(\alpha_D) + \int_{\text{Rotor}} \vec{H} \cdot d\vec{l} + F_{\delta}(\alpha_A) = \\ &= \int_{\text{Hierro}} \vec{H} \cdot d\vec{l} + F_{\delta}(\alpha_A) - F_{\delta}(\alpha_D) = \int_{\text{Hierro}} \vec{H} \cdot d\vec{l} + 2 F_{\delta}(\alpha_A) \end{aligned} \quad (15)$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} F_{\delta}(\alpha_A) &= \int_F^A \vec{H} \cdot d\vec{l} \\ F_{\delta}(\alpha_D) &= \int_G^D \vec{H} \cdot d\vec{l} = -\int_D^G \vec{H} \cdot d\vec{l} \\ F_{\delta}(\alpha_A) &= -F_{\delta}(\alpha_D) \\ \text{Hierro} &= \text{Estator} + \text{Rotor} \end{aligned}$$

De las ecuaciones 13, 14 y 15 se deduce que:

$$\begin{aligned} 2 \mathcal{F}(\alpha_A) &= \int_{\text{Hierro}} \vec{H} \cdot d\vec{l} + 2 F_{\delta}(\alpha_A) \\ F_{\delta}(\alpha_A) &= \mathcal{F}(\alpha_A) - \frac{1}{2} \int_{\text{Hierro}} \vec{H} \cdot d\vec{l} \end{aligned}$$

Luego, en general, en una máquina simétrica se cumple para cualquier posición angular que:

$$F_{\delta} = \mathcal{F} - \frac{1}{2} \int_{\text{Hierro}} \vec{H} \cdot d\vec{l} \quad (16)$$

La integral de la fórmula anterior se realiza a lo largo de la parte de la línea de inducción que está dentro de hierro; es decir, dentro de los núcleos magnéticos del estator y del rotor.

La relación (16) indica lo que ya se ha adelantado en el apartado anterior: La tensión magnética depende de \mathcal{F} (es decir, del reparto de corrientes en el entrehierro debida a la configuración del devanado) y de la reluctancia del circuito magnético de la máquina.

En una máquina ideal el hierro no tiene pérdidas y su permeabilidad es infinita; es decir, la intensidad magnética \vec{H} es nula en el hierro. En este caso, la expresión (16) se convierte en:

$$F_{\delta} = \mathcal{F} \quad (17)$$

(Máquina ideal)

En una máquina simétrica e ideal sucede que para todas las posiciones angulares el valor de la tensión magnética del entrehierro F_{δ} es igual al de la fuerza magnetomotriz (f.m.m.) del entrehierro \mathcal{F} .

Cálculo de la inducción magnética B

De acuerdo con las definiciones de B y de F_{δ} (ecuaciones 8 y 10) se tiene lo siguiente:

$$B = \frac{\mu_0}{\delta} F_{\delta} \quad (18)$$

Esta expresión permite calcular el valor de B en una posición angular cualquiera de una máquina, no necesariamente simétrica ni ideal, pero sin pérdidas en el hierro; a partir de los valores de la tensión magnética F_{δ} y del entrehierro equivalente δ ⁴ en la misma posición angular.

Es evidente que si la máquina tiene entrehierro de espesor δ uniforme las distribuciones espaciales de B y de F_{δ} tienen la misma forma.

⁴ Para el cálculo de δ , tanto si al entrehierro se lo considera uniforme como si se tiene en cuenta su variación debida a los dientes y las ranuras, véanse los apéndices de este texto.

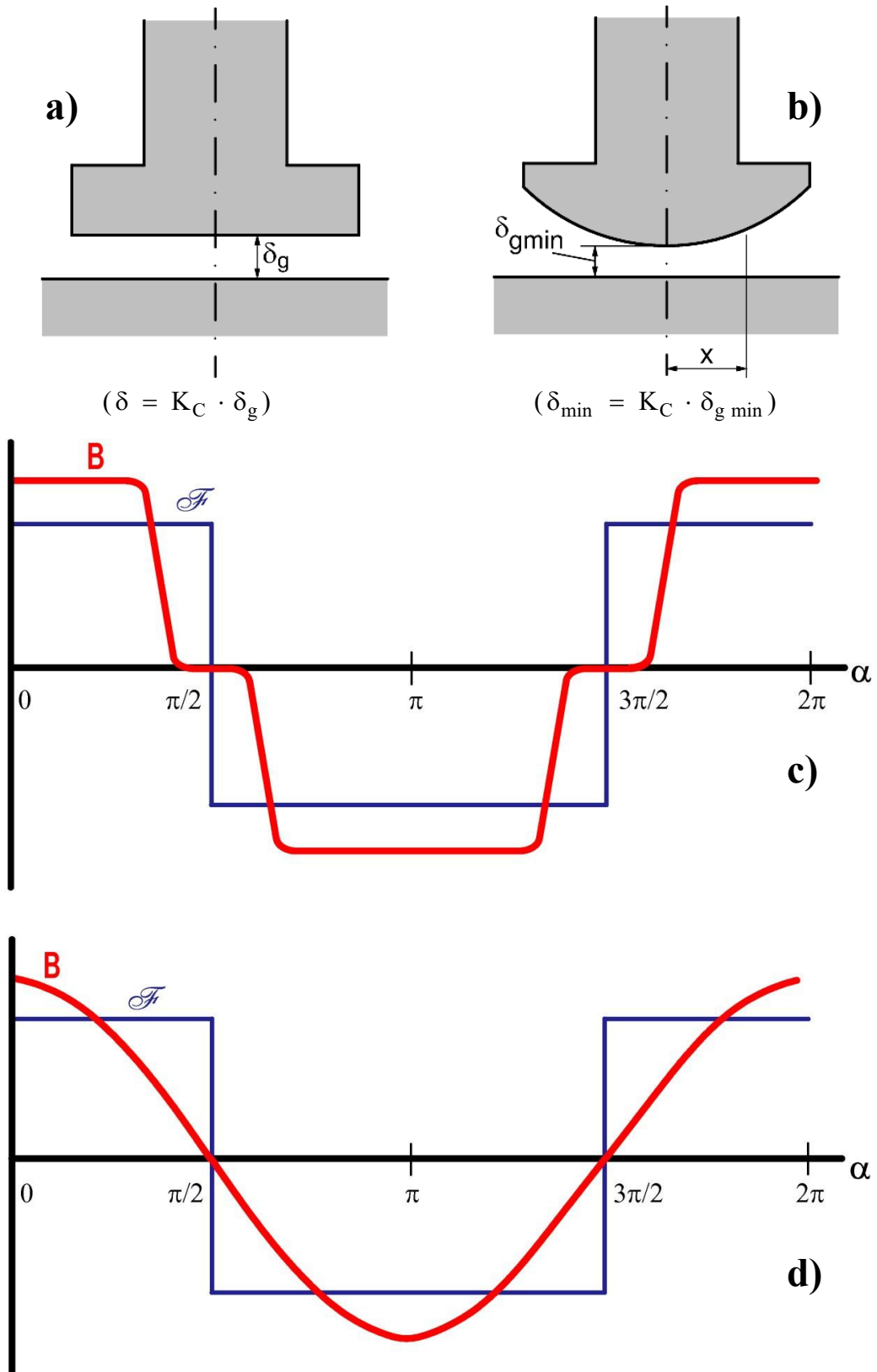


Fig. 12: Máquinas de polos salientes con (a) entrehierro constante bajo cada polo y (b) con entrehierro variable. (c) F.m.m. e inducción magnética creadas por el inductor de una máquina de polos salientes con entrehierro constante bajo cada polo; (d) Ídem con entrehierro variable.

INDUCCIÓN MAGNÉTICA CREADA POR EL DEVANADO INDUCTOR DE UNA MÁQUINA ELÉCTRICA SIMÉTRICA E IDEAL DE POLOS SALIENTES

Distribución de la f.m.m. \mathcal{F} y de la tensión magnética F_δ en el entrehierro

La Fig. 9 representa una máquina de polos salientes en la que cada polo tiene una bobina de N_p espiras recorridas por una corriente i_r . En esta figura se puede apreciar fácilmente que cualquier línea de inducción encierra una corriente total de $2 \cdot N_p \cdot i_r$ amperios.

Por consiguiente, la f.m.m. \mathcal{F} tiene el mismo valor absoluto en todos los puntos del entrehierro y es igual a la mitad de las corrientes encerradas por una línea de inducción:

$$\mathcal{F} = N_p \cdot i_r \quad (19)$$

y su signo es positivo frente a los polos Norte del rotor y negativo frente a los polos Sur del rotor. Se obtiene, pues, la distribución de f.m.m. representada en la Fig. 12.

Naturalmente si i_r es constante en el tiempo (corriente continua) la f.m.m. \mathcal{F} no varía con el tiempo; pero si i_r cambia en el tiempo, la f.m.m. \mathcal{F} es una función del tiempo.

Como se está estudiando una máquina ideal se cumple la ecuación (17) y la tensión magnética F_δ tiene el mismo valor que la f.m.m. \mathcal{F} .

Distribución de la inducción magnética en el entrehierro B

Si, como se muestra en la Fig. 12a, el entrehierro bajo cada polo tiene un espesor constante (despreciando las variaciones de entrehierro debidas al efecto de las ranuras), de la expresión (18) se obtiene que la inducción magnética B bajo cada polo tiene un valor constante:

$$B = \frac{\mu_0}{\delta} F_\delta \quad (20)$$

Fuera de los polos el espesor del entrehierro aumenta rápidamente hasta hacerse virtualmente infinito, lo que da lugar a una inducción magnética prácticamente nula.

Se obtiene, pues, la distribución de la inducción magnética representada en la Fig. 12c.

Si se varía de forma adecuada el espesor del entrehierro bajo cada polo, se puede obtener una distribución de la inducción magnética a lo largo del entrehierro prácticamente sinusoidal (Figs. 12b y 12d). En este caso, el valor de la inducción magnética también viene dado por la expresión (20), aunque ahora δ no tiene un valor constante. El valor máximo en el espacio de la inducción magnética B_{Max} corresponderá al centro del polo donde el entrehierro equivalente tiene un espesor mínimo δ_{min} :

CAMPO MAGNÉTICO EN EL ENTREHIERRO

$$B_{\text{Max}} = \frac{\mu_0}{\delta_{\text{min}}} F_{\delta} = \frac{\mu_0}{\delta_{\text{min}}} (N_p \cdot i_r) \quad (21)$$

El entrehierro equivalente mínimo δ_{min} se obtiene aplicando el Factor de Carter K_C (véanse los apéndices) al entrehierro geométrico mínimo $\delta_{g\text{min}}$ ($\delta_{\text{min}} = K_C \cdot \delta_{g\text{min}}$), el cual es igual al entrehierro medido directamente en el centro de un polo (Fig. 12b).

Se suele recomendar la siguiente ley de variación del espesor del entrehierro bajo los polos para obtener una inducción magnética sinusoidal:

$$\delta_g(x) = \frac{\delta_{g\text{min}}}{\cos\left(\frac{x}{t_p/2} \cdot \frac{\pi}{2}\right)} \quad (22)$$

En esta expresión x representa la distancia al centro del polo (Fig. 12) y t_p es el paso polar, ambas magnitudes medidas como arcos de la circunferencia que mira al entrehierro.

Ejercicio 1:

Un alternador hexapolar tiene su rotor de polos salientes. Alrededor de cada polo hay una bobina de 100 espiras y todas estas bobinas están conectadas en serie constituyendo el bobinado inductor de la máquina, el cual tiene una resistencia total de 50 Ω . Este devanado da lugar a una inducción magnética que varía sinusoidalmente a lo largo del entrehierro, ya que su espesor es variable, siendo su valor mínimo igual a 5 mm. La corriente que circula por este devanado es continua. ¿A qué tensión se debe conectar este bobinado para que el valor máximo en el espacio de la inducción magnética que origina sea de 1 Tesla?

El enunciado dice que:

$$N_p = 100 \text{ espiras}; \quad \delta_{\text{min}} = 0,005 \text{ metros}; \quad B_{\text{Max}} = 1 \text{ Tesla}$$

En el Sistema Internacional (S.I.) se cumple que:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$$

Luego la ecuación (21) queda así:

$$1 = \frac{4\pi \times 10^{-7}}{0,005} \cdot 100 \cdot i_r \rightarrow i_r = 39,8 \text{ A}$$

Dado que las bobinas polares están conectadas en serie, obteniéndose un devanado con una resistencia total de 50 Ω ; la tensión a aplicar se obtiene a partir de la Ley de Ohm:

$$39,8 \text{ A} \times 50 \Omega = 1990 \text{ V}$$

Luego es preciso conectar este devanado inductor a una tensión de 1990 voltios.

F.M.M. DE UN DEVANADO CONCENTRADO CON UNA SOLA BOBINA DE PASO DIAMETRAL POR PAR DE POLOS

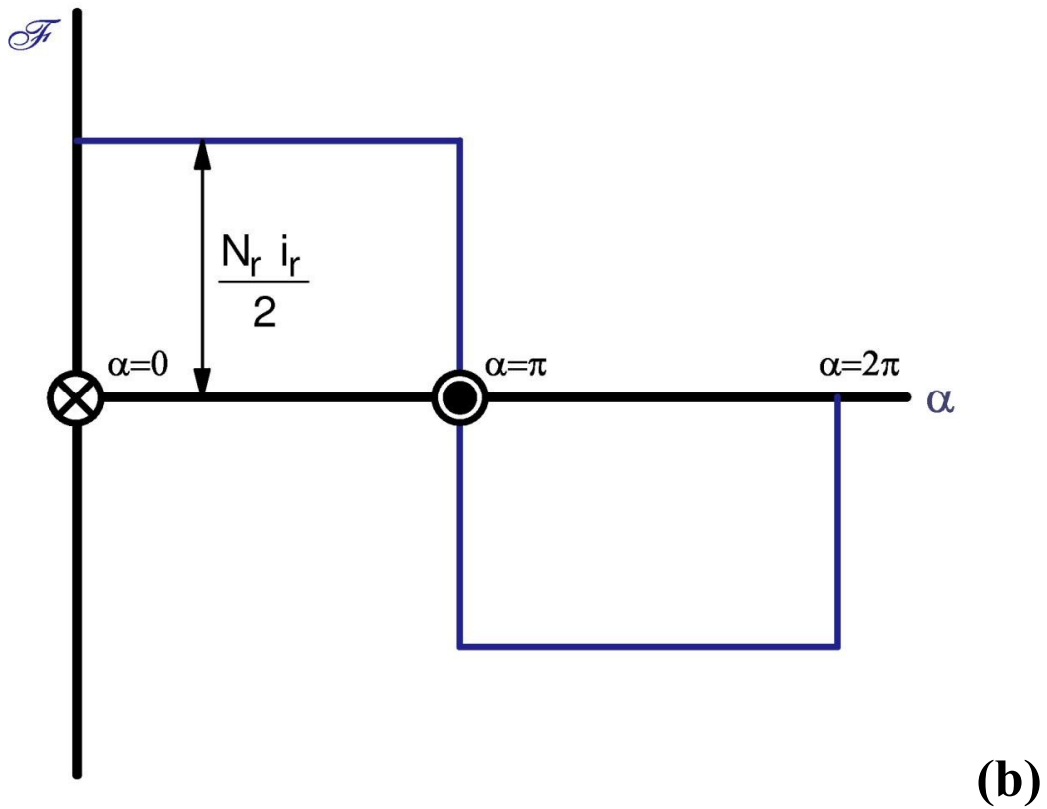
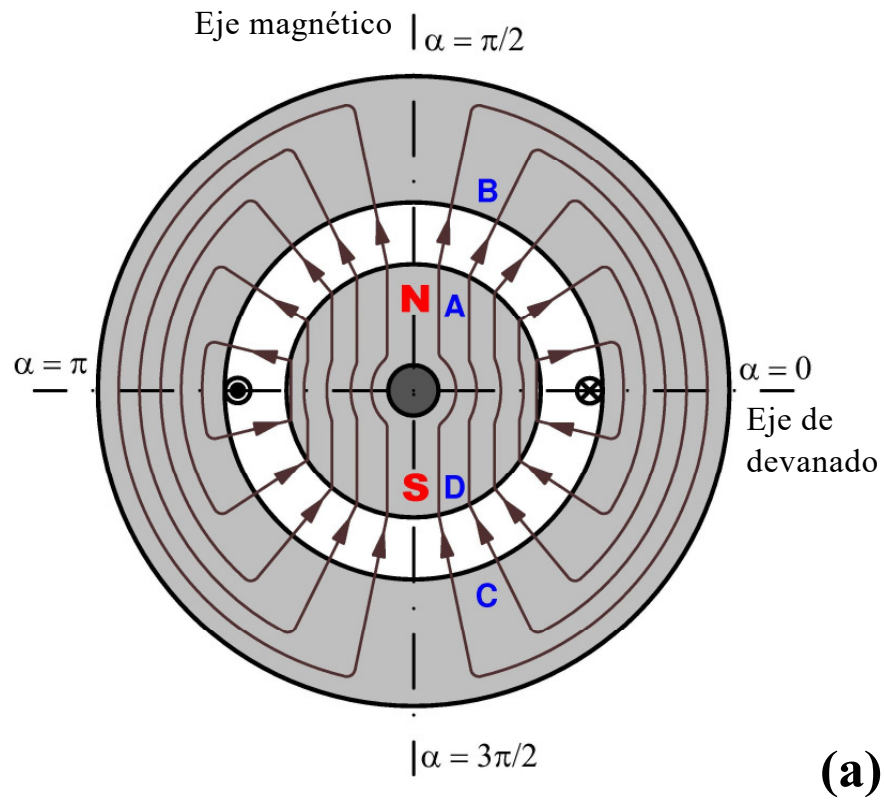


Fig. 13: F.m.m. generada por una bobina de paso diametral

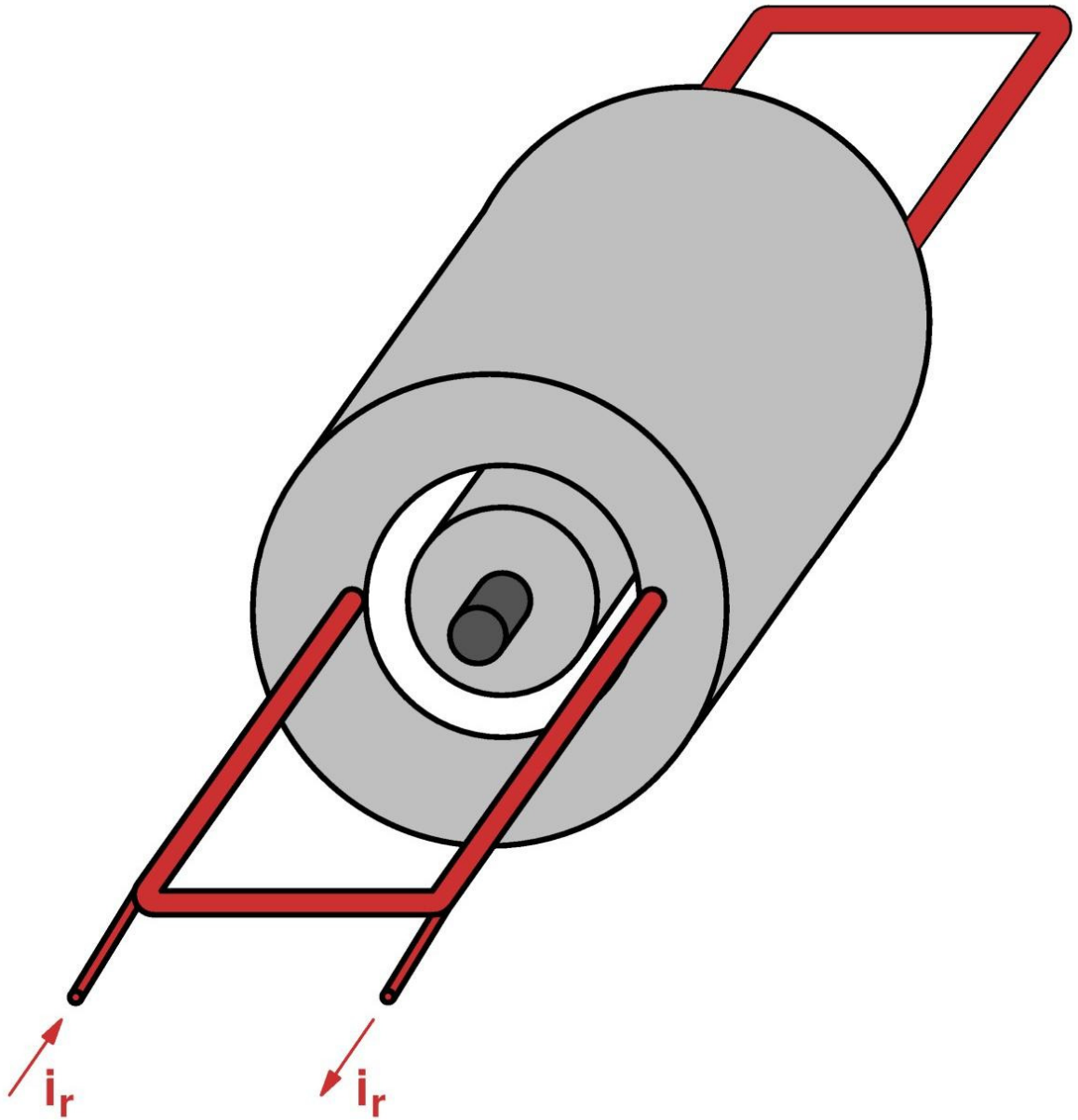


Fig. 14: Bobina de paso diametral similar a la mostrada en la Fig. 13

En las Figs. 13 y 14 se muestra una sección transversal de una máquina bipolar de entrehierro uniforme y con un devanado tal que consiste en una única fase con solamente una bobina diametral de N_r espiras en serie por la que circula la corriente i_r . Por lo tanto, en este devanado el número de bobinas por fase y par de polos b vale 1 ($b = 1$). Como la bobina consta de N_r espiras alojadas en el mismo par de ranuras ocurre que la fuerza magnetomotriz (f.m.m.) que genera es igual a N_r veces la que produce una sola espira. En la Fig. 13a se muestra que para analizar este caso se ha elegido el origen de coordenadas coincidente con el eje de devanado de la fase.

Este tipo de devanado es concentrado pues todas las espiras de un par de polos se concentran en un único par de ranuras y tienen todas ellas el mismo flujo magnético.

En la Fig. 13a se puede apreciar que cualquiera que sea la línea de inducción que se elija siempre va a encerrar N_r conductores. De esto se deduce que la f.m.m. del entrehierro va a tener el mismo valor absoluto en todos los puntos del entrehierro. Evidentemente, de acuerdo con los convenios adoptados, la f.m.m. del entrehierro \mathcal{F} tendrá signo positivo en los puntos en que las líneas de inducción salen hacia el exterior y signo negativo donde las líneas de inducción se dirigen hacia el centro de la máquina. Por lo tanto, \mathcal{F} tendrá la distribución indicada en la Fig. 13b.

Si una línea de inducción encierra en total $N_r i_r$ amperiosvuelas, la f.m.m. del entrehierro \mathcal{F} (de acuerdo con su definición) será la mitad de dicho valor:

$$\mathcal{F} = \frac{N_r i_r}{2} = \mathcal{F}_{\text{Máx}} \quad (29)$$

En la ecuación anterior se ha tenido en cuenta que como la f.m.m. es constante su valor máximo $\mathcal{F}_{\text{Máx}}$ es igual a dicho valor constante.

Si se hubiese tratado de un devanado concentrado de b bobinas diametrales de N_r espiras, colocadas todas ellas en el mismo par de ranuras de forma que se suman las f.m.m.s de todas las espiras para formar el par de polos del campo magnético, se obtiene una expresión más general que la (29):

$$\mathcal{F} = b \frac{N_r i_r}{2} = \mathcal{F}_{\text{Máx}} \quad (30)$$

En la Fig. 15 se muestra una máquina similar a la de la Fig. 13, salvo que en ésta no hay una bobina sino tres: a-a', b-b' y c-c' recorridas por la misma corriente. Cada bobina genera un par de polos, luego ahora el campo magnético no tiene dos polos sino seis. Dado que sigue habiendo una bobina diametral de N_r espiras con una corriente i_r por cada par de polos, se obtiene la misma distribución de f.m.m. por par de polos que en la Fig. 13. En la Fig. 15b se muestra esta distribución de f.m.m. en función de la coordenada angular, tanto cuando ésta se mide como ángulo geométrico α_g como cuando se mide como ángulo eléctrico α .

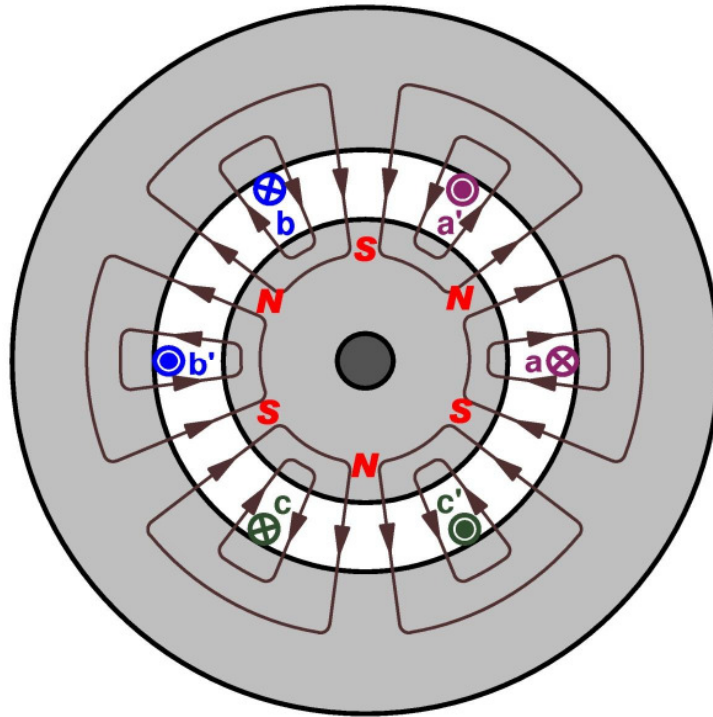
En este devanado tan peculiar que se está analizando cada bobina es un grupo polar. En los devanados de c.a. los grupos polares de una fase suelen conectarse en serie; pero, en ocasiones, se conectan formando a' ramas en paralelo. Por lo tanto, en el caso más general se tiene que este tipo de devanado genera en el entrehierro una f.m.m. de amplitud constante de valor:

$$i_r = \frac{i}{a'} \quad N_f = N a' \quad b N_r = \frac{N_f}{p} = \frac{N a'}{p}$$

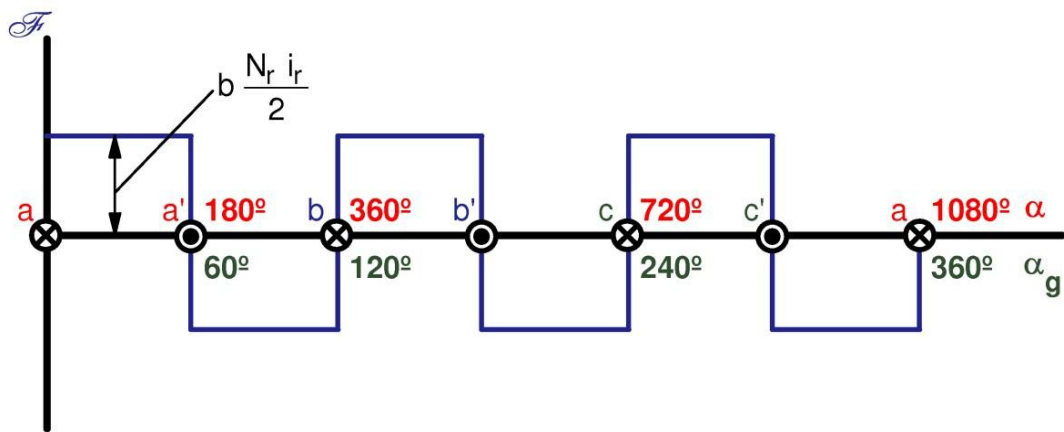
$$\mathcal{F}_{\text{Máx}} = b \frac{N_r i_r}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{i}{a'} \right) \cdot \left(\frac{N a'}{p} \right) = \frac{N i}{2 p}$$

$$\mathcal{F}_{\text{Máx}} = \frac{N i}{2 p} \quad (31)$$

Donde N es el número de espiras efectivas en serie de una fase (es decir, el número de espiras de una rama en paralelo) e i es la corriente total de la fase.



(a)



(b)

Fig. 15: F.m.m. generada por una fase con una bobina de paso diametral por par de polos en una máquina hexapolar

La distribución de f.m.m. a lo largo del entrehierro de las Figs. 13 y 15 es una función periódica de la coordenada angular α , por lo tanto, se puede descomponer en serie de Fourier. Las simetrías que presenta esta onda de f.m.m. y el origen de coordenadas elegido hacen que su serie de Fourier solamente contenga términos de tipo seno con armónicos cuyo orden h es impar. Así, en la Fig. 16 se ha representado la distribución espacial de la f.m.m. y sus armónicos primero, tercero y quinto.

Por lo tanto, se tiene que:

$$\mathcal{F} = \sum_{h=1}^{\infty} \mathcal{F}_h = \sum_{\substack{h=1 \\ (h = \text{impar})}}^{\infty} \mathcal{F}_{hM} \text{sen}(h\alpha) \quad (32)$$

El valor máximo del armónico h es \mathcal{F}_{hM} y vale:

$$\mathcal{F}_{hM} = \frac{4}{\pi h} \mathcal{F}_{\text{Máx}} = \frac{4}{\pi h} \frac{N i}{2 p} \quad (33)$$

Obsérvese la nomenclatura utilizada: el subíndice “Máx” indica el valor máximo de la distribución espacial de la f.m.m. en el entrehierro \mathcal{F} , mientras que el subíndice “M” se refiere al valor máximo de un armónico de la descomposición en serie de Fourier de \mathcal{F} .

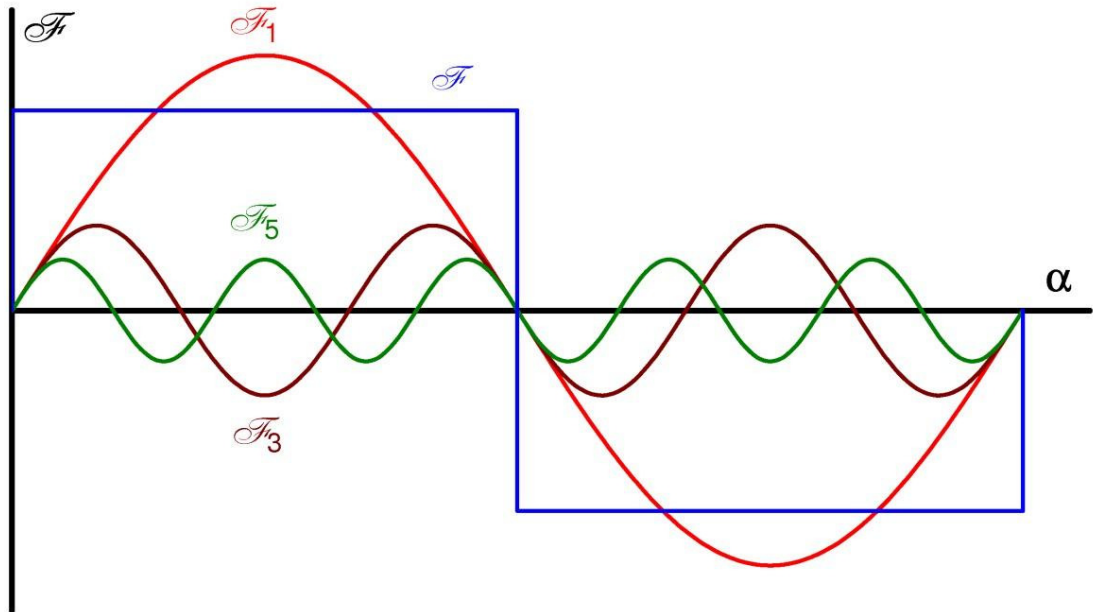


Fig. 16: Descomposición en serie de Fourier de la onda de f.m.m.

El valor máximo del primer armónico o armónico fundamental se denominará \mathcal{F}_{1M} o más simplemente \mathcal{F}_M . De la relación (33) se obtiene que:

$$\mathcal{F}_M = \mathcal{F}_{1M} = \frac{4}{\pi} \mathcal{F}_{\text{Máx}} = \frac{4}{\pi} \frac{N i}{2 p} \quad (34)$$

$$\mathcal{F}_{hM} = \frac{\mathcal{F}_M}{h} \quad (35)$$

De la relación (35) se deduce que a medida que aumenta el orden h de un armónico su amplitud disminuye. En la mayor parte de los casos va a bastar con tomar solamente el primer armónico de la f.m.m. para estudiar el comportamiento de la máquina.

En la Fig. 16 también se observa que si la distribución de la f.m.m. tiene $2p$ polos, su primer armónico tiene también $2p$ polos, el tercero tiene $3(2p)$ polos, el quinto tiene $5(2p)$ polos, ... y, en general el armónico de orden h tiene $h(2p)$ polos magnéticos. (Recuérdese que cada semiciclo de la onda de f.m.m.; es decir, cada parte de la onda donde las líneas de campo magnético tienen el mismo sentido, constituye un polo magnético).

F.M.M. DE UN DEVANADO MONOFÁSICO DISTRIBUIDO

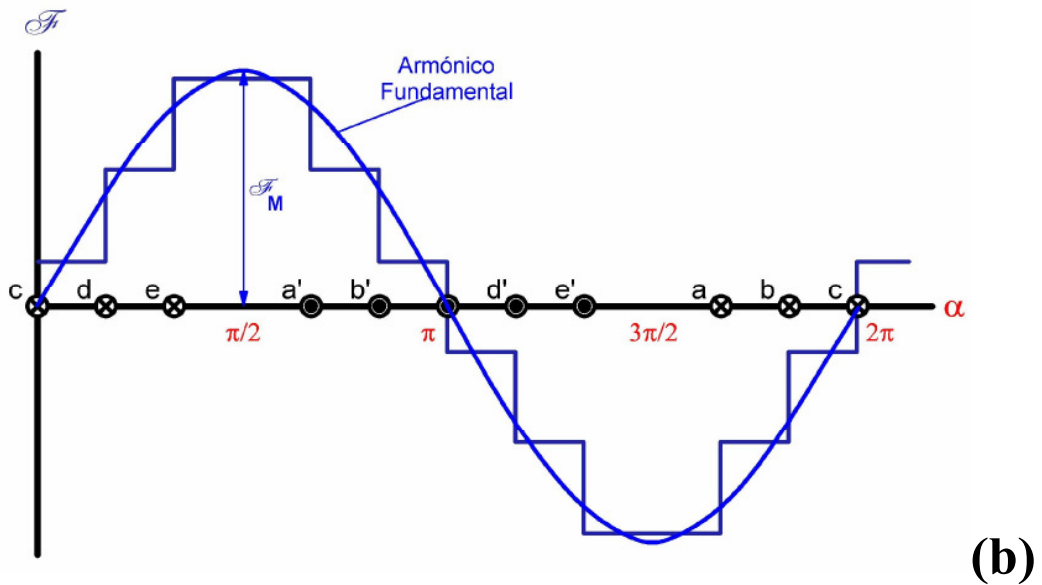
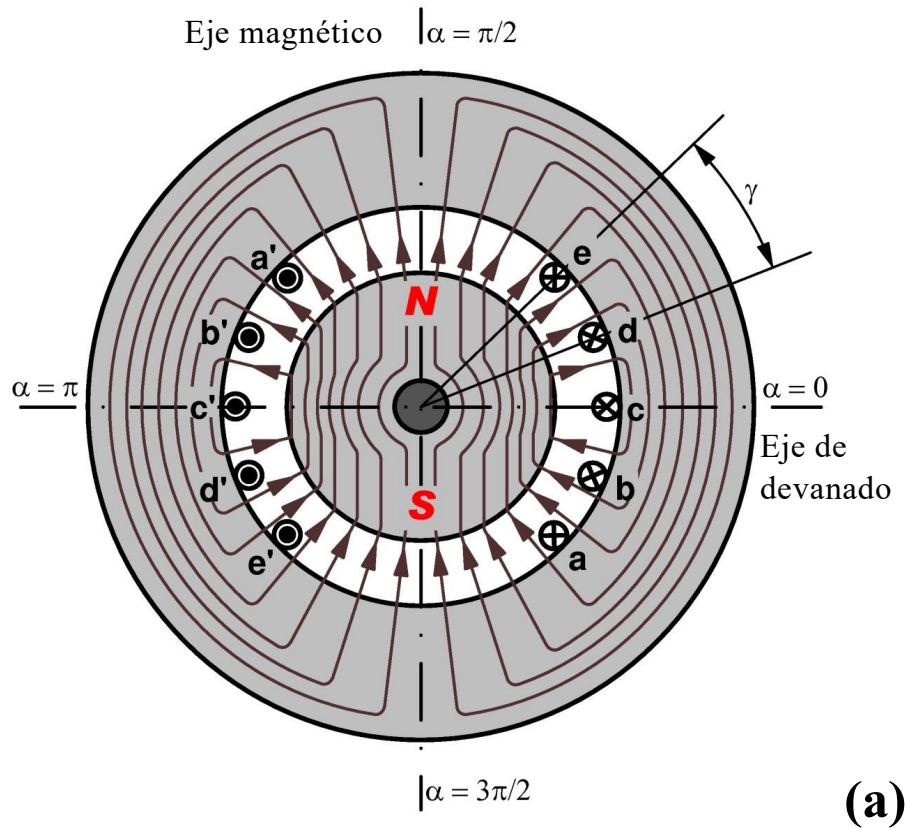


Fig. 17: F.m.m. de una fase con 5 bobinas distribuidas

En la Fig. 17 se ha representado una máquina bipolar con un devanado de tambor monofásico distribuido formado por 5 bobinas de paso diametral en serie de N_r espiras cada una y recorridas por la corriente i_r . Las cinco bobinas son a-a', b-b', c-c', d-d' y e-e' y el ángulo eléctrico de separación entre dos ranuras consecutivas es γ . En este caso el número de bobinas por fase y par de polos b vale 5 ($b = 5$). En esta figura se ha elegido el origen de coordenadas coincidente con el eje de devanado de esta fase.

Es evidente que el número de conductores abrazados por las líneas de inducción no va a ser siempre el mismo, siendo mayor para las líneas de inducción que cruzan el entrehierro cerca del eje magnético de la fase y menor para las líneas de inducción que cruzan el entrehierro cerca del eje de devanado. Esto hace que la distribución espacial de la f.m.m. en el entrehierro tenga la forma escalonada representada en la Fig. 17b. El valor máximo de esta f.m.m. tiene el mismo valor que en el caso del devanado concentrado explicado en el apartado anterior:

$$\mathcal{F}_{\text{Máx}} = b \frac{N_r i_r}{2} = \frac{N i}{2 p} \quad (36)$$

Es evidente que en este caso la distribución espacial de la f.m.m. en el entrehierro, aunque tenga el mismo valor máximo que cuando el devanado es concentrado, tiene una forma más parecida a la sinusoidal y, por lo tanto, es más adecuada para una máquina de corriente alterna.

Esto se puede apreciar mejor cuando se realiza la descomposición en serie de Fourier de la distribución de f.m.m. de la Fig. 17b. Esta descomposición, al igual que para el devanado concentrado, solamente tiene términos en seno con armónicos de orden impar:

$$\mathcal{F} = \sum_{h=1}^{\infty} \mathcal{F}_h = \sum_{\substack{h=1 \\ (h = \text{impar})}}^{\infty} \mathcal{F}_{hM} \text{sen}(h\alpha) \quad (37)$$

$$\mathcal{F}_{hM} = \frac{4}{\pi h} \xi_{dh} \mathcal{F}_{\text{Máx}} = \frac{4}{\pi h} \xi_{dh} \frac{N i}{2 p} \quad (38)$$

donde ξ_{dh} es el *factor de distribución* del devanado para el armónico de orden h . Este parámetro puede ser positivo o negativo, su valor absoluto es siempre inferior a 1 y se calcula mediante la fórmula siguiente, donde q es el número de ranuras por polo y fase del bobinado:

$$\xi_{dh} = \frac{\text{sen} \frac{q h \gamma}{2}}{q \text{sen} \frac{h \gamma}{2}} \quad (39)$$

Para el primer armónico o armónico fundamental, el factor de distribución se denomina ξ_{d1} o más simplemente ξ_d :

$$\xi_d = \xi_{d1} = \frac{\text{sen } \frac{q \gamma}{2}}{q \text{ sen } \frac{\gamma}{2}} \quad (40)$$

Con lo que, de (38) se tiene que

$$\mathcal{F}_M = \mathcal{F}_{1M} = \frac{4}{\pi} \xi_d \mathcal{F}_{\text{Máx}} = \frac{4}{\pi} \xi_d \frac{N i}{2 p} \quad (41)$$

$$\mathcal{F}_{hM} = \frac{\mathcal{F}_M}{h} \frac{\xi_{dh}}{\xi_d} \quad (42)$$

Dado que el valor del factor de distribución para el primer armónico ξ_d tiene un valor próximo a la unidad, mientras que para armónicos de orden superior ξ_{dh} suele tener un valor muy pequeño, las relaciones (42) y (35) indican que el contenido armónico es menor en el devanado distribuido en comparación con el devanado concentrado. Es más, se puede diseñar el devanado distribuido de forma que se anule el factor de devanado de cierto armónico para que éste no aparezca en la descomposición en serie de Fourier; aunque normalmente, más que anular un armónico dado, lo que interesa es construir un devanado en el que se minimicen los armónicos cuyo orden h sea pequeño (ya que son, en principio (según la relación (32)), los que tendrán mayor valor máximo).

Obsérvese las ventajas que presenta el distribuir el devanado. Al situar el devanado en varias ranuras por par de polos resulta más fácil el colocar todas las espiras que son necesarias para el funcionamiento de la máquina. Si todas las espiras tuvieran que estar alojadas en un solo par de ranuras por par de polos, estas ranuras serían enormes para que cupieran todas las espiras. Por otra parte, así se consigue en el entrehierro una f.m.m. que presenta una distribución espacial más próxima a la sinusoidal; es decir, con menor contenido armónico.

Como se ha indicado anteriormente, para el estudio del comportamiento de máquinas de c.a. basta con considerar solamente el primer armónico de la descomposición en serie de Fourier.

F.M.M. DE UN DEVANADO MONOFÁSICO

Considérese una fase que tiene N espiras efectivas en serie, está recorrida por una corriente total i , las bobinas de esta fase están distribuidas de forma que ocupan q ranuras por polo y fase y, además, están acortadas un ángulo eléctrico β (Fig. 18). Finalmente, este devanado está alojado en ranuras inclinadas un ángulo eléctrico α_i respecto a la dirección axial (véase la Fig. 19). En la Fig. 19 se ha exagerado la inclinación de las ranuras que, en la práctica, raramente supera la distancia entre dos ranuras consecutivas.

La distribución de f.m.m. que origina esta fase es escalonada (parecida a la representada en la Fig. 17b), con un valor máximo:

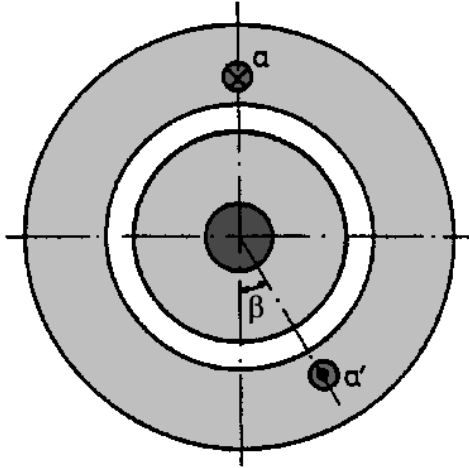


Fig. 18: Bobina acortada un ángulo eléctrico β

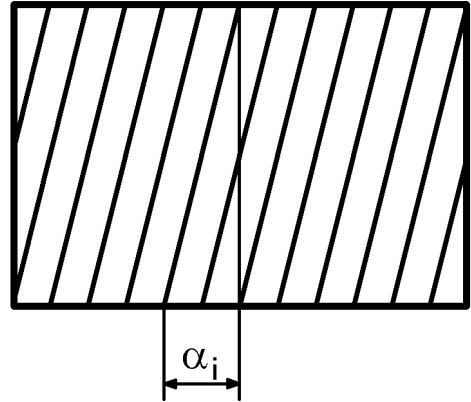


Fig. 19: Ranuras inclinadas un ángulo eléctrico α_i .

$$\mathcal{F}_{\text{Máx}} = b \frac{N_r i_r}{2} = \frac{N i}{2 p} \quad (43)$$

y con esta descomposición en serie de Fourier:

$$\mathcal{F} = \sum_{h=1}^{\infty} \mathcal{F}_h = \sum_{\substack{h=1 \\ (h = \text{impar})}}^{\infty} \mathcal{F}_{hM} \text{sen}(h\alpha) \quad (44)$$

$$\mathcal{F}_{hM} = \frac{4}{\pi h} \xi_{bh} \mathcal{F}_{\text{Máx}} = \frac{4}{\pi h} \xi_{bh} \frac{N i}{2 p} \quad (45)$$

donde ξ_{bh} es el factor de bobinado de la fase para el armónico de orden h:

$$\xi_{bh} = \xi_{dh} \cdot \xi_{ah} \cdot \xi_{ih} \quad (46)$$

ξ_{ah} es el factor de acortamiento o factor de paso de esta fase para el armónico h. Este parámetro solamente se aplica en devanados de doble capa:

$$\xi_{ah} = \cos\left(\frac{h \beta}{2}\right) \quad (47)$$

ξ_{ih} es el factor de inclinación de las ranuras para el armónico h:

$$\xi_{ih} = \frac{\text{sen} \frac{h \alpha_i}{2}}{\frac{h \alpha_i}{2}} \quad (48)$$

En la expresión anterior el ángulo eléctrico α_i debe expresarse en radianes. Muchos autores no incluyen el factor de inclinación de ranuras ξ_{ih} dentro del factor de bobinado ξ_{bh} y lo añaden como un coeficiente aparte en la expresión (45). Al igual que pasa con el factor de distribución, ξ_{dh} , todos estos parámetros pueden ser positivos o negativos y su valor absoluto no es superior a 1.

Para el primer armónico o armónico fundamental se tiene que:

$$\mathcal{F}_M = \mathcal{F}_{1M} = \frac{4}{\pi} \xi_b \mathcal{F}_{M\text{Máx}} = \frac{4}{\pi} \xi_b \frac{N i}{2 p} \quad (50)$$

$$\mathcal{F}_{hM} = \frac{\mathcal{F}_M}{h} \frac{\xi_{bh}}{\xi_b} \quad (51)$$

$$\xi_b = \xi_d \cdot \xi_a \cdot \xi_i \quad (52)$$

$$\xi_d = \frac{\text{sen } \frac{q \gamma}{2}}{q \text{ sen } \frac{\gamma}{2}} \quad (53)$$

$$\xi_a = \cos \frac{\beta}{2} \quad (54)$$

$$\xi_i = \frac{\text{sen } \frac{\alpha_i}{2}}{\frac{\alpha_i}{2}} \quad (55)$$

Las relaciones (51) y (35) indican que distribuyendo el devanado, acortando el paso e inclinando las ranuras se puede conseguir que el contenido armónico sea mucho más pequeño en este devanado en comparación con el devanado concentrado. Esto es así porque, para la mayor parte de los armónicos, el valor del factor de bobinado ξ_{bh} es pequeño, mientras que para el armónico fundamental el factor de bobinado ξ_b tiene un valor próximo a 1.

De las expresiones (50) y (34) se deduce que, por lo que se refiere únicamente al primer armónico de la distribución de f.m.m. en el entrehierro, esta fase se comporta como un devanado concentrado de $(N \cdot \xi_b)$ espiras efectivas en serie (número de espiras de una de una de sus ramas en paralelo).

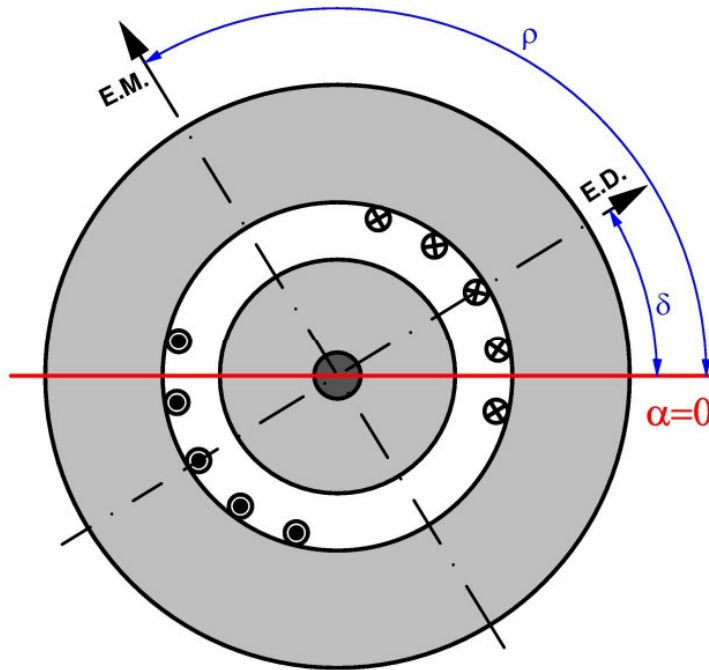
En la práctica se puede despreciar el contenido armónico de la distribución espacial de la f.m.m. en el entrehierro sin cometer un error apreciable. Esto significa considerar que solamente existe el armónico fundamental de la serie de Fourier:

$$\mathcal{F} \approx \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_M \text{ sen } \alpha \quad (56)$$

En la expresión anterior la f.m.m aparece como una función del seno de la coordenada angular porque hasta ahora se ha supuesto siempre que se toma el origen de coordenadas coincidente con el eje de devanado de la fase considerada.

En la Fig. 20 se ha representado una máquina con un devanado monofásico donde el origen de coordenadas se ha escogido de tal manera que el eje de devanado (E.D.) forma el ángulo eléctrico δ con el origen de coordenadas, lo que significa que el eje magnético (E.M.) está en la posición dada por el ángulo eléctrico ρ , tal que:

$$\rho = \delta + \frac{\pi}{2} \quad (57)$$



*Fig. 20: Devanado monofásico cuyos ejes de simetría forman los ángulos δ y ρ con el origen de coordenadas.
(E.D.: Eje de devanado; E.M.: Eje magnético)*

En este caso se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &\approx \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_M \text{sen}(\alpha - \delta) = \\ &= \mathcal{F}_M \cos\left(\alpha - \delta - \frac{\pi}{2}\right) = \mathcal{F}_M \cos(\alpha - \rho) \end{aligned} \quad (58)$$

Es decir, a partir de ahora se colocará el origen de coordenadas donde resulte más cómodo en cada caso y se podrá representar la distribución espacial de la f.m.m. en el entrehierro como una función seno o como una función coseno, según sea más conveniente en cada caso.

ARMÓNICOS DE RANURA

En el apartado anterior se ha mostrado como distribuyendo el devanado, acortando el paso e inclinando las ranuras se consigue una distribución espacial de la f.m.m. del entrehierro que se acerca más a la forma sinusoidal que en un devanado concentrado y, por lo tanto, es más adecuada para las máquinas de c.a. Esto es debido a que los factores de bobinado de los armónicos son, normalmente, mucho más pequeños que el del armónico fundamental (véase la relación (51)).

Pero no solamente esto, cuando más adelante se estudien los efectos de los armónicos del campo magnético en el entrehierro sobre un devanado de la máquina -tanto por las f.e.m.s que se inducen como por los pares que se generan sobre el devanado- se verá que también están afectados por los factores de bobinado. Esto quiere decir, que los efectos de estos armónicos sobre el devanado son proporcionalmente menores que los debidos al primer armónico.

En consecuencia, el hecho de conseguir un factor de bobinado casi igual a la unidad para el primer armónico y factores de bobinado pequeños para los demás armónicos de f.m.m., no solamente logra que la forma de la f.m.m. se acerque a la sinusoidal; sino que, además, hace que los efectos de los armónicos distintos del primero sobre los devanados de la máquina sean proporcionalmente menores. Por ambas razones, la mayor parte de los fenómenos de una máquina se pueden analizar despreciando los armónicos de la distribución de la f.m.m.

Sin embargo, en un devanado dado hay una serie de armónicos cuyos factores de distribución y de acortamiento de paso son exactamente iguales a los del primer armónico y, por lo tanto, no se pueden reducir distribuyendo el devanado y acortando el paso. Estos armónicos se denominan *armónicos de ranura*, los cuales tienen un orden h verifica la siguiente relación:

$$h = 2 k m q \pm 1 = 2 k Q \pm 1 \quad (59)$$

donde m es el número de fases del devanado, q es el número de ranuras por polo y fase, Q es el número de ranuras por polo y k es un número entero positivo.

Como estos armónicos no se pueden reducir tan eficazmente como los demás interesa que sean armónicos de orden h relativamente alto. De esta manera, según la relación (50), darán lugar a un valor máximo \mathcal{F}_{hM} no muy grande a pesar de que el factor de bobinado no sea pequeño. Sobre todo, interesa que un mismo armónico no sea a la vez armónico de ranura del devanado del estator y del devanado del rotor.

Esto indica que cuando se diseña una máquina eléctrica hay que tener en consideración cuáles van a ser los armónicos de ranura de cada devanado para procurar que sus efectos no sean importantes. Así se podrán seguir despreciando los armónicos superiores de la fuerza magnetomotriz (f.m.m.) a la hora de estudiar la máquina y ésta tendrá un comportamiento mejor.

CAPAS DE CORRIENTE

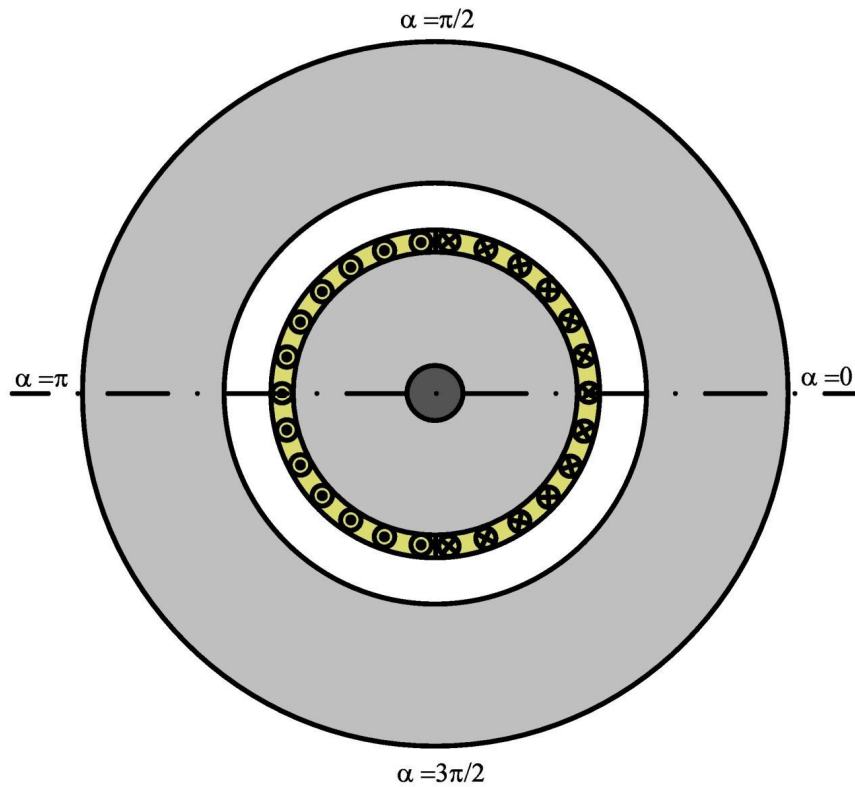


Fig. 21a: Capa de corriente uniforme

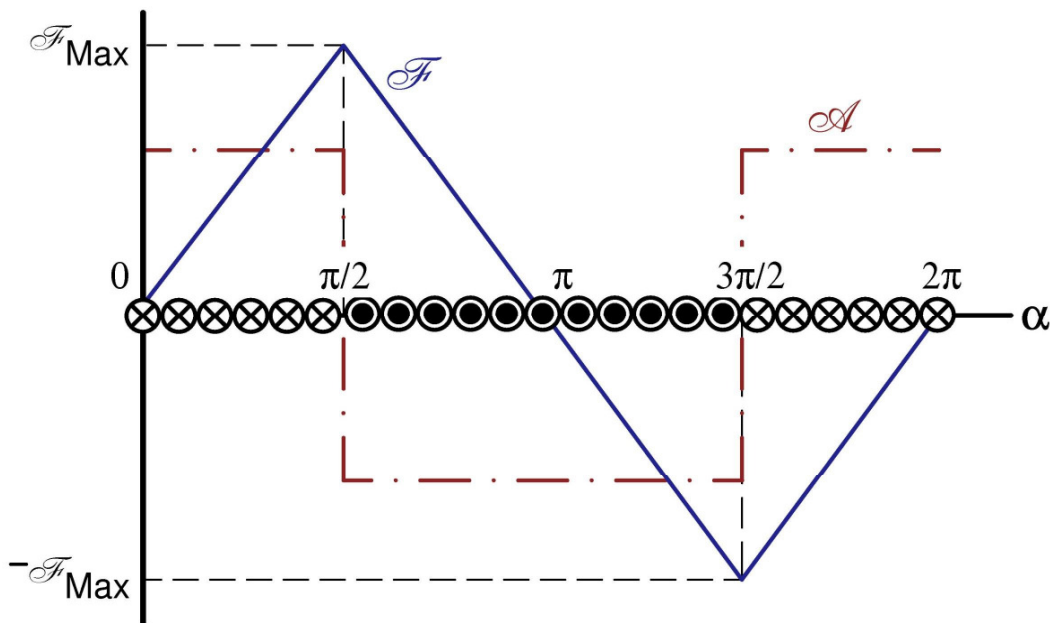


Fig. 21b: F.m.m. originada por una capa de corriente uniforme

Supóngase un devanado distribuido en el que el mismo número de espiras se va repartiendo en un número de ranuras cada vez mayor, por lo que cada vez estarán más juntas. Llevando este proceso al límite las ranuras llegarán a tocarse, por lo que dejarán de existir los dientes, y se tendrá un devanado en el que los conductores se repartirán de

forma ininterrumpida a lo largo de la circunferencia del entrehierro. Al circular corriente por este devanado se tendrá una capa de corriente.

Por lo tanto, una capa de corriente es originada un devanado idealizado en el que los conductores están colocados de forma continua sobre la circunferencia del entrehierro.

Para indicar como es el reparto de corrientes que se origina al hacer circular corriente por este tipo de devanado se utiliza la densidad lineal de corriente \mathcal{A} ; es decir, la cantidad de corriente por unidad de longitud de arco de circunferencia del entrehierro.

En la Fig. 21a se ha representado el caso más sencillo: el de la capa de corriente uniforme en la que la densidad lineal de corriente \mathcal{A} tiene la misma amplitud en todos los puntos del entrehierro y, evidentemente, cambia de signo cada π radianes eléctricos. El devanado inducido de una máquina de corriente continua se puede considerar que genera una capa de corriente de este tipo.

La f.m.m. del entrehierro que se genera en este caso varía linealmente y está representada en la Fig. 21b. Su valor máximo \mathcal{F}_{Max} vale:

$$\mathcal{F}_{\text{Max}} = \frac{\pi d \mathcal{A}}{4 p} \quad (60)$$

donde d es el diámetro del entrehierro, p es el número de pares polos y \mathcal{A} es el valor constante en el espacio que tiene en este caso la densidad lineal de corriente.

Cuando se tiene una capa de corriente uniforme que no ocupa la totalidad de los π radianes eléctricos de cada polo, sino que abarca solamente un ángulo eléctrico γ_t (Fig. 22a) se obtiene la f.m.m. truncada que se muestra en la Fig. 22b y cuyo valor máximo es:

$$\mathcal{F}_{\text{Max}} = \frac{\gamma_t d \mathcal{A}}{4 p} \quad (61)$$

En esta relación el ángulo eléctrico γ_t debe expresarse en radianes.

Otro tipo de capa de corriente interesante es la capa de corriente sinusoidal. En este caso la densidad lineal de corriente no es uniforme, sino que varía de forma sinusoidal con la coordenada angular:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_M \cos \alpha \quad (62)$$

La f.m.m. en el entrehierro que se origina en este caso es perfectamente sinusoidal, estando desfasada en el espacio 90° eléctricos con respecto a la densidad lineal de corriente (véase la Fig. 23):

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_M \text{ sen } \alpha \quad (63)$$

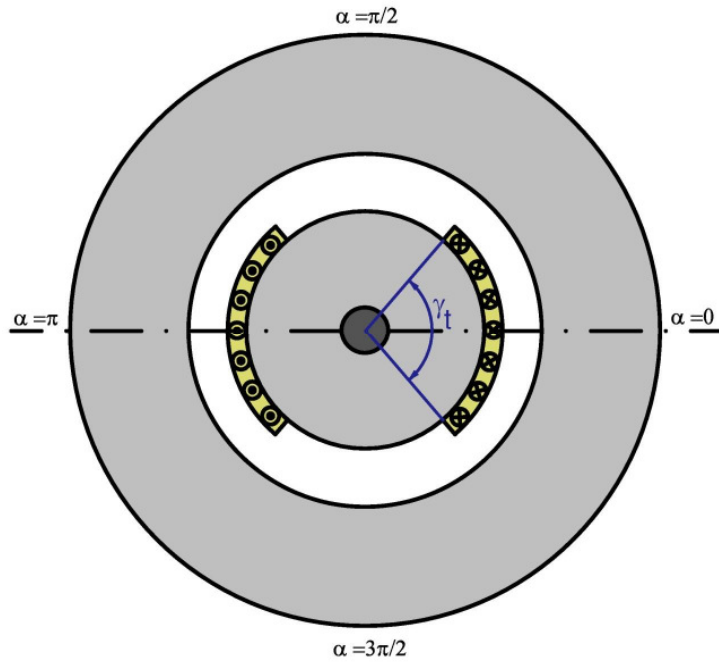


Fig. 22a: Capa de corriente uniforme truncada

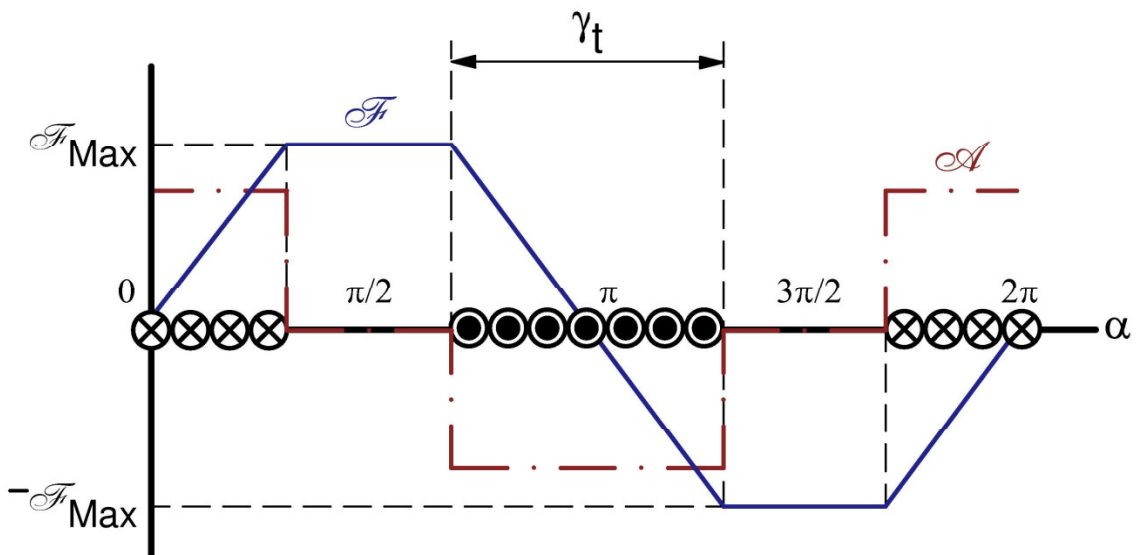


Fig. 22b: F.m.m. debida a una capa de corriente uniforme truncada

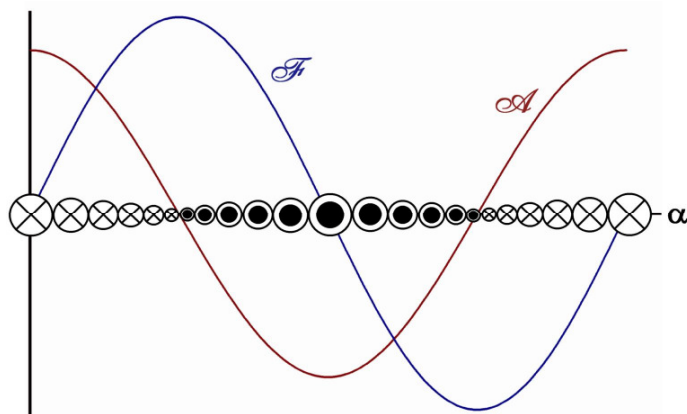


Fig. 23: F.m.m. y densidad lineal de corriente de una capa de corriente sinusoidal

El valor máximo de esta f.m.m. se obtiene mediante esta relación:

$$\mathcal{F}_M = \frac{d \cdot \mathcal{A}_M}{2 p} \quad (64)$$

En las expresiones (62) a (64) se pueden usar indistintamente los subíndices “Máx” y “M” para referirse a los valores máximos de la distribución espacial de \mathcal{F} y \mathcal{A} . Esto es así porque al tratarse de funciones perfectamente sinusoidales de la coordenada angular α , su descomposición en serie de Fourier solamente contiene el primer armónico. En consecuencia, el valor máximo de este primer armónico es también el valor máximo de la función total.

F.M.M. DE UN DEVANADO MONOFÁSICO ALIMENTADO CON C.A.

Como se ha indicado en apartados anteriores, en un devanado monofásico la fuerza magnetomotriz en el entrehierro \mathcal{F} varía en el espacio únicamente con la coordenada angular α (de forma perfectamente sinusoidal si se desprecian todos los armónicos de f.m.m. menos el armónico fundamental). Por otra parte, si la corriente total i que circula por la fase varía con el tiempo sucede, de acuerdo con la ecuación (50), que el valor máximo del primer armónico es variable con el tiempo y, consecuentemente, \mathcal{F} también será función del tiempo. Luego, en el caso más general, la f.m.m. \mathcal{F} es una función de la coordenada angular y del tiempo (véase la relación (58):

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\alpha, t) \approx \mathcal{F}_M(t) \text{sen}(\alpha - \delta) = \mathcal{F}_M(t) \text{cos}(\alpha - \rho) \quad (65)$$

$$\mathcal{F}_M(t) = \frac{4}{\pi} \xi_b \frac{N \cdot i(t)}{2 p} \quad (66)$$

Por esto, a partir de ahora se tendrá en cuenta la siguiente distinción con respecto a la nomenclatura: $\mathcal{F}_M(t)$ designará a este valor máximo en el espacio de la distribución de la f.m.m. el cual, a su vez, es función del tiempo, según se aprecia en la expresión (66); y se designará como \mathcal{F}_M al mayor de los valores de $\mathcal{F}_M(t)$, es decir, al valor máximo a la vez en el espacio y en el tiempo. Si I_M es el valor máximo de la corriente que circula por la fase, a partir de la relación (66) se deduce que:

$$\mathcal{F}_M = \frac{4}{\pi} \xi_b \frac{N \cdot I_M}{2 p} \quad (67)$$

Considérese un devanado monofásico como el de la Fig. 24 alimentado con la corriente alterna perfectamente sinusoidal representada en la Fig. 25.

Esta corriente viene dada por la siguiente expresión:

$$i = i(t) = I_M \text{cos}(\omega t) = \sqrt{2} I \text{cos}(\omega t) \quad (68)$$

donde I_M es el valor máximo de la corriente e I es su valor eficaz.

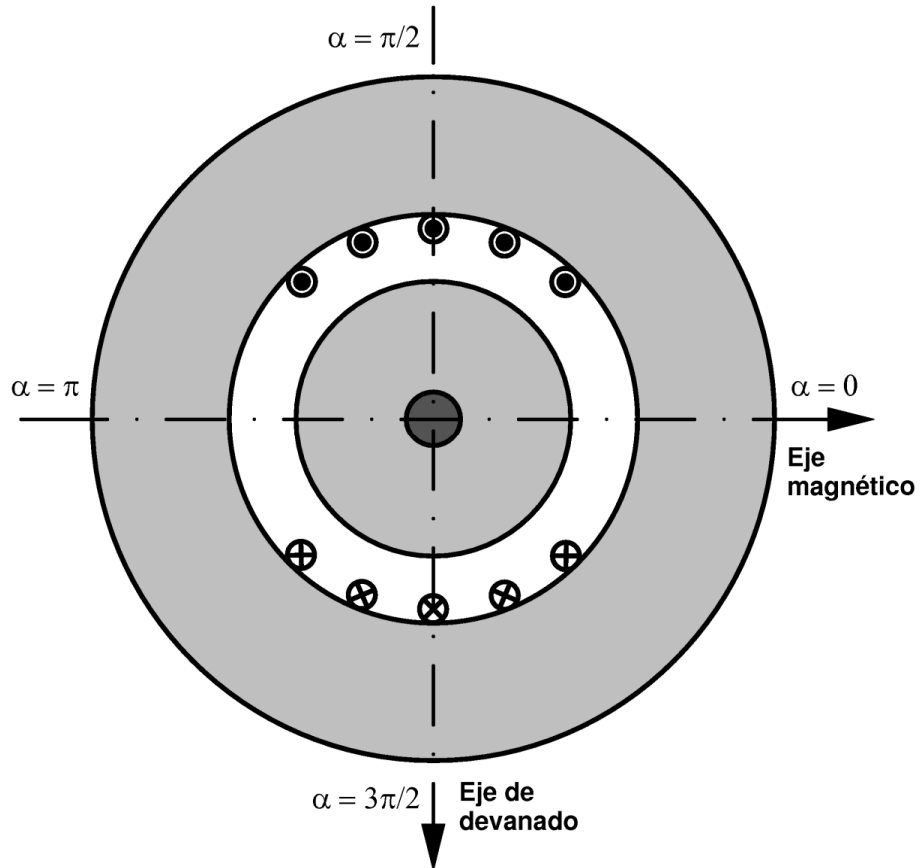


Fig. 24: Devanado monofásico

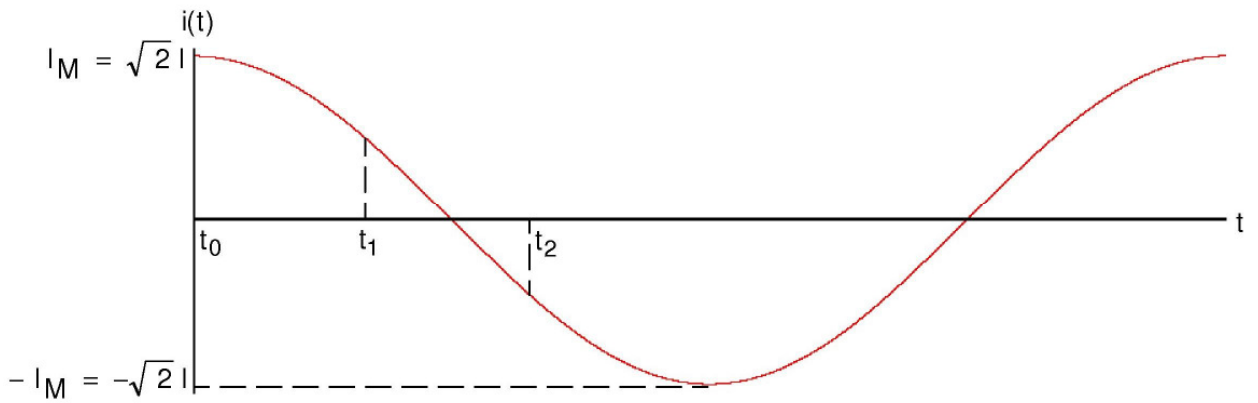


Fig. 25: Corriente alterna sinusoidal

En la Fig. 24 se ha escogido como origen de coordenadas el eje magnético de la fase. Por consiguiente, la f.m.m. en el entrehierro generada por este devanado es así:

$$\mathcal{F}(\alpha, t) = \mathcal{F}_M(t) \cos \alpha \quad (69)$$

$$\mathcal{F}_M(t) = \frac{4}{\pi} \xi_b \frac{N}{2p} i(t) = \frac{4}{\pi} \xi_b \frac{N}{2p} [I_M \cos(\omega t)] \quad (70)$$

Luego, de las relaciones (69) y (70) se deduce que:

$$\boxed{\mathcal{F}(\alpha, t) = \mathcal{F}_M \cos \alpha \cos (\omega t)} \quad (71)$$

$$\mathcal{F}_M = \frac{4}{\pi} \xi_b \frac{N \cdot I_M}{2 p} = \frac{4}{\pi} \xi_b \frac{N \cdot \sqrt{2} I}{2 p} = 0,9 \xi_b \frac{N \cdot I}{p}$$

$$\boxed{\mathcal{F}_M = 0,9 \xi_b \frac{N \cdot I}{p}} \quad (72)$$

Como se indicó anteriormente, \mathcal{F}_M es el máximo de los valores máximos en el espacio. Es decir, es el máximo en el espacio y en el tiempo.

Esta onda de f.m.m. es pulsante; es decir, es una distribución de f.m.m. que permanece inmóvil pero cuya amplitud varía con el tiempo.

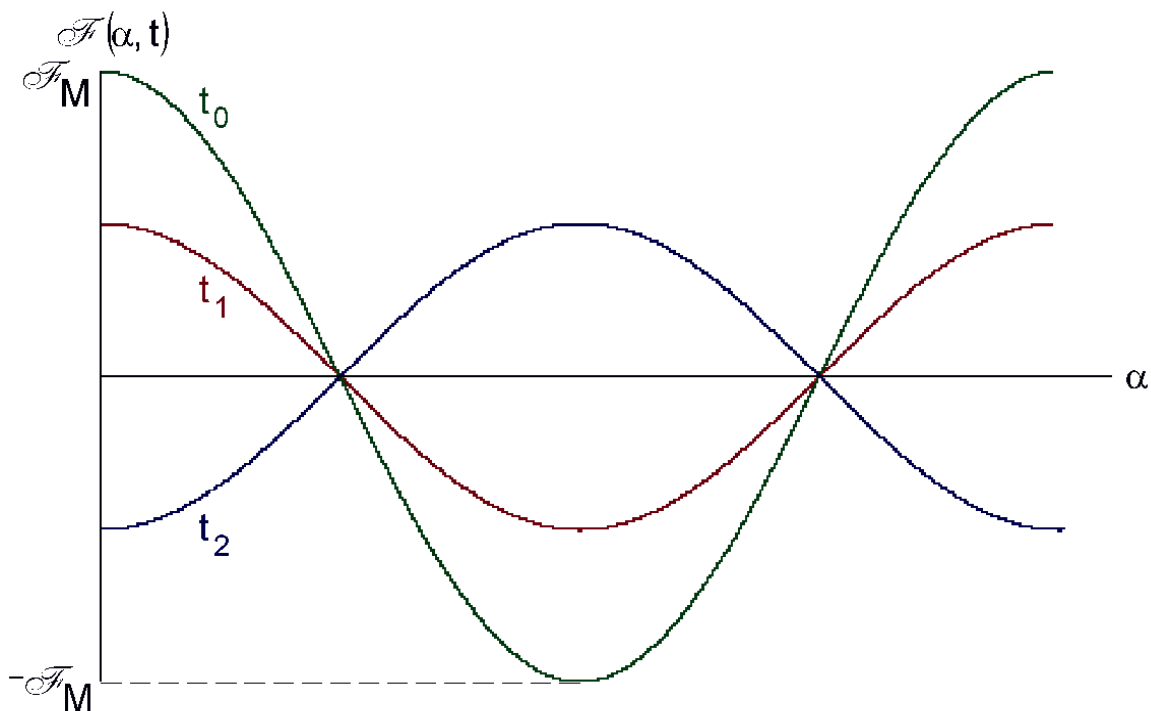


Fig. 26: F.m.m. pulsante

En la Fig. 26 se ha mostrado cómo es esta f.m.m. en los tres instantes de tiempo, t_0 , t_1 y t_2 , señalados en la Fig. 25. En la Fig. 26 se aprecia como esta onda pasa por cero siempre en los mismos puntos del entrehierro. Análogamente, esta f.m.m. alcanza sus valores máximos, positivos y negativos, en los mismos puntos del entrehierro, aunque estos valores máximos varían con el tiempo e, incluso, cambian de signo de un instante a otro.

F.M.M. DE UN DEVANADO POLIFÁSICO. TEOREMA DE FERRARIS

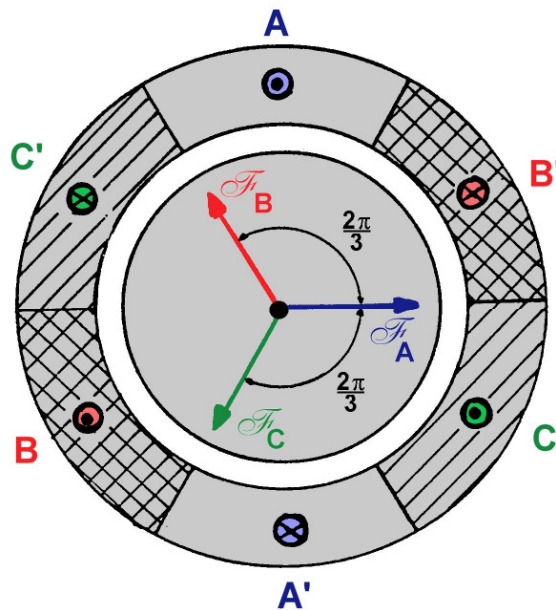


Fig. 27: Devanado trifásico

En la Fig. 27 se ha representado de forma esquemática una máquina eléctrica bipolar con un devanado trifásico. Este devanado es equilibrado, luego consta de tres fases idénticas (A-A', B-B' y C-C') separadas entre sí un ángulo eléctrico de $2\pi/3$ radianes. Cada fase consta de bobinas distribuidas y, en su caso, con el paso acortado, por lo que se pueden despreciar los armónicos superiores de la f.m.m. y tener en cuenta solamente su armónico fundamental.

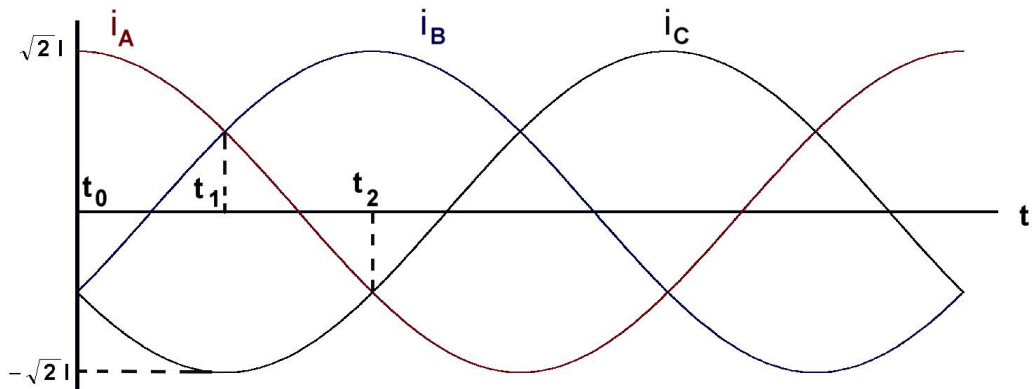


Fig. 28: Sistema trifásico equilibrado de corrientes

En la Fig. 28 se ha representado un sistema trifásico equilibrado de corrientes perfectamente sinusoidales de valor eficaz I:

$$\begin{aligned}
 i_A &= i_A(t) = \sqrt{2} I \cos(\omega t) \\
 i_B &= i_B(t) = \sqrt{2} I \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \\
 i_C &= i_C(t) = \sqrt{2} I \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)
 \end{aligned}
 \tag{73}$$

En la Fig. 27 se ha tomado como origen de coordenadas el eje magnético de la fase A. Esto hace que los ejes magnéticos de las fases B y C formen, respectivamente, $2\pi/3$ y $-2\pi/3$ radianes eléctricos con el origen de coordenadas. Por lo tanto, si se alimentan con el sistema trifásico de corrientes de la Fig. 28 estas tres fases generan la siguientes f.m.m.s en el entrehierro:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_A(\alpha, t) &= \mathcal{F}_M \cos(\alpha) \cos(\omega t) \\ \mathcal{F}_B(\alpha, t) &= \mathcal{F}_M \cos\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \mathcal{F}_C(\alpha, t) &= \mathcal{F}_M \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)\end{aligned}\quad (74)$$

En estas expresiones se observa que el valor máximo en el espacio y en el tiempo \mathcal{F}_M de la f.m.m. es igual para las tres fases, pues todas ellas son idénticas y están alimentadas con corrientes del mismo valor eficaz. Como se indicó en el apartado anterior (ecuación (72)), se tiene que:

$$\mathcal{F}_M = 0,9 \xi_b \frac{N \cdot I}{p} \quad (75)$$

La f.m.m. total debida a la acción conjunta de las tres fases se puede obtener aplicando el principio de superposición a las f.m.m. de las fases. Así, sumando las tres f.m.m. que aparecen en las relaciones (74) y teniendo en cuenta esta propiedad trigonométrica:

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) + \cos(x + y)] \quad (76)$$

se llega a la siguiente expresión:

$$\boxed{\mathcal{F}(\alpha, t) = \frac{3}{2} \mathcal{F}_M \cos(\omega t - \alpha) = \frac{3}{2} \mathcal{F}_M \cos(\omega t - p \alpha_g)} \quad (77)$$

En la Fig. 29 se ha representado la distribución espacial de la f.m.m. en el entrehierro dada por la relación (77) para los tres instantes, t_0 , t_1 y t_2 , indicados en la Fig. 28. Se observa que en los tres instantes la f.m.m. conserva el mismo valor máximo ($\frac{3}{2} \mathcal{F}_M$), pero de un instante a otro la onda espacial de f.m.m. se ha desplazado. También se puede apreciar que el desplazamiento de la onda de f.m.m. entre el instante t_0 y t_1 es el mismo que entre t_1 y t_2 . Como entre t_0 y t_1 hay el mismo incremento de tiempo que entre t_1 y t_2 , se deduce que la velocidad con que se mueve la f.m.m. a lo largo de la circunferencia del entrehierro es constante. En este caso se aprecia en la Fig. 29 que el sentido de giro de esta f.m.m. es positivo, pues esta onda se mueve en el sentido de aumento de la coordenada angular α . Es decir, la ecuación (77) representa una onda espacial de f.m.m. en el entrehierro que gira en sentido antihorario.

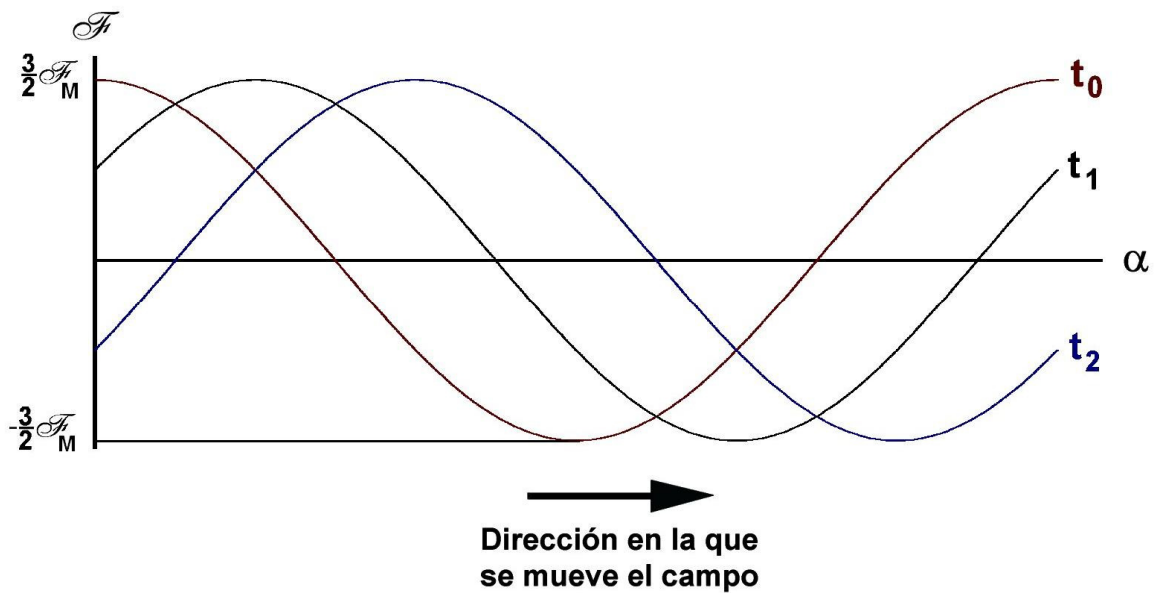


Fig. 29: Campo giratorio

De esto se deduce el **Teorema de Ferraris** para un devanado trifásico:

Si a un devanado trifásico equilibrado (formado por tres fases idénticas desfasadas entre sí en el espacio $2\pi/3$ radianes eléctricos) se lo alimenta con un sistema trifásico equilibrado de corrientes perfectamente sinusoidales (de igual valor eficaz y desfasadas entre sí $2\pi/3$ radianes en el tiempo) se obtiene una f.m.m. giratoria de amplitud constante (igual a $3/2$ del valor máximo \mathcal{F}_M en el espacio y en el tiempo de la f.m.m. generada por una sola fase) y velocidad constante.

El Teorema de Ferraris se puede generalizar a un devanado polifásico de cualquier número de fases m :

“Cuando un devanado polifásico, formado por m fases idénticas, tales que entre dos fases consecutivas hay una separación en el espacio de $2\pi/m$ radianes eléctricos, es alimentado por un sistema polifásico equilibrado de m corrientes, desfasadas en el tiempo $2\pi/m$ radianes, se genera en el entrehierro una f.m.m. que gira a velocidad constante y cuyo valor máximo es $m/2$ veces el valor máximo en el espacio y en el tiempo (\mathcal{F}_M) de la f.m.m. generada por una sola fase actuando aisladamente”.

Este teorema se puede aplicar a cualquier tipo de devanado polifásico equilibrado; es decir, a cualquier devanado equilibrado donde el número de fases m no sea igual a la unidad. En el caso de *devanado bifásico* ($m = 2$) se tienen dos fases que están desfasadas en el espacio 90° ($\pi/2$ radianes) eléctricos y que se alimentan con corrientes desfasadas 90° en el tiempo.

La velocidad de giro de la f.m.m. creada a partir del Teorema de Ferraris se denomina velocidad de sincronismo. Dependiendo de las unidades utilizadas para medir esta velocidad se tiene que:

- * Velocidad de sincronismo medida en *revoluciones por minuto* (r.p.m.):

$$n_1 = \frac{60 f}{p} \quad (78a)$$

- * Velocidad de sincronismo medida en *radianes eléctricos por segundo* (rad elec/s):

$$\omega_1 = 2 \pi f \quad (78b)$$

- * Velocidad de sincronismo medida en *radianes geométricos por segundo* (rad/s):

$$\Omega_1 = \frac{2 \pi f}{p} \quad (78c)$$

En estas expresiones p es el número de pares de polos del devanado y f es la frecuencia de las corrientes ($\omega = 2 \pi f$).

Nótese que cuando la velocidad de sincronismo se mide en radianes eléctricos por segundo (ω_1) su valor es igual al de la pulsación ω de las corrientes de las fases.

El Teorema de Ferraris es fundamental para comprender el funcionamiento de las máquinas eléctricas de corriente alterna polifásicas. Este teorema indica que mediante un devanado polifásico -que puede estar situado en el estator y, consecuentemente, estar inmóvil- se puede crear un campo magnético móvil en el entrehierro similar al que generaría un imán permanente que girara a la velocidad de sincronismo. Es fácil comprender que a partir de este teorema sea fácil el diseñar un motor en el que este campo giratorio mueva el rotor o un generador en el que el campo magnético móvil induzca f.e.m.s sobre el devanado inducido.

Obsérvese que en el enunciado del Teorema de Ferraris se habla de un sistema equilibrado de corrientes -no de tensiones- para generar la f.m.m. giratoria. Aunque para obtener este sistema equilibrado de corrientes se utilice un sistema de tensiones, son las corrientes las que generan la f.m.m. y son éstas las que hay que procurar que varíen en el tiempo de la forma más sinusoidal posible. Esto es interesante cuando el devanado polifásico se alimenta mediante un convertidor electrónico, pues habrá que escoger éste para que proporcione corrientes con poca deformación, aunque las tensiones pueden presentar mayor discrepancia con respecto a la forma de onda sinusoidal.

Otra observación interesante es que al combinar las f.m.m.s de m fases, cada una de ellas con p pares de polos, para dar lugar a la f.m.m. giratoria, ésta tiene también p pares de polos. Es decir, los polos de las f.m.m.s de las m fases no se suman cuando se genera la f.m.m. giratoria y el número de pares de polos p es el mismo para la f.m.m. de cada fase actuando individualmente y para la f.m.m. giratoria total.

En el devanado trifásico ($m = 3$) se aprecia que si se permutan las corrientes que alimentan a dos de las fases, por ejemplo, i_B e i_C , y se realiza otra vez el desarrollo hecho anteriormente (ecuaciones (74) a (77)) se obtiene esta f.m.m.:

$$\mathcal{F}(\alpha, t) = \frac{3}{2} \mathcal{F}_M \cos(\omega t + \alpha) \quad (79)$$

la cual corresponde a una f.m.m. giratoria idéntica a la correspondiente a la ecuación (77), pero que gira en sentido contrario (horario). Por lo tanto, para invertir el sentido de giro de la f.m.m. giratoria generada por un devanado trifásico basta con permutar las corrientes de dos de las fases.

El valor máximo de la f.m.m. giratoria debida a un devanado trifásico ($m = 3$) queda así si se aplica la relación (75):

$$\mathcal{F}_{\text{Trif M}} = \frac{3}{2} \mathcal{F}_M = \frac{3}{2} 0,9 \xi_b \frac{N I}{p}$$

$$\boxed{\mathcal{F}_{\text{Trif M}} = 1,35 \xi_b \frac{N \cdot I}{p}} \quad (80)$$

En todo este apartado se ha supuesto que las corrientes son perfectamente sinusoidales en el tiempo y que las f.m.m.s creadas por las fases tienen una distribución perfectamente sinusoidal en el espacio (porque se pueden despreciar los armónicos de orden superior de la distribución espacial de la f.m.m. de cada fase). Si se sigue suponiendo que las corrientes son perfectamente sinusoidales en el tiempo, pero no se desprecian los armónicos de la onda espacial de la f.m.m. de cada fase, sucede lo siguiente:

- * Los armónicos espaciales de orden $\boxed{h = 3 \cdot k}$ (donde k es un número entero positivo, lo que hace que h tome los valores: 3, 9, 15, 21,...) de las tres fases se anulan entre sí. Por lo tanto, la f.m.m. total carece de armónicos espaciales múltiplos de 3.
- * Los armónicos espaciales de orden $\boxed{h = 6 \cdot k - 1}$ ($h = 5, 11, 17, 23, \dots$) de las tres fases generan una f.m.m. que gira en sentido contrario a la debida al primer armónico y cuya velocidad de giro vale:

$$\Omega_h = -\frac{\Omega_1}{h} \text{ rad/s} \quad (81a)$$

donde Ω_1 es la velocidad de giro del primer armónico de la f.m.m.

- * Los armónicos espaciales de orden $\boxed{h = 6 \cdot k + 1}$ ($h = 1, 7, 13, 19, \dots$) de las tres fases generan una f.m.m. que gira en el mismo sentido que la debida al primer armónico y cuya velocidad de giro vale:

$$\Omega_h = +\frac{\Omega_1}{h} \text{ rad/s} \quad (81b)$$

El hecho de que la f.m.m. de un devanado trifásico carezca de armónicos espaciales múltiplos de 3 ayuda a conseguir una onda de f.m.m. en el entrehierro más perfectamente sinusoidal en este tipo de bobinados.

TEOREMA DE LEBLANC

En un apartado anterior se comprobó que un devanado monofásico alimentado con corriente alterna creaba la f.m.m. pulsante dada por la relación (71). Si a dicha relación se la aplica la propiedad trigonométrica (76) se llega a:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\alpha, t) &= \mathcal{F}_M \cos \alpha \cos (\omega t) = \\ &= \left[\frac{\mathcal{F}_M}{2} \cos (\omega t + \alpha) \right] + \left[\frac{\mathcal{F}_M}{2} \cos (\omega t - \alpha) \right] \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{F}(\alpha, t) = \left[\frac{\mathcal{F}_M}{2} \cos (\omega t + p \alpha_g) \right] + \left[\frac{\mathcal{F}_M}{2} \cos (\omega t - p \alpha_g) \right]} \quad (82)$$

Es decir, en los bobinados monofásicos se verifica el **Teorema de Leblanc**:

“Un devanado monofásico alimentado con corriente alterna monofásica genera una f.m.m. pulsante en el entrehierro (cuyo valor máximo es \mathcal{F}_M), la cual puede descomponerse en dos campos giratorios de la misma amplitud ($\mathcal{F}_M/2$) y velocidades de giro de igual valor, pero de sentidos opuestos”.

Este teorema sirve para estudiar el comportamiento, entre otros, del motor asíncrono monofásico.

RESUMEN DEL CAMPO MAGNÉTICO EN EL ENTREHIERRO CREADO POR DIFERENTES BOBINADOS

En todo lo que sigue se va a aceptar que la reluctancia que presentan las piezas de hierro del circuito magnético de una máquina es despreciable frente a la del entrehierro. Por lo tanto, la tensión magnética en el entrehierro F_{δ} tiene el mismo valor que la fuerza magnetomotriz (f.m.m.) \mathcal{F} .

$$\boxed{F_{\delta} = \mathcal{F}} \quad (83)$$

(Si la reluctancia del hierro es despreciable)

Devanado de polos salientes alimentado con c.c.

Se tiene un devanado inductor colocado sobre unos polos salientes, de forma alrededor de cada polo hay una bobina de N_p espiras. Estas espiras se conectan entre sí, bien en serie o bien formando varias ramas en paralelo, para formar el devanado inductor. Este devanado se alimenta con c.c. de forma que por cada rama en paralelo circula una corriente I_r (que será la misma que circula por cada bobina polar porque dentro de cada rama en paralelo todas las espiras se conectan en serie).

La f.m.m. generada por este devanado es constante y vale

$$\boxed{\mathcal{F} = N_p \cdot I_r} \quad (84)$$

(Polos salientes)

Si el entrehierro es variable, la inducción en el entrehierro B se puede aceptar que se distribuye sinusoidalmente en el espacio, situándose su valor máximo en el lugar donde el entrehierro δ es mínimo:

$$B_M = B_{Max} = \frac{\mu_0}{\delta_{min}} F_{\delta}$$

Obsérvese que en estos devanados, la forma sinusoidal de la inducción viene dada por la variación del entrehierro y no porque se actúe sobre el devanado (acortando bobinas, inclinando ranuras, etc.). Por esta razón, no hace falta descomponer la f.m.m. en serie de Fourier para obtener el primer armónico de la inducción B .

Devanados en máquinas de entrehierro δ constante

En estos casos, como el entrehierro δ es constante, la inducción magnética y la tensión magnética tienen la misma forma. Por lo tanto:

$$\boxed{B_{hM} = \frac{\mu_0}{\delta} F_{\delta hM}} \quad (85)$$

(si $\delta = cte$)

Téngase en cuenta que en las relaciones (83) y (84) se utilizan entrehierros equivalentes, los cuáles se calculan aplicando el Factor de Carter a los entrehierros geométricos respectivos, tal como se explica en los apéndices.

Devanado monofásico alimentado con corriente continua

Se tiene un devanado monofásico colocado en una máquina de entrehierro δ constante, alimentado con la corriente continua I . Este devanado tiene a' ramas en paralelo con N espiras en serie cada una.

Este bobinado genera una f.m.m. que varía en el espacio según se indica en la Fig. 17. El primer armónico de esta f.m.m. tiene este valor máximo:

$$\mathcal{F}_M = \frac{4}{\pi} \xi_b \frac{N I}{2 p}$$

y el del armónico h es

$$\boxed{\mathcal{F}_{hM} = \frac{4}{\pi h} \xi_{bh} \frac{N I}{2 p}} \quad (86)$$

(Devanado de tambor de corriente continua)

Devanado monofásico alimentado con corriente alterna

Si el devanado anterior se alimenta con c.a. de valor eficaz I , se tiene que el valor máximo del primer armónico de la distribución de f.m.m. en el espacio depende del valor que en cada momento tenga la corriente. Es decir, es una función variable con el tiempo:

$$\mathcal{F}_M(t) = \frac{4}{\pi} \xi_b \frac{N \cdot i(t)}{2 p}$$

El mayor de estos valores máximos será el valor máximo en el tiempo y en el espacio del armónico fundamental de la f.m.m. y se producirá cuando la corriente alcanza su valor máximo ($\sqrt{2} I$):

$$\mathcal{F}_M = \frac{4}{\pi} \xi_b \frac{N \cdot (\sqrt{2} I)}{2 p} = \frac{4 \sqrt{2}}{2 \pi} \xi_b \frac{N \cdot I}{p}$$

$$\mathcal{F}_M = 0,9 \xi_b \frac{N \cdot I}{p}$$

Si en lugar del armónico fundamental, se estudia el armónico h se tiene que:

$$\mathcal{F}_{hM} = \frac{0,9}{h} \xi_{bh} \frac{N \cdot I}{p} \quad (87)$$

(Devanado monofásico de corriente alterna)

Devanado trifásico alimentado con corriente alterna trifásica

En este caso el valor máximo en el tiempo y en el espacio del primer armónico de la f.m.m. es igual a 3/2 del máximo de una sola fase. Luego:

$$\mathcal{F}_{Trif M} = \frac{3}{2} 0,9 \xi_b \frac{N \cdot I}{p}$$

$$\mathcal{F}_{Trif M} = 1,35 \xi_b \frac{N \cdot I}{p} \quad (88)$$

Si se desea calcular el valor máximo en el espacio y en el tiempo del armónico h de la f.m.m. se tiene que los armónicos múltiplo de 3 no existen y los demás originan campos giratorios cuyo valor máximo se calcula mediante esta relación:

$$\mathcal{F}_{Trif hM} = \frac{1,35}{h} \xi_{bh} \frac{N \cdot I}{p} \quad (89)$$

(Devanado trifásico)

BIBLIOGRAFÍA

- [1] ALGER, P. L. 1970. *Induction machines. Their behavior and uses*. 2ª edición. New York: Gordon and Breach Science Publishers.
- [2] BOLDEA, I. y NASAR, S. A. 2010. *The Induction Machine Design Handbook*. New York: CRC Press.
- [3] CORRALES MARTÍN, J. 1970. *La máquina eléctrica. Tomo II: Teoría general de funcionamiento*. Barcelona: Marcombo Boixareu Editores.
- [4] CORRALES MARTÍN, J. 1982. *Cálculo industrial de máquinas eléctricas. 2 tomos*. Barcelona: Marcombo Boixareu Editores.
- [5] CORTES CHERTA. 1994. *Curso moderno de máquinas eléctricas rotativas. 5 tomos*. Barcelona: Editores Técnicos Asociados.
- [6] FITZGERALD, KINGSLEY Y UMANS. 2004. *Máquinas eléctricas*. Madrid: McGraw-Hill Interamericana.
- [7] FRAILE MORA, J. 2008. *Máquinas eléctricas*. Madrid: McGraw-Hill Interamericana.
- [8] GURRUTXAGA, J. A. 1985. *El fenómeno electromagnético (varios tomos)*. Santander: Dpto. de publicaciones de la E.T.S.I.C.C.P. de Santander.
- [9] KOPYLOV, I. P. 1984. *Mathematical Models of Electric Machines*. Moscú. Ed. Mir.
- [10] KRAUSE, P. C.; WASYNCZUK, O. 1989. *Electromechanical motion devices*. Nueva York. McGraw-Hill.
- [11] IVANOV-SMOLENSKI. 1984. *Máquinas eléctricas. Tomo I*. Moscú: Editorial Mir.
- [12] KOSTENKO y PIOTROVSKI. 1979. *Máquinas eléctricas. Tomo II*. Moscú: Ed. Mir.
- [13] MOELLER-WERR, F. y otros. 1972. *Electrotecnia general y aplicada. Tomo II, 1ª parte: Máquinas de c.c. Máquinas de c.a. (incluso transformadores)*. Traducido por Juan Corrales Martín. 2ª edición. Barcelona: Editorial Labor, S.A.
- [14] PYRHÖEN, JUHA y otros. 2010. *Design of rotating electrical machines*. West Sussex (Inglaterra): John Wiley & Sons Ltd.
- [15] RODRÍGUEZ POZUETA, M. A. 2011. *Campos magnéticos de dispersión*. Universidad de Cantabria (España).
<http://personales.unican.es/rodrigma/PDFs/Campos%20de%20dispersion.pdf>
- [16] RODRÍGUEZ POZUETA, M. A. 2010. *Constitución de las máquinas eléctricas. Bobinados*. Universidad de Cantabria (España).
<http://personales.unican.es/rodrigma/PDFs/constitucion%20maq%20elec.pdf>
- [17] SANJURJO NAVARRO, R. 1989. *Máquinas eléctricas*. Madrid. McGraw-Hill.
- [18] SERRANO IRIBARNEGARAY. 1989. *Fundamentos de máquinas eléctricas rotativas*. Barcelona: Marcombo Boixareu Editores.
- [19] HELLER, B. y HAMATA, V. 1977. *Harmonic field effects in induction machines*. Traducido al inglés por Rudolph Major. Praga: Academia, Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences.

APÉNDICE A:
ENTREHIERRO EQUIVALENTE. FACTOR DE CARTER

Cuando se tiene un núcleo magnético dentado las líneas de inducción magnética en el entrehierro tienen una forma similar a la representada en la Fig. A1.

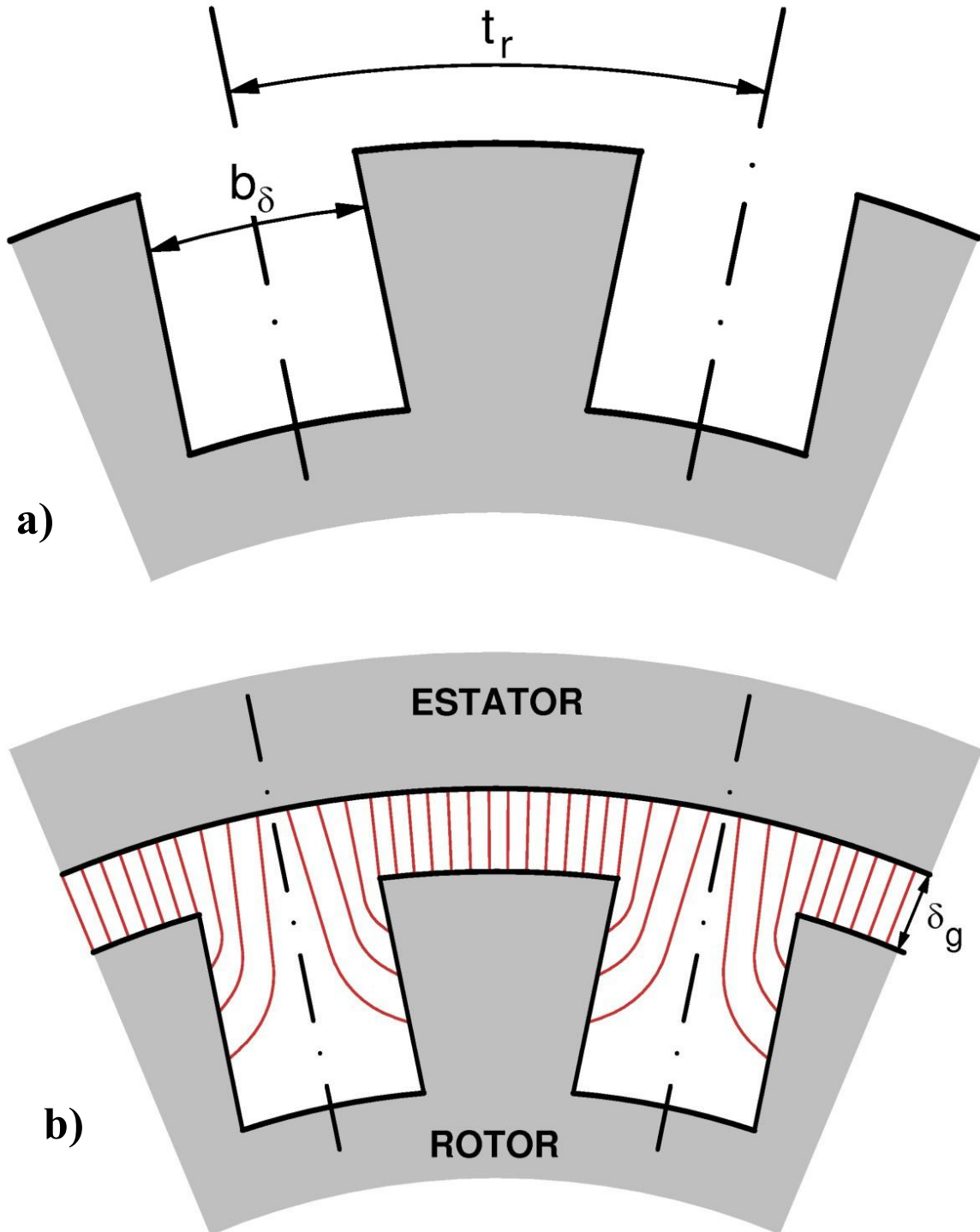


Fig. A1: Dimensiones de una ranura y líneas de inducción magnética en el entrehierro de una máquina ranurada

Si se quiere sustituir una máquina dentada por otra ideal equivalente sin ranuras, de tal forma que ambas tengan el mismo flujo magnético, es preciso que la máquina ideal equivalente tenga un espesor del entrehierro δ mayor que el espesor geométrico δ_g de la máquina original.

δ se calcula así:

$$\delta = K_C \cdot \delta_g \quad (A1)$$

K_C es un coeficiente denominado **Factor de Carter**.

Hay distintas fórmulas, obtenidas por diferentes autores, para calcular K_C , aunque todas dan resultados coincidentes en la práctica. Una de las expresiones más utilizadas para calcular el Factor de Carter es la siguiente:

$$K_C = \frac{t_r}{\frac{b_\delta}{\delta_g} b_\delta} = \frac{t_r}{t_r - \frac{b_\delta^2}{5 \delta_g + b_\delta}} \quad (A2)$$

En la expresión anterior (Ver la Fig. A1):

- t_r : es el paso de ranura medido como arco de la circunferencia que da al entrehierro.
- b_δ : es la abertura de la ranura medida como arco de la circunferencia que da al entrehierro.
- δ_g : es el espesor geométrico del entrehierro frente a un diente.

Si tanto el estator como el rotor son dentados K_C se obtiene así:

$$K_C = K_{C1} \cdot K_{C2} \quad (A3)$$

K_{C1} y K_{C2} son los Factores de Carter del estator y del rotor, respectivamente, obtenidos mediante la expresión (24) suponiendo que el otro órgano es liso.

El lector interesado en profundizar en este tema puede consultar los libros [2], [4] y [14]. En mi texto [15] también se puede encontrar un estudio más detallado sobre el Factor de Carter.

Ejercicio 2:

Una máquina asíncrona tiene un entrehierro geométrico δ_g de 4mm y el diámetro exterior del rotor vale 30 cm. El rotor tiene 36 ranuras con una abertura de 9 mm y el estator tiene 48 ranuras con una abertura igual a la mitad del paso de ranura. Calcular el entrehierro equivalente δ de esta máquina.

CAMPO MAGNÉTICO EN EL ENTREHIERRO

La longitud de la circunferencia exterior del rotor vale

$$\pi \cdot 30 = 94,25 \text{ cm}$$

Luego el paso de ranura o distancia entre dos ranuras consecutivas del rotor vale:

$$t_{r2} = \frac{94,25 \text{ cm}}{36 \text{ ranuras}} = 2,62 \text{ cm} = 26,2 \text{ mm}$$

Además, el enunciado dice que la abertura de ranura del rotor $b_{\delta 2}$ vale 9 mm. Por consiguiente, de la expresión (A2) se obtiene que el factor de Carter del rotor K_{C2} vale:

$$K_{C2} = \frac{26,2}{26,2 - \frac{9^2}{5 \cdot 4 + 9}} = 1,12$$

El diámetro interior del estator es igual al diámetro exterior del rotor más dos veces el entrehierro geométrico:

$$30 + (2 \cdot 0,4) = 30,8 \text{ cm}$$

Por lo tanto, el paso de ranura t_{r1} del estator vale:

$$t_{r1} = \frac{\pi \cdot 30,8 \text{ cm}}{48 \text{ ranuras}} = 2,02 \text{ cm} = 20,2 \text{ mm}$$

Según el enunciado la abertura de ranura del estator $b_{\delta 1}$ es igual a la mitad del paso de ranura, luego:

$$b_{\delta 1} = \frac{20,2}{2} = 10,1 \text{ mm}$$

El factor de Carter del estator K_{C1} se puede obtener a partir de la expresión (A2):

$$K_{C1} = \frac{20,2}{20,2 - \frac{10,1^2}{5 \cdot 4 + 10,1}} = 1,20$$

De acuerdo con la expresión (A3) el factor de Carter K_C global vale:

$$K_C = 1,20 \cdot 1,12 = 1,34$$

Finalmente, el entrehierro equivalente δ de la máquina se obtiene mediante la expresión (A1):

$$\delta = 1,34 \cdot 4 = 5,36 \text{ mm}$$

APÉNDICE B:
PERMEANCIA ESPECÍFICA DEL ENTREHIERRO

De una manera general la relación entre la tensión magnética F_δ y la inducción magnética B es así:

$$B = \frac{\mu_0}{\delta_g} \cdot \lambda_\delta \cdot F_\delta \quad (B1)$$

Tanto B como λ_δ y F_δ son, en el caso más general, funciones de la coordenada angular, bien medida en ángulos eléctricos α o bien medida en ángulos geométricos α_g . Al coeficiente adimensional λ_δ se lo denomina **permeancia específica del entrehierro**; aunque algunos autores dan esta denominación al producto $\frac{\mu_0}{\delta_g} \cdot \lambda_\delta$, el cual tiene dimensiones de una permeancia (inversa de la reluctancia) por unidad de superficie.

La expresión (18) indica que en las máquinas de entrehierro de espesor δ uniforme λ_δ se obtiene así:

$$\lambda_\delta = \frac{1}{K_C}$$

(Entrehierro uniforme)

Si se tiene el estator uniformemente ranurado con K_1 ranuras y el rotor liso, la permeancia específica λ_δ variará periódicamente a lo largo del entrehierro, de tal forma que en total tendrá K_1 periodos. Descomponiendo entonces λ_δ en serie de Fourier y tomando solamente los primeros términos del desarrollo en serie se obtiene que:

$$\lambda_\delta = \lambda_0 + \lambda_1 \cos(K_1 \cdot \alpha_g) = \lambda_0 \left[1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \cos(K_1 \cdot \alpha_g) \right] \quad (B2)$$

Los símbolos que aparecen en la expresión anterior son:

$\lambda_0 = 1/K_C$: es la permeancia específica media.

λ_1 : es la mitad de la amplitud de la variación de la permeancia específica debida a las ranuras del estator.

K_1 : es el número de ranuras del estator.

α_g : es la coordenada angular, medida en radianes geométricos, cuyo origen está en el centro de un diente del estator.

Si tanto el estator como el rotor están ranurados uniformemente se obtiene que:

$$\lambda_{\delta} = \lambda_0 \left[1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \cos (K_1 \cdot \alpha_g) \right] \cdot \left[1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_0} \cos (K_2 (\alpha_g - \Omega \cdot t)) \right] \quad (B3)$$

donde:

- λ_2 : es la mitad de la amplitud de la variación de la permeancia específica debida a las ranuras del rotor.
- K_2 : es el número de ranuras del rotor.
- Ω : es la velocidad de giro del rotor medida en radianes geométricos/segundo.
- t : es el tiempo contado desde el instante en que el centro de un diente del rotor estaba situado en el origen de coordenadas.

En la práctica muchas veces la abertura de las ranuras del rotor suele ser lo bastante pequeña como para poder considerar que λ_2 es nula. En este caso basta con usar la expresión (B2).

El lector interesado en profundizar en este tema puede consultar los libros de Alger [1], Kopylov [9] y Heller y Hamata [19].