



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA
ELÉCTRICA Y ENERGÉTICA



COLECCIÓN:
“ELECTROTECNIA PARA
INGENIEROS NO ESPECIALISTAS”

RESOLUCIÓN DE
CIRCUITOS DE CORRIENTE
ALTERNA MONOFÁSICA

Miguel Angel Rodríguez Pozueta

Doctor Ingeniero Industrial

OBSERVACIONES SOBRE LA NOMENCLATURA

En este texto, siguiendo la nomenclatura habitual en Electrotecnia, se ha utilizado la letra “j” para designar a la unidad imaginaria, $\sqrt{-1}$, en los números complejos. En muchos textos matemáticos el lector puede observar que se emplea la letra “i” para designar a $\sqrt{-1}$.

© 2010, Miguel Ángel Rodríguez Pozueta

Universidad de Cantabria (España)

Departamento de Ingeniería Eléctrica y Energética

Está permitida la reproducción total o parcial de este documento con la condición inexcusable de citar su autor y su carácter gratuito.

Este documento puede descargarse gratuitamente desde esta Web:

<http://personales.unican.es/rodrigma/primer/publicaciones.htm>

ÍNDICE

RESOLUCIÓN DE CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA MONOFÁSICA

Introducción	1
Conceptos básicos	1
Convenios de signos para tensiones y corrientes en generadores y receptores	1
Acoplamiento de impedancias	2
Acoplamiento de impedancias en serie y en paralelo	2
Acoplamiento de impedancias en estrella y triángulo. Teorema de Kennelly	3
Circuitos abiertos y cortocircuitos	4
Ejemplo 1	6
Ejemplo 2	8
Diferencia de potencial entre dos puntos de un circuito	10
Ejemplo 3	10
Pasos iniciales para resolver un circuito eléctrico	12
Método general (Lemas de Kirchhoff)	14
Método de las mallas	16
Método de los nudos	17
Ejemplo 4	23
Principio de superposición	25
Teorema de Boucherot o principio de la conservación de la potencia compleja	28
Teorema de Thévenin	31
Ejemplo 5	34
Instalaciones eléctricas con varias cargas	37
Ejemplo 6	38
Bibliografía	50
Problemas propuestos	51
Soluciones a los problemas propuestos	54

APÉNDICE 1: NÚMEROS COMPLEJOS	57
Números imaginarios y complejos	57
Representación de números complejos. Plano de Gauss	58
Operaciones con números complejos	59
Resolución de sistemas de ecuaciones lineales con números complejos	62
Ejemplo 1	62
APÉNDICE 2: RESUMEN DE LA TEORÍA DE CIRCUITOS DE C.A.	66
Magnitudes básicas	66
Elementos pasivos	67
Generadores o fuentes	67
Topología de redes	71
Acoplamiento de resistencias	72
Magnitudes alternas	73
Representación fasorial	74
Comportamiento de los elementos pasivos en c.a. Resistencia. Inductancia. Condensador. Circuito serie R-L-C. Impedancia	77
APÉNDICE 3: LA POTENCIA EN CORRIENTE ALTERNA	80
La potencia en corriente alterna	80
Los tres significados del ángulo ϕ	81
Mejora del factor de potencia	82

RESOLUCIÓN DE CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA MONOFÁSICA

Miguel Ángel Rodríguez Pozueta

INTRODUCCIÓN

Este texto pretende presentar de forma práctica varios métodos para resolver circuitos de corriente alterna (c.a.) en régimen permanente. El “resolver” un circuito significa el calcular las corrientes que circulan por sus ramas tomando como datos la topología, las impedancias y las características de los generadores de dicho circuito.

Este texto está dedicado a técnicos no especialistas en ingeniería eléctrica; por lo que, de una manera deliberada, se ha evitado el utilizar los generadores de intensidad en los métodos de resolución expuestos. Si el lector consulta otros libros se encontrará que algunos de los métodos expuestos aquí, especialmente el método de los nudos, se explican de diferente manera empleando generadores de intensidad.

Se supone que el lector tiene unos conocimientos básicos sobre el electromagnetismo y los circuitos de corriente continua. También se supone que el lector conoce los fundamentos de la corriente alterna y la representación de tensiones y de corrientes alternas mediante fasores, así como los conceptos de impedancia y de potencias activa, reactiva, aparente y compleja y la Ley de Ohm en corriente alterna (véanse los apéndices 2 y 3).

CONCEPTOS BÁSICOS

Convenios de signos para tensiones y corrientes en generadores y receptores

Las leyes de los circuitos eléctricos se establecieron mucho antes que la teoría electrónica de la materia. Esto hizo que en estas leyes se partiera del supuesto de que la corriente eléctrica era debida al movimiento de cargas eléctricas¹ positivas. Hoy en día se sabe que, en realidad, las corrientes se deben al movimiento de electrones, es decir, de cargas negativas. No obstante se siguen empleando estas leyes tal como se establecieron en su momento, ya que se obtienen resultados correctos.

Por lo tanto, se parte de que la corriente eléctrica en un circuito circula tal como se indica en la Fig. 1. Esto es, se utilizan estos convenios de signos para tensiones y corrientes:

- En los receptores o cargas la corriente es debida a la acción del campo eléctrico y se dirige desde el lado de mayor potencial eléctrico al de menor. Es decir, del lado del signo + al lado del signo - de la tensión.
- En los generadores o fuentes la corriente debe ser impulsada contra el campo eléctrico para cerrar su recorrido a través del circuito. Esto se realiza a expensas de una energía de otro tipo -mecánica, química, etc.- que es absorbida por el generador para transformarla en energía eléctrica. Esto hace que en el interior de los generadores la corriente vaya desde del lado del signo - al lado del signo + de la tensión.

¹ En este texto el término *carga* tiene dos significados completamente distintos y el lector deberá establecer cuál es el significado correcto según el contexto en el que se utilice:

- Por un lado, las *cargas* eléctricas (positivas y negativas) son las creadoras de los campos eléctricos y también sobre las que estos campos ejercen fuerzas.
- Por otro lado, en una instalación o en un circuito eléctrico se denominan *cargas* o *receptores* eléctricos a aquellos elementos que consumen potencia eléctrica.

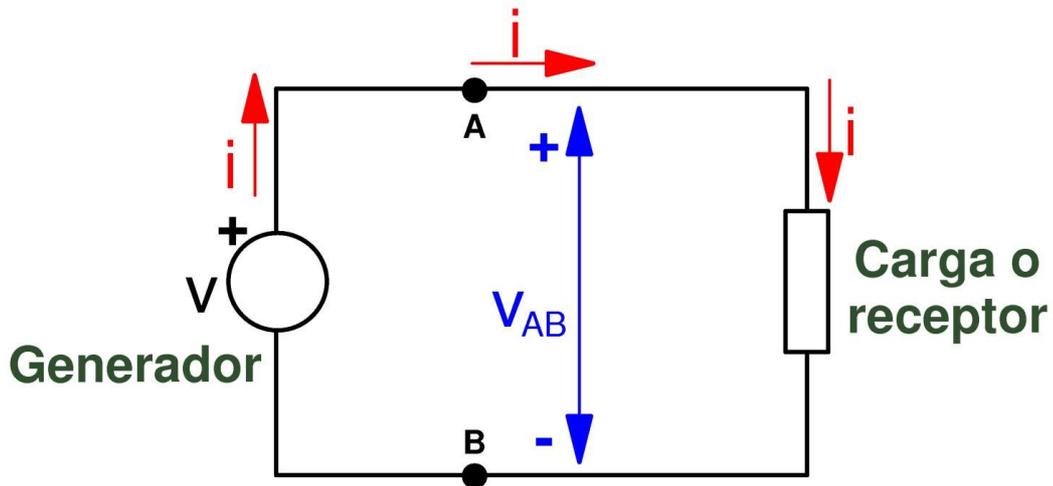


Fig. 1: Circuito básico de corriente alterna

Acoplamiento de impedancias

En muchos circuitos eléctricos aparecen impedancias conectadas entre sí que se pueden sustituir por otra/s equivalente/s sin que el resto del circuito se vea afectado. La sustitución de las impedancias originales por la/s equivalente/s puede simplificar el circuito y facilitar su resolución.

Acoplamiento de impedancias en serie y en paralelo

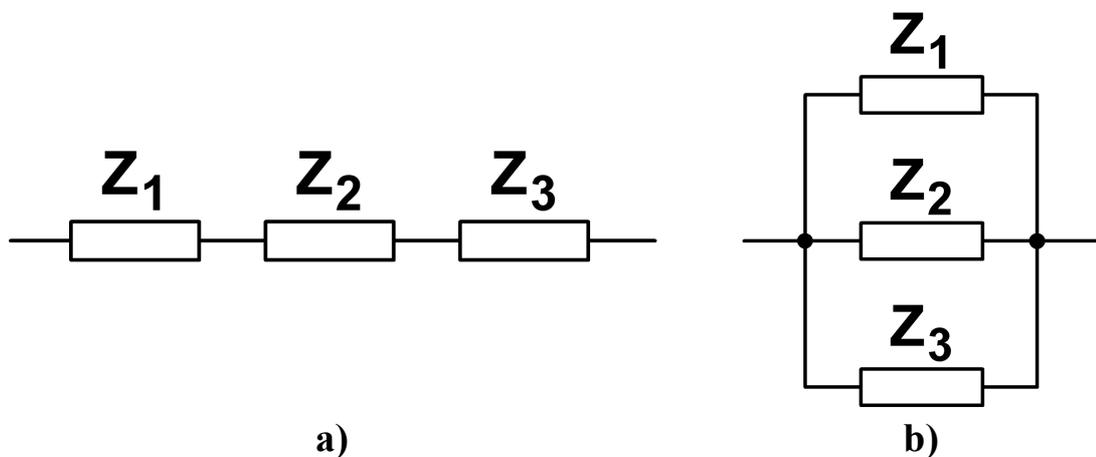


Fig. 2: Conjunto de tres impedancias: a) conectadas en serie; b) conectadas en paralelo

Cuando se tienen n impedancias conectadas en **serie**, como se muestra en la Fig. 2a para el caso de tres impedancias, el conjunto de estas impedancias se puede sustituir por una equivalente de valor:

$$\bar{Z}_{eq} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \dots + \bar{Z}_n \quad (1)$$

En el caso particular de que todas las impedancias conectadas en serie sean de igual valor (\bar{Z}), la aplicación de la fórmula (1) da lugar a este resultado:

$$\bar{Z}_{eq} = n \cdot \bar{Z} \quad (2)$$

Cuando se tienen n impedancias conectadas en **paralelo**, como se muestra en la Fig. 2b para el caso de tres impedancias, el conjunto de estas impedancias se puede sustituir por una equivalente cuyo valor se puede obtener por medio de la relación (3):

$$\frac{1}{\bar{Z}_{eq}} = \frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \dots + \frac{1}{\bar{Z}_n} \rightarrow \bar{Z}_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \dots + \frac{1}{\bar{Z}_n}} \quad (3)$$

En el caso particular de que todas las impedancias conectadas en paralelo sean de igual valor (\bar{Z}), la aplicación de la fórmula (3) da lugar a este resultado:

$$\bar{Z}_{eq} = \frac{\bar{Z}}{n} \quad (4)$$

Acoplamiento de impedancias en estrella y triángulo. Teorema de Kennelly

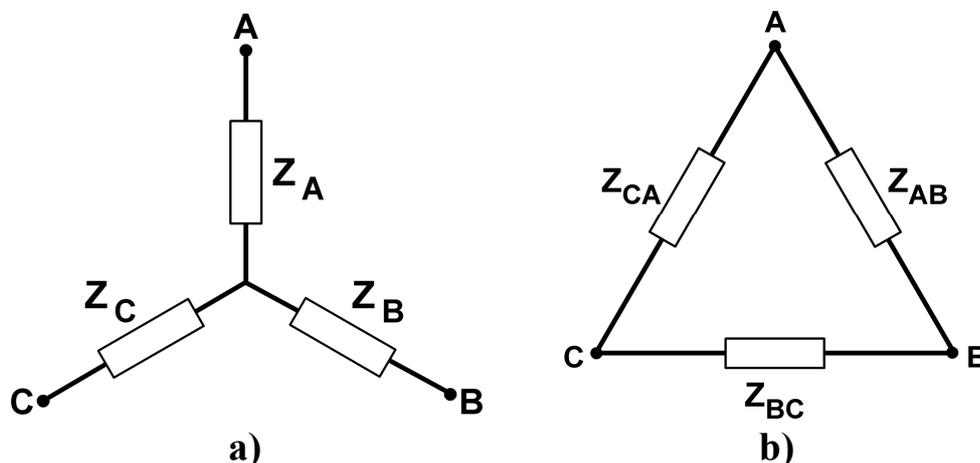


Fig. 3: Conjunto de tres impedancias: a) conectadas en estrella; b) conectadas en triángulo

Es frecuente en la ingeniería encontrar tres impedancias situadas entre tres nudos (A, B y C) de un circuito conectadas en **estrella** (Fig. 3a) o en **triángulo** (Fig. 3b).

El Teorema de Kennelly indica que un conjunto de tres impedancias conectadas en estrella se puede sustituir por un conjunto de tres impedancias equivalentes conectadas en triángulo sin que el resto del circuito quede afectado. Análogamente, un conjunto de tres impedancias conectadas en triángulo se puede sustituir por tres impedancias equivalentes conectadas en estrella. Las relaciones que permiten obtener los valores de las impedancias equivalentes se indican a continuación.

Impedancias en triángulo equivalentes a tres impedancias en estrella:

$$\begin{aligned} \bar{Z}_{AB} &= \frac{\bar{Z}_A \cdot \bar{Z}_B + \bar{Z}_B \cdot \bar{Z}_C + \bar{Z}_C \cdot \bar{Z}_A}{\bar{Z}_C} \\ \bar{Z}_{BC} &= \frac{\bar{Z}_A \cdot \bar{Z}_B + \bar{Z}_B \cdot \bar{Z}_C + \bar{Z}_C \cdot \bar{Z}_A}{\bar{Z}_A} \\ \bar{Z}_{CA} &= \frac{\bar{Z}_A \cdot \bar{Z}_B + \bar{Z}_B \cdot \bar{Z}_C + \bar{Z}_C \cdot \bar{Z}_A}{\bar{Z}_B} \end{aligned} \quad (5)$$

Impedancias en estrella equivalentes a tres impedancias en triángulo:

$$\begin{aligned}\bar{Z}_A &= \frac{\bar{Z}_{CA} \cdot \bar{Z}_{AB}}{\bar{Z}_{AB} + \bar{Z}_{BC} + \bar{Z}_{CA}} \\ \bar{Z}_B &= \frac{\bar{Z}_{AB} \cdot \bar{Z}_{BC}}{\bar{Z}_{AB} + \bar{Z}_{BC} + \bar{Z}_{CA}} \\ \bar{Z}_C &= \frac{\bar{Z}_{BC} \cdot \bar{Z}_{CA}}{\bar{Z}_{AB} + \bar{Z}_{BC} + \bar{Z}_{CA}}\end{aligned}\tag{6}$$

En el caso de que las tres impedancias en estrella sean iguales, sus equivalentes en triángulo también lo son. Análogamente, si hay tres impedancias iguales conectadas en triángulo sus equivalentes en estrella también son iguales. En este caso, de las expresiones (5) y (6) se deduce lo siguiente:

$$\begin{aligned}\bar{Z}_A = \bar{Z}_B = \bar{Z}_C = \bar{Z}_\lambda \Leftrightarrow \bar{Z}_{AB} = \bar{Z}_{BC} = \bar{Z}_{CA} = \bar{Z}_\Delta \\ \bar{Z}_\lambda = \frac{\bar{Z}_\Delta}{3}; \quad \bar{Z}_\Delta = 3 \cdot \bar{Z}_\lambda\end{aligned}\tag{7}$$

Circuitos abiertos y cortocircuitos

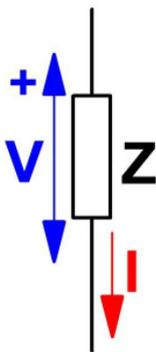


Fig. 4: Impedancia

La **Ley de Ohm** en corriente alterna relaciona la *corriente*, \bar{I} , que circula por una impedancia, \bar{Z} , con la *tensión* o *diferencia de potencial*, \bar{V} , existente entre sus bornes (Fig. 4):

$$\begin{aligned}\bar{V} = \bar{Z} \cdot \bar{I}; \quad \bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} \\ \boxed{\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}} = \bar{V} \cdot \bar{Y}}\end{aligned}\tag{8}$$

En la expresión anterior \bar{Y} es la admitancia, que es igual a la inversa de la impedancia, \bar{Z} .

Un caso especial es una rama con una impedancia de valor infinito. En este caso, sea cual sea la tensión que se aplique, la intensidad que circulará por la rama valdrá siempre cero:

$$\bar{Z} = \infty \Rightarrow \bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}} = \frac{\bar{V}}{\infty} = 0\tag{9}$$

Una impedancia infinita es, pues, un **circuito abierto** (Fig. 5); es decir, una rama cortada de forma que por ella no puede pasar corriente. Un circuito abierto conectado en serie con otra impedancia cualquiera constituye también un circuito abierto (Fig. 6). En efecto, la impedancia equivalente al conjunto de estas dos impedancias en serie es infinita (ver la ecuación (10)) y no puede pasar corriente por ellas.

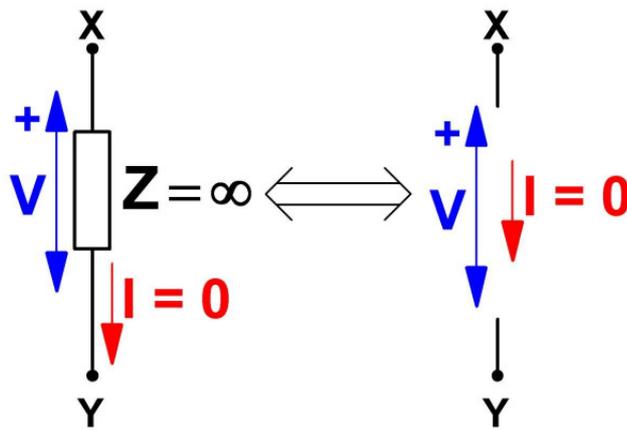


Fig. 5: Circuito abierto

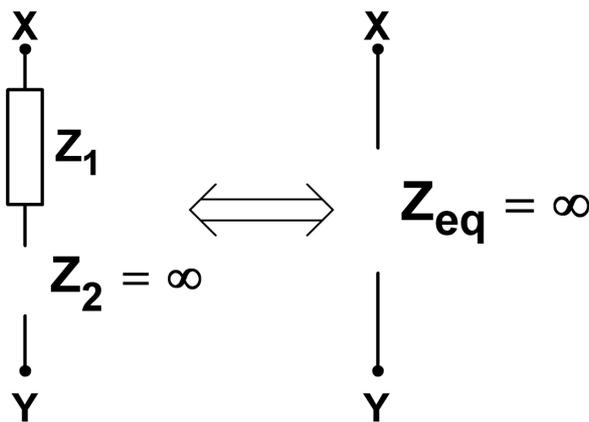


Fig. 6: Circuito abierto en serie con una impedancia cualquiera

$$\bar{Z}_{eq} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 = \bar{Z}_1 + \infty = \infty \quad (10)$$

Otro caso especial es una impedancia de valor nulo. En este caso, sea cual sea la corriente que circule por ella, la tensión entre sus extremos valdrá siempre cero:

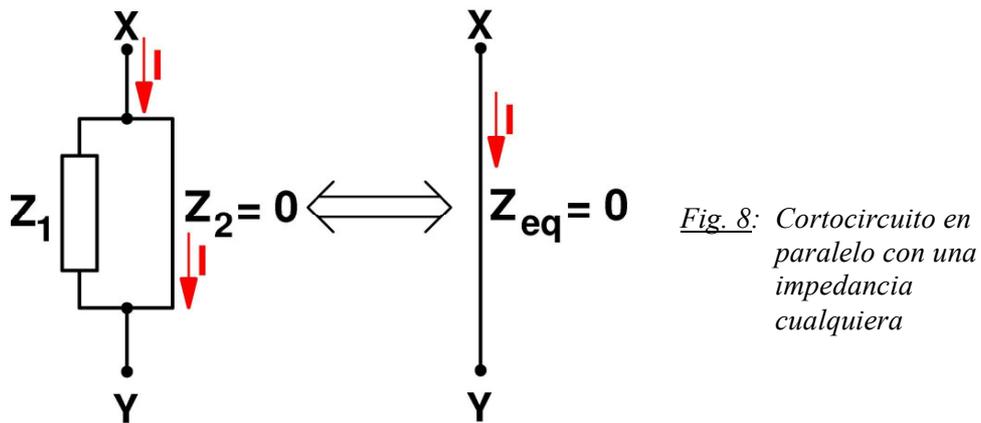
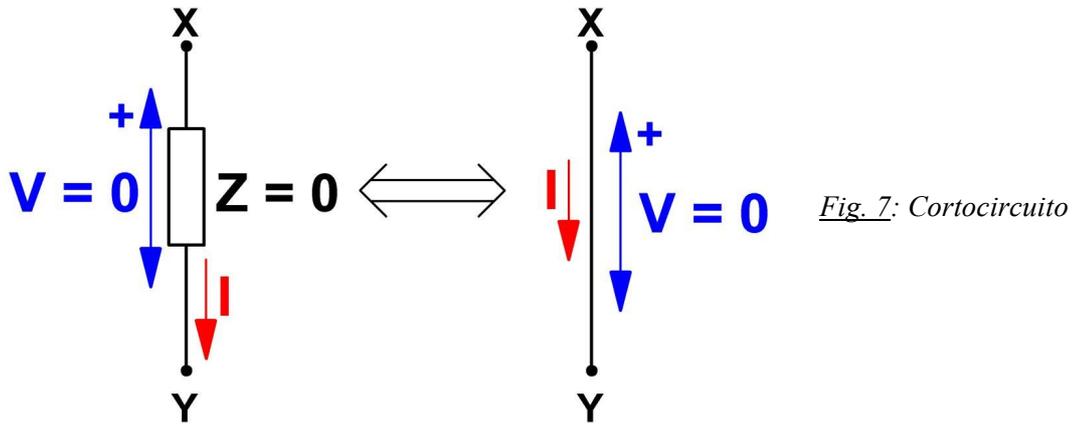
$$\bar{Z} = 0 \Rightarrow \bar{V} = \bar{Z} \cdot \bar{I} = 0 \cdot \bar{I} = 0 \quad (11)$$

Una impedancia nula es, pues, un **cortocircuito** (Fig. 7); es decir, un conductor sin impedancia. Como la diferencia de potencial entre los extremos de un cortocircuito es nula, ambos extremos tienen la misma tensión:

$$\bar{V} = 0 \Rightarrow \bar{V}_{XY} = \bar{V}_X - \bar{V}_Y = 0 \Rightarrow \bar{V}_X = \bar{V}_Y \quad (12)$$

Cuando en un circuito eléctrico hay dos nudos, X e Y, unidos por un cortocircuito, la relación (12) indica que se puede simplificar el circuito englobando ambos nudos en uno sólo. Sin embargo, si se tiene interés en calcular la corriente que circula entre X e Y a través del cortocircuito conviene mantener ambos nudos, X e Y, porque si no en el circuito simplificado no aparece esta corriente.

Un cortocircuito conectado en paralelo con otra impedancia cualquiera constituye también un cortocircuito (Fig. 8). En efecto, la impedancia equivalente al conjunto de estas dos en paralelo es nula (ver la relación (13)) y no puede haber caída de tensión entre sus extremos. Por esta razón, la corriente es nula en la impedancia que está en paralelo con el cortocircuito y la totalidad de la corriente circula por el cortocircuito.



$$\frac{1}{\bar{Z}_{eq}} = \frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} = \frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{0} = \frac{1}{\bar{Z}_1} + \infty = \infty \Rightarrow \bar{Z}_{eq} = \frac{1}{\infty} = 0 \quad (13)$$

Ejemplo 1:

Calcule la impedancia equivalente entre los nudos A y B del circuito eléctrico representado en la Fig. 9.

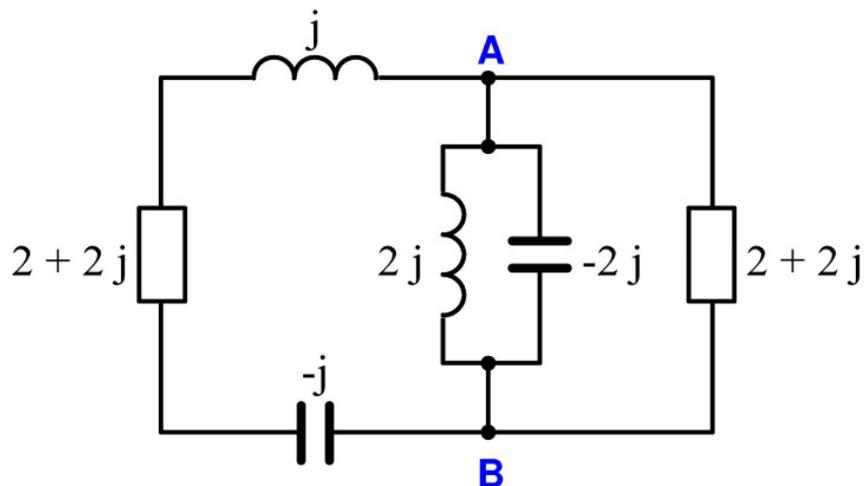


Fig. 9: Calcular la impedancia equivalente entre A y B

Resolución:

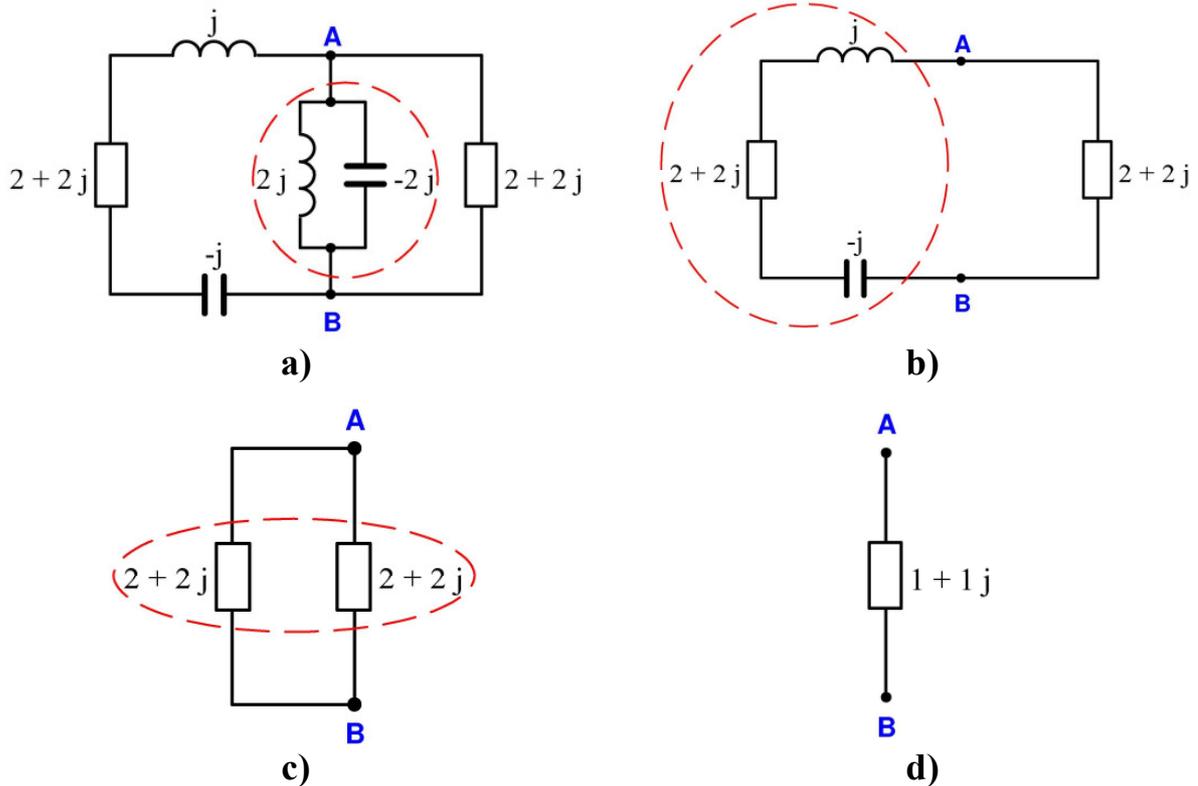


Fig. 10: Cálculo de la impedancia equivalente entre A y B del circuito de la Fig. 9

El cálculo de la impedancia equivalente a un circuito formado por varias impedancias se realiza mediante simplificaciones sucesivas obtenidas al sustituir varias impedancias en serie o en paralelo por su equivalente y mediante transformaciones estrella-triángulo o triángulo-estrella. Este proceso se facilita al ir dibujando de nuevo el circuito tras cada una de estas simplificaciones. Esto es lo que se ha hecho en la Fig. 10.

En la Fig. 10a se han identificado dos impedancias en paralelo de $2j$ y $-2j$ Ohms, respectivamente. Su impedancia equivalente se calcula mediante la relación (3):

$$\frac{1}{\frac{1}{2j} + \frac{1}{-2j}} = \frac{1}{0} = \infty$$

Luego, estas dos impedancias en paralelo constituyen un circuito abierto, por el que no va a circular ninguna corriente, y que puede ser eliminado del circuito. Por lo tanto, el circuito original se convierte en el representado en la Fig. 10b.

En la Fig. 10b se han identificado tres impedancias en serie que pueden ser sustituidas por una equivalente calculada mediante la relación (1):

$$(j) + (2 + 2j) + (-j) = 2 + 2j$$

Esto permite simplificar aun más el circuito que se convierte en el representado en la Fig. 10c. Ahora se tienen dos impedancias idénticas en paralelo de $2 + 2j$, que se pueden sustituir por una impedancia equivalente determinada mediante la expresión (4) en la que, en este caso, n vale 2:

$$\frac{2 + 2j}{2} = 1 + j$$

Luego, la impedancia equivalente al circuito de la Fig. 9 vale $1 + j$ Ohms.

Ejemplo 2:

Calcule la impedancia equivalente entre los nudos A y B del circuito eléctrico representado en la Fig. 11.

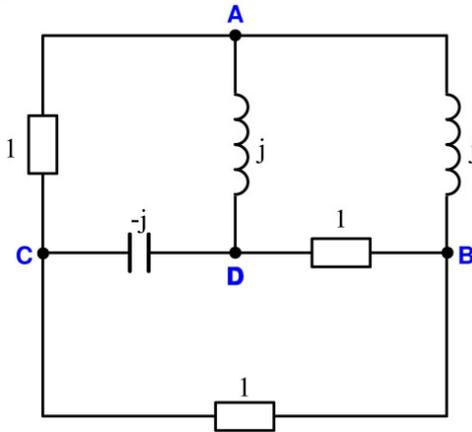


Fig. 11: Calcular la impedancia equivalente entre A y B

Resolución:

Los pasos seguidos para calcular la impedancia equivalente al conjunto de impedancias representado en la Fig. 11 están indicados en la Fig. 12.

Se aprecia que el circuito de la Fig. 11 no hay impedancias conectadas entre sí en serie o en paralelo. En estos casos el primer paso es aplicar el Teorema de Kennelly y realizar una transformación estrella-triángulo o viceversa. En la Fig. 12a se ha identificado una estrella situada entre los nudos A, B y C y cuyo centro es el nudo D. Las impedancias que forman esta estrella son:

$$\bar{Z}_A = j \quad \bar{Z}_B = 1 \quad \bar{Z}_C = -j$$

Aplicando la transformación estrella-triángulo (ecuación (5)) se obtiene un triángulo formado por estas tres impedancias:

$$\bar{Z}_A \cdot \bar{Z}_B + \bar{Z}_B \cdot \bar{Z}_C + \bar{Z}_C \cdot \bar{Z}_A = (j \cdot 1) + (1 \cdot (-j)) + ((-j) \cdot 1) = 1$$

$$\bar{Z}_{AB} = \frac{\bar{Z}_A \cdot \bar{Z}_B + \bar{Z}_B \cdot \bar{Z}_C + \bar{Z}_C \cdot \bar{Z}_A}{\bar{Z}_C} = \frac{1}{-j} = j$$

$$\bar{Z}_{BC} = \frac{\bar{Z}_A \cdot \bar{Z}_B + \bar{Z}_B \cdot \bar{Z}_C + \bar{Z}_C \cdot \bar{Z}_A}{\bar{Z}_A} = \frac{1}{j} = -j$$

$$\bar{Z}_{CA} = \frac{\bar{Z}_A \cdot \bar{Z}_B + \bar{Z}_B \cdot \bar{Z}_C + \bar{Z}_C \cdot \bar{Z}_A}{\bar{Z}_B} = \frac{1}{1} = 1$$

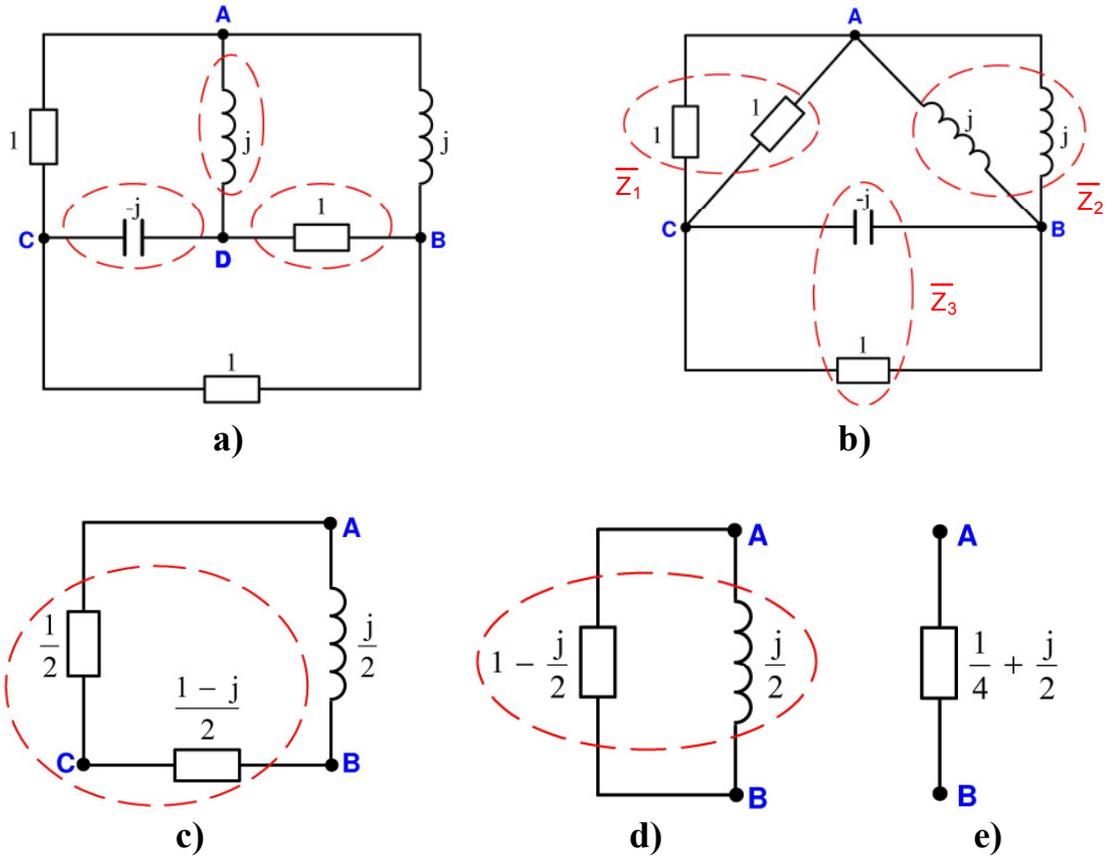


Fig. 12: Cálculo de la impedancia equivalente entre A y B del circuito de la Fig. 11

Por consiguiente el circuito original se convierte en el representado en la Fig. 12b, en el cual se han identificado tres pares de impedancias conectas en paralelo entre sí. Las dos impedancias de la izquierda son iguales ($1 + 0j$ Ohms) y su equivalente en paralelo \bar{Z}_1 se calcula mediante (4):

$$\bar{Z}_1 = \frac{1 + 0j}{2} = \frac{1}{2} + 0j = \frac{1}{2}$$

Análogamente, las dos impedancias iguales (de $0 + j$ Ohms) en paralelo equivalen a:

$$\bar{Z}_2 = \frac{0 + j}{2} = 0 + \frac{j}{2} = \frac{j}{2}$$

Finalmente, las dos impedancias de abajo tienen equivalen a una impedancia que se calcula por medio de la expresión (3):

$$\bar{Z}_3 = \frac{1}{\frac{1}{1} + \frac{1}{(-j)}} = \frac{1-j}{2}$$

Tras estas simplificaciones se obtiene el circuito de la Fig. 12c donde se han identificado dos impedancias en serie que, según la relación (1), equivalen a:

$$\frac{1}{2} + \frac{1-j}{2} = 1 - \frac{j}{2}$$

Lo cual reduce el circuito al de la Fig. 12d formado por dos impedancias en paralelo cuya impedancia equivalente se obtiene mediante (3):

$$\frac{1}{\frac{1}{1-j} + \frac{1}{j}} = \frac{1}{4} + \frac{j}{2}$$

Luego, la impedancia equivalente al circuito de la Fig. 11 vale $1/4 + j/2$ Ohms.

Diferencia de potencial entre dos puntos de un circuito

Para calcular la diferencia de potencial o tensión entre dos puntos de un circuito eléctrico lo primero que hay que hacer es escoger un trayecto a lo largo del circuito que enlace ambos puntos. A continuación se suman las tensiones, con su signo, de todos los elementos -impedancias y generadores- que se encuentren en dicho trayecto.

La caída de tensión en una impedancia se calcula mediante la Ley de Ohm (expresión (8)) y su signo se indica en la Fig. 1: la corriente va desde el lado de mayor potencial (lado del signo +) al de menor (lado de signo -). De esto se deduce que para calcular las caídas de tensión en las impedancias habrá que calcular previamente las corrientes que circularán por ellas.

El signo de la tensión en un generador viene señalado por el “+” que se incluye en su símbolo en un circuito.

Una forma cómoda para deducir los signos que han de darse a las tensiones que hay que sumar para obtener la diferencia de potencial deseada es gráfica. Se dibujan en el circuito las tensiones de cada elemento mediante flechas de doble punta y con un signo “+” para señalar el lado de mayor tensión. Aquellas tensiones cuyo lado + esté hacia el primero de los puntos, cuya diferencia de potencial se está hallando, llevan signo positivo y los que tengan su lado + hacia el segundo de los puntos tienen signo negativo.

Este procedimiento se entiende mejor mediante el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3:

Calcule la diferencia de potencial entre los nudos A y B en el circuito eléctrico representado en la Fig. 13.

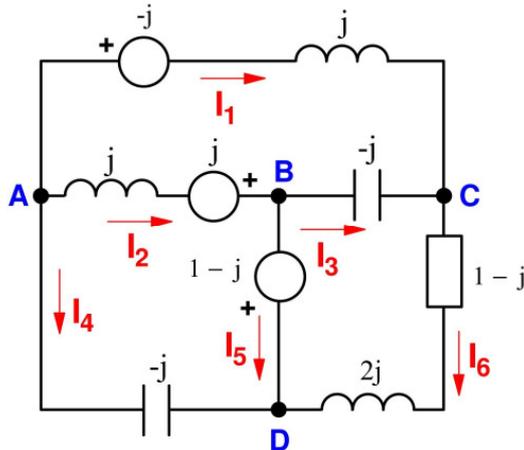


Fig. 13: Calcular la tensión entre A y B

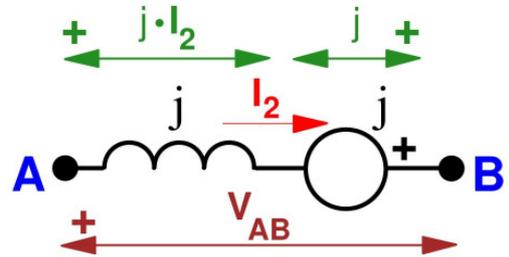


Fig. 14: Cálculo de la tensión entre A y B en el circuito de la Fig. 13

Resolución:

El cálculo de las corrientes de este circuito mediante alguno de los métodos que se explicarán más adelante da estos resultados:

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 &= 0 + j = 1 \angle 90^\circ \text{ A} & \bar{I}_2 &= 0 + j = 1 \angle 90^\circ \text{ A} & \bar{I}_3 &= 0 \text{ A} \\ \bar{I}_4 &= 0 - 2j = 2 \angle -90^\circ \text{ A} & \bar{I}_5 &= 0 + j = 1 \angle 90^\circ \text{ A} & \bar{I}_6 &= 0 + j = 1 \angle 90^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

Ahora se elige un trayecto que vaya desde el punto A al punto B. El más sencillo es la rama recorrida por la corriente \bar{I}_2 , el cual se ha dibujado en la Fig. 14.

En la parte inferior de la Fig. 14 se ha representado la tensión \bar{V}_{AB} que se desea calcular mediante una flecha de dos puntas marrón. El lado de mayor potencial es el del primer punto, el A, y es en él donde se ha dibujado el signo +.

La impedancia de j Ohms está recorrida por la corriente \bar{I}_2 , que circula de izquierda a derecha. Por lo tanto, el lado de la impedancia que está a mayor potencial es el izquierdo y la Ley de Ohm dice que la caída de tensión en esta impedancia vale $j \cdot \bar{I}_2$. Esto se indica mediante la flecha de dos puntas verde con signo + a la izquierda que se ha dibujado encima de la impedancia.

El generador tiene una tensión de j voltios cuyo lado de mayor potencial es el derecho. Esto se representa mediante la flecha de dos puntas verde con signo + a la derecha que se ha dibujado encima del generador.

Se observa que la caída de tensión en la impedancia tiene su extremo + al mismo lado que la tensión \bar{V}_{AB} , luego tiene signo positivo. La tensión en el generador tiene su extremo + hacia el lado contrario que \bar{V}_{AB} , luego tiene signo negativo. Por lo tanto, la diferencia de potencial \bar{V}_{AB} vale:

$$\bar{V}_{AB} = \bar{V}_A - \bar{V}_B = (j \cdot \bar{I}_2) - (j) = (j \cdot j) - (j) = -1 - j \text{ V}$$

Luego, la diferencia de potencial entre los puntos A y B, \bar{V}_{AB} , vale $-1 - j$ voltios.

A este mismo resultado se podría haber llegado habiendo escogido cualquier otro trayecto entre los nudos A y B. Para comprobarlo se va a repetir el cálculo de \bar{V}_{AB} siguiendo el recorrido señalado en la Fig. 15; es decir, el formado por las ramas con las corrientes \bar{I}_1 e \bar{I}_3 . Este nuevo trayecto es más complicado que el anterior, por lo que resulta más sencillo calcular la diferencia de potencial entre A y B mediante el trayecto de la Fig. 14 que el de la Fig. 15.

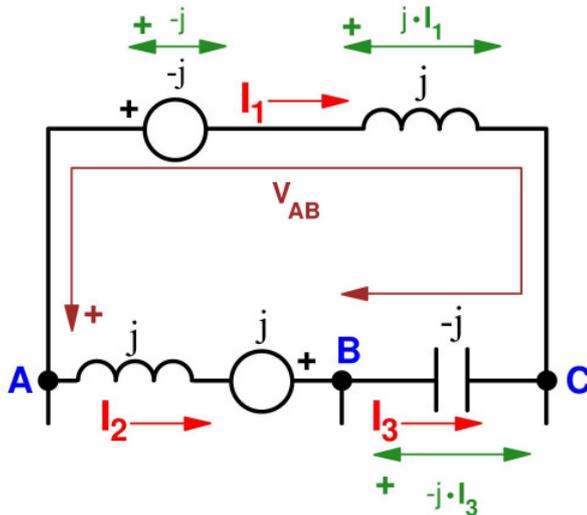


Fig. 15: Nuevo trayecto para el cálculo de la tensión entre A y B en el circuito de la Fig. 13

Utilizando el mismo procedimiento que antes, en la Fig. 15 se ha dibujado una flecha marrón con doble punta siguiendo el trayecto elegido y que sirve para representar la tensión \bar{V}_{AB} . El lado de mayor potencial es el del primer punto, el A, y es en él donde se ha dibujado el signo +.

En los generadores y en las impedancias del trayecto se han dibujado unas flechas verdes con dos puntas para representar las caídas de tensión respectivas.

Observando la Fig. 15 se aprecia que la tensión del generador y la caída de tensión en la impedancia j tienen signo positivo, mientras que la caída de tensión en la impedancia $-j$ tiene signo negativo (pues tiene su lado + en el sentido contrario a la tensión \bar{V}_{AB}). De esto se deduce que:

$$\bar{V}_{AB} = \bar{V}_A - \bar{V}_B = (-j) + (j \cdot \bar{I}_1) - (-j \cdot \bar{I}_3) = (-j) + (j \cdot j) - (-j \cdot 0) = -1 - j \text{ V}$$

Evidentemente, se obtiene el mismo resultado que con el trayecto de la Fig. 14.

PASOS INICIALES PARA RESOLVER UN CIRCUITO ELÉCTRICO

Se entiende por “resolver” un circuito eléctrico el calcular sus corrientes de rama tomando como dato su topología y los valores de sus impedancias y de las tensiones de sus generadores.

Antes de empezar a resolver un circuito eléctrico en algunos casos es conveniente redibujarlo de forma que se eliminen los cruces entre sus ramas. Esto permite distinguir más fácilmente su topología y el identificar sus ramas, sus nudos y sus mallas de manera más sencilla.

Cuando se resuelve un circuito eléctrico, sea cual sea el método que se utilice, lo primero que hay que hacer es establecer de una forma arbitraria el sentido de la corriente en cada una de sus ramas. El sentido elegido es el que tendrá la corriente en los momentos en que es positiva y el contrario cuando es negativa (recuerde que la corriente alterna cambia de sentido periódicamente).

El hecho de adoptar un sentido u otro para una corriente de rama significa que el complejo que representa esta corriente al expresarlo en forma polar tendrá como argumento un ángulo α o un ángulo $(\alpha + 180^\circ)$.

En la Fig. 16 se muestra un ejemplo de circuito de c.a. que se va a ir resolviendo mediante distintos métodos en los apartados siguientes.

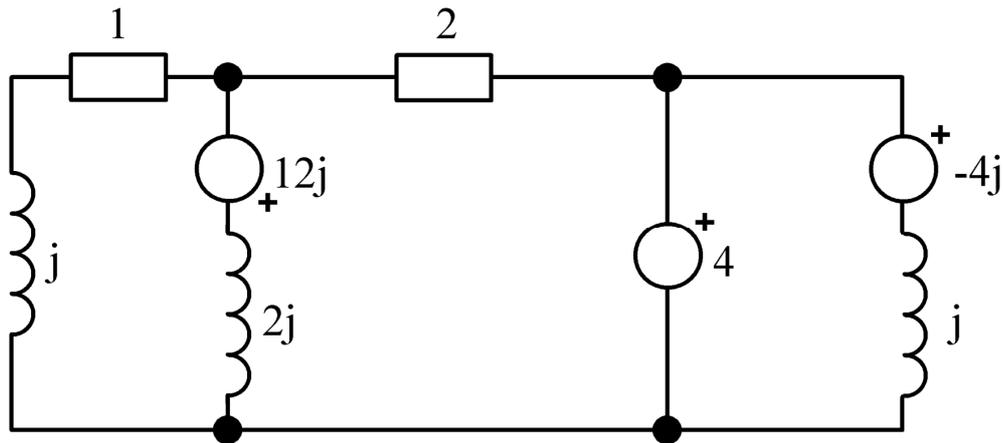


Fig. 16: Circuito ejemplo a resolver

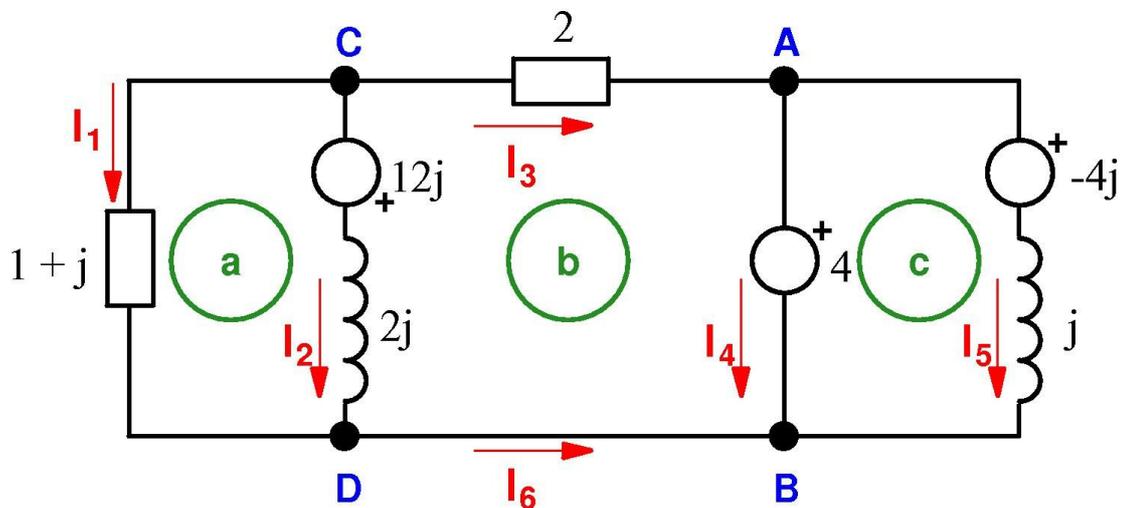


Fig. 17: Circuito de la Fig. 16 preparado para ser resuelto

Para resolver este circuito, antes de aplicar alguno de los métodos de resolución, lo primero que se ha hecho es simplificar la rama izquierda (Fig. 17) englobando en una sola impedancia las dos en serie del circuito original. En la Fig. 17 también se han nombrado las seis corrientes de rama ($\bar{I}_1, \bar{I}_2, \dots, \bar{I}_6$) del circuito y se han elegido sus sentidos de forma arbitraria. Además se han identificado sus cuatro nudos, que se han denominado mediante letras mayúsculas (A, B, C y D), y sus tres mallas, que se han representado mediante letras minúsculas (a, b y c). Realmente, los nudos D y B, al estar unidos a través de un cortocircuito, se podrían haber fundido en uno sólo; pero se ha preferido mantenerlos para que en el circuito siga apareciendo la corriente \bar{I}_6 , cuyo valor se desea obtener.

MÉTODO GENERAL (LEMAS DE KIRCHHOFF)

Este método consiste en utilizar los dos lemas de Kirchhoff para obtener un sistema de ecuaciones –de variable compleja- en el que las corrientes de rama son las incógnitas y los generadores, las impedancias y la topología del circuito son los datos. Evidentemente, este sistema debe tener tantas ecuaciones como corrientes de rama haya que calcular.

El **primer lema de Kirchhoff** se puede enunciar de dos formas equivalentes:

1. La suma de todas las corrientes de un nudo es cero. Para aplicar el primer lema de Kirchhoff de esta manera hay que dar signo positivo a las corrientes entrantes al nudo y signo negativo a las salientes.
2. La suma de todas las corrientes que entran en un nudo es igual a la suma de todas las corrientes que salen. Esta es la manera más práctica de utilizar este lema para resolver circuitos eléctricos.

El **segundo lema de Kirchhoff** también se puede enunciar de dos formas equivalentes:

1. La suma de todas las tensiones a lo largo de un trayecto cerrado es cero. Para aplicar el segundo lema de Kirchhoff de esta manera se empieza por elegir un sentido para recorrer el trayecto cerrado. A continuación, se da signo positivo a las tensiones que son recorridas desde el lado - al lado + cuando se sigue el sentido elegido y signo negativo a las que son recorridas desde el lado + al lado -.
2. En un trayecto cerrado la suma de las tensiones en los generadores es igual a la suma de las caídas de tensión en las impedancias. Para aplicar el segundo lema de Kirchhoff de esta manera se empieza por elegir un sentido para recorrer el trayecto cerrado. A continuación, se da signo positivo a las tensiones de los generadores que son recorridas desde el lado - al lado + cuando se sigue el sentido elegido y signo negativo a las que son recorridas desde el lado + al lado -. Es decir, como se aprecia en la Fig. 1, se da signo positivo a la tensión de los generadores que pretenden originar una corriente del mismo sentido que el elegido para recorrer el trayecto cerrado y signo negativo a la tensión de los generadores que pretenden originar una corriente de sentido opuesto al elegido. Después se da signo positivo a las caídas de tensión en las impedancias cuya corriente tiene el mismo sentido que el elegido y signo negativo en las impedancias cuya corriente tiene sentido opuesto al elegido para recorrer el trayecto cerrado. Esta es la manera más práctica de utilizar este lema para resolver circuitos eléctricos.

Para establecer el sistema de ecuaciones que permite resolver un circuito mediante la aplicación directa de los lemas de Kirchhoff se comienza por aplicar el primer lema a todos los nudos del circuito menos a uno, que se elige arbitrariamente. Esto es así porque en el nudo que no se utiliza se obtendría una ecuación que sería combinación lineal de las otras. Por lo tanto, esta ecuación no aporta nueva información y no se puede utilizar en el sistema de ecuaciones.

Así, en el circuito de la Fig. 18 si se aplica la 2ª forma del primer lema de Kirchhoff a todos los nudos menos al D, se obtienen estas ecuaciones:

$$\begin{aligned} \text{Nudo A: } \bar{I}_3 &= \bar{I}_4 + \bar{I}_5 \\ \text{Nudo B: } \bar{I}_4 + \bar{I}_5 + \bar{I}_6 &= 0 \\ \text{Nudo C: } 0 &= \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 \end{aligned} \tag{14}$$

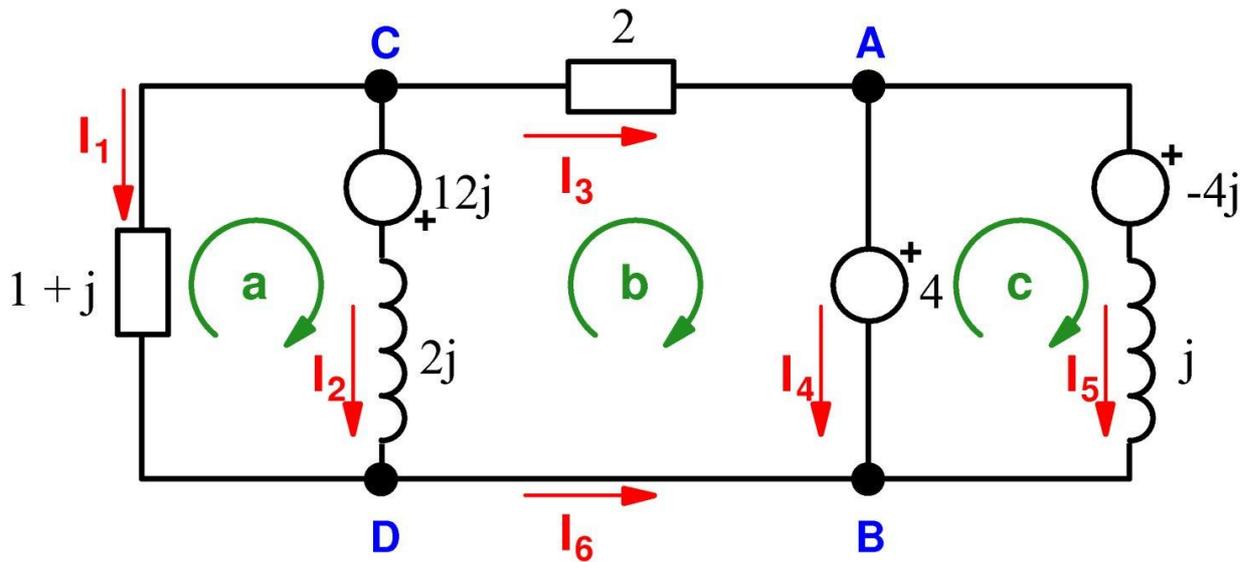


Fig. 18: Resolución del circuito de la Fig. 16 por el método general

La ecuación que se obtiene en el nudo D no nos sirve por ser combinación lineal de las ecuaciones (14). Esta ecuación es:

$$\text{Nudo D: } \bar{I}_1 + \bar{I}_2 = \bar{I}_6$$

La elección de D para que sea el nudo donde no se aplica el primer lema de Kirchhoff es totalmente arbitraria, se podría haber elegido cualquier otro nudo. En general, conviene elegir el nudo adonde confluyen el mayor número de ramas porque sería aquel donde el primer lema de Kirchhoff daría lugar a la ecuación más complicada.

Ahora se elige un sentido para recorrer las mallas del circuito. Conviene que sea el mismo sentido en todas las mallas. Seguidamente se plantean las ecuaciones que faltan para completar el sistema de ecuaciones mediante la aplicación del segundo lema de Kirchhoff en todas las mallas del circuito.

Así, en el circuito de la Fig. 18 se ha elegido el sentido de las agujas del reloj. Si se aplica la 2ª forma del segundo lema de Kirchhoff a todas las mallas se obtienen estas ecuaciones:

$$\begin{aligned} \text{Malla a: } 12j &= -\bar{I}_1 \cdot (1 + j) + \bar{I}_2 \cdot (2j) \\ \text{Malla b: } -12j - 4 &= -\bar{I}_2 \cdot (2j) + \bar{I}_3 \cdot 2 \\ \text{Malla c: } 4 - (-4j) &= \bar{I}_5 \cdot j \end{aligned} \quad (15)$$

El conjunto de las ecuaciones (14) y (15) forma un sistema de seis ecuaciones con seis incógnitas, que son las corrientes de rama ($\bar{I}_1, \bar{I}_2, \dots, \bar{I}_6$). La solución de este sistema de ecuaciones² da este resultado:

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 &= -2 + 0j \text{ A}; & \bar{I}_2 &= 5 + j \text{ A}; & \bar{I}_3 &= -3 - j \text{ A} \\ \bar{I}_4 &= -7 + 3j \text{ A}; & \bar{I}_5 &= 4 - 4j \text{ A}; & \bar{I}_6 &= 3 + j \text{ A} \end{aligned} \quad (16)$$

² En el apéndice 1 al final de este texto se resuelve este sistema de ecuaciones.

MÉTODO DE LAS MALLAS

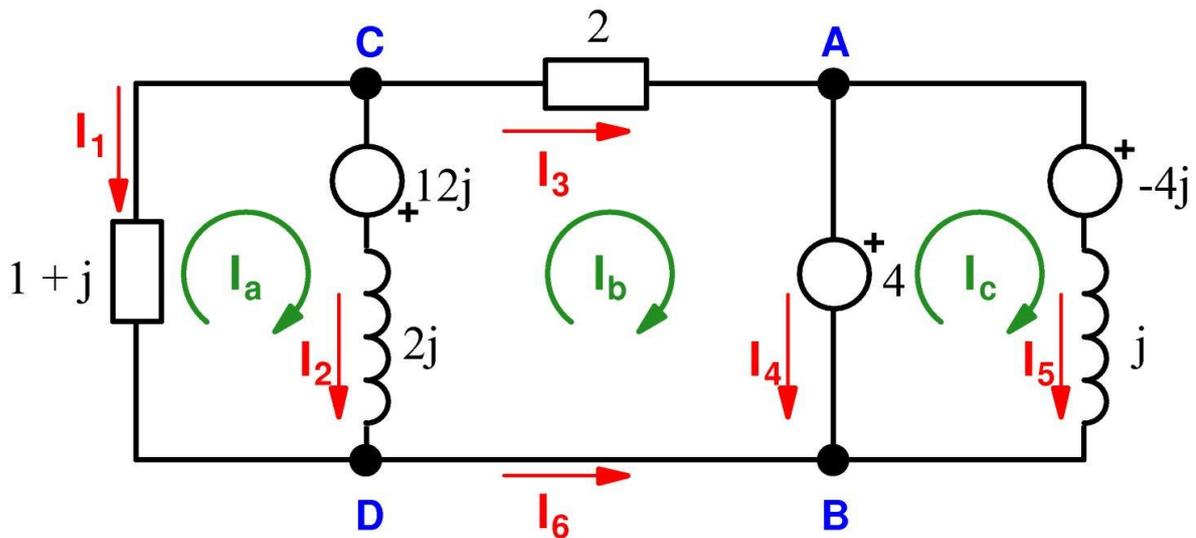


Fig. 19: Resolución del circuito de la Fig. 16 por el método de las mallas

El *método de las corrientes de malla* o, simplemente, el *método de las mallas* se basa también en la aplicación de los lemas de Kirchhoff. La idea es realizar un cambio de variable que reduce el número de corrientes a calcular simplificando el procedimiento.

En cada malla se define una corriente de malla, de tal manera que:

- Una rama que sólo pertenece a una malla tiene una corriente de rama igual a la de malla, si ambas circulan por la rama en el mismo sentido, u opuesta a la corriente de malla si circulan en sentidos contrarios.
- Una rama común a dos mallas tiene una corriente de rama igual a la suma algebraica de las dos corrientes de malla. En esta suma se les da signo positivo a las corrientes de malla que circulan en el mismo sentido que la de rama y signo negativo a las que circulan en sentido contrario.

Para aplicar este método de forma sistemática se escoge el mismo sentido a todas las corrientes de malla. De esta manera, en las ramas comunes a dos mallas la corriente de rama es igual a la suma algebraica de las dos corrientes de malla, donde siempre una de ellas es positiva y la otra es negativa.

Así, en la Fig. 19 se han identificado las tres corrientes de malla, \bar{I}_a , \bar{I}_b e \bar{I}_c , y se ha elegido que todas tengan sentido horario. Por lo tanto, en el circuito de la Fig. 19 se pueden poner todas las corrientes de rama en función de sólo tres corrientes de malla, lo que facilita su resolución. Se obtienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
 \bar{I}_1 &= -\bar{I}_a & \bar{I}_2 &= \bar{I}_a - \bar{I}_b \\
 \bar{I}_3 &= \bar{I}_b & \bar{I}_4 &= \bar{I}_b - \bar{I}_c \\
 \bar{I}_5 &= \bar{I}_c & \bar{I}_6 &= -\bar{I}_b
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

En las ecuaciones (17) está aplicado de forma implícita el primer lema de Kirchhoff. La aplicación del segundo lema de Kirchhoff proporciona el sistema de ecuaciones que permite calcular las corrientes de malla.

En principio habría que aplicar el segundo lema de Kirchhoff, planteando las ecuaciones (15), y luego aplicar las relaciones (17) para que las ecuaciones queden en función de las corrientes de malla. Sin embargo, las ecuaciones finales, en función de las corrientes de malla, se pueden obtener directamente siguiendo un procedimiento sistemático.

Así, la ecuación de cada malla se puede plantear directamente así:

- En el lado izquierdo del signo = de la ecuación se incluye la suma algebraica de las tensiones de todos los generadores de la malla. El signo de estas tensiones se obtiene siguiendo el mismo criterio que cuando se explicó el 2º lema de Kirchhoff: son positivas las tensiones de los generadores que pretenden originar corrientes del mismo sentido que la corriente de malla y negativas las tensiones de los generadores que pretenden producir corrientes opuestas a la corriente de malla. Recuérdese que un generador pretende generar una corriente en su interior que va desde el lado – al lado + (Fig.1).
- En el lado derecho del signo = de la ecuación hay varios sumandos:
 - El primero es la corriente de la malla que se está analizando multiplicada por la suma de todas las impedancias de la malla.
 - Los demás sumandos tienen signo negativo y consisten en el producto de las corrientes de las otras mallas que tienen alguna rama en común con la que se está analizando multiplicadas por las impedancias de dichas ramas comunes.

Por lo tanto, en el circuito eléctrico de la Fig. 19 se obtiene este sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 \text{Malla a: } 12j &= \bar{I}_a \cdot [(1 + j) + 2j] - \bar{I}_b \cdot (2j) \\
 \text{Malla b: } -12j - 4 &= \bar{I}_b \cdot (2 + 2j) - \bar{I}_a \cdot (2j) \\
 \text{Malla c: } 4 - (-4j) &= \bar{I}_c \cdot (j)
 \end{aligned} \tag{18}$$

Nótese que en este circuito la malla c tiene en común con la malla b (aparte de un generador) un cortocircuito -es decir, una impedancia nula- y no tiene ninguna en rama en común con la malla a. Por esta razón en su ecuación no aparecen las corrientes de otras mallas. Si se desea, se podría haber escrito esta ecuación de esta otra manera para poner de manifiesto la impedancia nula común entre b y c:

$$\text{Malla c: } 4 - (-4j) = \bar{I}_c \cdot (j + 0) - \bar{I}_b \cdot (0)$$

La resolución del sistema de ecuaciones (18) da este resultado:

$$\bar{I}_a = 2 + 0j \text{ A}; \quad \bar{I}_b = -3 - j \text{ A}; \quad \bar{I}_c = 4 - 4j \text{ A} \tag{19}$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones (17) se calculan las corrientes de rama. Evidentemente, se obtienen los mismos valores (véase (16)) que con el método general.

MÉTODO DE LOS NUDOS

El *método de las tensiones de nudo* o, simplemente, el *método de los nudos* es otro método basado en la aplicación de los lemas de Kirchhoff en el que, para simplificar el procedimiento, se realiza un cambio de variable que reduce el número de valores a calcular.

En este texto se va a explicar este método sin introducir generadores de intensidad, por lo que el lector lo encontrará explicado de diferente manera en otros libros.

En el método de los nudos se utilizan como variables las tensiones de los nudos con respecto a uno que se toma como referencia y que se elige arbitrariamente. Como se indicó al tratar de la Ley de Ohm (ecuación (8)), la corriente en una impedancia depende de la diferencia de potencial entre sus nudos, pero no del potencial absoluto de cada nudo. Por lo tanto, lo que se va a hacer es asignar un valor nulo al potencial de uno de los nudos (el *nudo de referencia*, que se elige arbitrariamente), lo que conlleva que los potenciales de los demás nudos tomen los valores adecuados para que las diferencias de potencial o tensiones entre cada par de nudos sean las que tiene el circuito. Es evidente, pues, que el potencial de un nudo va a ser igual a la tensión de dicho nudo con respecto al tomado como referencia. El nudo de referencia se va señalar sobre el circuito mediante el símbolo \equiv .

Para expresar las corrientes de rama en función de las tensiones de los nudos se sigue el siguiente procedimiento:

- **Ramas con sólo impedancia:**

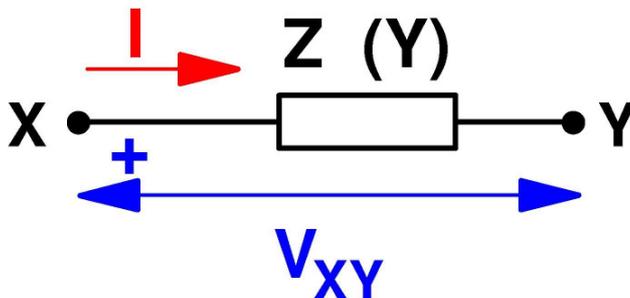


Fig. 20: Rama con impedancia

En una rama con sólo elementos pasivos de impedancia \bar{Z} , o admitancia \bar{Y} (recuerde que, según (8), $\bar{Y} = 1/\bar{Z}$), la Ley de Ohm (8), indica que:

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}_X - \bar{V}_Y}{\bar{Z}} = (\bar{V}_X - \bar{V}_Y) \cdot \bar{Y} \quad (20)$$

Nótese que la tensión a utilizar es $\bar{V}_{XY} = \bar{V}_X - \bar{V}_Y$ porque la corriente a calcular va del punto X al punto Y.

- **Ramas con un generador de tensión real:**

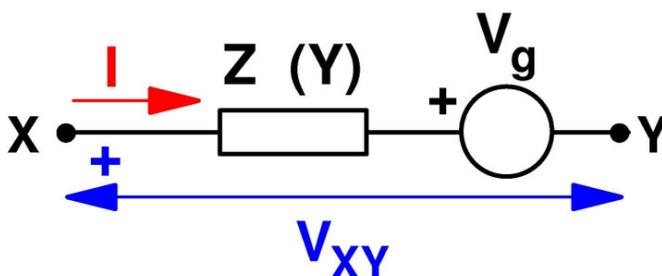


Fig. 21: Rama con un generador de tensión real

En una rama con un generador de tensión real; es decir, con un generador ideal con una impedancia en serie, sucede que:

$$\bar{V}_X - \bar{V}_Y = \bar{Z} \cdot \bar{I} - (\pm \bar{V}_g)$$

$$\bar{I} = \frac{(\bar{V}_X - \bar{V}_Y) \pm \bar{V}_g}{\bar{Z}} = [(\bar{V}_X - \bar{V}_Y) \pm \bar{V}_g] \cdot \bar{Y} \quad (21)$$

Comparando esta expresión con la (20) se aprecia que ahora hay que añadir la tensión del generador \bar{V}_g junto a la tensión $\bar{V}_{XY} = \bar{V}_X - \bar{V}_Y$ entre los nudos X e Y.

En la expresión (21) la tensión del generador \bar{V}_g tiene signo positivo si trata de generar una corriente del mismo sentido que \bar{I} (es decir, si \bar{I} se dirige desde el extremo - del generador a su extremo +) y signo negativo en el caso contrario. Así, para la rama de la Fig. 21 la tensión \bar{V}_g debe aparecer en la ecuación (21) con signo negativo.

Hay dos tipos de *ramas especiales* en las que no se puede expresar su corriente en función de la tensión entre sus extremos:

- **Ramas con un generador de tensión ideal:**

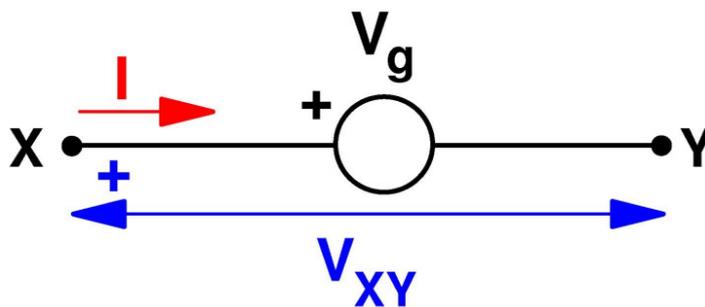


Fig. 22: Rama con un generador de tensión ideal

En estas ramas la corriente no se puede expresar en función de la tensión entre sus nudos extremos y, por lo tanto, su corriente seguirá siendo una de las incógnitas que deben aparecer en el sistema de ecuaciones que resuelva el circuito. En contrapartida, se puede establecer esta ecuación

$$\bar{V}_X - \bar{V}_Y = \bar{V}_g \quad (22)$$

que va a permitir el calcular rápidamente la tensión de uno de los nudos.

Nótese que en la expresión (22) la tensión a utilizar es $\bar{V}_{XY} = \bar{V}_X - \bar{V}_Y$ porque la tensión del generador \bar{V}_g tiene su lado + hacia el nudo X (Fig. 22).

- **Ramas con un cortocircuito:**

Este se puede considerar como un caso particular del anterior donde el generador ideal tiene una tensión nula.

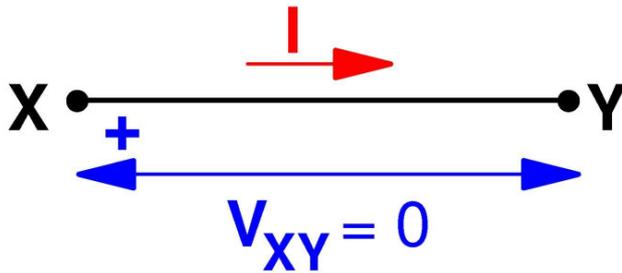


Fig. 23: Rama con un cortocircuito

En consecuencia, aquí tampoco la corriente se puede expresar en función de la tensión entre sus nudos extremos y, por lo tanto, su corriente seguirá siendo una de las incógnitas que deben aparecer en el sistema de ecuaciones que resuelva el circuito. En este caso, como se deduce de la fórmula (12), se puede establecer esta ecuación:

$$\boxed{\bar{V}_X - \bar{V}_Y = 0 \Rightarrow \bar{V}_X = \bar{V}_Y} \quad (23)$$

que va a permitir el calcular rápidamente la tensión de uno de los nudos.

Para aplicar este método es más cómodo utilizar las admitancias que las impedancias. Así, en la Fig. 24 se ha redibujado el circuito de la Fig. 17 indicando en cada elemento pasivo no sólo su impedancia sino también su admitancia entre paréntesis. En esta figura además se ha indicado que se ha elegido a B como nudo de referencia.

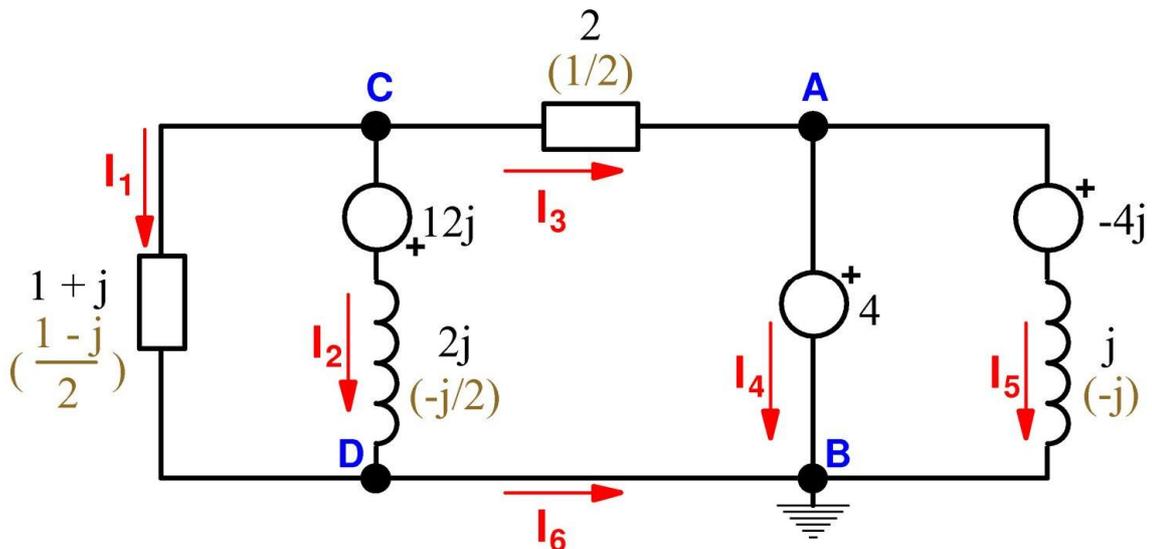


Fig. 24: Resolución del circuito de la Fig. 16 por el método de los nudos utilizando el nudo B como referencia

Aplicando las fórmulas (20) a (23) en el circuito de la Fig. 24 se obtienen estas relaciones:

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 &= (\bar{V}_C - \bar{V}_D) \cdot \frac{1-j}{2} & \bar{I}_2 &= (\bar{V}_C - \bar{V}_D + 12j) \cdot \left(-\frac{j}{2}\right) \\ \bar{I}_3 &= (\bar{V}_C - \bar{V}_A) \cdot \frac{1}{2} & \bar{V}_A - \bar{V}_B &= 4 \\ \bar{I}_5 &= (\bar{V}_A - \bar{V}_B - (-4j)) \cdot (-j) & \bar{V}_D - \bar{V}_B &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

Nótese que no se han podido expresar las intensidades \bar{I}_4 e \bar{I}_6 en función de las tensiones de los nudos, pero hay dos ecuaciones (la 4ª y la 6ª de (24)) que dan inmediatamente la tensión de los nudos A y B. Dado que el nudo B es el de referencia, se obtiene que:

$$\bar{V}_B = 0 \text{ V} \rightarrow \bar{V}_A = 4 \text{ V}; \quad \bar{V}_D = 0 \text{ V} \quad (25)$$

Luego, de las relaciones (24) y (25) se llega a:

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 &= \bar{V}_C \cdot \frac{1-j}{2} \\ \bar{I}_2 &= (\bar{V}_C + 12j) \cdot \left(-\frac{j}{2}\right) = -\frac{j\bar{V}_C}{2} + 6 \\ \bar{I}_3 &= (\bar{V}_C - 4) \cdot \frac{1}{2} = \frac{\bar{V}_C}{2} - 2 \\ \bar{I}_5 &= (4 - (-4j)) \cdot (-j) = 4 - 4j \end{aligned} \quad (26)$$

Las variables a calcular quedan reducidas, pues, a \bar{V}_C , \bar{I}_4 e \bar{I}_6 .

En las ecuaciones (24) está aplicado de forma implícita el segundo lema de Kirchhoff. La utilización del primer lema de Kirchhoff proporciona el sistema de ecuaciones que permite calcular las variables que faltan.

En principio habría que aplicar el primer lema de Kirchhoff a todos los nudos menos a uno. El nudo que no se utiliza puede ser tanto el nudo de referencia como cualquier otro nudo. Esto daría lugar a las ecuaciones (14) en las cuales se aplicarían luego las relaciones (26) para que queden en función de \bar{V}_C , \bar{I}_4 e \bar{I}_6 . Sin embargo, las ecuaciones finales, en función de \bar{V}_C , \bar{I}_4 e \bar{I}_6 , se pueden obtener directamente siguiendo un procedimiento sistemático.

Así, la ecuación en cada nudo se puede plantear directamente así:

- En el lado izquierdo del signo = de la ecuación hay varios sumandos englobados en dos tipos:
 - Los sumandos del primer tipo son las corrientes de las ramas especiales (con generadores ideales o cortocircuitos) que concurren al nudo considerado. Estas corrientes no se pueden expresar en función de las tensiones de los nudos y tienen signo positivo si son entrantes al nudo considerado y negativo si salen de dicho nudo.
 - Los sumandos del segundo tipo corresponden a los generadores reales conectados al nudo considerado. Cada uno de estos sumandos es igual al producto de la tensión del generador real por la admitancia que está en serie con él. El signo de cada uno de estos sumandos es positivo si el generador pretende generar una corriente entrante al nudo considerado y negativo en el caso contrario. Luego, estos sumandos son positivos cuando corresponden a generadores cuyo lado + está orientado hacia el nudo considerado y negativos en el caso contrario.
- En el lado derecho del signo = de la ecuación hay varios sumandos:
 - El primero es la tensión del nudo que se está analizando multiplicada por la suma de todas las admitancias de las ramas que concurren a dicho nudo, excepto las ramas especiales (con generadores ideales o cortocircuitos).

- Los demás sumandos tienen signo negativo y se refieren a los otros nudos que están unidos al considerado a través de alguna rama que no sea de las especiales (con generadores ideales o cortocircuitos). Cada uno de estos sumandos es el producto de la tensión de un nudo por admitancia de la rama que lo conecta al nudo que se está analizando. Si un nudo se conecta al que se está analizando a través de varias ramas (no se consideran las ramas especiales), hay que multiplicar su tensión por la suma de las admitancias de dichas ramas.

Nótese que en los sumando de la parte derecha del signo = no intervienen las ramas especiales (con generadores ideales o cortocircuitos) del circuito.

Por lo tanto, aplicando esto en todos los nudos del circuito de la Fig. 24, excepto en el C, se obtiene este sistema de ecuaciones que va a permitir el acabar de resolver el circuito:

$$\begin{aligned}
 \text{Nudo A: } & -\bar{I}_4 + [(-4j) \cdot (-j)] = \bar{V}_A \left(\frac{1}{2} + (-j) \right) - \bar{V}_C \left(\frac{1}{2} \right) - \bar{V}_B (-j) \\
 \text{Nudo B: } & \bar{I}_4 + \bar{I}_6 - [(-4j) \cdot (-j)] = \bar{V}_B (-j) - \bar{V}_A (-j) \\
 \text{Nudo D: } & -\bar{I}_6 + \left[(12j) \cdot \left(-\frac{j}{2} \right) \right] = \bar{V}_D \left(\frac{1-j}{2} - \frac{j}{2} \right) - \bar{V}_C \left(\frac{1-j}{2} - \frac{j}{2} \right)
 \end{aligned} \tag{27}$$

La ecuación que se obtiene en el nudo C no nos sirve por ser combinación lineal de las ecuaciones (27). Esta ecuación es:

$$\text{Nudo C: } - \left[(12j) \cdot \left(-\frac{j}{2} \right) \right] = \bar{V}_C \left(\frac{1-j}{2} + \frac{1}{2} - \frac{j}{2} \right) - \bar{V}_D \left(\frac{1-j}{2} - \frac{j}{2} \right) - \bar{V}_A \left(\frac{1}{2} \right)$$

Teniendo en cuenta las relaciones (25), el sistema de ecuaciones (27) se convierte en:

$$\begin{aligned}
 \text{Nudo A: } & -\bar{I}_4 - 4 = (2 - 4j) - \bar{V}_C \left(\frac{1}{2} \right) \rightarrow -12 + 8j = -\bar{V}_C + 2\bar{I}_4 \\
 \text{Nudo B: } & \bar{I}_4 + \bar{I}_6 + 4 = 4j \rightarrow -4 + 4j = \bar{I}_4 + \bar{I}_6 \\
 \text{Nudo D: } & -\bar{I}_6 + 6 = -\bar{V}_C \left(\frac{1-2j}{2} \right) \rightarrow 12 = \bar{V}_C (2j - 1) + 2\bar{I}_6
 \end{aligned} \tag{28}$$

La solución de este sistema (28) da el siguiente resultado:

$$\bar{V}_C = -2 - 2j \text{ V}; \quad \bar{I}_4 = -7 + 3j \text{ A}; \quad \bar{I}_6 = 3 + j \text{ A} \tag{29}$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones (26) se calcula el resto de las corrientes de rama. Evidentemente, se obtienen los mismos valores (véase (16)) que con el método general.

Ejemplo 4:

Calcule las corrientes de rama en el circuito de la Fig. 25 empleando el método de los nudos y tomando el nudo B como referencia.

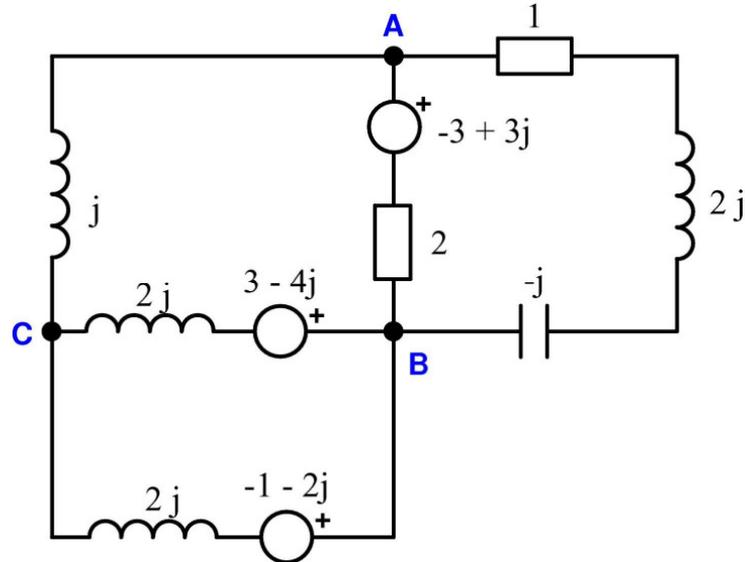


Fig. 25: Circuito a resolver por el método de los nudos

Resolución:

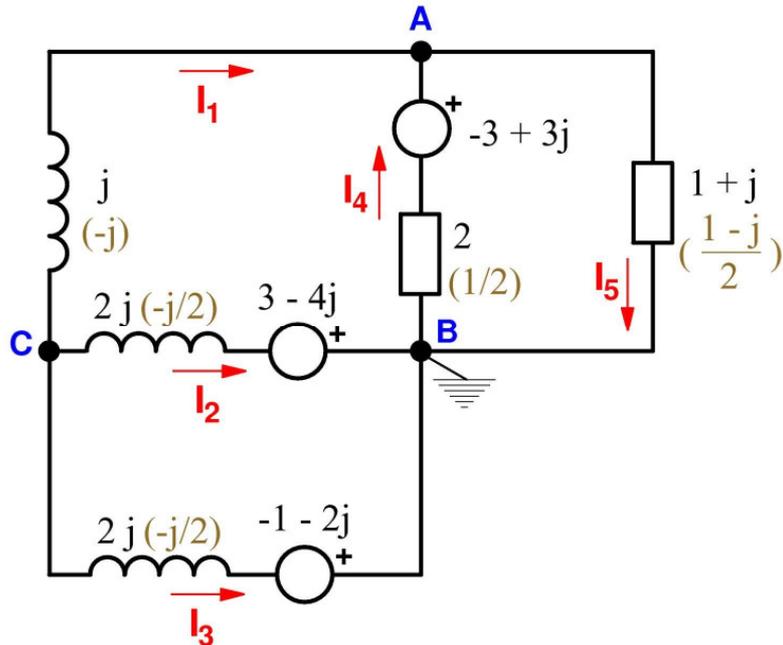


Fig. 26: Resolución del circuito de la Fig. 25 por el método de los nudos

En la Fig. 26 se ha redibujado el circuito de la Fig. 25 para resolverlo por nudos. En la Fig. 26 se han nombrado y elegido el sentido de las corrientes de rama de forma arbitraria. Además, en la rama de la derecha se han englobado en una sola impedancia las tres en serie del circuito original. También se ha indicado entre paréntesis la admitancia de cada elemento pasivo. Por último, se ha marcado el nudo B como de referencia.

En este circuito no existen ramas especiales, por lo que todas las corrientes de rama se pueden expresar en función de las tensiones de nudo. La aplicación de las relaciones (20) y (21) a todas las ramas de este circuito permite escribir las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 \bar{I}_1 &= (\bar{V}_C - \bar{V}_A) \cdot (-j) \\
 \bar{I}_2 &= [(\bar{V}_C - \bar{V}_B) + (3 - 4j)] \cdot \left(-\frac{j}{2}\right) \\
 \bar{I}_3 &= [(\bar{V}_C - \bar{V}_B) + (-1 - 2j)] \cdot \left(-\frac{j}{2}\right) \\
 \bar{I}_4 &= [(\bar{V}_B - \bar{V}_A) + (-3 + 3j)] \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \\
 \bar{I}_5 &= (\bar{V}_A - \bar{V}_B) \cdot \left(\frac{1-j}{2}\right)
 \end{aligned} \tag{30}$$

Habiendo tomado el nudo B como referencia, las expresiones anteriores se simplifican así:

$$\begin{aligned}
 \bar{V}_B &= 0 \\
 \bar{I}_1 &= (\bar{V}_C - \bar{V}_A) \cdot (-j) \\
 \bar{I}_2 &= [\bar{V}_C + (3 - 4j)] \cdot \left(-\frac{j}{2}\right) \\
 \bar{I}_3 &= [\bar{V}_C + (-1 - 2j)] \cdot \left(-\frac{j}{2}\right) \\
 \bar{I}_4 &= [-\bar{V}_A + (-3 + 3j)] \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \\
 \bar{I}_5 &= \bar{V}_A \cdot \left(\frac{1-j}{2}\right)
 \end{aligned} \tag{31}$$

Nótese que todas las corrientes de rama están expresadas en función sólo de dos tensiones de nudo, con lo cual se ha reducido notablemente el número de variables a determinar.

Ahora se plantea el primer lema de Kirchhoff en todos los nudos menos en el B (podría haberse escogido cualquier otro nudo) mediante el procedimiento sistemático explicado en los párrafos anteriores. Así se obtiene el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned}
 &\text{Nudo A:} \\
 (-3 + 3j) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) &= \bar{V}_A \left(-j + \frac{1}{2} + \frac{1-j}{2}\right) - \bar{V}_B \left(\frac{1-j}{2} + \frac{1}{2}\right) - \bar{V}_C (-j) \\
 &\text{Nudo C:} \\
 - \left[(3 - 4j) \cdot \left(-\frac{j}{2}\right) \right] - \left[(-1 - 2j) \cdot \left(-\frac{j}{2}\right) \right] &= \bar{V}_C \left(-j - \frac{j}{2} - \frac{j}{2}\right) - \bar{V}_A (-j) - \bar{V}_B \left(\frac{-j}{2} + \frac{-j}{2}\right)
 \end{aligned} \tag{32}$$

Teniendo en cuenta que el nudo B es el de referencia y operando el sistema de ecuaciones (32) se transforma en:

$$\begin{aligned} \text{Nudo A: } \frac{-3 + 3j}{2} &= \bar{V}_A \left(\frac{2 - 3j}{2} \right) - \bar{V}_C (-j) \\ \text{Nudo C: } 3 + j &= \bar{V}_C (-2j) - \bar{V}_A (-j) \end{aligned} \quad (33)$$

La solución del sistema de ecuaciones (33) es:

$$\bar{V}_A = -1 + j \text{ V} \quad \bar{V}_C = -1 + 2j \text{ V} \quad (34)$$

Sustituyendo estos valores en las relaciones (31) se calculan las corrientes de rama:

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 &= 1 + 0j \text{ A}; & \bar{I}_2 &= -1 - j \text{ A}; & \bar{I}_3 &= 0 + j \text{ A} \\ \bar{I}_4 &= -1 + j \text{ A}; & \bar{I}_5 &= 0 + j \text{ A} \end{aligned} \quad (35)$$

Luego, las corrientes de rama de este circuito son las indicadas en (35).

PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

El principio de superposición se aplica en varios campos de la ingeniería cuando existe una relación lineal entre causas y efectos. Este principio indica que el efecto de un conjunto de causas es igual a la suma de los efectos producidos por cada causa actuando individualmente.

Por lo tanto, este principio dice que *la corriente que circula por cada rama de un circuito eléctrico lineal con varios generadores es igual a la suma de las corrientes que produciría cada generador actuando individualmente.*

Para utilizar este principio, el circuito eléctrico original se descompone en tantos circuitos parciales como generadores haya. En cada circuito parcial se deja un solo generador. Se resuelven estos circuitos parciales y las corrientes del circuito original son iguales a la suma de las corrientes de los circuitos parciales.

Para obtener un circuito parcial hay que eliminar todos los generadores menos uno. Un generador de tensión ideal se elimina sustituyéndolo por un cortocircuito.

Para que el cálculo de las corrientes en el circuito original por suma de las corrientes parciales sea más sencillo y no haya que estar controlando los signos de las corrientes parciales, se elegirán sistemáticamente los mismos nombres y los mismos sentidos a las corrientes de rama en todos los circuitos parciales y en el original. La única distinción en la nomenclatura es que a las variables del primer circuito parcial se les pondrá un apóstrofe (‘), en las del segundo circuito parcial se les pondrá doble apóstrofe (“), etc.

El principio de superposición se puede aplicar tanto a las corrientes como a las tensiones entre los nudos; pero no a las potencias, tanto activa como reactiva o compleja. Esto es debido a la relación no lineal que existe entre las potencias y las tensiones o las corrientes.

En la Fig. 27 se ha dibujado de nuevo el circuito de la Fig. 17 y los tres circuitos parciales, con un solo generador cada uno, en que se descompone para aplicar el principio de superposición.

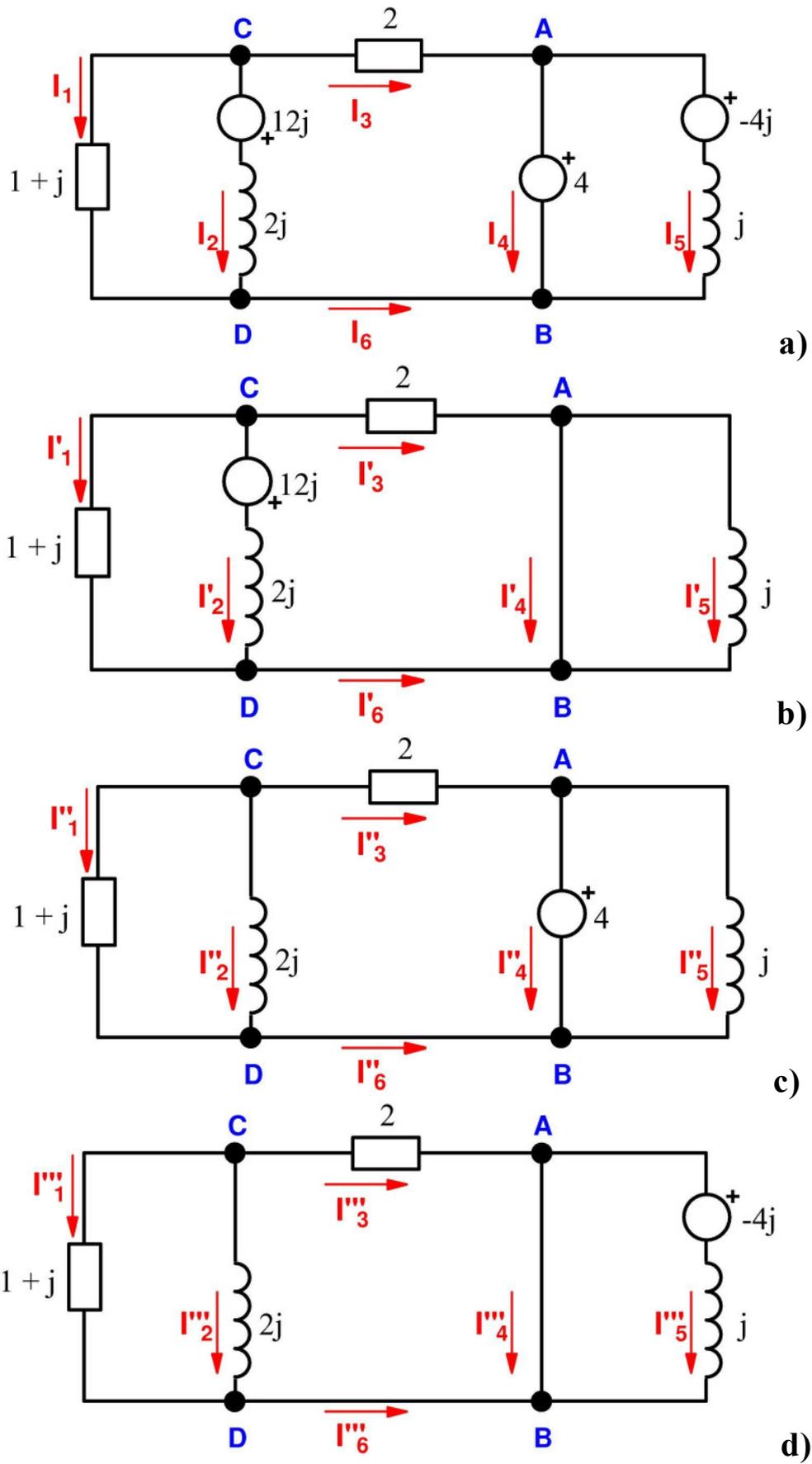


Fig. 27: Circuito original a) y circuitos parciales b), c) y d) para resolver mediante el principio de superposición.

Al resolver los circuitos parciales utilizando los métodos expuestos anteriormente se obtienen estos resultados:

$$\begin{aligned}\bar{I}'_1 &= -3 + 0j \text{ A}; & \bar{I}'_2 &= 4,5 + 1,5j \text{ A}; & \bar{I}'_3 &= -1,5 - 1,5j \text{ A} \\ \bar{I}'_4 &= -1,5 - 1,5j \text{ A}; & \bar{I}'_5 &= 0 \text{ A}; & \bar{I}'_6 &= 1,5 + 1,5j \text{ A}\end{aligned}\quad (36a)$$

$$\begin{aligned}\bar{I}''_1 &= 1 + 0j \text{ A}; & \bar{I}''_2 &= 0,5 - 0,5j \text{ A}; & \bar{I}''_3 &= -1,5 + 0,5j \text{ A} \\ \bar{I}''_4 &= -1,5 + 4,5j \text{ A}; & \bar{I}''_5 &= 0 - 4j \text{ A}; & \bar{I}''_6 &= 1,5 - 0,5j \text{ A}\end{aligned}\quad (36b)$$

$$\begin{aligned}\bar{I}'''_1 &= 0 \text{ A}; & \bar{I}'''_2 &= 0 \text{ A}; & \bar{I}'''_3 &= 0 \text{ A} \\ \bar{I}'''_4 &= -4 + 0j \text{ A}; & \bar{I}'''_5 &= 4 + 0j \text{ A}; & \bar{I}'''_6 &= 0 \text{ A}\end{aligned}\quad (36c)$$

Luego, las corrientes en el circuito original son:

$$\begin{aligned}I_1 &= I'_1 + I''_1 + I'''_1 = (-3 + 0j) + (1 + 0j) + 0 = -2 + 0j \text{ A} \\ I_2 &= I'_2 + I''_2 + I'''_2 = (4,5 + 1,5j) + (0,5 - 0,5j) + 0 = 5 + j \text{ A} \\ I_3 &= I'_3 + I''_3 + I'''_3 = (-1,5 - 1,5j) + (-1,5 + 0,5j) + 0 = -3 - j \text{ A} \\ I_4 &= I'_4 + I''_4 + I'''_4 = (-1,5 - 1,5j) + (-1,5 + 4,5j) + (-4 + 0j) = -7 + 3j \text{ A} \\ I_5 &= I'_5 + I''_5 + I'''_5 = 0 + (0 - 4j) + (4 + 0j) = 4 - 4j \text{ A} \\ I_6 &= I'_6 + I''_6 + I'''_6 = (1,5 + 1,5j) + (1,5 - 0,5j) + 0 = 3 + j \text{ A}\end{aligned}\quad (37)$$

Si se deseara conocer la tensión entre los nudos C y D también se puede utilizar el principio de superposición:

$$\begin{aligned}\bar{V}'_{CD} &= (1 + j) \cdot \bar{I}'_1 = (1 + j) \cdot (-3 + 0j) = -3 - 3j \text{ V} \\ \bar{V}''_{CD} &= (1 + j) \cdot \bar{I}''_1 = (1 + j) \cdot (1 + 0j) = 1 + j \text{ V} \\ \bar{V}'''_{CD} &= (1 + j) \cdot \bar{I}'''_1 = (1 + j) \cdot 0 = 0 \text{ V} \\ \bar{V}_{CD} &= \bar{V}'_{CD} + \bar{V}''_{CD} + \bar{V}'''_{CD} = (-3 - 3j) + (1 + j) + 0 = -2 - 2j \text{ V}\end{aligned}\quad (38)$$

Como comprobación, el cálculo de la tensión entre C y D directamente en el circuito original da el siguiente resultado:

$$\bar{V}_{CD} = (1 + j) \cdot \bar{I}_1 = (1 + j) \cdot (-2 + 0j) = -2 - 2j \text{ V}\quad (39)$$

Evidentemente, los resultados obtenidos al calcular la tensión \bar{V}_{CD} mediante el método de superposición, (38), y directamente, (39), son coincidentes.

Sin embargo, no se puede aplicar el principio de superposición a las potencias. Para comprobarlo vamos a calcular la potencia compleja consumida por la impedancia de $1 + j$ Ohms en los circuitos parciales y original:

$$\begin{aligned}
\bar{S}'_1 &= (1 + j) \cdot (I'_1)^2 = (1 + j) \cdot [(-3)^2 + 0^2] = 9 + 9j \text{ VA} \\
\bar{S}''_1 &= (1 + j) \cdot (I''_1)^2 = (1 + j) \cdot [(1)^2 + 0^2] = 1 + j \text{ VA} \\
\bar{S}'''_1 &= (1 + j) \cdot (I'''_1)^2 = (1 + j) \cdot [(0)^2 + 0^2] = 0 + 0j \text{ VA} \\
\bar{S}_1 &= (1 + j) \cdot (I_1)^2 = (1 + j) \cdot [(-2)^2 + 0^2] = 4 + 4j \text{ VA}
\end{aligned}
\tag{40}$$

Luego, se comprueba que:

$$\bar{S}_1 \neq \bar{S}'_1 + \bar{S}''_1 + \bar{S}'''_1 \tag{41}$$

TEOREMA DE BOUCHEROT O PRINCIPIO DE LA CONSERVACIÓN DE LA POTENCIA COMPLEJA

El Teorema de Boucherot consiste en la aplicación del principio de la conservación de la energía a los circuitos eléctricos. Este teorema dice que *en un circuito eléctrico de frecuencia constante la potencia compleja consumida en el conjunto de todos los elementos pasivos es igual a la potencia compleja producida por la totalidad de los generadores.*

Como es sabido, la parte real de la potencia compleja es la potencia activa y la parte imaginaria es la potencia reactiva. Por lo tanto, descomponiendo la potencia compleja en sus partes real e imaginaria, se deduce del Teorema de Boucherot que en un circuito eléctrico la potencia activa consumida en los elementos pasivos es igual a la producida en los generadores y lo mismo sucede con la potencia reactiva.

Los elementos pasivos se caracterizan por su impedancia. Por otro lado, un generador real consiste en un generador ideal más una impedancia. Agrupando las impedancias de los generadores reales con las de los elementos pasivos, se puede utilizar esta otra forma, más práctica, del Teorema de Boucherot: *en un circuito eléctrico de frecuencia constante la potencia compleja consumida en el conjunto de todas las impedancias es igual a la potencia compleja producida por la totalidad de los generadores ideales:*

$$\boxed{\bar{S}_C = \bar{S}_G} \tag{42}$$

En este enunciado se entiende que un elemento consume potencia compleja cuando está consumiendo potencia activa y, análogamente, un elemento genera potencia compleja si está generando potencia activa.

Las impedancias nunca pueden generar potencia activa, luego su potencia activa consumida siempre será positiva. La expresión más cómoda para calcular la potencia compleja, \bar{S} , consumida por una impedancia, \bar{Z} , es la siguiente:

$$\boxed{\bar{S} = \bar{Z} \cdot I^2} \tag{43}$$

Nótese que en la relación (43) aparece el módulo de la corriente (esto es, su valor eficaz) al cuadrado, no el cuadrado del complejo \bar{I} . Si I_a es la parte real de \bar{I} e I_b su parte imaginaria, sucede que:

$$\bar{I} = I_a + j I_b \rightarrow I^2 = I_a^2 + I_b^2 \rightarrow \boxed{\bar{S} = \bar{Z} \cdot (I_a^2 + I_b^2)} \quad (44)$$

Un generador ideal puede generar o consumir potencia activa. Para comprender esto vamos a razonar sobre el circuito de corriente continua de la Fig. 28:

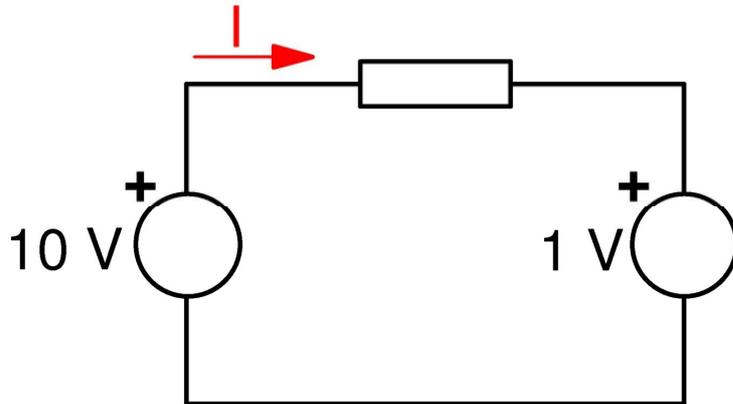


Fig. 28: Circuito de corriente continua con dos generadores ideales: el izquierdo actuando realmente como generador y el derecho como carga

Se observa que el generador ideal de la izquierda de la Fig. 28 pretende que la corriente circule en el sentido de las agujas del reloj mientras que el de la derecha intenta que circule en sentido contrario. Como el generador izquierdo tiene más tensión que el otro predomina su efecto y la corriente circulará en sentido horario, como se muestra en la Fig. 28. Por lo tanto, el generador de la izquierda actúa realmente como generador, pero el de la derecha se opone a la circulación de esta corriente y actúa como carga. En consecuencia, la potencia generada por el generador izquierdo es positiva y la del generador derecho es negativa.

Volviendo a la corriente alterna, los generadores que realmente actúen como tales tendrán una potencia activa generada positiva. Los generadores que actúan como cargas se van a seguir considerando como generadores, pero con potencia activa generada negativa. Aunque pueda haber generadores con potencia activa generada negativa, la potencia activa generada por la suma de todos los generadores es siempre positiva.

La fórmula que se va a utilizar para obtener la potencia compleja de un generador es:

$$\boxed{\bar{S} = \bar{V} \cdot \bar{I}^*} \quad (45)$$

En esta expresión \bar{I}^* es el conjugado del complejo \bar{I} . Para aplicar correctamente la ecuación (45) a los generadores hay que tener cuidado con los signos de \bar{V} e \bar{I} . Hay que adoptar los sentidos de tensión y de corriente correspondientes a un generador (Fig. 1) y, en consecuencia, la corriente a utilizar en la fórmula (45) debe circular dentro del generador desde el lado - al lado + de su tensión \bar{V} .

En la Fig. 29 se vuelve a mostrar el circuito que se ha estado resolviendo en los apartados anteriores. Recordemos que los valores de las corrientes que circulan por este circuito se indicaron en (16) y se repiten a continuación:

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 &= -2 + 0j \text{ A}; & \bar{I}_2 &= 5 + j \text{ A}; & \bar{I}_3 &= -3 - j \text{ A} \\ \bar{I}_4 &= -7 + 3j \text{ A}; & \bar{I}_5 &= 4 - 4j \text{ A}; & \bar{I}_6 &= 3 + j \text{ A} \end{aligned} \quad (46)$$

La potencia compleja producida total por los generadores vale pues:

$$\begin{aligned}\bar{S}_C &= \bar{S}_{G2} + \bar{S}_{G4} + \bar{S}_{G5} = (12 + 60j) + (28 + 12j) + (-16 + 16j) \text{ VA} \\ \underline{\bar{S}_G} &= 24 + 88j \text{ VA}\end{aligned}\quad (50)$$

Evidentemente se cumple el Teorema de Boucherot (42): $\bar{S}_C = \bar{S}_G$.

Nótese en los resultados (49) que el generador recorrido por la corriente \bar{I}_5 genera una potencia activa negativa, por lo que realmente está actuando como carga. La potencia activa generada total es siempre positiva, como se puede apreciar en (50).

El Teorema de Boucherot (42) se puede utilizar como método de comprobación de que se ha resuelto correctamente un circuito.

TEOREMA DE THÉVENIN

Supongamos que se tiene un circuito eléctrico con generadores e impedancias, tan complejo como se quiera, metido dentro de una caja de forma que sólo salen dos terminales, X e Y, al exterior de dicha caja (en la Fig. 30a este circuito se representa por un rectángulo). Por fuera de la caja se conectan a dichos terminales, X e Y, uno o varios generadores y receptores, formando otro circuito tan complicado como se desee (en la Fig. 30a se ha conectado una rama con un generador ideal de tensión \bar{V}_1 y una impedancia \bar{Z}_1 en serie). El circuito conjunto resultante, formado por lo que está dentro y fuera de la caja, provoca la existencia de corrientes y de tensiones en el circuito externo. Si ahora, manteniendo intacto el circuito del interior, se modifica el circuito exterior a la caja, en este último habrá otras corrientes y tensiones. Pues bien, a efectos de lo que va a suceder en cualquier circuito exterior que se quiera conectar entre los bornes X e Y, el Teorema de Thévenin señala que el circuito interior se puede sustituir por un circuito equivalente, más sencillo que el circuito interior original, que consiste en un generador de tensión real; es decir, un generador de tensión ideal (con tensión \bar{E}_{Th}) y una impedancia (\bar{Z}_{Th}) en serie (en la Fig. 30b el circuito equivalente está dibujado dentro de una línea de trazos). En consecuencia, el circuito externo va a estar en igual estado tanto si dentro de la caja está el circuito interior original como si dentro de la caja está el circuito equivalente de Thévenin.

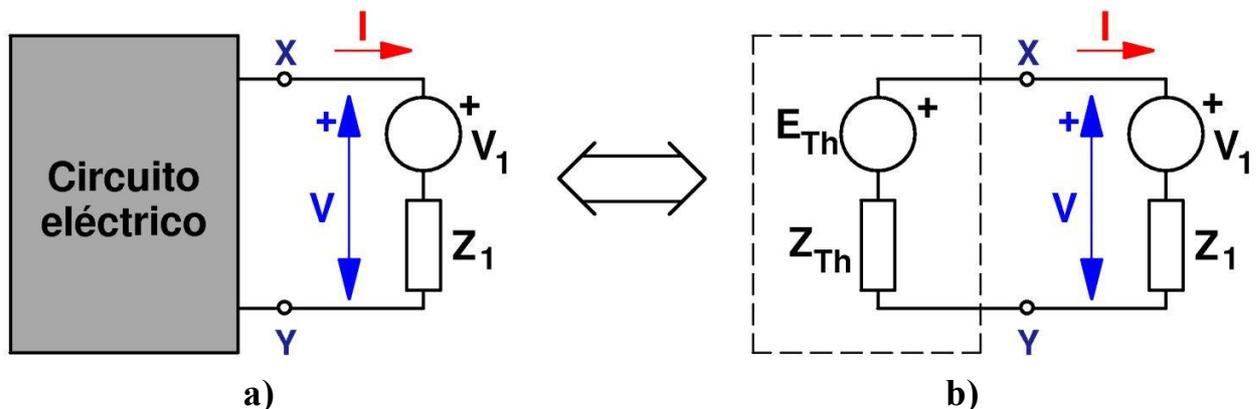


Fig. 30: Circuito equivalente de Thévenin

Si en el circuito equivalente de la Fig. 30b se dejan abiertos los terminales X e Y, la corriente \bar{I} será nula y la tensión \bar{V} entre X e Y será igual a la tensión de Thévenin \bar{E}_{Th} . Recordemos que los circuitos original (Fig. 30a) y equivalente (Fig. 30b) provocan las mismas tensiones en el exterior de la caja. Luego, si en el circuito original se dejan abiertos los terminales X e Y, también sucederá que entre ellos hay una tensión igual a \bar{E}_{Th} .

Por lo tanto, la tensión de Thévenin \bar{E}_{Th} se puede obtener calculando la tensión entre los puntos X e Y en el circuito original cuando entre estos dos terminales no se conecta nada por fuera de la caja. Nótese que la tensión de Thévenin es la tensión entre X e Y y no entre Y y X porque se ha elegido en el circuito equivalente que el generador de Thévenin tenga su extremo + hacia el borne X.

Supóngase ahora que en la Fig. 30a se anulan todos los generadores del circuito interior cortocircuitándolos (como se indicó al explicar el método de superposición). En estas condiciones al calcular la tensión de Thévenin \bar{E}_{Th} se obtendrá que ésta tiene un valor nulo y el circuito equivalente de Thévenin sólo consiste en la impedancia \bar{Z}_{Th} . Teniendo en cuenta que el circuito original y el de Thévenin son equivalentes, de lo anterior se deduce que la impedancia de Thévenin, \bar{Z}_{Th} , es igual a la impedancia equivalente al circuito interior original cuando se le anulan todos los generadores.

Vamos a aplicar el Teorema de Thévenin para calcular la corriente \bar{I}_1 en el circuito de la Fig. 17 que hemos venido resolviendo hasta ahora. Para ello se va a sustituir la parte del circuito que se ha dibujado dentro de la línea de trazos en la Fig. 31a por su equivalente de Thévenin visto entre los puntos C y D. Es decir, vamos a simplificar el circuito convirtiéndolo en el de la Fig. 31b.

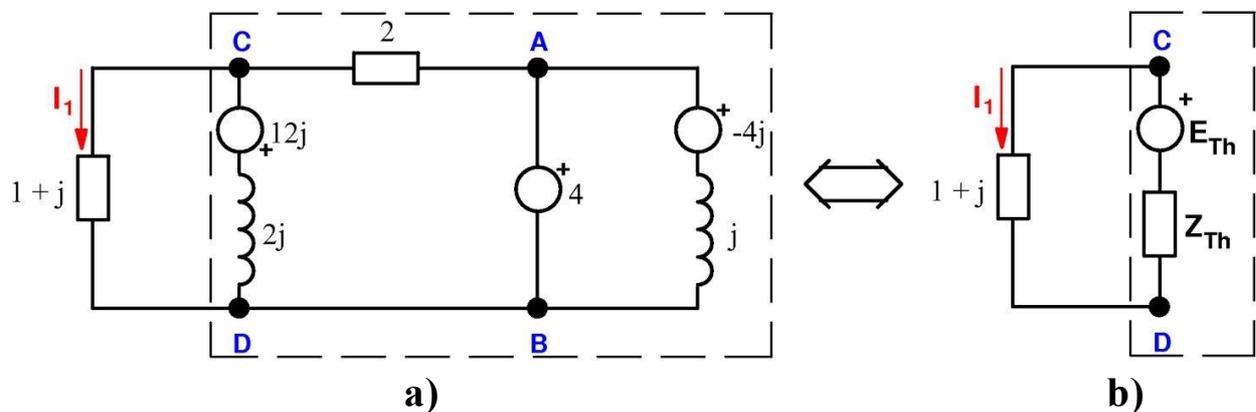


Fig. 31: Cálculo de \bar{I}_1 mediante el Teorema de Thévenin

Para calcular la tensión de Thévenin \bar{E}_{Th} se toma la parte del circuito original que está dentro de la línea de trazos sin conectar ningún elemento externo entre C y D (Fig. 32a) y se calcula la tensión entre C y D. La tensión es entre C y D porque en la Fig. 31b se ha elegido que el circuito equivalente de Thévenin el generador tenga su extremo + hacia el punto C.

Evidentemente, el circuito de la Fig. 32a no es igual al circuito de la Fig. 17, por lo que sus corrientes de rama van a tener valores distintos. En la Fig. 32a los puntos C y D ya no son nudos, pues en ellos ahora la corriente no se bifurca.

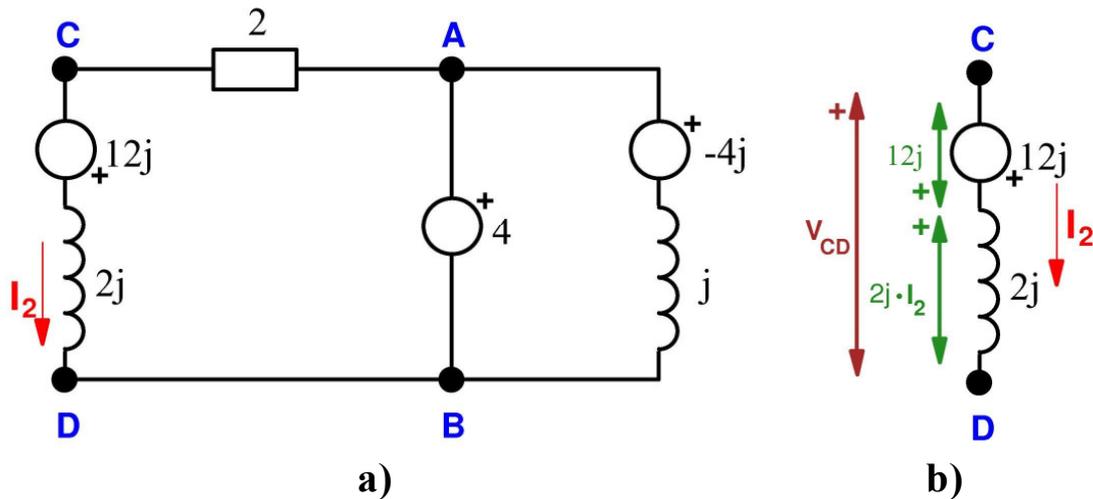


Fig. 32: Circuito para el cálculo de la tensión de Thévenin

Tras resolver el circuito de la Fig. 32 mediante algunos de los métodos que se han expuesto en los párrafos anteriores, se obtiene que por la rama izquierda de este circuito circula una corriente de valor:

$$\bar{I}_2 = 4 + 2j \text{ A}$$

Ahora hay que calcular la tensión entre C y D. Para obtenerla se va a utilizar el trayecto indicado en la Fig. 32b; es decir, la rama izquierda del circuito. Como se puede apreciar en la Fig. 32b, esta tensión se obtiene así:

$$\bar{V}_{CD} = -12j + (2j \cdot \bar{I}_2) = -12j + (2j \cdot (4 + 2j)) = -4 - 4j \text{ V}$$

Luego,

$$\underline{\bar{E}}_{Th} = \underline{\bar{V}}_{CD} = -4 - 4j \text{ V} \quad (51)$$

Para obtener la impedancia de Thévenin \bar{Z}_{Th} se eliminan todos los generadores del circuito dentro de la línea de trazos (Fig. 33a) y se calcula su impedancia equivalente vista entre los puntos C y D.

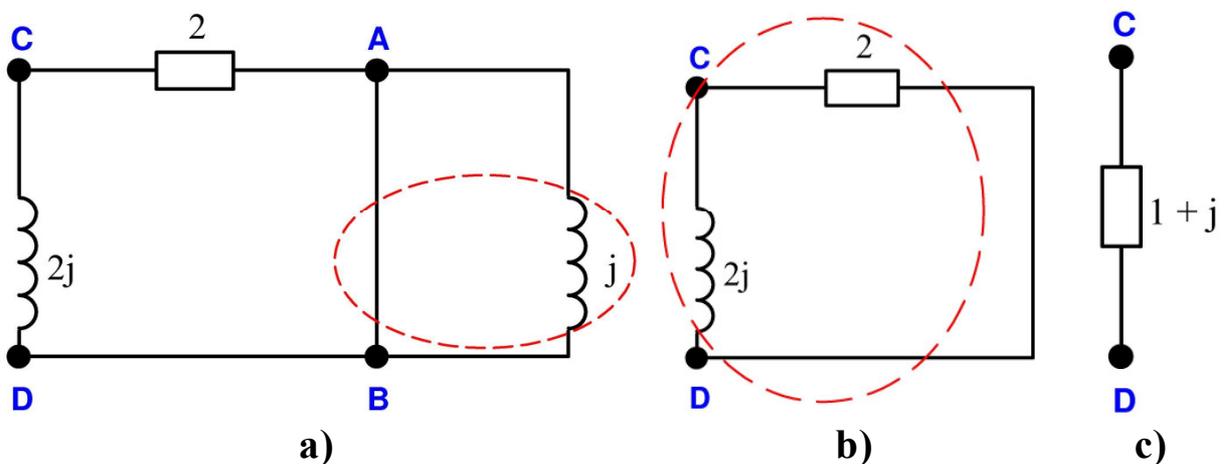


Fig. 33: Cálculo de la impedancia de Thévenin

En la Fig. 33 se ilustra el cálculo de la impedancia equivalente entre los bornes C y D del circuito de la Fig. 33a. En primer lugar se tiene en cuenta que una impedancia conectada en paralelo con un cortocircuito equivale a un cortocircuito (ver la Fig. 8), lo que da lugar al circuito simplificado de la Fig. 33b. El circuito de la Fig. 33b, visto desde los puntos C y D, consiste en dos impedancias en paralelo que, según la expresión (3), equivalen a esta impedancia:

$$\frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2j}} = 1 + j \Omega$$

Luego,

$$\underline{\bar{Z}}_{Th} = 1 + j \Omega \quad (52)$$

Yendo ahora al circuito simplificado de la Fig. 31b se calcula el valor de la corriente \bar{I}_1 de esta manera:

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_{Th}}{(1 + j) + \underline{\bar{Z}}_{Th}} = \frac{-4 - 4j}{(1 + j) + (1 + j)} = -2 + 0j \text{ A}$$

$$\underline{\bar{I}}_1 = -2 + 0 \text{ A} \quad (53)$$

Evidentemente, este valor coincide con el obtenido mediante los demás métodos.

Ejemplo 5:

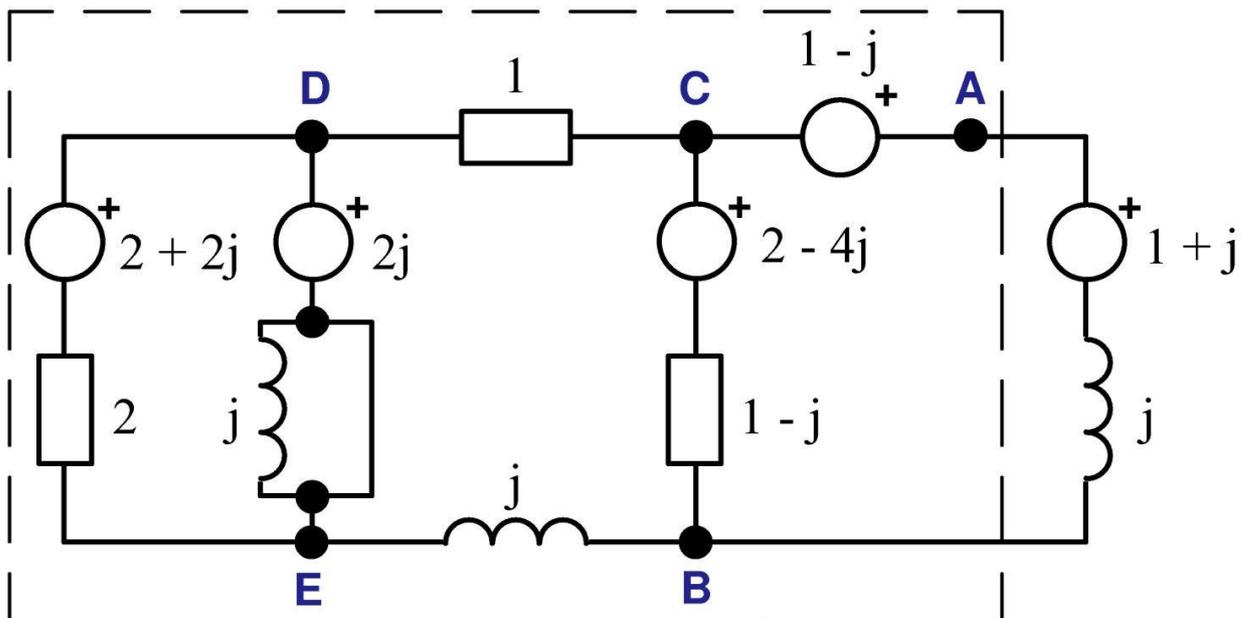


Fig. 34: Circuito a resolver empleando el Teorema de Thévenin

En el circuito de la Fig. 34:

- Calcule el circuito equivalente de Thévenin entre los puntos A y B de la parte del circuito encerrada dentro de la línea de trazos.
- Realice el balance de potencias complejas consumidas y generadas en el circuito formado por el equivalente de Thévenin del apartado anterior y la rama de la derecha del circuito de la figura (la que está fuera de la línea de trazos).

Resolución:

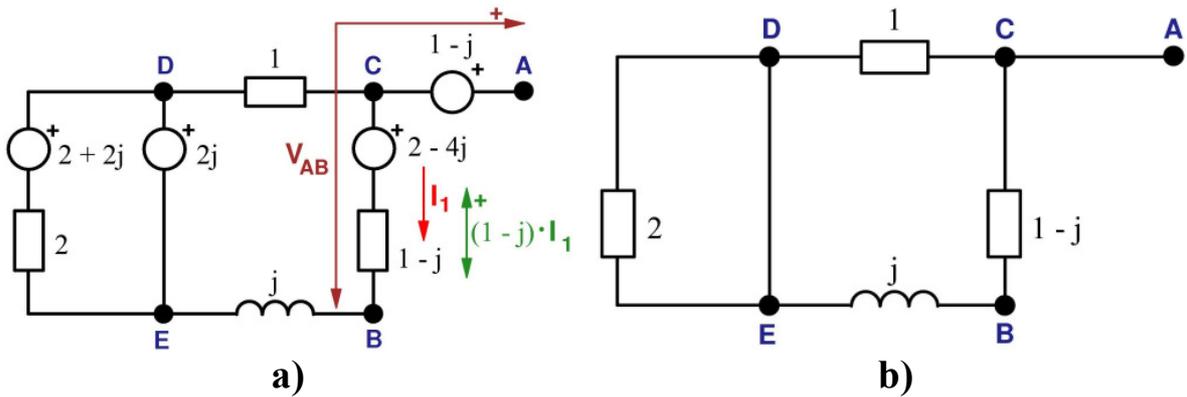


Fig. 35: Circuitos para: a) el cálculo de la tensión y b) de la impedancia de Thévenin

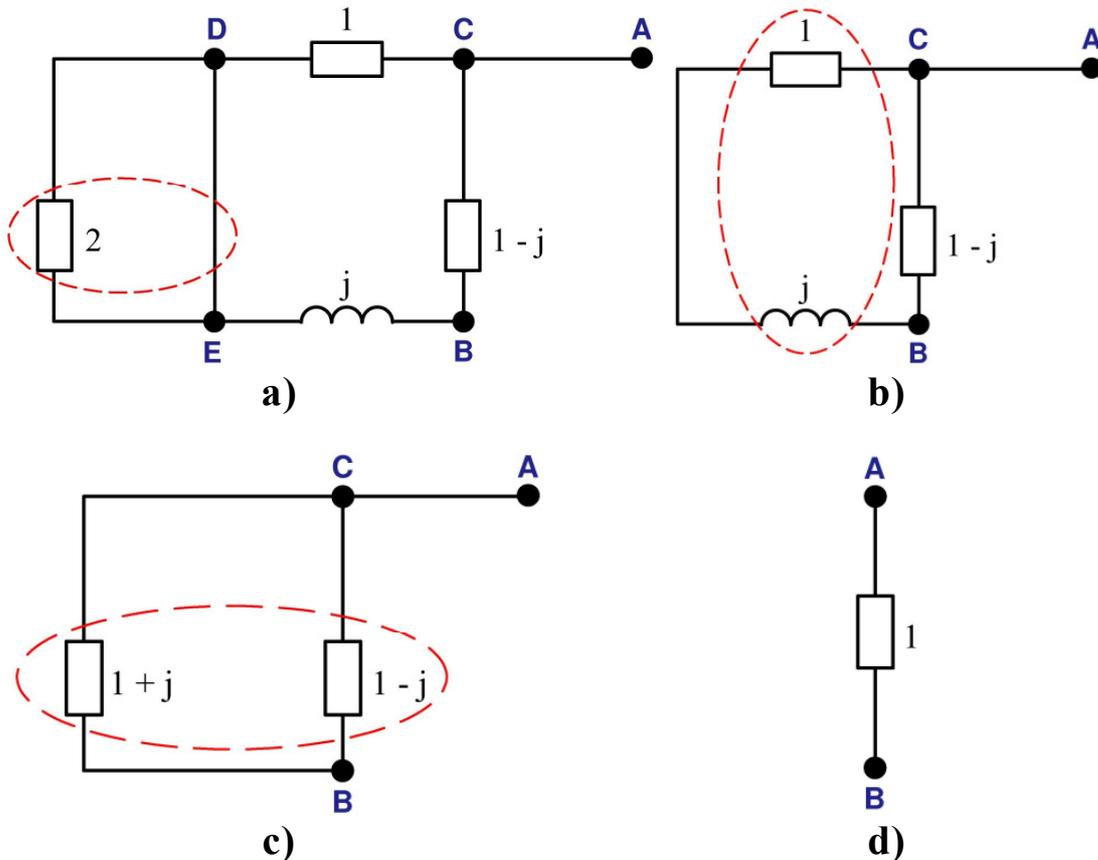


Fig. 36: Cálculo de la impedancia de Thévenin

- a) En la Fig. 35a se ha dibujado la parte del circuito que está dentro de la línea de trazos sin conectar nada a los terminales A y B por fuera de dicha línea de trazos. En esta figura se ha simplificado la rama entre los nudos D y E teniendo en cuenta que una impedancia en paralelo con un cortocircuito equivale a un cortocircuito (Fig. 8).

En la Fig. 35b se ha dibujado el circuito interior a la línea de trazos (es decir, el circuito de la Fig. 35a) tras haberle eliminado los generadores. Para ello cada generador de tensión ideal se sustituye por un cortocircuito.

La resolución del circuito de la Fig. 35a da los siguientes resultados:

$$\begin{aligned}\bar{I}_1 &= 0 + j \text{ A} \\ \bar{V}_{AB} &= (1 - j) + (2 - 4j) + ((1 - j) \cdot \bar{I}_1) = 0 + 2j \text{ V} \\ \underline{\bar{E}_{Th}} &= \underline{\bar{V}_{AB}} = 0 + 2j \text{ V}\end{aligned}$$

El cálculo de la impedancia equivalente al circuito de la Fig. 35b se muestra en la Fig. 36. De esta figura se deduce que:

$$\underline{\bar{Z}_{Th}} = 1 + 0j \Omega$$

Luego, el circuito equivalente de Thévenin de la parte del circuito de la Fig. 34 que está dentro de la línea de trazos tiene una tensión \bar{E}_{Th} de 2j voltios y una impedancia \bar{Z}_{Th} de 1 Ohm.

- b) Sustituyendo por su equivalente de Thévenin a la parte del circuito de la Fig. 34 que está dentro de la línea de trazos se obtiene el circuito eléctrico simplificado de la Fig. 37. En esta figura el circuito equivalente se ha dibujado con el lado + del generador hacia el punto A, ya que \bar{E}_{Th} se ha calculado como la tensión entre A y B.

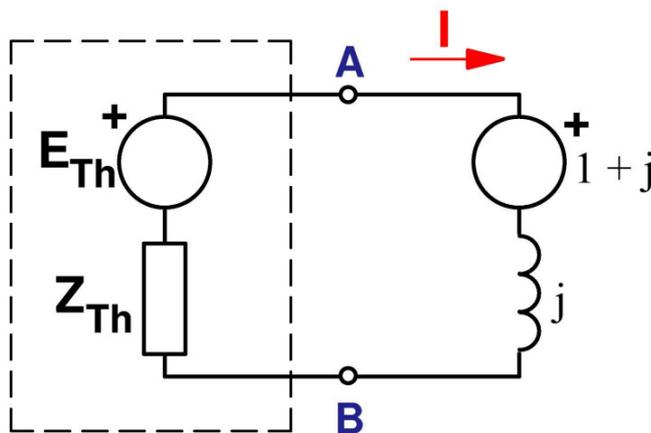


Fig. 37: Circuito de la Fig. 34 simplificado tras aplicar el Teorema de Thévenin

La corriente \bar{I} que circula por el circuito simplificado de la Fig. 37 vale:

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}_{Th} - (1 + j)}{\bar{Z}_{Th} + j} = \frac{(5 - j) - (1 + j)}{1 + j} = \frac{4 - 2j}{1 + j} = 1 - 3j \text{ A}$$

En el circuito simplificado de la Fig. 37 las potencias complejas consumidas en las impedancias valen:

$$\bar{S}_{C_{Th}} = \bar{Z}_{Th} \cdot I^2 = 1 \cdot [1^2 + (-3)^2] = 10 + 0j \text{ VA}$$

$$\bar{S}_{C_2} = j \cdot I^2 = j \cdot [1^2 + (-3)^2] = 0 + 10j \text{ VA}$$

La potencia compleja consumida total en las impedancias vale pues:

$$\bar{S}_C = \bar{S}_{C_{Th}} + \bar{S}_{C_2} = (10 + 0j) + (0 + 10j) = 10 + 10j \text{ VA}$$

Ahora se calculan las potencias complejas producidas por los generadores ideales del circuito de la Fig. 37. Para ello se empleará la relación (45) con la corriente circulando desde el lado - al lado + de cada generador. Esto significa que en el generador de Thévenin hay que usar la corriente \bar{I} y en el generador derecho la corriente $-\bar{I}$:

$$\begin{aligned} \bar{S}_{G_{Th}} &= \bar{E}_{Th} \cdot \bar{I}^* = (5 - j) \cdot (1 - 3j)^* = \\ &= (5 - j) \cdot (1 + 3j) = 8 + 14j \text{ VA} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{S}_{G_2} &= (1 + j) \cdot (-\bar{I})^* = (1 + j) \cdot (-1 + 3j)^* = \\ &= (1 + j) \cdot (-1 - 3j) = 2 - 4j \text{ VA} \end{aligned}$$

La potencia compleja producida total por los generadores vale pues:

$$\bar{S}_C = \bar{S}_{G_{Th}} + \bar{S}_{G_2} = (8 + 14j) + (2 - 4j) = 10 + 10j \text{ VA}$$

Evidentemente se cumple el Teorema de Boucherot (42): $\bar{S}_C = \bar{S}_G$.

Las potencias complejas consumidas en las impedancias \bar{S}_C y generada en los generadores ideales \bar{S}_G en el circuito simplificado (Fig. 37) son iguales y valen $10 + 10j \text{ VA}$.

INSTALACIONES ELÉCTRICAS CON VARIAS CARGAS

En instalaciones eléctricas monofásicas, constituidas por varios receptores en paralelo alimentados a través de una línea, es necesario muchas veces el calcular las corrientes y las potencias de cada carga y las totales de la instalación. En ocasiones hay que calcular también la caída de tensión en la línea. Otras veces se plantea la conveniencia de mejorar el factor de potencia mediante la instalación de un banco de condensadores cuya potencia reactiva y capacidad hay que determinar.

La forma de realizar todos estos cálculos se explica mediante el siguiente ejemplo:

Ejemplo 6:

Una instalación eléctrica que se alimenta con una tensión de 230 V y 50 Hz consta de las siguientes cargas:

- 1) Un motor monofásico de 3 CV, rendimiento 76,2% y factor de potencia (fdp) 0,9.
- 2) Un conjunto de lámparas *fluorescentes* que equivalen a una impedancia de $8 + 6j \Omega$.
- 3) Un conjunto de lámparas *incandescentes* cuya potencia es 1000 W.

Calcular:

- a) La corriente, las potencias activa, reactiva, aparente y compleja y el factor de potencia de cada carga.
- b) La corriente y las potencias activa, reactiva, aparente y compleja totales de la instalación, así como el factor de potencia total.

El conjunto de los dos conductores de la línea que alimenta a esta instalación presenta una resistencia de $0,1 \Omega$ y un coeficiente de autoinducción de $955 \mu\text{H}$.

- c) Calcular la tensión, las potencias activa, reactiva, aparente y compleja y el factor de potencia total en el origen de la línea.
- d) Se desea mejorar el factor de potencia total de la instalación a 0,95 mediante un banco de condensadores. Calcule la potencia reactiva y la capacidad de estos condensadores.
- e) Repita el apartado c) cuando está instalado el banco de condensadores del apartado d).

Resolución:

- a) La instalación descrita en el enunciado se ajusta al esquema dibujado en la Fig. 38:

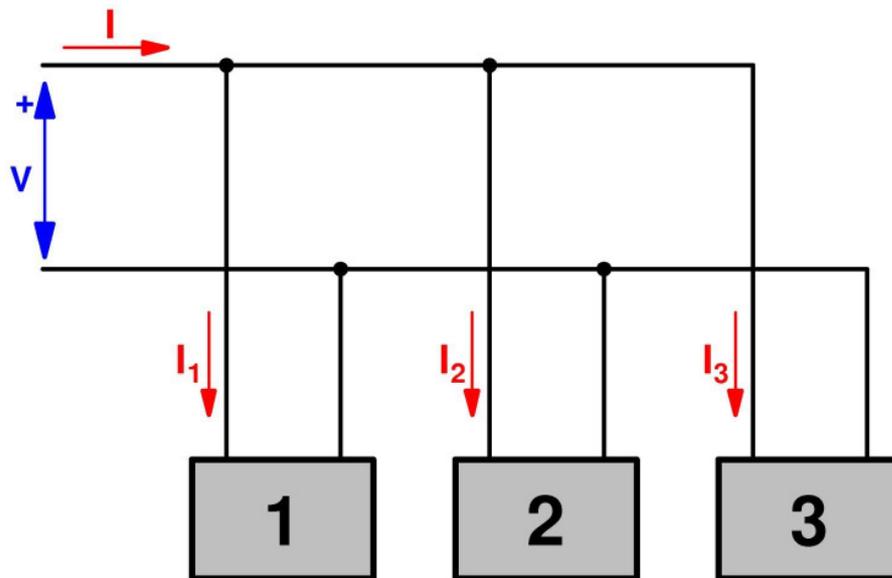


Fig. 38: Esquema representativo de la instalación a resolver

Para representar en forma compleja las corrientes y las tensiones es preciso escoger una referencia. Esto quiere decir que se va a seleccionar una magnitud a la que, al ponerla en forma compleja, se le va asignar un argumento nulo y todas las demás magnitudes se expresarán en relación a la de referencia.

Dado que la tensión \bar{V} es común a todas las cargas se la va a escoger como referencia. El enunciado indica que el valor eficaz de la tensión es 230 V. De todo lo anterior se deduce que la tensión se va a tomar así:

$$\bar{V} = 230 \angle 0^\circ = 230 + 0j \text{ V}$$

El diagrama fasorial de la tensión, las corrientes en las cargas y la corriente total será como el dibujado en la Fig. 39.

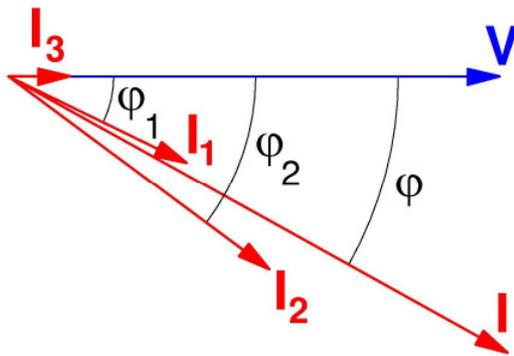


Fig. 39: Diagrama fasorial de la tensión y las corrientes de la instalación

- Carga 1:

El enunciado da los siguientes datos sobre esta carga:

$$P_{ul} = 3 \text{ CV (caballos de vapor)} \quad \eta_1 = 76,2\% = 0,762 \quad \text{fdp} = \cos \varphi_1 = 0,9$$

Al tratarse de un motor el factor de potencia es inductivo, por lo que la corriente está retrasada con respecto a la tensión, tal como se representa en la Fig. 39. Dado que el factor de potencia es numéricamente igual al coseno del ángulo de desfase φ_1 entre la tensión y la corriente (Fig. 39), este ángulo vale:

$$\varphi_1 = \arccos 0,9 = 25,84^\circ$$

La potencia útil de este motor, expresada en vatios, es:

$$P_{ul} = 3 \text{ CV} \times 736 \frac{\text{W}}{\text{CV}} = 2208 \text{ W}$$

La potencia activa absorbida por esta carga se obtiene así:

$$\eta_1 = \frac{P_1}{P_{ul}} \rightarrow P_1 = \frac{P_{ul}}{\eta_1} = \frac{2208}{0,762} = 2898 \text{ W}$$

El triángulo de potencias en un caso general está representado en la Fig. 40. Aplicándolo a la carga 1 se deduce que su potencia reactiva vale:

$$Q_1 = P_1 \cdot \text{tg } \varphi_1 = 2898 \cdot \text{tg } 25,84^\circ = 2898 \cdot 0,484 = 1403 \text{ var}$$

De la Fig. 40 también se deduce que la potencia aparente de esta carga vale:

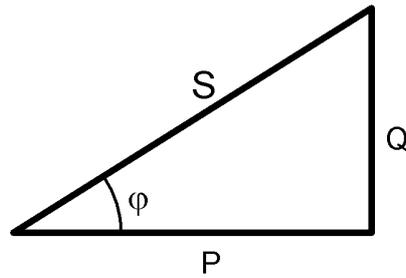


Fig. 40: Triángulo de potencias

$$S_1 = \sqrt{P_1^2 + Q_1^2} = \sqrt{2898^2 + 1403^2} = 3220 \text{ VA}$$

La potencia compleja \bar{S} se define así:

$$\boxed{\bar{S} = P + jQ = S \angle \varphi} \quad (54)$$

Lo que aplicado a esta carga da este resultado:

$$\bar{S}_1 = 2898 + 1403j = 3220 \angle 25,84^\circ \text{ VA}$$

El valor eficaz de la corriente se obtiene así:

$$P_1 = V \cdot I_1 \cdot \cos \varphi_1 \rightarrow I_1 = \frac{P_1}{V \cdot \cos \varphi_1} = \frac{2898}{230 \cdot 0,9} = 14 \text{ A}$$

De la Fig. 39 se deduce que:

$$\bar{I}_1 = I_1 \angle -\varphi_1 = 14 \angle -25,84^\circ = 12,60 - 6,10j \text{ A}$$

- Carga 2:

El enunciado indica que esta carga equivale a una impedancia

$$\bar{Z}_2 = 8 + 6j = 10 \angle 36,87^\circ \Omega$$

Aplicando la Ley de Ohm (8) a la impedancia \bar{Z}_2 se puede calcular la corriente en esta carga:

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}_2} = \frac{230 \angle 0^\circ}{10 \angle 36,87^\circ} = 23 \angle -36,87^\circ = 18,4 - 13,8j \text{ A}$$

Luego, el valor eficaz de la corriente en esta carga vale 23 A.

La potencia compleja en una impedancia se puede calcular mediante la expresión (43):

$$\bar{S}_2 = \bar{Z}_2 \cdot I_2^2 = (8 + 6j) \cdot 23^2 = 4232 + 3174j = 5290 \angle 36,87^\circ \text{ VA}$$

De este resultado y teniendo presente la relación (54) se deduce que:

$$P_2 = 4232 \text{ W} \quad Q_2 = 3174 \text{ var} \quad S_2 = 5290 \text{ VA}$$

El triángulo de impedancias para una carga cualquiera está representado en la Fig. 41.

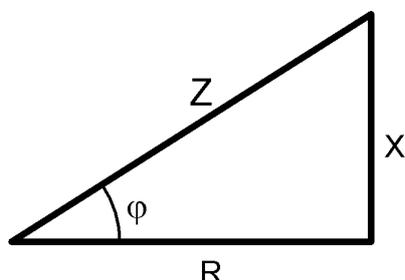


Fig. 41: Triángulo de impedancias

Observando las Figs. 39, 40 y 41 se distinguen los tres significados del ángulo φ en circuitos equilibrados:

- Es el ángulo de desfase entre la tensión y la corriente (Fig. 39).
- Es el argumento de la impedancia \bar{Z} (Fig. 41).
- Es el argumento de la potencia compleja \bar{S} (Fig. 40). Luego su coseno es el factor de potencia.

De cualquiera de estas tres definiciones y con los resultados obtenidos hasta ahora para la carga 2 se deduce que:

$$\varphi_2 = 36,87^\circ \rightarrow \text{fdp}_2 = \cos \varphi_2 = 0,8$$

Este resultado se puede obtener también partiendo de la Fig. 40 o de la Fig. 41:

$$\text{fdp}_2 = \frac{P_2}{S_2} = \frac{4232}{5290} = 0,8$$

$$\cos \varphi_2 = \frac{R_2}{Z_2} = \frac{8}{10} = 0,8$$

- Carga 3:

El enunciado indica que esta carga consiste en unas lámparas incandescentes. Las lámparas de este tipo se comportan como resistencias puras y, en consecuencia, su factor de potencia es 1. Por lo tanto, los datos de partida son:

$$P_3 = 1000 \text{ W} \quad \text{fdp}_3 = 1 = \cos \varphi_3$$

Dado que el factor de potencia es igual al coseno del ángulo φ_3 se deduce que:

$$\varphi_3 = \arccos 1 = 0^\circ$$

Aplicando a la carga 3 el triángulo de potencias de la Fig. 40 se deduce que su potencia reactiva vale:

$$Q_3 = P_3 \cdot \operatorname{tg} \varphi_3 = 1000 \cdot \operatorname{tg} 0^\circ = 0 \text{ var}$$

De la Fig. 40 también se deduce que la potencia aparente de esta carga vale:

$$S_3 = \sqrt{P_3^2 + Q_3^2} = \sqrt{1000^2 + 0^2} = 1000 \text{ VA}$$

Aplicando la expresión (54) a esta carga se obtiene su potencia compleja:

$$\bar{S}_3 = 1000 + 0j = 1000 \underline{0^\circ} \text{ VA}$$

El valor eficaz de la corriente se obtiene así:

$$P_3 = V \cdot I_3 \cdot \cos \varphi_3 \rightarrow I_3 = \frac{P_3}{V \cdot \cos \varphi_3} = \frac{1000}{230 \cdot 1} = 4,35 \text{ A}$$

De la Fig. 39 se deduce que:

$$\bar{I}_3 = I_3 \underline{-\varphi_3} = 4,35 \underline{0^\circ} = 4,35 + 0j \text{ A}$$

Luego, las magnitudes de las cargas que componen esta instalación son:

<u>$I_1 = 14 \text{ A}$</u>	<u>$I_2 = 23 \text{ A}$</u>	<u>$I_3 = 4,35 \text{ A}$</u>
<u>$P_1 = 2898 \text{ W}$</u>	<u>$P_2 = 4232 \text{ W}$</u>	<u>$P_3 = 1000 \text{ W}$</u>
<u>$Q_1 = 1403 \text{ var}$</u>	<u>$Q_2 = 3174 \text{ var}$</u>	<u>$Q_3 = 0 \text{ var}$</u>
<u>$S_1 = 3220 \text{ VA}$</u>	<u>$S_2 = 5290 \text{ VA}$</u>	<u>$S_3 = 1000 \text{ VA}$</u>
<u>$\bar{S}_1 = 3220 \underline{25,84^\circ} \text{ VA}$</u>	<u>$\bar{S}_2 = 5290 \underline{36,87^\circ} \text{ VA}$</u>	<u>$\bar{S}_3 = 1000 \underline{0^\circ} \text{ VA}$</u>
<u>$\operatorname{fdp}_1 = 0,9$</u>	<u>$\operatorname{fdp}_2 = 0,8$</u>	<u>$\operatorname{fdp}_3 = 1$</u>

- b) Para calcular la corriente total consumida por el conjunto varias cargas en paralelo de una instalación de corriente alterna no se pueden sumar *aritméticamente* los valores eficaces de las corrientes de cada carga. Lo que hay que hacer es sumar *vectorialmente* las corrientes de las cargas expresadas en forma compleja. Así, en esta instalación (Figs. 38 y 39) la corriente total vale:

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 35,35 - 19,9j = 40,57 \underline{-29,4^\circ} \text{ A}$$

Luego, el valor eficaz de la corriente total es 40,57 A.

De forma análoga, no se pueden sumar aritméticamente las potencias aparentes de las cargas. Lo que hay que hacer es sumar las potencias complejas:

$$\bar{S} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S}_3 = 8130 + 4577j = 9330 \underline{29,4^\circ} \text{ VA}$$

o bien, alternativamente, sumar por una parte las potencias activas y por otra las potencias reactivas de las cargas:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = 8130 \text{ W}$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 4577 \text{ var}$$

y obtener la potencia aparente a partir del triángulo de potencias (Fig. 40):

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{8130^2 + 4577^2} = 9330 \text{ VA}$$

La potencia compleja total también se puede obtener a partir de la tensión y la corriente total mediante la relación (45):

$$\bar{S} = \bar{V} \cdot \bar{I}^* = (230 + 0j) \cdot (35,35 + 19,9j) = 8130 + 4577j \text{ VA}$$

El ángulo φ total de la instalación se puede obtener partiendo de su definición como desfase entre \bar{V} e \bar{I} (Fig. 39) o de su definición como argumento de la potencia compleja (ecuación (54) y Fig. 40). De ambas maneras se llega a:

$$\varphi = 29,4^\circ \rightarrow \text{fdp} = \cos \varphi = 0,871$$

Este resultado se puede obtener también partiendo de la Fig. 40:

$$\text{fdp} = \frac{P}{S} = \frac{8130}{9330} = 0,871$$

Luego, las magnitudes totales de esta instalación son:

<u>I = 40,57 A</u>	<u>$\bar{S} = 9330 \angle 29,4^\circ \text{ VA}$</u>	<u>fdp = 0,871</u>
<u>P = 8130 W</u>	<u>Q = 4577 var</u>	<u>S = 9330 VA</u>

- c) La Fig. 42 muestra de forma esquemática la instalación con la línea que la alimenta. Los datos de esta línea son:

$$R_L = 0,1 \Omega \qquad L_L = 955 \cdot 10^{-6} \text{ H}$$

La reactancia de la línea es inductiva y vale

$$X_L = 2 \pi f L_L = 2 \pi \cdot 50 \cdot (955 \cdot 10^{-6}) = 0,3 \Omega$$

Luego, esta línea presenta una impedancia total (ver la Fig. 41) de:

$$\bar{Z}_L = R_L + j X_L = 0,1 + 0,3j = 0,316 \angle 71,57^\circ \Omega$$

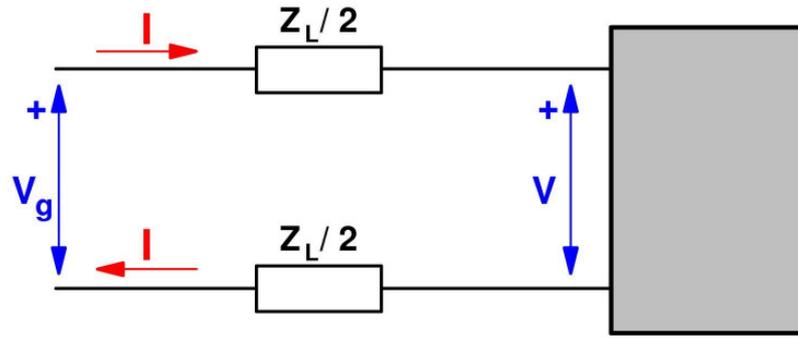


Fig. 42: Esquema de la instalación con la línea que la alimenta

Según el enunciado de este problema cada uno de los dos conductores de la línea tendrá una impedancia igual a $\bar{Z}_L/2$ (Fig. 42).

La resolución de este apartado puede hacerse mediante varios métodos. Aquí vamos a presentar dos de ellos. En el primer método se obtiene la tensión al principio de la línea y a partir de ella se calcula la potencia compleja en el origen de la línea. En el otro método se determina primero la potencia compleja al principio de la línea (mediante la suma de la potencia compleja de la instalación y de la potencia compleja consumida en la propia línea) y de ella se obtiene la tensión.

- Método 1:

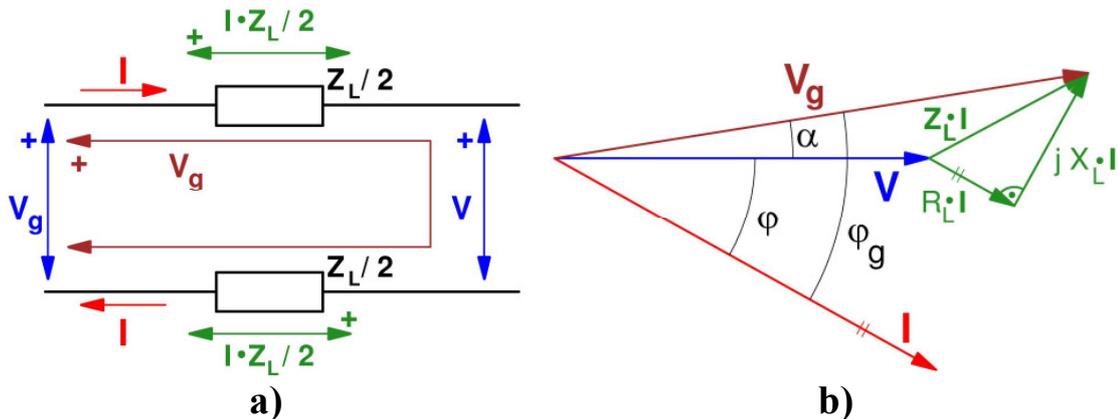


Fig. 43: Cálculo de la tensión en el origen de la línea V_g :
a) Esquema de la línea; b) Diagrama fasorial

En el esquema de la Fig. 43a se muestran las caídas de tensión en la línea y en la Fig. 43b el diagrama fasorial correspondiente. De estas figuras se deduce que:

$$\bar{V}_g = \bar{I} \cdot \frac{\bar{Z}_L}{2} + \bar{V} + \bar{I} \cdot \frac{\bar{Z}_L}{2} \rightarrow \boxed{\bar{V}_g = \bar{V} + \bar{I} \cdot \bar{Z}_L} \quad (55)$$

$$\bar{V}_g = 230 + (35,35 - 19,9j) \cdot (0,1 + 0,3j) = 239,5 + 8,6j = 239,7 \angle 2,06^\circ \text{ V}$$

Luego, la tensión al principio de la línea \bar{V}_g tiene un valor eficaz de 239,7 V y su desfase con la tensión al final de la línea \bar{V} es $\alpha = 2,06^\circ$. Por lo tanto, el ángulo de desfase ϕ_g de \bar{I} con respecto a la tensión \bar{V}_g (Fig. 43b) vale:

$$\varphi_g = \varphi + \alpha = 29,4 + 2,06 = 31,46^\circ$$

Por consiguiente, el factor de potencia en el origen de la línea es:

$$\text{fdp}_g = \cos \varphi_g = \cos 31,46^\circ = 0,853$$

La potencia compleja en el origen de la línea se puede determinar mediante la relación (45):

$$\begin{aligned}\bar{S}_g &= \bar{V}_g \cdot \bar{I}^* = (239,5 + 8,6j) \cdot (35,35 + 19,9j) \\ \bar{S}_g &= 8295 + 5071j = 9723 \left| \underline{31,44^\circ} \text{ VA} \right.\end{aligned}$$

Se comprueba otra vez que, salvo un pequeño error de redondeo, vuelve a suceder que el ángulo φ_g es tanto el desfase entre \bar{I} y \bar{V}_g como el argumento de la potencia compleja \bar{S}_g .

Teniendo presente la relación (54), se deduce que las potencias activa, reactiva y aparente en el origen de la línea son:

$$P_g = 8295 \text{ W} \quad Q_g = 5071 \text{ var} \quad S_g = 9723 \text{ VA}$$

- Método 2:

La línea se comporta como una impedancia, por lo que la potencia compleja que consume se puede determinar mediante la expresión (43):

$$\bar{S}_L = \bar{Z}_L \cdot I^2 = (0,1 + 0,3j) \cdot 40,57^2 = 165 + 494j \text{ VA}$$

La potencia compleja consumida al inicio de la línea se puede obtener como suma de la consumida en la instalación más la gastada en la línea:

$$\begin{aligned}\bar{S}_g &= \bar{S} + \bar{S}_L = (8130 + 4577j) + (165 + 494j) \\ \bar{S}_g &= 8295 + 5071j = 9723 \left| \underline{31,44^\circ} \text{ VA} \right.\end{aligned}$$

Luego, teniendo en cuenta la relación (54), se deduce que las potencias activa, reactiva y aparente en el origen de la línea son:

$$P_g = 8295 \text{ W} \quad Q_g = 5071 \text{ var} \quad S_g = 9723 \text{ VA}$$

Del triángulo de potencias (Fig. 40) se obtiene que:

$$\text{fdp}_g = \frac{P_g}{S_g} = \frac{8295}{9723} = 0,853$$

En general, la potencia aparente cumple la siguiente relación:

$$\boxed{S = V \cdot I} \quad (56)$$

Aplicando la ecuación (56) a este caso y despejando la tensión se deduce que:

$$V_g = \frac{S_g}{I} = \frac{9723}{40,57} = 239,7 \text{ A}$$

Trabajando por cualquiera de los dos métodos se obtienen las siguientes magnitudes en el origen de la línea:

$$\begin{array}{lll} \underline{V_g} = 239,7 \text{ A} & \underline{\bar{S}_g} = 9723 \angle 31,44^\circ \text{ VA} & \underline{\text{fdp}_g} = 0,853 \\ \underline{P_g} = 8295 \text{ W} & \underline{Q_g} = 5071 \text{ var} & \underline{S_g} = 9723 \text{ VA} \end{array}$$

- d) Ahora se conecta un banco de condensadores en paralelo con las cargas para mejorar el factor de potencia. El esquema de la instalación pasa a ser el indicado en la Fig. 44a y en la Fig. 44b se muestra el efecto de los condensadores sobre el triángulo de potencias.

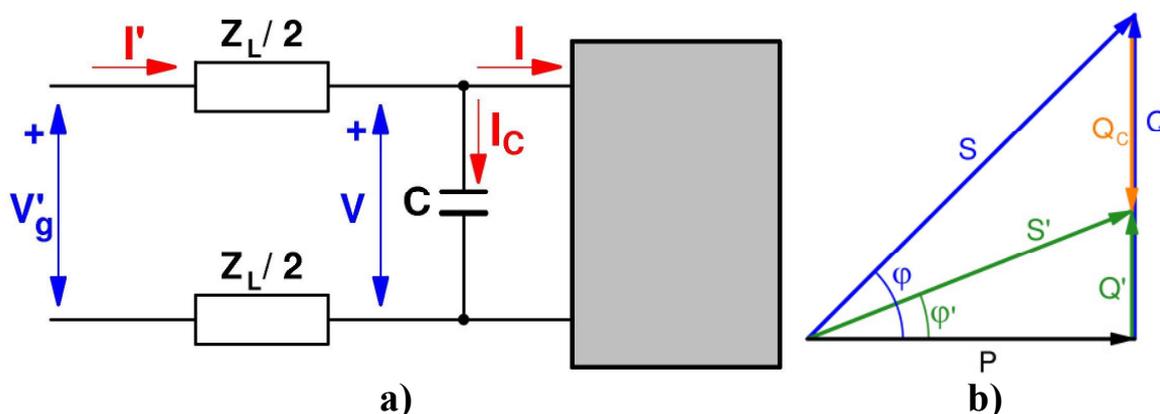


Fig. 44: a) Esquema de la instalación con un banco de condensadores para mejorar el fdp
b) Efecto de los condensadores sobre el triángulo de potencias de la instalación

Antes de mejorar el factor de potencia, este vale 0,871. Luego:

$$\cos \varphi = 0,871 \rightarrow \varphi = 29,4^\circ \rightarrow \text{tg } \varphi = 0,564$$

El enunciado indica que al añadir los condensadores el nuevo factor de potencia va ser 0,95. Esto significa que:

$$\cos \varphi' = 0,950 \rightarrow \varphi' = 18,19^\circ \rightarrow \text{tg } \varphi' = 0,329$$

De la Fig. 44b se deduce que la potencia reactiva del banco de condensadores que se necesita para elevar el fdp de la instalación a 0,95 se puede obtener así:

$$\boxed{Q_C = Q - Q' = P (\text{tg } \varphi - \text{tg } \varphi')} \quad (57)$$

$$Q_C = 8130 \cdot (0,564 - 0,329) = 1911 \text{ var}$$

Q_C es el valor absoluto de la potencia reactiva de los condensadores, la cual es negativa.

La impedancia y reactancia de un condensador ideal (sin resistencia) son:

$$\bar{Z}_C = 0 - j X_C \quad X_C = \frac{1}{2\pi f C} \quad (58)$$

Luego, la aplicación de la Ley de Ohm (8) a un condensador da este resultado:

$$\bar{I}_C = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}_C} \rightarrow I_C = \frac{V}{Z_C} = \frac{V}{X_C} \quad (59)$$

De las ecuaciones (43), (54), (58) y (59) se llega a:

$$Q_C = X_C \cdot I_C^2 = X_C \left(\frac{V}{X_C} \right)^2 = \frac{V^2}{X_C} \rightarrow \boxed{X_C = \frac{V^2}{Q_C}} \quad (60)$$

$$X_C = \frac{230^2}{1911} = 27,68 \Omega$$

Lo que, de acuerdo con la segunda de las relaciones (58), da lugar a este resultado:

$$C = \frac{1}{2\pi f X_C} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 27,68} = 115 \cdot 10^{-6} \text{ F} = 115 \mu\text{F}$$

Por lo tanto, para elevar el factor de potencia de esta instalación a 0,95 se necesita un banco de condensadores de potencia reactiva 1911 var y capacidad 115 μF .

- e) En la Fig. 45 se muestra el diagrama fasorial de la instalación después de conectar los condensadores calculados en el apartado d).

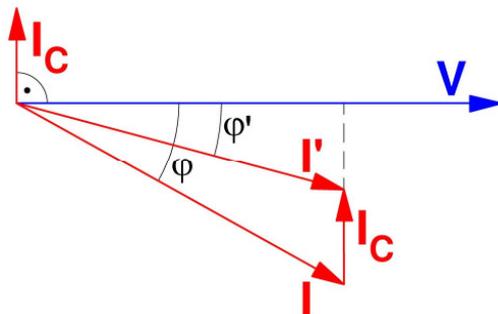


Fig. 45: Diagrama fasorial tras conectar los condensadores

Observando la Fig. 45 se deduce que:

$$I \cos \varphi = I' \cos \varphi' \quad (61)$$

$$I' = I \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi'} = 40,57 \frac{0,871}{0,950} = 37,20 \text{ A}$$

$$\bar{I}' = I' \left| -\varphi' = 37,20 \left| -18,19^\circ = 35,34 - 11,61j \text{ A} \right. \right.$$

Este resultado permite comprobar como al colocar los condensadores se consigue transmitir la misma potencia activa mediante una corriente de menor valor eficaz. Como se verá enseguida, esto conlleva que habrá una caída de tensión menor en la línea y que las potencias activa y reactiva gastadas en dicha línea son menores.

La resolución de este apartado es idéntica a la del apartado c) sólo que ahora la corriente que circula por la línea es \bar{I}' y no \bar{I} . Como se indicó en el apartado c), existen varios métodos para calcular las magnitudes al inicio de la línea. Ahora usaremos el método 1 para calcular la tensión y el método 2 para la potencia.

De las Fig. 43 y la expresión (55) se deduce que ahora la tensión ha pasado a ser:

$$\bar{V}'_g = \bar{V} + \bar{I}' \cdot \bar{Z}_L$$

$$\bar{V}'_g = 230 + (35,34 - 11,61j) \cdot (0,1 + 0,3j) = 237 + 9,4j = 237,2 \left| 2,27^\circ \text{ V} \right.$$

Luego, para conseguir que, tras colocar los condensadores, en la instalación la tensión sea de 230 V es preciso que el valor eficaz de la tensión en el origen de la línea sea de 237,2 V. Nótese que este valor es inferior al calculado en el apartado c) ($V_g = 239,7 \text{ V}$), lo que significa que tras colocar los condensadores la caída de tensión en la línea se reduce.

Ahora la potencia compleja que se gasta en la línea vale:

$$\bar{S}'_L = \bar{Z}_L \cdot I'^2 = (0,1 + 0,3j) \cdot 37,20^2 = 138,4 + 415,2j \text{ VA}$$

Se aprecia que se reducen tanto la potencia activa como la reactiva que se consume en la línea en comparación a cuando no se conectaban los condensadores (apartado c)).

Los condensadores no modifican la potencia activa consumida por la instalación:

$$P' = P = 8130 \text{ W}$$

La potencia reactiva que se consume ahora en la instalación es igual a la que se consumía antes más la de los condensadores, que es negativa y vale $-Q_C$:

$$Q' = Q - Q_C = 4577 - 1911 = 2666 \text{ var}$$

En consecuencia, la potencia compleja que ahora consume la instalación es:

$$\bar{S}' = P' + j Q' = 8130 + 2666j = 8556 \left| 18,16^\circ \text{ VA} \right.$$

Luego, la potencia compleja que se consume en el inicio de la línea ahora vale:

$$\bar{S}'_g = P'_g + j Q'_g = \bar{S}' + \bar{S}'_L = (8130 + 2666j) + (138,4 + 415,2j)$$

$$\bar{S}'_g = 8268 + 3081j = 8823 \left| 20,44^\circ \text{ VA} \right.$$

De este resultado y teniendo en cuenta la relación (54) se obtiene que tras conectar los condensadores las potencias activa, reactiva y aparente en el origen de la línea son:

$$P'_g = 8268 \text{ W} \qquad Q'_g = 3081 \text{ var} \qquad S'_g = 8823 \text{ VA}$$

El triángulo de potencias (Fig. 40) permite calcular el factor de potencia:

$$\text{fdp}'_g = \frac{P'_g}{S'_g} = \frac{8268}{8823} = 0,937$$

Las magnitudes en el origen de la línea tras mejorar el factor de potencia mediante un banco de condensadores son:

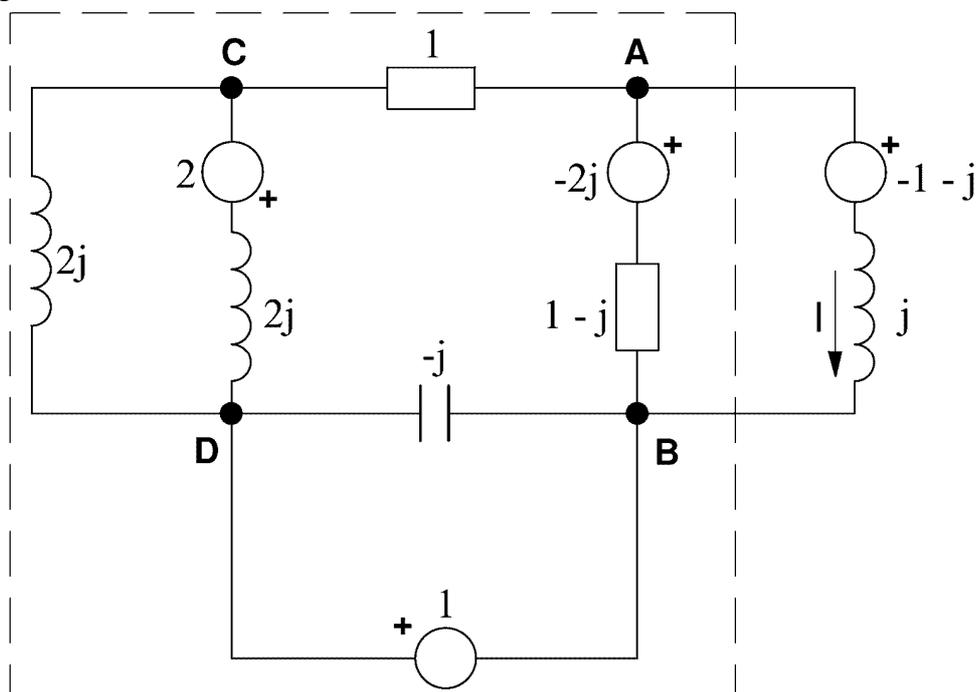
<u>$V'_g = 237,2 \text{ A}$</u>	<u>$\bar{S}'_g = 8823 \left \begin{array}{l} 20,44^\circ \\ \text{VA} \end{array} \right.$</u>	<u>$\text{fdp}'_g = 0,937$</u>
<u>$P'_g = 8268 \text{ W}$</u>	<u>$Q'_g = 3081 \text{ var}$</u>	<u>$S'_g = 8823 \text{ VA}$</u>

BIBLIOGRAFÍA

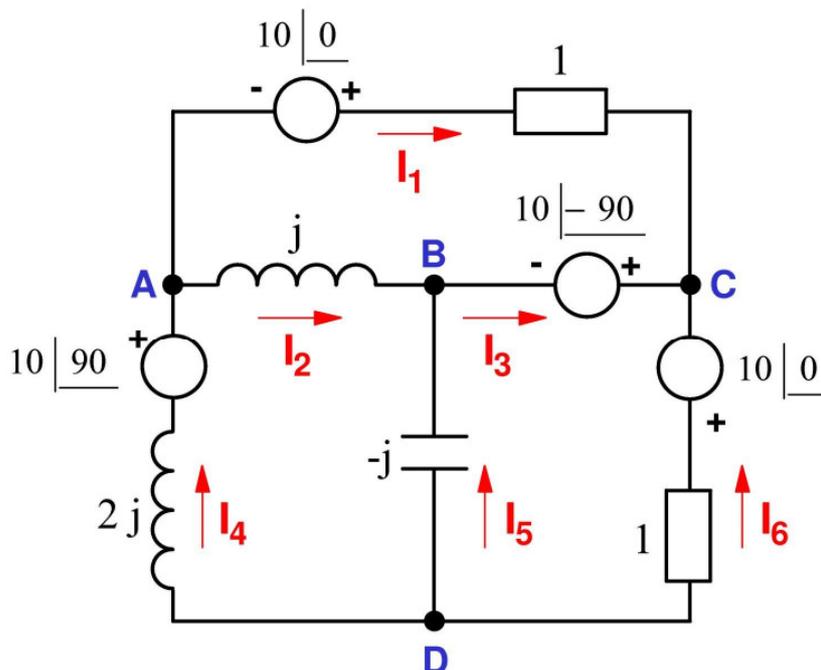
- [1] ALEXANDER, C. K. 2001. *Circuitos eléctricos*. Méjico: McGraw-Hill.
- [2] BAYOD RÚJULA, A. A. 1998. *Análisis de circuitos eléctricos*. Zaragoza: Prensas Universitarias de Zaragoza.
- [3] BAYOD RÚJULA, A. A. 2005. *Circuitos monofásicos en régimen estacionario senoidal*. Zaragoza: Prensas Universitarias de Zaragoza.
- [4] BOYLESTAD, R. L. 2004. *Introducción al análisis de circuitos*. 10ª edición. Méjico: Pearson Educación de Méjico.
- [5] COGDELL, J. R. 2000. *Fundamentos de circuitos eléctricos*. Méjico: Pearson Educación.
- [6] CONEJO, A. J. 2004. *Circuitos eléctricos para la ingeniería*. Madrid: McGraw-Hill.
- [7] EDMINISTER, J. A. 1985. *Teoría y problemas de circuitos eléctricos*. 2ª edición. Méjico: McGraw-Hill. Colección Schaum.
- [8] FERNÁNDEZ MORENO, J. 1997. *Resolución de problemas en teoría de circuitos*. Jaén: Universidad de Jaén.
- [9] FITZGERALD, A. E.; HIGGINBOTHAM, D.; GRABEL, A. 1988. *Fundamentos de ingeniería eléctrica*. 4ª edición. Méjico: McGraw-Hill.
- [10] FRAILE MORA, J. 2005. *Electromagnetismo y circuitos eléctricos*. 4ª edición. Madrid: McGraw-Hill. ISBN 84-481-9843-3.
- [11] GARCÍA TRASANCOS, J. 2006. *Electrotecnia*. 9ª edición. Madrid: Thomson-Paraninfo.
- [12] GOMOLLÓN GARCÍA, J. A. y VÁZQUEZ RODRÍGUEZ, S. 2003. *Teoría de circuitos*. Santiago de Compostela: Tórculo.
- [13] GURRUTXAGA, J. A. 1982. *El fenómeno electromagnético. Tomo II: La electrocinética (c/c)*. Santander: Departamento de Publicaciones de la E.T.S.I. Caminos, C. y P. de Santander. Universidad de Cantabria.
- [14] KASATIN, A. S.; NEMTSOV, M. V. 1986. *Electrical engineering*. Moscú: Mir Publishers.
- [15] RAS OLIVA, E. 1987. *Teoría de circuitos: fundamentos*. 4ª edición. Barcelona: Marcombo.
- [16] SANCHEZ BARRIOS, P. y otros. 2007. *Teoría de circuitos: problemas y pruebas objetivas orientadas al aprendizaje*. Madrid: Pearson Prentice Hall.

PROBLEMAS PROPUESTOS

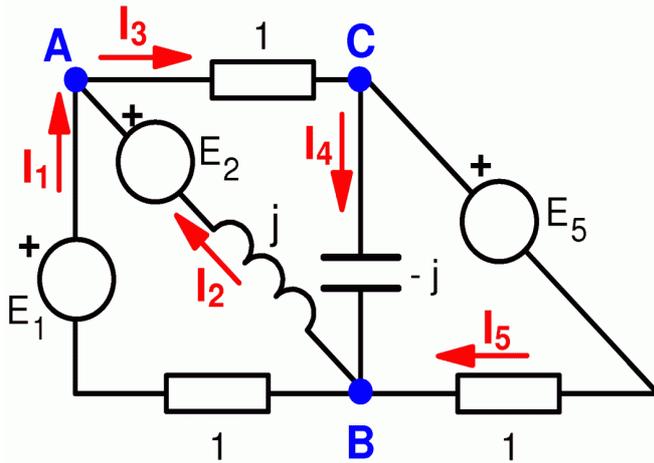
1) En el siguiente circuito:



- a) Calcule el circuito equivalente de Thévenin entre los puntos A y B de la parte del circuito encerrada dentro de la línea de trazos. Use el método de las mallas para obtener la tensión de Thévenin E_{Th} .
 - b) Realice el balance de potencias complejas consumidas y generadas en el circuito formado por el equivalente de Thévenin del apartado anterior y la rama de la derecha del circuito de la figura (la que está fuera de la línea de trazos).
- 2) Resolver el siguiente circuito por el método de las mallas y calcular la tensión entre los nudos A y D. Indicar también el valor instantáneo de esta tensión si la frecuencia vale $50/\pi$ Hz.

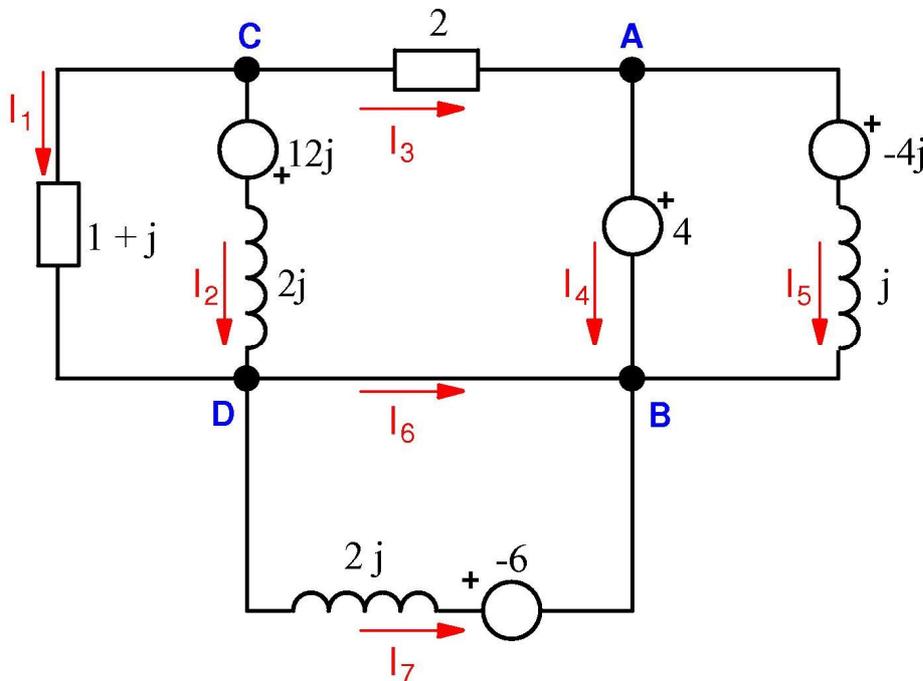


3)



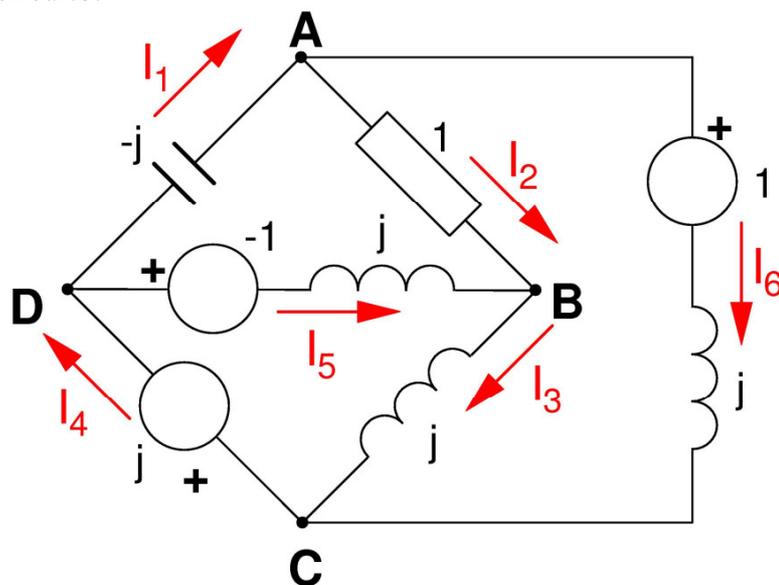
$$\begin{aligned} \bar{E}_1 &= 2 + j \text{ V} \\ \bar{E}_2 &= -1 - j \text{ V} \\ \bar{E}_5 &= 1 \angle -90^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

- a) Calcular las corrientes de rama del circuito de la figura utilizando el método de las mallas.
 - b) Calcular la tensión entre los nudos A y B.
 - c) Calcular la potencia compleja generada por el generador de tensión ideal cuya f.e.m. es E_5 .
- 4) En el circuito del problema anterior:
- a) Calcular las corrientes de rama utilizando el método de los nudos (tomar el nudo B como referencia).
 - b) Realizar el balance de potencias generadas y consumidas.
- 5) En el siguiente circuito:



- a) Calcular todas las corrientes de rama. Para ello emplear el método de los nudos tomando el nudo B como referencia.
- b) Realizar el balance de potencias generadas y consumidas de este circuito.

6) En el siguiente circuito:

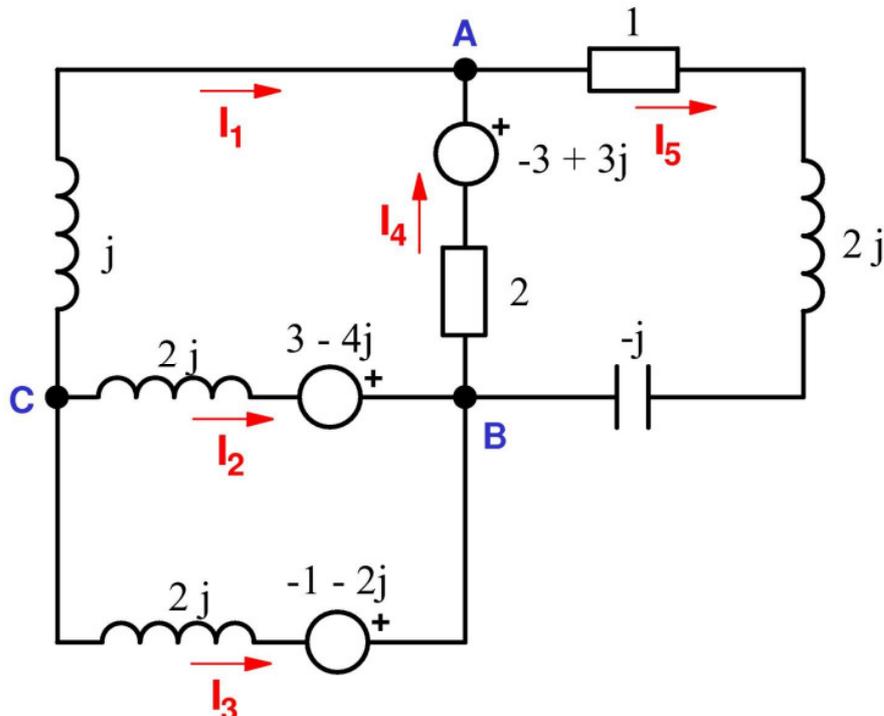


- a) Obtenga las corrientes de rama utilizando el método de los nudos (Tomar el nudo D como referencia de tensiones).
- b) Realice el balance de potencias complejas consumidas y generadas.

7) En el circuito del problema anterior:

- a) Obtenga las corrientes de rama empleando el método de superposición.
- b) Calcule la tensión entre los nudos A y C.

8)



- a) En el circuito de la figura adjunta calcular todas las corrientes de rama empleando el método de las mallas.
- b) Obtener la diferencia de potencial entre los nudos A y B.

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

- 1) a) $\bar{I}_a = 0 + 0j \text{ A}$; $\bar{I}_b = 0 + j \text{ A}$; $\bar{I}_c = 0 + 2j \text{ A}$
 $\bar{E}_{Th} = 1 - j \text{ A}$; $\bar{Z}_{Th} = 1 + 0j \text{ A}$
 b) $\bar{S}_{Generada} = \bar{S}_{Consumida} = 2 + 2j \text{ VA}$
- 2) Si se elige como positivo el sentido horario, las corrientes de malla son:
 $\bar{I}_a = 11 + 3j \text{ A}$; $\bar{I}_b = 4 + 2j \text{ A}$; $\bar{I}_c = 13 - j \text{ A}$
 Las corrientes de rama son:
 $\bar{I}_1 = 11 + 3j \text{ A}$; $\bar{I}_2 = -7 - j \text{ A}$; $\bar{I}_3 = 2 - 4j \text{ A}$;
 $\bar{I}_4 = 4 + 2j \text{ A}$; $\bar{I}_5 = 9 - 3j \text{ A}$; $\bar{I}_6 = -13 + j \text{ A}$;
 La tensión pedida es: $\bar{V}_{AD} = 4 + 2j = 4,47 \angle 26,6^\circ \text{ V}$
 $v_{AD} = \sqrt{2} \cdot 4,47 \cos(100t + 26,6^\circ)$
- 3) a) Tomando como positivo el sentido horario para las corrientes de malla:
 $\bar{I}_a = 2 + 0j \text{ A}$; $\bar{I}_b = 0 + j \text{ A}$; $\bar{I}_c = 0 + j \text{ A}$
 $\bar{I}_1 = 2 + 0j \text{ A}$; $\bar{I}_2 = -2 + j \text{ A}$; $\bar{I}_3 = 0 + j \text{ A}$;
 $\bar{I}_4 = 0 + 0j \text{ A}$; $\bar{I}_5 = 0 + j \text{ A}$
 b) $\bar{V}_{AB} = 0 + j \text{ V}$
 c) $\bar{S}_{Generador 5} = 1 + 0j \text{ VA}$
- 4) a) Tomando el nudo B como referencia:
 $\bar{V}_A = 0 + j \text{ V}$; $\bar{V}_B = 0 + 0j \text{ V}$; $\bar{I}_5 = 0 + j \text{ A}$
 $\bar{I}_1 = 2 + 0j \text{ A}$; $\bar{I}_2 = -2 + j \text{ A}$; $\bar{I}_3 = 0 + j \text{ A}$;
 $\bar{I}_4 = 0 + 0j \text{ A}$; $\bar{I}_5 = 0 + j \text{ A}$
 b) $\bar{S}_{Generada} = \bar{S}_{Consumida} = 6 + 5j \text{ VA}$
- 5) a) ($\bar{V}_A = 4 \text{ V}$; $\bar{V}_B = 0 \text{ V}$ (nudo tomado como referencia); $\bar{V}_C = -2 - 2j \text{ V}$; $\bar{V}_D = 0 \text{ V}$)
 $\bar{I}_1 = -2 \text{ A}$; $\bar{I}_2 = 5 + j \text{ A}$; $\bar{I}_3 = -3 - j \text{ A}$; $\bar{I}_4 = -7 + 3j \text{ A}$; $\bar{I}_5 = 4 - 4j \text{ A}$;
 $\bar{I}_6 = 3 + 4j \text{ A}$; $\bar{I}_7 = -3j \text{ A}$
 b) $\bar{S}_{Generada} = \bar{S}_{Consumida} = 24 + 106j \text{ VA}$
- 6) a) ($\bar{V}_A = 2 + 0j \text{ V}$; $\bar{V}_B = 1 + j \text{ V}$; $\bar{V}_C = 0 + j \text{ V}$;
 $\bar{V}_D = 0 + 0j \text{ V}$)
 $\bar{I}_1 = 0 - 2j \text{ A}$; $\bar{I}_2 = 1 - j \text{ A}$; $\bar{I}_3 = 0 - j \text{ A}$;
 $\bar{I}_4 = -1 - 2j \text{ A}$; $\bar{I}_5 = -1 + 0j \text{ A}$; $\bar{I}_6 = -1 - j \text{ A}$
 b) $\bar{S}_{Generada} = \bar{S}_{Consumida} = 2 + 0j \text{ VA}$

7) a) Circuito parcial 1 (con el generador de -1 V):

$$\bar{I}'_1 = -0,5j \text{ A}; \quad \bar{I}'_2 = 0 \text{ A}; \quad \bar{I}'_3 = -0,5j \text{ A};$$
$$\bar{I}'_4 = -j \text{ A}; \quad \bar{I}'_5 = -0,5j \text{ A}; \quad \bar{I}'_6 = -0,5j \text{ A}$$

Circuito parcial 2 (con el generador de j V):

$$\bar{I}''_1 = 1 - j \text{ A}; \quad \bar{I}''_2 = 1 \text{ A}; \quad \bar{I}''_3 = 0 \text{ A};$$
$$\bar{I}''_4 = -j \text{ A}; \quad \bar{I}''_5 = -1 \text{ A}; \quad \bar{I}''_6 = -j \text{ A}$$

Circuito parcial 3 (con el generador de +1 V):

$$\bar{I}'''_1 = -1 - 0,5j \text{ A}; \quad \bar{I}'''_2 = -j \text{ A}; \quad \bar{I}'''_3 = -0,5j \text{ A};$$
$$\bar{I}'''_4 = -1 \text{ A}; \quad \bar{I}'''_5 = 0,5j \text{ A}; \quad \bar{I}'''_6 = -1 + 0,5j \text{ A}$$

Circuito total:

$$\bar{I}_1 = -2j \text{ A}; \quad \bar{I}_2 = 1 - j \text{ A}; \quad \bar{I}_3 = -j \text{ A};$$
$$\bar{I}_4 = -1 - 2j \text{ A}; \quad \bar{I}_5 = -1 \text{ A}; \quad \bar{I}_6 = -1 - j \text{ A}$$

b) $\bar{V}_{AC} = 2 - j = 2,24 \angle -26,57^\circ \text{ V}$

8) a) (Tomando como positivo el sentido horario para las corrientes de malla:

$$\bar{I}_a = 1 + 0j \text{ A}; \quad \bar{I}_b = 0 + j \text{ A}; \quad \bar{I}_c = 0 - j \text{ A})$$
$$\bar{I}_1 = 1 + 0j \text{ A}; \quad \bar{I}_2 = -1 - j \text{ A}; \quad \bar{I}_3 = 0 + j \text{ A};$$
$$\bar{I}_4 = -1 + j \text{ A}; \quad \bar{I}_5 = 0 + j \text{ A};$$

b) $\bar{V}_{AB} = -1 + j = \sqrt{2} \angle 135^\circ \text{ V}$

APÉNDICE 1:
NÚMEROS COMPLEJOS

Miguel Angel Rodríguez Pozueta

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

NÚMEROS COMPLEJOS

Miguel Ángel Rodríguez Pozueta

NÚMEROS IMAGINARIOS Y COMPLEJOS

Es sabido que el cuadrado de cualquier número real, tanto positivo como negativo, da como resultado un número real positivo. Por consiguiente, la raíz cuadrada de un número negativo no tiene solución dentro del conjunto de los números reales.

Para poder obtener la raíz cuadrada de números negativos se introdujeron los *números imaginarios*.

La **unidad imaginaria j** se define así:

$$j = \sqrt{-1} \quad (1)$$

Es preciso indicar que en la mayoría de los libros de matemáticas la unidad imaginaria se representa mediante la letra “i”. Sin embargo, en Electrotecnia se representa mediante la letra “j” porque se reserva la letra “i” para la intensidad.

Un **número imaginario** es igual al producto de la unidad imaginaria j por un número real X_b , por consiguiente tiene esta forma:

$$j X_b \quad (2)$$

Luego, un número imaginario es igual a la raíz cuadrada de un número real negativo:

$$\sqrt{-X_b^2} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{X_b^2} = j X_b \quad (3)$$

Un **número complejo** tiene esta forma

$$\bar{X} = \mathbf{X} = X_a + j X_b \quad (4)$$

Por lo tanto, un número complejo es igual a la suma de un número real más uno imaginario. De esto se deduce que tanto el conjunto de los números reales como el de los números imaginarios son subconjuntos del conjunto de los números complejos.

Como se aprecia en la expresión (4), un número complejo se puede designar mediante una letra con un guión encima o mediante una letra en negrita. En el texto de este documento se utiliza el primero de estos sistemas de designación, mientras que en las figuras se emplean ambos sistemas.

En la expresión (4) a X_a se lo denomina *parte real* y a X_b se lo llama *parte imaginaria* del número complejo \bar{X} .

REPRESENTACIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS. PLANO DE GAUSS

Se puede establecer una correspondencia entre cada número complejo y un vector en el plano x-y. Este vector tiene su origen sobre el origen de coordenadas y sus componentes son la parte real (X_a) en el eje de abscisas y la parte imaginaria (X_b) en el eje de ordenadas (Fig. 1).

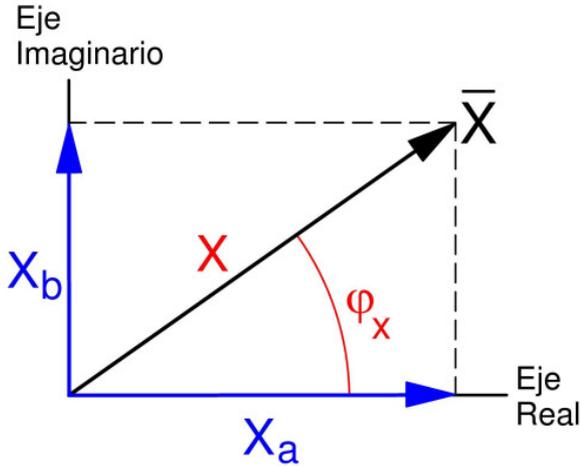


Fig. 1: Representación gráfica del número complejo \bar{X}

Cuando el plano cartesiano representa al conjunto de los números complejos se lo denomina *plano complejo* o *plano de Gauss* y en él los ejes de coordenadas pasan a denominarse *eje real* y *eje imaginario*, respectivamente (Fig. 1).

La expresión (4) constituye la forma cartesiana, binómica o rectangular del número complejo \bar{X} . Otra manera de representar al número complejo \bar{X} es la forma polar:

$$\text{Forma cartesiana: } \bar{X} = X_a + j X_b \quad (4')$$

$$\text{Forma polar: } \bar{X} = X \left| \varphi_x \right. \quad (5)$$

En la forma polar (5) aparecen el *módulo* X y el *argumento* φ_x del número complejo \bar{X} (ver la Fig. 1).

De la Fig. 1 es fácil deducir las siguientes relaciones:

$$X_a = X \cos \varphi_x \quad (6a)$$

$$X_b = X \operatorname{sen} \varphi_x \quad (6b)$$

$$X^2 = X_a^2 + X_b^2 \quad (6c)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_x = \frac{X_b}{X_a} \quad (6d)$$

De las expresiones (4) y (6) se deduce esta relación:

$$\bar{X} = X (\cos \varphi_x + j \operatorname{sen} \varphi_x) \quad (7)$$

Se demuestra que se cumple la siguiente igualdad:

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \operatorname{sen} \alpha \quad (8)$$

Las expresiones (7) y (8) indican que también se puede emplear la *forma exponencial* para representar al número complejo \bar{X} :

$$\text{Forma exponencial: } \bar{X} = X e^{j\varphi_x} \quad (9)$$

OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS

En lo que sigue se utilizarán los dos números complejos siguientes:

$$\bar{X} = X_a + j X_b = X \left| \varphi_x \right. \quad (10a)$$

$$\bar{Y} = Y_a + j Y_b = Y \left| \varphi_y \right. \quad (10b)$$

Conjugado de un número complejo:

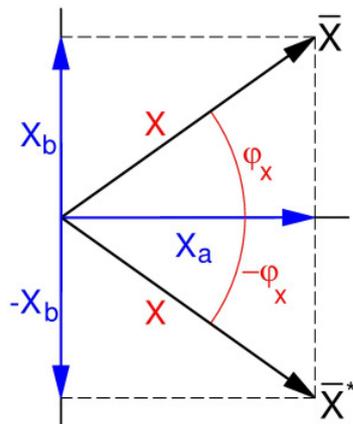


Fig. 2: \bar{X}^ es el conjugado del número complejo \bar{X}*

$$\bar{X}^* = X_a - j X_b = X \left| -\varphi_x \right. \quad (11)$$

Propiedades de j:

$$\bullet \quad j = \sqrt{-1} = 1 \left| 90^\circ \right. \quad (12a)$$

$$\bullet \quad j^2 = -1 = 1 \left| 180^\circ \right. \quad (12b)$$

$$\bullet \quad j^3 = -j = j^* = 1 \left| -90^\circ \right. \quad (12c)$$

$$\bullet \quad \frac{1}{j} = -j = 1 \left| -90^\circ \right. \quad (12d)$$

La expresión (12d) se demuestra así:

$$\frac{1}{j} = \frac{1}{j} \cdot \frac{j}{j} = \frac{j}{j^2} = \frac{j}{-1} = -j$$

Suma:

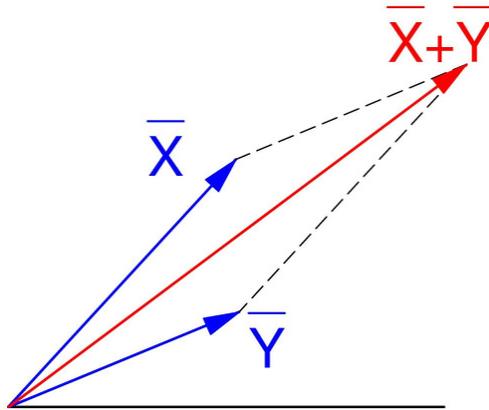


Fig. 3: Suma de los números complejos \bar{X} e \bar{Y}

$$\bar{X} + \bar{Y} = (X_a + Y_a) + j(X_b + Y_b) \quad (13)$$

Resta:

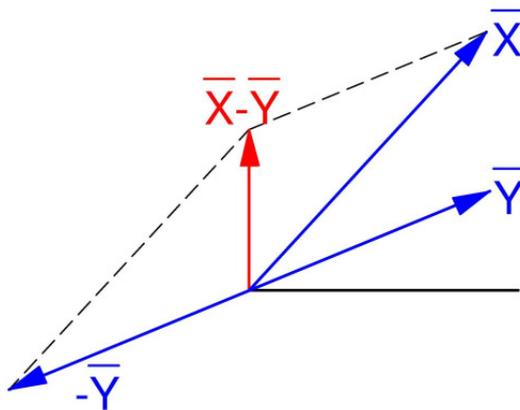


Fig. 4: Resta de los números complejos \bar{X} e \bar{Y}

$$\bar{X} - \bar{Y} = (X_a - Y_a) + j(X_b - Y_b) \quad (14)$$

Multiplicación:

- En forma polar:

$$\bar{X} \cdot \bar{Y} = (X \cdot Y) \left| \underline{(\varphi_x + \varphi_y)} \right. \quad (15a)$$

- En forma cartesiana:

$$\bar{X} \cdot \bar{Y} = (X_a Y_a - X_b Y_b) + j(X_a Y_b + X_b Y_a) \quad (15b)$$

La expresión (15b) se demuestra así:

$$\begin{aligned} \bar{X} \cdot \bar{Y} &= (X_a + j X_b) \cdot (Y_a + j Y_b) = X_a Y_a + j X_a Y_b + j X_b Y_a + j^2 X_b Y_b = \\ &= (X_a Y_a - X_b Y_b) + j(X_a Y_b + X_b Y_a) \end{aligned}$$

Cuadrado:

- En forma polar:

$$\bar{X}^2 = X^2 \left| \underline{2 \varphi_x} \right. \quad (16a)$$

- En forma cartesiana:

$$\bar{X}^2 = (X_a^2 - X_b^2) + j(2 X_a X_b) \quad (16b)$$

División:

- En forma polar:

$$\frac{\bar{X}}{\bar{Y}} = \frac{X}{Y} \left| \underline{(\varphi_x - \varphi_y)} \right. \quad (17a)$$

- En forma cartesiana:

$$\frac{\bar{X}}{\bar{Y}} = \frac{(X_a Y_a + X_b Y_b) + j(X_b Y_a - X_a Y_b)}{Y_a^2 + Y_b^2} \quad (17b)$$

Para obtener la expresión (17b) se multiplican tanto el numerador como el denominador del cociente por la conjugada del denominador:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{X}}{\bar{Y}} &= \frac{X_a + j X_b}{Y_a + j Y_b} = \frac{X_a + j X_b}{Y_a + j Y_b} \cdot \frac{Y_a - j Y_b}{Y_a - j Y_b} = \frac{X_a Y_a - j X_a Y_b + j X_b Y_a - j^2 X_b Y_b}{Y_a^2 - (j Y_b)^2} = \\ &= \frac{(X_a Y_a + X_b Y_b) + j(X_b Y_a - X_a Y_b)}{Y_a^2 + Y_b^2} \end{aligned}$$

Inverso:

- En forma polar:

$$\frac{1}{\bar{X}} = \frac{1}{X} \left| \underline{-\varphi_x} \right. \quad (18a)$$

- En forma cartesiana:

$$\frac{1}{\bar{X}} = \frac{X_a - j X_b}{X_a^2 + X_b^2} \quad (18b)$$

Observando las expresiones (12) y (15a) se deduce que:

- Multiplicar \bar{X} por j equivale a girarlo 90° .
- Multiplicar \bar{X} por j^2 equivale a girarlo 180° .
- Multiplicar \bar{X} por $-j$ o por $\frac{1}{j}$ equivale a girarlo -90° .

RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON NÚMEROS COMPLEJOS

Los sistemas de ecuaciones lineales con números complejos se resuelven de manera similar a los sistemas de ecuaciones con números reales. Por lo tanto, se utilizarán los conocidos métodos de sustitución, de igualación y de reducción o, también, la Regla de Cramer. La única diferencia es que las operaciones algebraicas son con números complejos y se efectúan como se ha indicado en el apartado anterior.

En la Web también está disponible mi libro de cálculo CALCOMP que resuelve sistemas de hasta nueve ecuaciones lineales con números complejos. Se puede descargar gratuitamente de esta página Web: http://personales.unican.es/rodrigma/primer/mi_software.htm.

Un ejemplo permitirá comprender mejor como se resuelven estos sistemas de ecuaciones.

Ejemplo 1:

Calcule las corrientes de rama del siguiente circuito mediante el método general; es decir, mediante la aplicación directa de los Lemas de Kirchoff.

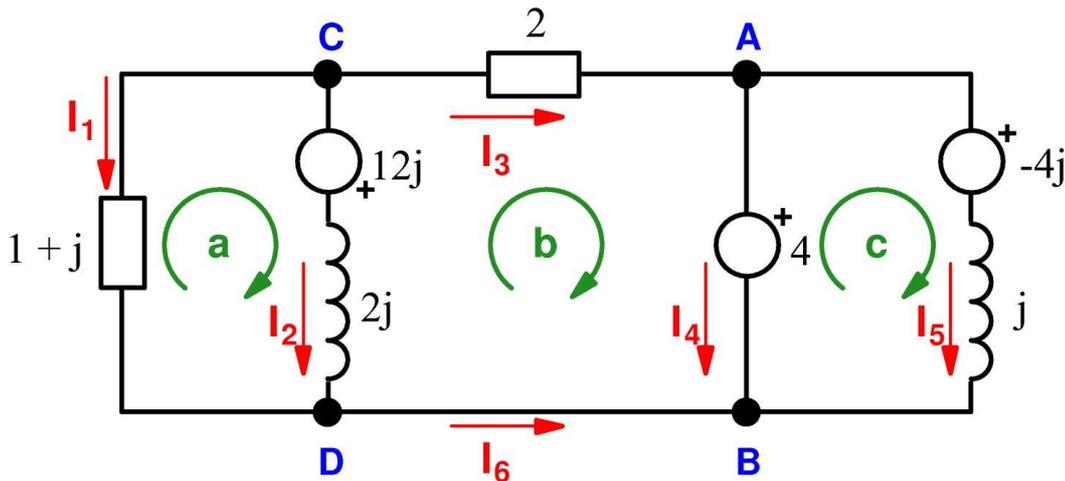


Fig. 5: Circuito a resolver

Resolución:

La aplicación de los dos lemas de Kirchoff da lugar al siguiente sistema de seis ecuaciones con seis incógnitas, que son las corrientes de rama ($\bar{I}_1, \bar{I}_2, \dots, \bar{I}_6$):

$$\text{Nudo A: } \bar{I}_3 = \bar{I}_4 + \bar{I}_5 \tag{19a}$$

$$\text{Nudo B: } \bar{I}_4 + \bar{I}_5 + \bar{I}_6 = 0 \tag{19b}$$

$$\text{Nudo C: } 0 = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 \tag{19c}$$

$$\text{Malla a: } 12j = -\bar{I}_1 (1 + j) + \bar{I}_2 (2j) \tag{19d}$$

$$\text{Malla b: } -12j - 4 = -\bar{I}_2 (2j) + \bar{I}_3 2 \tag{19e}$$

$$\text{Malla c: } 4 - (-4j) = \bar{I}_5 j \tag{19f}$$

Se empieza ordenando cada una de las ecuaciones de forma que las incógnitas pasen al lado derecho del signo igual:

$$0 = -\bar{I}_3 + \bar{I}_4 + \bar{I}_5 \quad (20a)$$

$$0 = \bar{I}_4 + \bar{I}_5 + \bar{I}_6 \quad (20b)$$

$$0 = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 \quad (20c)$$

$$12j = \bar{I}_1 (-1 - j) + \bar{I}_2 (2j) \quad (20d)$$

$$-4 - 12j = \bar{I}_2 (-2j) + \bar{I}_3 2 \quad (20e)$$

$$4 + 4j = \bar{I}_5 j \quad (20f)$$

De la última de las ecuaciones y considerando la propiedad (12d) se puede despejar \bar{I}_5 :

$$\bar{I}_5 = \frac{4 + 4j}{j} = \frac{4}{j} + \frac{4j}{j} = 4 \left(\frac{1}{j} \right) + 4 = 4 - 4j \quad (21)$$

Es fácil percatarse de que las tres ecuaciones (20c), (20d) y (20e) sólo incluyen tres incógnitas: \bar{I}_1 , \bar{I}_2 e \bar{I}_3 . Luego es posible obtener estas incógnitas manipulando estas tres ecuaciones. Despejando \bar{I}_3 de (20c) se llega a:

$$\bar{I}_3 = -(\bar{I}_1 + \bar{I}_2) \quad (22)$$

Sustituyendo (22) en (20e) se deduce que:

$$\begin{aligned} -4 - 12j &= \bar{I}_2 (-2j) - (\bar{I}_1 + \bar{I}_2) 2 \\ -4 - 12j &= \bar{I}_1 (-2) + \bar{I}_2 (-2 - 2j) \end{aligned} \quad (23)$$

Simplificamos la ecuación (23) dividiendo por -2 a ambos lados del signo =. Se obtiene este resultado:

$$2 + 6j = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 (1 + j) \quad (24)$$

Ahora tenemos las dos ecuaciones (24) y (20d) que sólo incluyen las incógnitas \bar{I}_1 e \bar{I}_2 y que van a permitir calcularlas. Multiplicando ambos lados de la ecuación (24) por $(1 + j)$ y teniendo presente, además, la propiedad (12b) se llega a:

$$\begin{aligned} (2 + 6j) \cdot (1 + j) &= \bar{I}_1(1 + j) + \bar{I}_2 (1 + j)^2 \\ 2 + 2j + 6j + 6j^2 &= \bar{I}_1 (1 + j) + \bar{I}_2 (1^2 + j^2 + (2 \cdot 1 \cdot j)) = \bar{I}_1 (1 + j) + \bar{I}_2 (1 - 1 + 2j) \\ -4 + 8j &= \bar{I}_1 (1 + j) + \bar{I}_2 (2j) \end{aligned} \quad (25)$$

Seguidamente obtendremos \bar{I}_2 sumando la ecuación (20d) a la (25):

$$\begin{aligned} -4 + 20j &= \bar{I}_2 (4j) \\ \bar{I}_2 &= \frac{-4 + 20j}{4j} = \left(\frac{-4 + 20j}{4} \right) \cdot \left(\frac{1}{j} \right) = (-1 + 5j) \cdot (-j) = j - 5j^2 \\ \bar{I}_2 &= 5 + j \end{aligned} \quad (26)$$

Despejamos \bar{I}_1 de (24) y utilizamos el valor de \bar{I}_2 obtenido en (26):

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 &= (2 + 6j) - \bar{I}_2 (1 + j) = (2 + 6j) - [(5 + j) \cdot (1 + j)] \\ \bar{I}_1 &= (2 + 6j) - (5 + 5j + j + j^2) = (2 + 6j) - (4 + 6j) = -2 \\ \bar{I}_1 &= -2 \end{aligned} \quad (27)$$

\bar{I}_3 se puede calcular sustituyendo en la expresión (22) los valores de \bar{I}_1 y de \bar{I}_2 que acabamos de obtener en (26) y en (27), respectivamente:

$$\begin{aligned} \bar{I}_3 &= -(\bar{I}_1 + \bar{I}_2) = -[-2 + (5 + j)] = -[3 + j] \\ \bar{I}_3 &= -3 - j \end{aligned} \quad (28)$$

\bar{I}_4 se puede obtener despejándola de la ecuación (20a) y utilizando los valores de \bar{I}_3 y de \bar{I}_5 calculados en (28) y en (21), respectivamente:

$$\bar{I}_4 = \bar{I}_3 - \bar{I}_5 = (-3 - j) - (4 - 4j) = -7 + 3j \quad (29)$$

Finalmente, \bar{I}_6 se determina despejándola de la ecuación (20b) y utilizando los valores de \bar{I}_4 y de \bar{I}_5 que se han calculado en (29) y en (21), respectivamente:

$$\begin{aligned} \bar{I}_6 &= -(\bar{I}_4 + \bar{I}_5) = -[(-7 + 3j) + (4 - 4j)] = -[-3 - j] \\ \bar{I}_6 &= 3 + j \end{aligned} \quad (30)$$

Por lo tanto, las corrientes de rama de este circuito tienen estos valores:

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 &= -2 + 0j \text{ A}; & \bar{I}_2 &= 5 + j \text{ A}; & \bar{I}_3 &= -3 - j \text{ A} \\ \bar{I}_4 &= -7 + 3j \text{ A}; & \bar{I}_5 &= 4 - 4j \text{ A}; & \bar{I}_6 &= 3 + j \text{ A} \end{aligned}$$

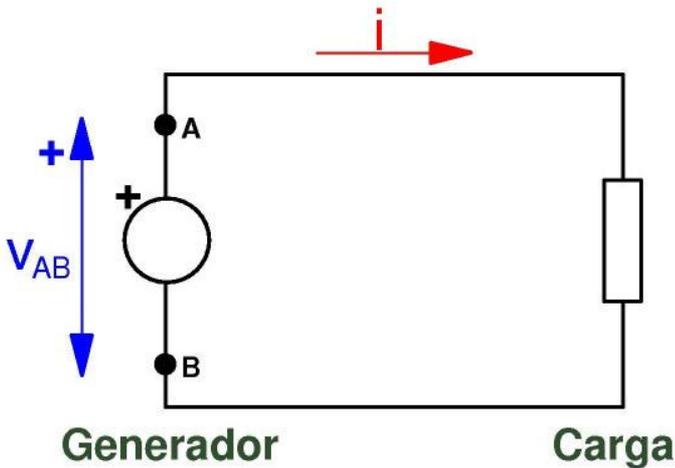
APÉNDICE 2:

RESUMEN DE LA TEORÍA **DE CIRCUITOS DE** **CORRIENTE ALTERNA**

Miguel Angel Rodríguez Pozueta

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

MAGNITUDES BÁSICAS (1)



Convenio de signos:

- En el interior de una carga (o receptor) la corriente circula desde el punto de mayor tensión al de menor tensión eléctrica.
- En el interior de un generador la corriente circula desde el punto de menor tensión al de mayor tensión eléctrica.

Intensidad de corriente, i:

- Variación de carga con el tiempo en la sección transversal del conductor:

$$i = \frac{d q}{d t}$$

Se mide en *Amperios*

Tensión o diferencia de potencial entre A y B, V_{AB}

Trabajo realizado por el campo eléctrico para mover la unidad de carga positiva desde A hasta B:

$$V_{AB} = \frac{d w_{AB}}{d q}$$

Se mide en *Voltios*

MAGNITUDES BÁSICAS (2)

Potencia eléctrica, p:

- Trabajo realizado por unidad de tiempo:

$$p = \frac{d w_{AB}}{d t} = \frac{d w_{AB}}{d q} \cdot \frac{d q}{d t}$$

$$p = v \cdot i$$

En una carga o receptor:

$p > 0$: potencia consumida

$p < 0$: potencia generada

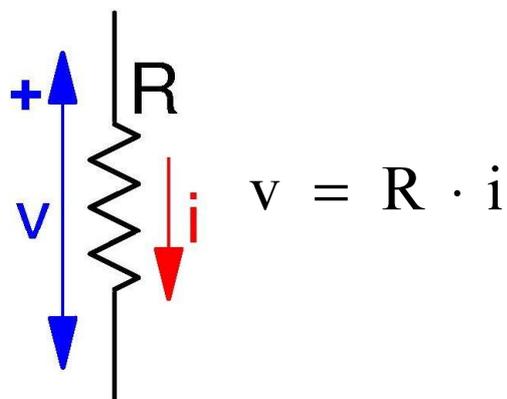
En un generador:

$p > 0$: potencia generada

$p < 0$: potencia consumida

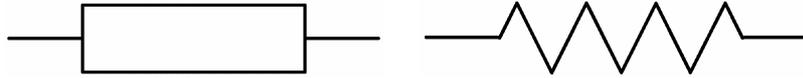
Ley de Ohm:

En una resistencia la tensión y la corriente están relacionadas por esta ley:



ELEMENTOS PASIVOS

- * Un **elemento pasivo** es un elemento que disipa o almacena energía eléctrica, pero no la genera.
- * Los elementos pasivos son los receptores o cargas de un circuito eléctrico.
- * Hay tres tipos de elementos pasivos:
 - **Resistencia**: Disipa energía eléctrica. Se representan por los símbolos siguientes (se prefiere el primero, que también se usará más adelante para representar impedancias).



Se caracteriza por su resistencia R.

- **Bobina o inductancia**: Almacena energía magnética. se representa mediante los símbolos siguientes (se prefiere el primer símbolo):



Se caracteriza por su coeficiente de autoinducción o inductancia L.

- **Condensador**: Almacena energía eléctrica. Su símbolo es:

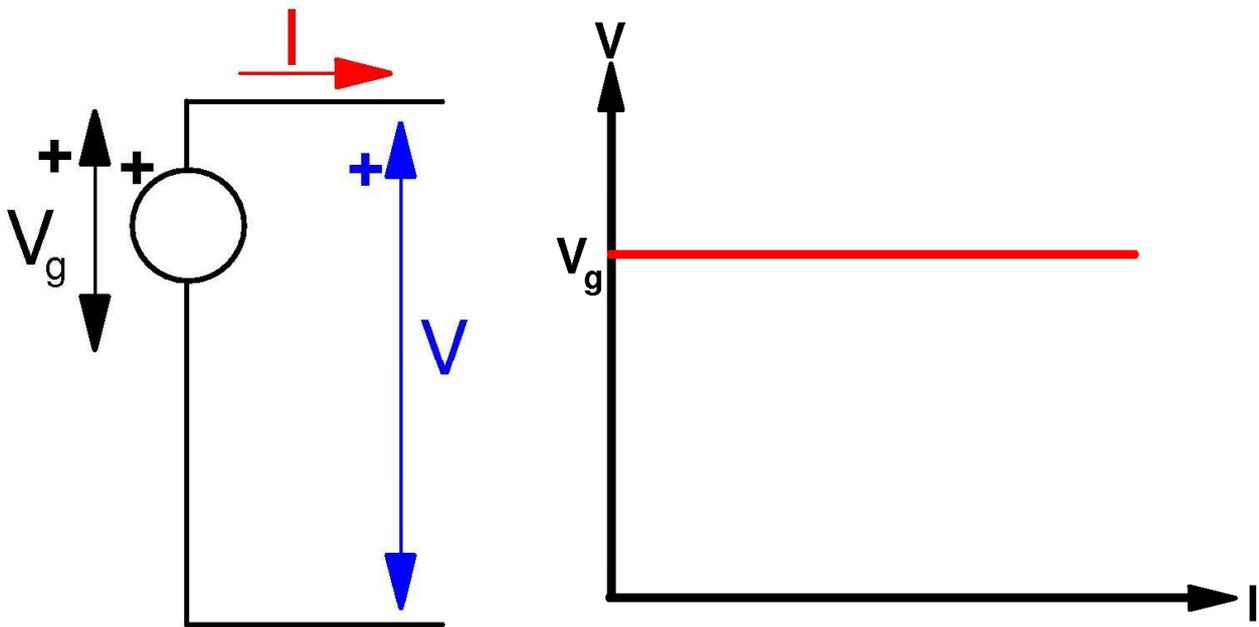


Se caracteriza por su capacidad C.

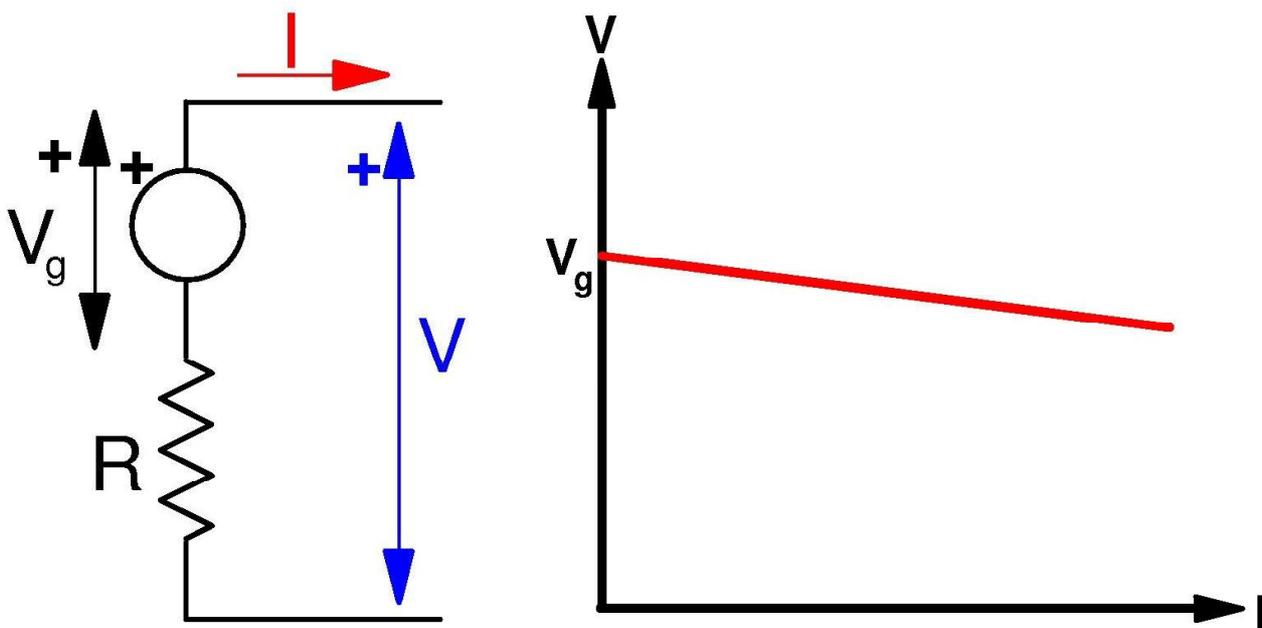
GENERADORES O FUENTES

- * Un **generador** o **fuentes** es un elemento que suministra energía eléctrica a un circuito. Un generador convierte otro tipo de energía en energía eléctrica.
- * Un **generador de tensión** es un generador que proporciona energía eléctrica a una determinada tensión. La corriente dependerá de la carga que alimente.
 - **Generador de tensión ideal**: Su tensión en bornes es independiente de la corriente.
 - **Generador de tensión real**: Su tensión en bornes depende de la corriente.
- * Un **generador de corriente** es un generador que proporciona energía eléctrica con una determinada corriente. La tensión dependerá de la carga que alimente.
 - **Generador de corriente ideal**: La corriente que suministra es independiente de la tensión en bornes.
 - **Generador de corriente real**: La corriente que suministra depende de la tensión en bornes.

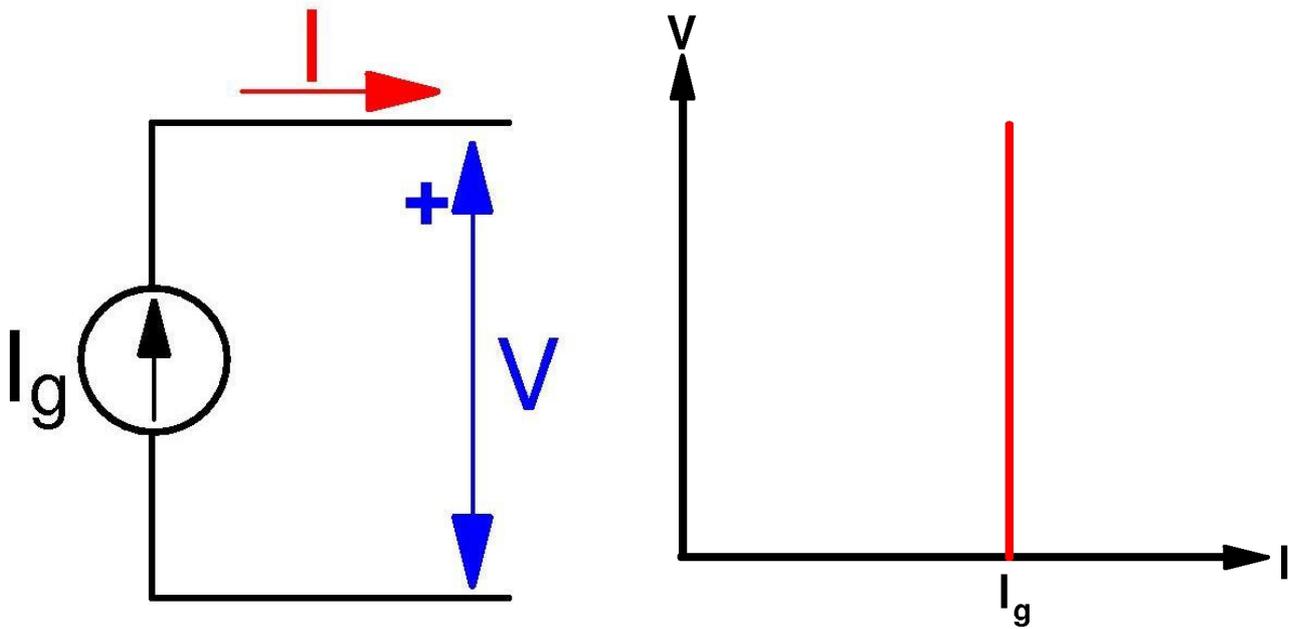
GENERADOR DE TENSIÓN IDEAL DE C.C.



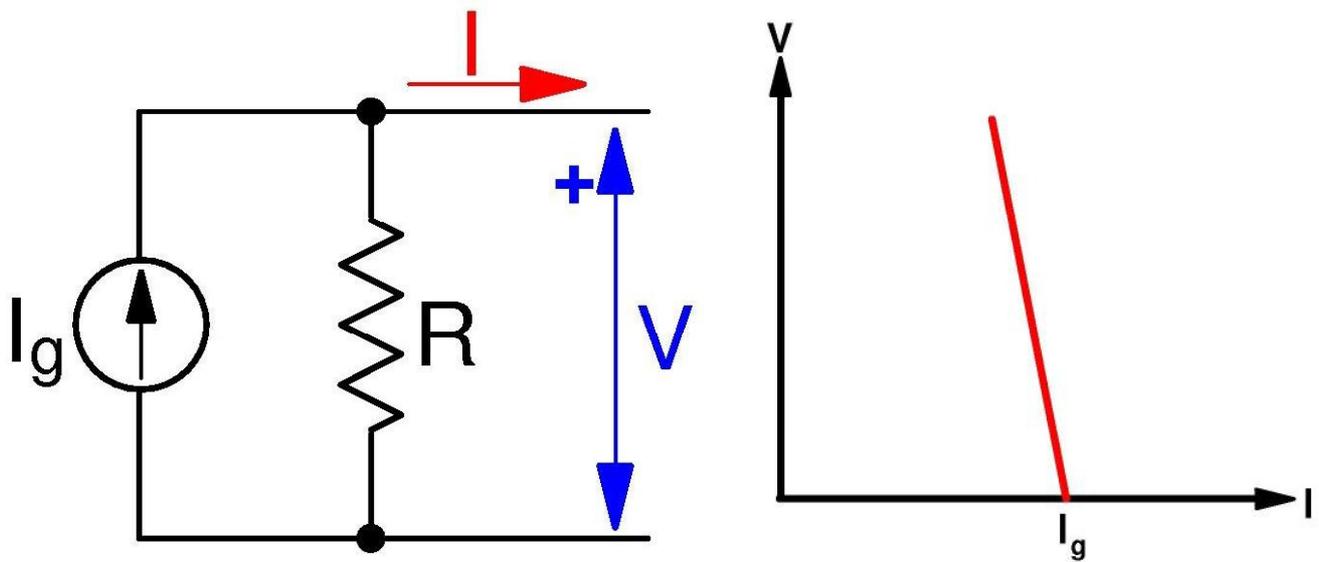
GENERADOR DE TENSIÓN REAL DE C.C.



GENERADOR DE CORRIENTE IDEAL DE C.C.



GENERADOR DE CORRIENTE REAL DE C.C.



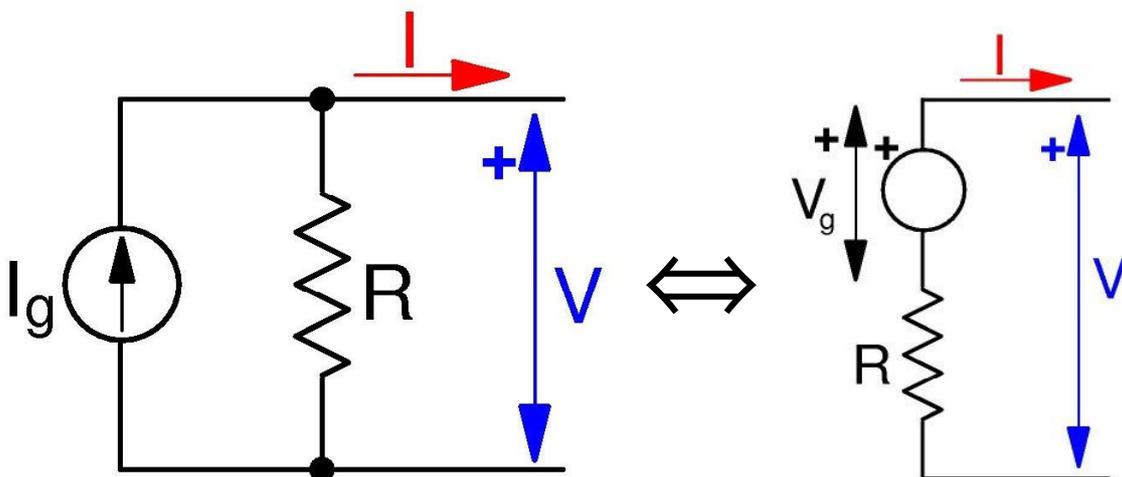
EQUIVALENCIA DE GENERADORES

- * Un generador de corriente ideal no se puede sustituir por uno de tensión equivalente.

Un generador de tensión ideal no se puede sustituir por uno de corriente equivalente.

- * Un generador de corriente real se puede sustituir por uno de tensión equivalente sin que el resto del circuito note la diferencia.
- * Un generador de tensión real se puede sustituir por uno de corriente equivalente sin que el resto del circuito note la diferencia.

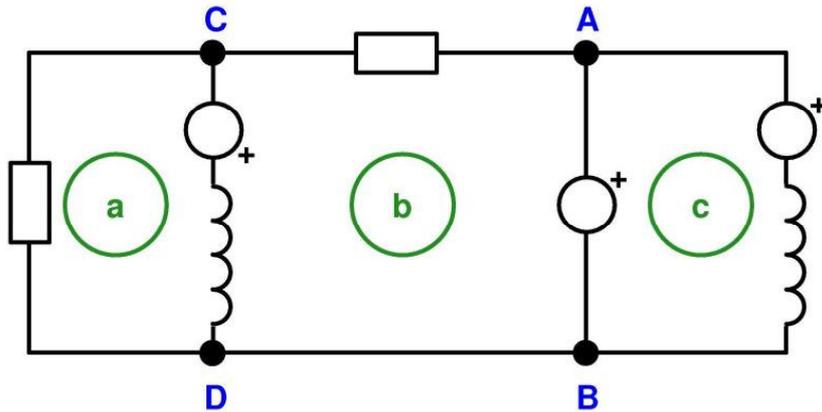
EQUIVALENCIA DE GENERADORES REALES EN C.C.



La misma resistencia R en los dos generadores equivalentes.

$$V_g = R \cdot I_g \rightarrow I_g = \frac{V_g}{R}$$

TOPOLOGÍA DE REDES



Nudo: Punto de unión de 3 o más elementos (A, B, C, ...)

Rama: Elemento o grupo de elementos entre 2 nudos

Red plana: La que se puede dibujar en un plano sin que se cruce ninguna rama.

Lazo: Conjunto de ramas que forman una línea cerrada, de forma que si se quita una rama del lazo, el camino queda abierto.

Malla: Lazo que no contiene a otro en su interior (a, b, c, ...)

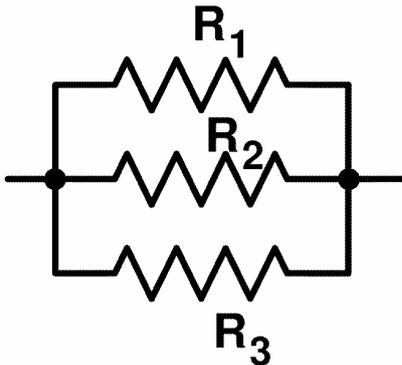
ACOPLAMIENTO DE RESISTENCIAS (1)

Serie:



$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3$$

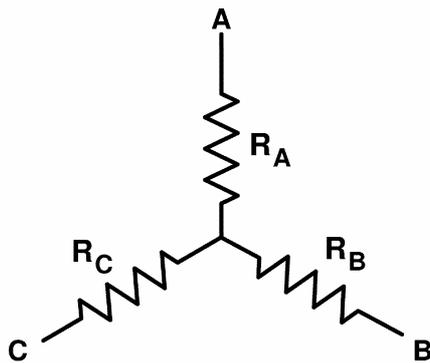
Paralelo:



$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

ACOPLAMIENTO DE RESISTENCIAS (2)

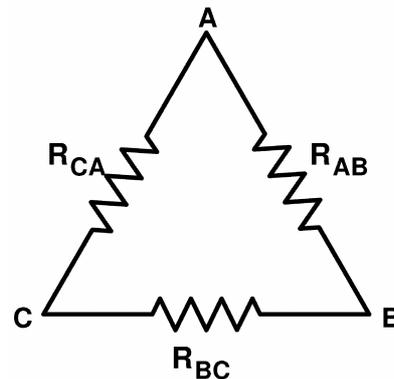
Estrella-Triángulo. Teorema de Kenelly



$$R_A = \frac{R_{CA} \cdot R_{AB}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}$$

$$R_B = \frac{R_{AB} \cdot R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}$$

$$R_C = \frac{R_{BC} \cdot R_{CA}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}$$

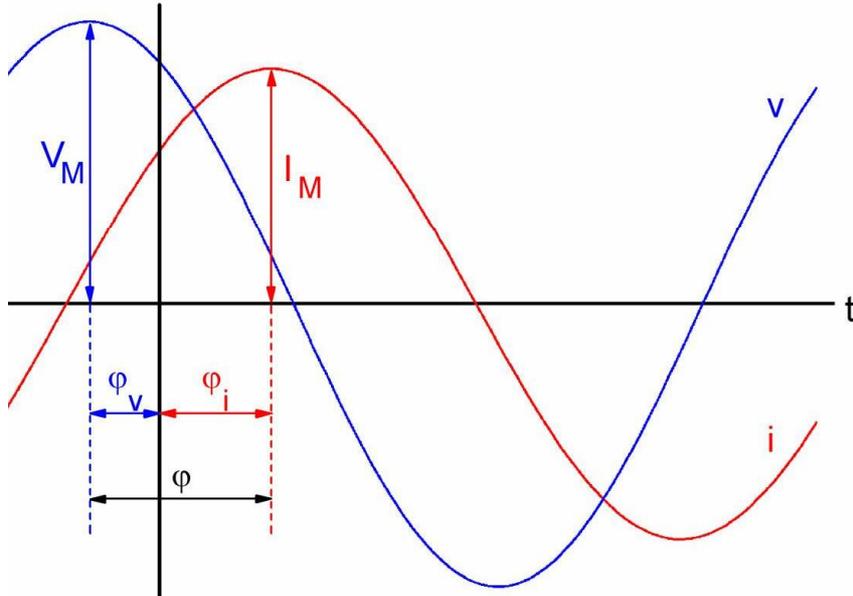


$$R_{AB} = \frac{R_A R_B + R_B R_C + R_C R_A}{R_C}$$

$$R_{BC} = \frac{R_A R_B + R_B R_C + R_C R_A}{R_A}$$

$$R_{CA} = \frac{R_A R_B + R_B R_C + R_C R_A}{R_B}$$

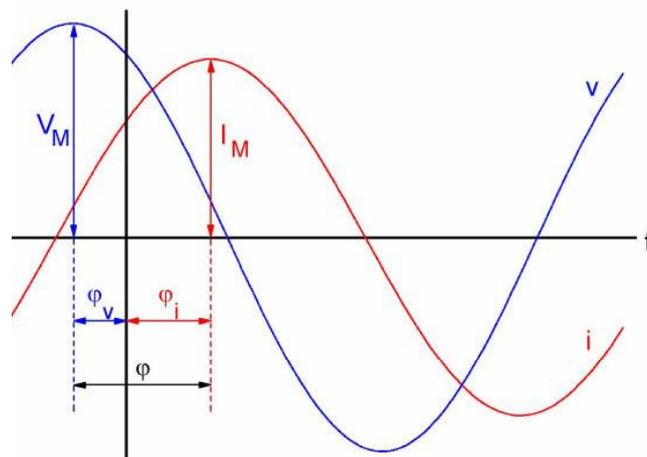
MAGNITUDES ALTERNAS



En esta figura: $\phi_v > 0$ ($= \pi/6$ rad) ; $\phi_i < 0$ ($= -\pi/4$ rad)

$$v = V_M \text{Cos} (\omega t + \phi_v) = V_M \text{Cos} (\omega t + \pi / 6)$$

$$i = I_M \text{Cos} (\omega t + \phi_i) = I_M \text{Cos} (\omega t - \pi / 4)$$



Desfase o diferencia de fase:

$$\phi = \phi_v - \phi_i = \pi / 6 - (- \pi / 4) = 5\pi / 12 \text{ rad}$$

Pulsación: $\omega = \frac{2 \pi}{T} = 2 \pi f \text{ rad/s}$

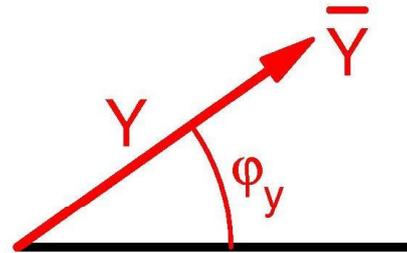
Valor eficaz: $I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}$

(Por ser funciones senoidales: $V_M = \sqrt{2} V$; $I_M = \sqrt{2} I$)

REPRESENTACIÓN FASORIAL

- Sea la magnitud sinusoidal: $y(t) = \sqrt{2} Y \cos(\omega t + \varphi_y)$

- A $y(t)$ se le puede asociar un vector \bar{Y} , (**fasor**), así:

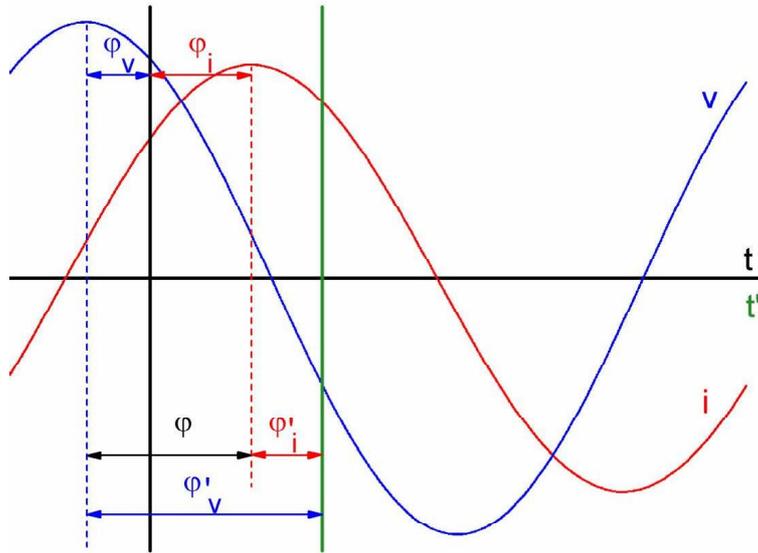


- Si este fasor girase con velocidad angular constante ω , su argumento en el instante t sería: $\omega t + \varphi_y$

Luego, la proyección horizontal de este fasor, girando con velocidad ω , es igual al valor instantáneo de $y(t)$ dividido por $\sqrt{2}$.

- Para manipular el fasor \bar{Y} se usarán números complejos:

$$\bar{Y} = Y \angle \varphi_y = Y e^{j\varphi_y} = Y (\cos \varphi_y + j \sen \varphi_y) \quad (j = \sqrt{-1})$$



Con la escala de tiempos t :

$$v = \sqrt{2} V \cos(\omega t + \varphi_v)$$

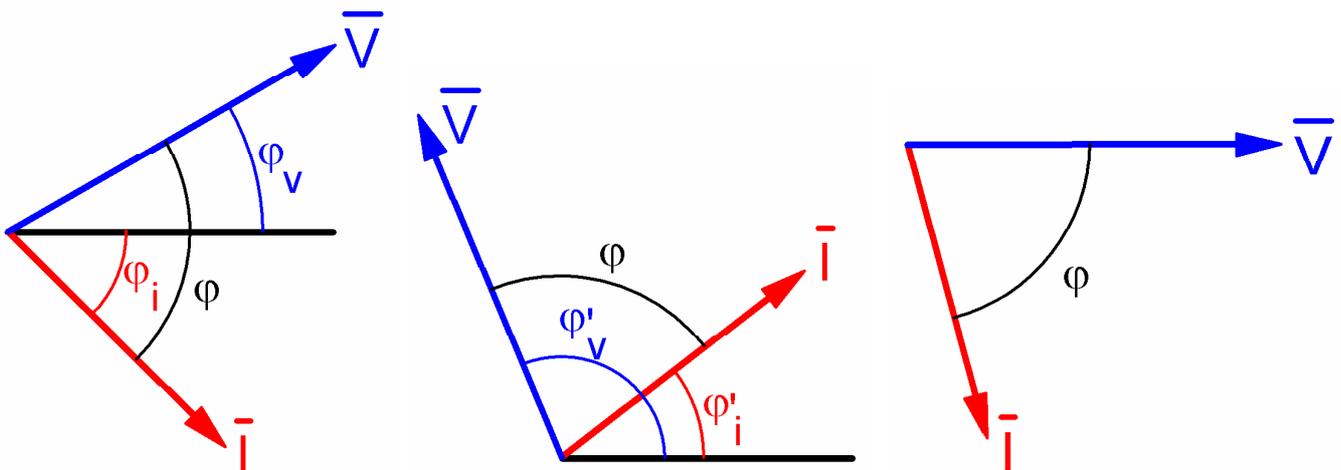
$$i = \sqrt{2} I \cos(\omega t + \varphi_i) = \sqrt{2} I \cos(\omega t + (\varphi_v - \varphi))$$

Con la escala de tiempos t' :

$$v = \sqrt{2} V \cos(\omega t' + \varphi'_v)$$

$$i = \sqrt{2} I \cos(\omega t' + \varphi'_i) = \sqrt{2} I \cos(\omega t' + (\varphi'_v - \varphi))$$

DIAGRAMAS FASORIALES



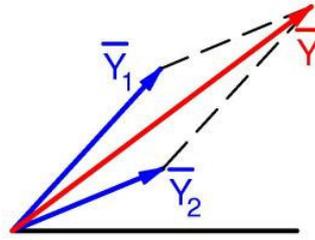
Con la escala de tiempos t

Con la escala de tiempos t'

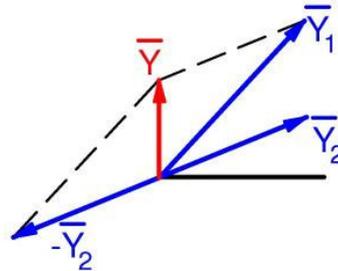
Usando \underline{V} como fador de referencia

PROPIEDADES DE LOS FASORES

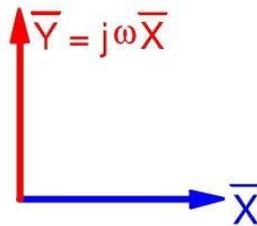
* $y = y_1 + y_2 \rightarrow \bar{Y} = \bar{Y}_1 + \bar{Y}_2$



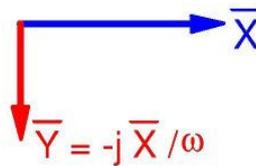
* $y = y_1 - y_2 \rightarrow \bar{Y} = \bar{Y}_1 - \bar{Y}_2$



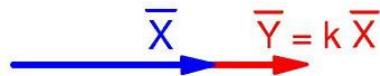
* $y = \frac{dx}{dt} \rightarrow \bar{Y} = j\omega\bar{X}$



* $y = \int x dt \rightarrow \bar{Y} = \bar{X} / j\omega = -j\bar{X} / \omega$



* $y = kx \rightarrow \bar{Y} = k\bar{X}$

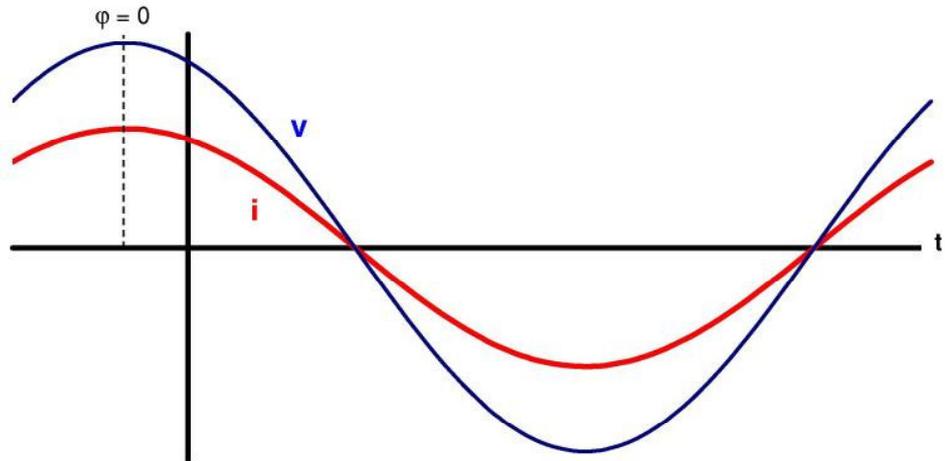
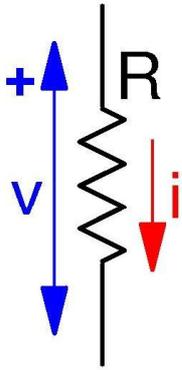


* $y = x/k \rightarrow \bar{Y} = \bar{X}/k$



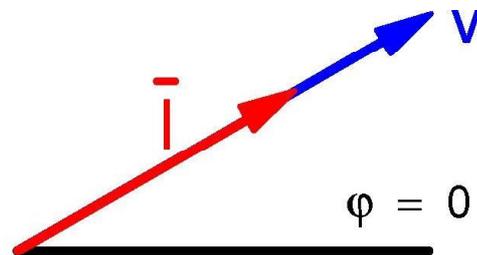
RESISTENCIA (R)

v e i están en fase ($\varphi = 0$):

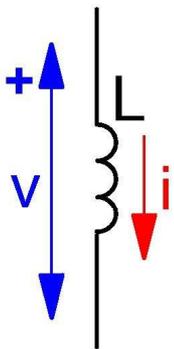


Ley de Ohm:

$$v = R \cdot i \rightarrow \boxed{\bar{V} = R \cdot \bar{I}}$$



INDUCTANCIA (L)



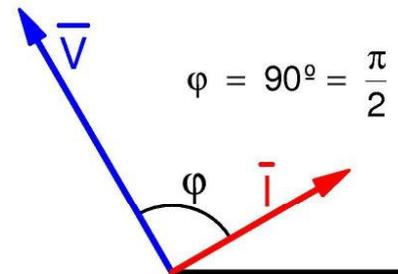
Quando circula una corriente i por una bobina se genera un campo magnético que origina los flujos $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_N$ en sus espiras.

Los **enlaces de flujo** ψ de la bobina son

$$\psi = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_N \text{ (Wb)}$$

La **inductancia** L de la bobina es

$$L = \frac{\psi}{i} \text{ (H)}$$



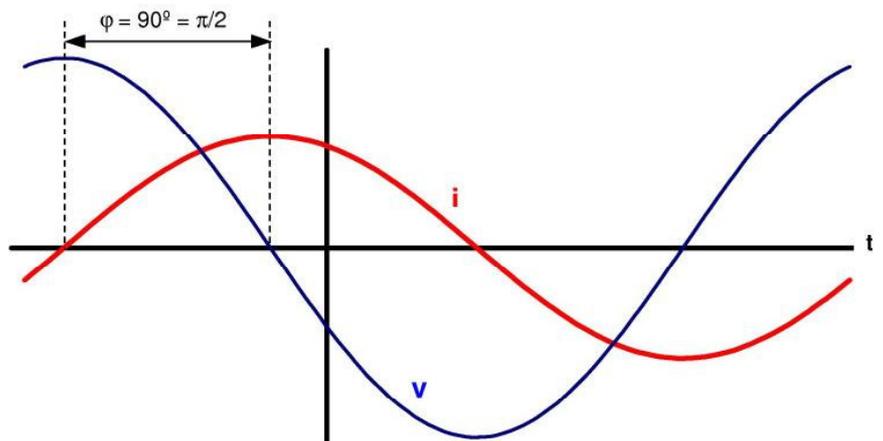
La corriente se retrasa 90° con respecto a la tensión:

Ley de Faraday:

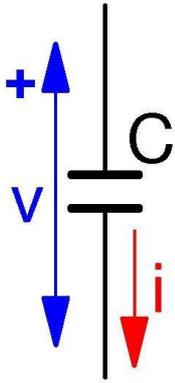
$$v = \frac{d\psi}{dt} \rightarrow v = L \cdot \frac{di}{dt}$$

$$\boxed{\bar{V} = \bar{X}_L \cdot \bar{I} = j X_L \bar{I}}$$

$X_L = \omega L$: **Reactancia inductiva** (Ω)



CONDENSADOR (C)



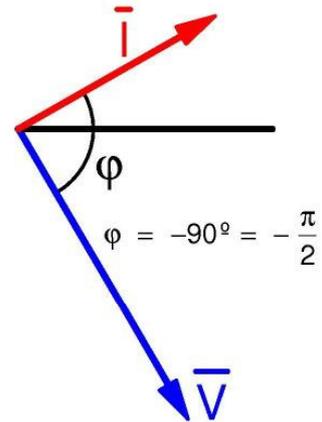
La **capacidad C** de un condensador es

$$C = \frac{q}{v} \text{ (F)}$$

Luego:

$$i = \frac{dq}{dt} \rightarrow q = \int i dt$$

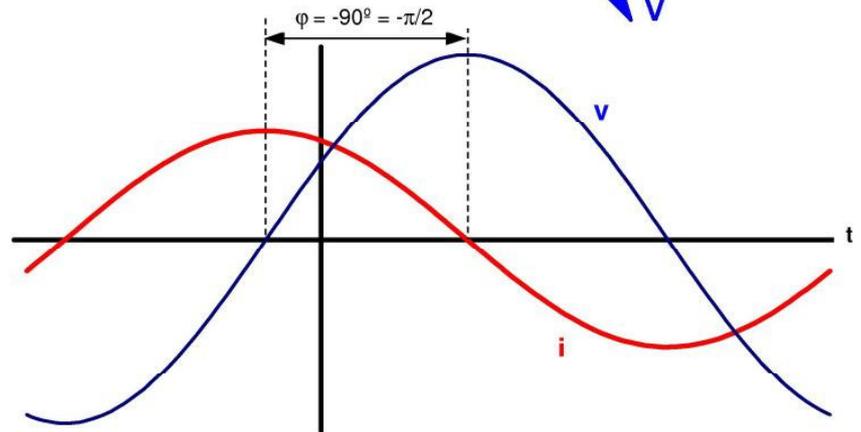
$$v = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \int i dt$$



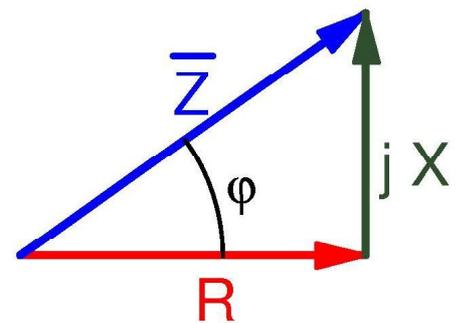
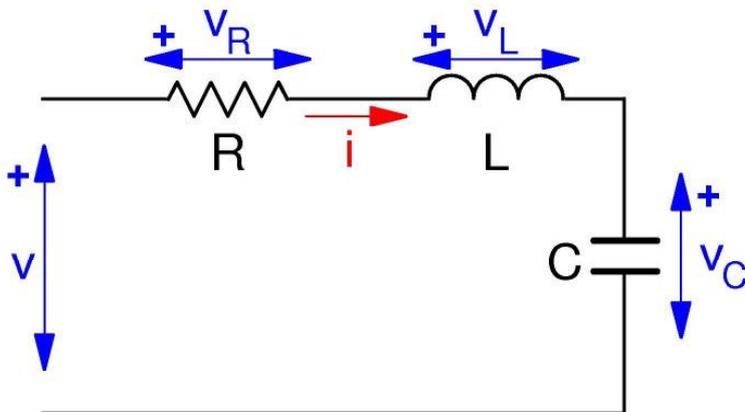
La corriente se adelanta 90° con respecto a la tensión:

$$\bar{V} = X_C \cdot \bar{I} = -j X_C \bar{I}$$

$$X_C = 1/\omega C : \text{Reactancia capacitiva } (\Omega)$$



CIRCUITO SERIE R - L - C



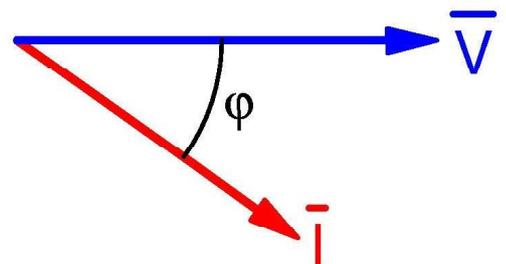
$$v = v_R + v_L + v_C \rightarrow \bar{V} = \bar{V}_R + \bar{V}_L + \bar{V}_C$$

$$\bar{V} = \bar{I} [R + j\omega L - j/\omega C] = \bar{I} \bar{Z} \quad (\text{Ley de Ohm en c.a.})$$

Impedancia: $\bar{Z} = R + \bar{X} = R + jX = Z \angle \varphi \text{ } (\Omega)$

Reactancia: $\bar{X} = jX = \bar{X}_L + \bar{X}_C = j \left[\omega L - \frac{1}{\omega C} \right] (\Omega)$

Admitancia: $\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} \text{ (siemens, mho, } \Omega^{-1})$

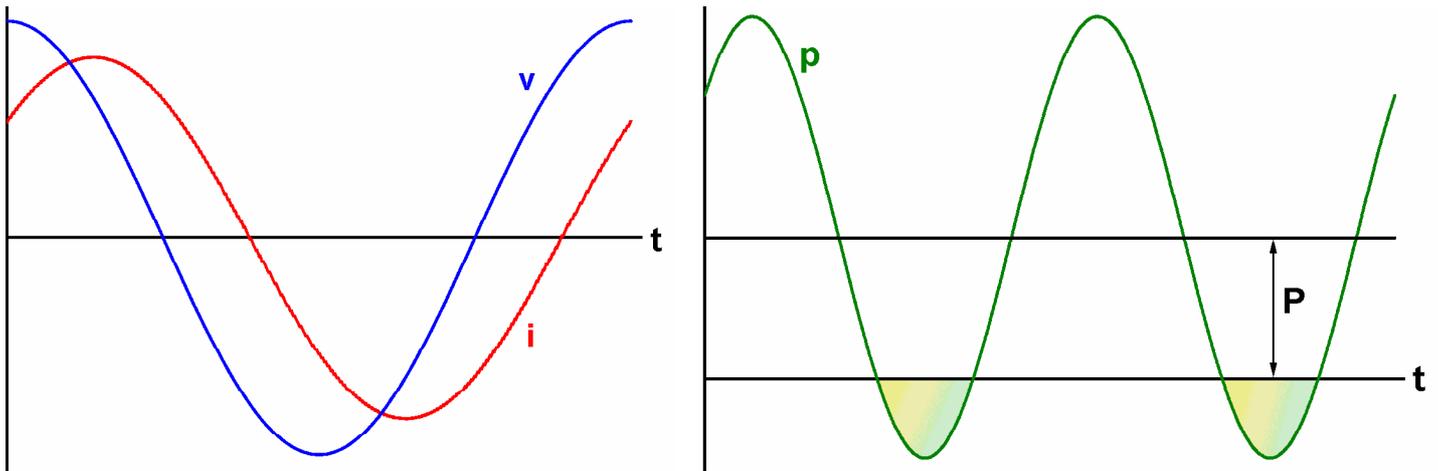


APÉNDICE 3:

LA POTENCIA EN
CORRIENTE ALTERNA

Miguel Angel Rodríguez Pozueta
UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

LA POTENCIA EN CORRIENTE ALTERNA (1)

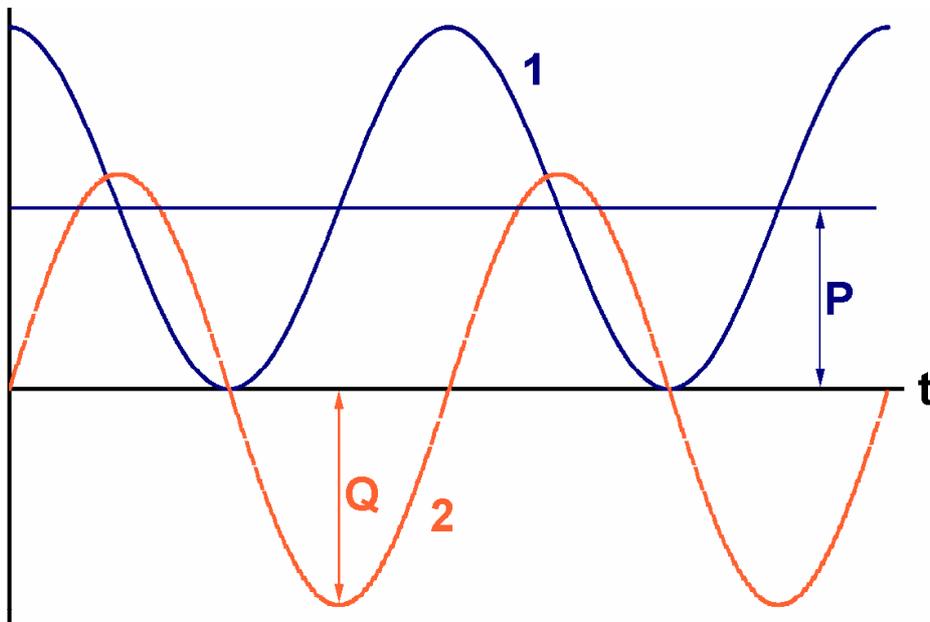


$$v = \sqrt{2} V \cos \omega t ; i = \sqrt{2} I \cos (\omega t - \varphi)$$

$$p = v \cdot i = P + V I \cos (2 \omega t - \varphi)$$

$$P = V I \cos \varphi = \text{Potencia activa (W, kW)}$$

LA POTENCIA EN CORRIENTE ALTERNA (2)



$$P = V I \cos \varphi : \text{Potencia activa (W, kW)} ; Q = V I \sin \varphi : \text{Potencia Reactiva (var, kvar)}$$

(Q > 0 en inductancias; Q < 0 en capacidades)

$$p = [P (1 + \cos 2 \omega t)] + [Q \text{ sen } 2 \omega t] =$$

= potencia activa instantánea (1) + potencia reactiva instantánea (2)

LA POTENCIA EN CORRIENTE ALTERNA (3)

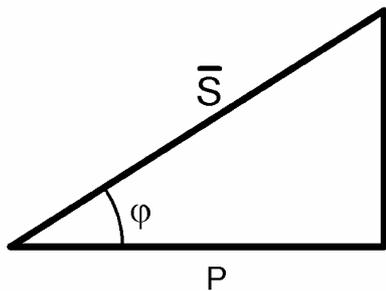
POTENCIA ACTIVA: $P = V I \cos \varphi$ (W)

POTENCIA REACTIVA: $Q = V I \text{Sen } \varphi$ (var)

POTENCIA APARENTE: $S = V \cdot I$ (VA)

POTENCIA COMPLEJA: $\bar{S} = P + jQ$ (VA)

FACTOR DE POTENCIA (f.d.p.): $\cos \varphi$

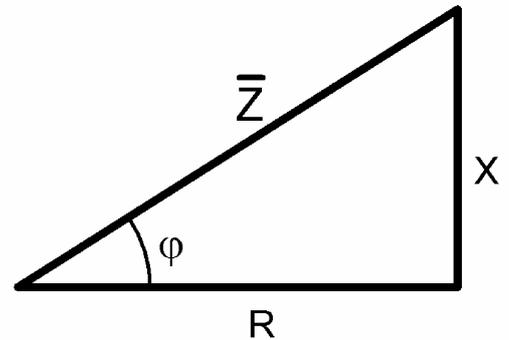


$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$$\text{tg } \varphi = \frac{Q}{P}$$

$$\bar{S} = P + jQ = S \angle \varphi = \bar{V} \cdot \bar{I}^*$$

EN IMPEDANCIAS:

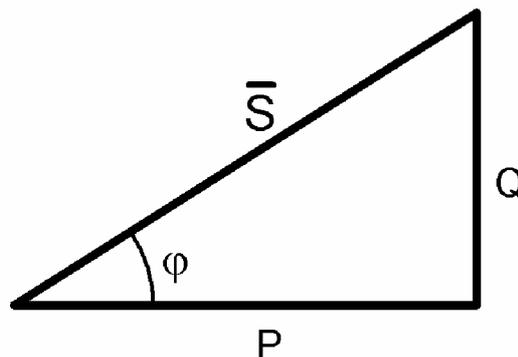
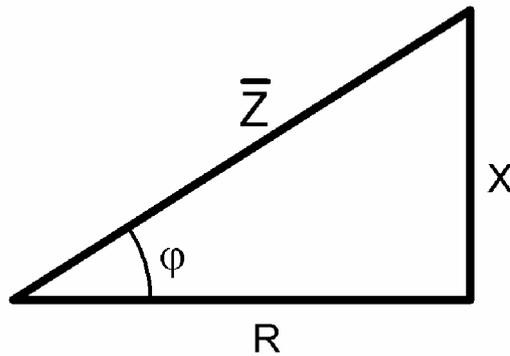
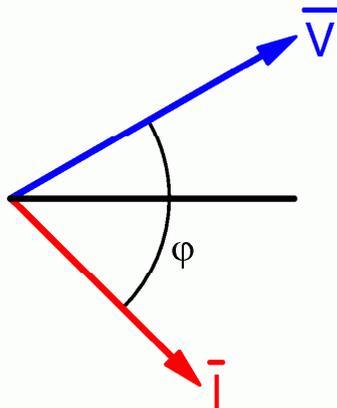


$$\bar{S} = \bar{Z} \cdot I^2$$

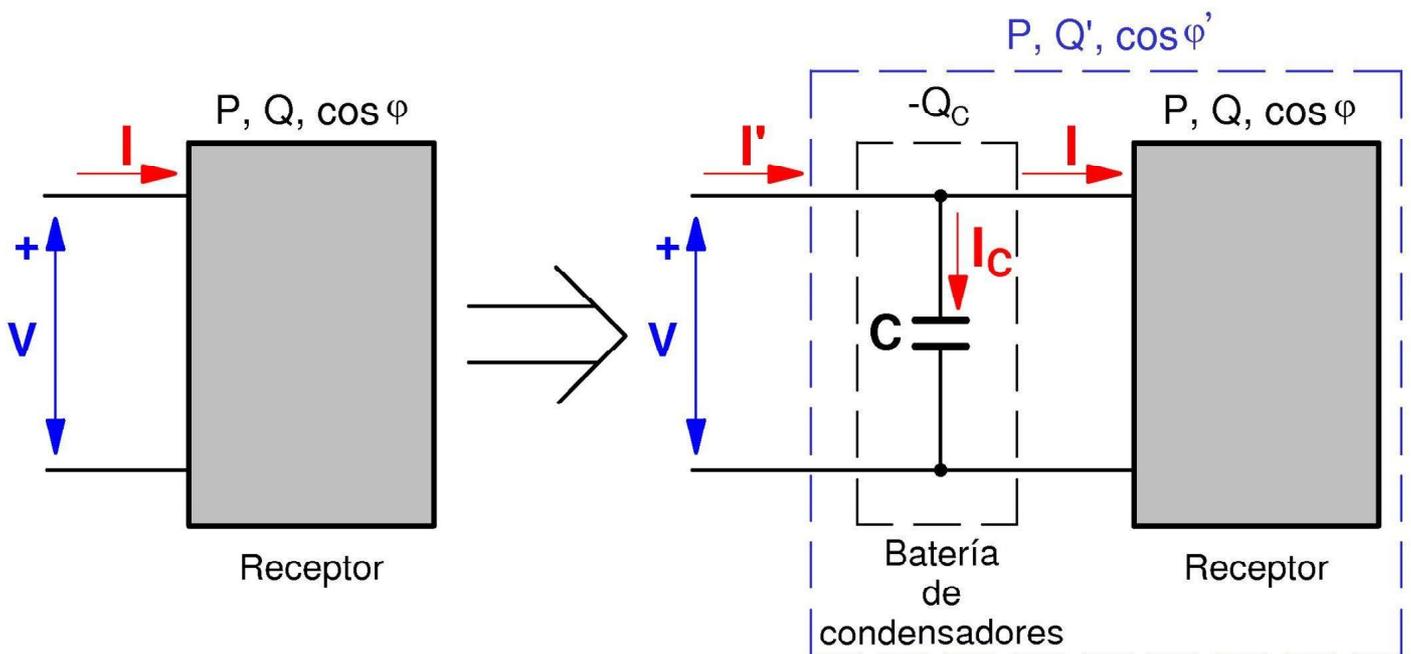
$$P = R \cdot I^2$$

$$Q = X \cdot I^2$$

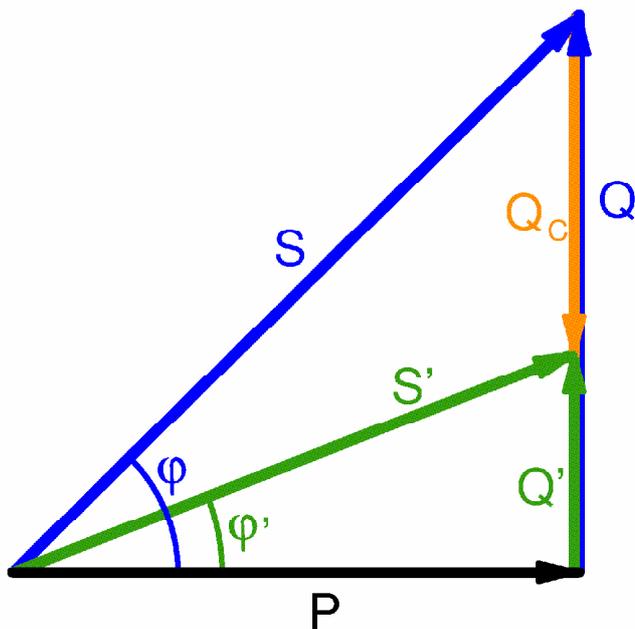
LOS TRES SIGNIFICADOS DEL ÁNGULO φ



MEJORA DEL FACTOR DE POTENCIA (1)



MEJORA DEL FACTOR DE POTENCIA (2)



$$Q_C = Q - Q' = P (\operatorname{tg} \phi - \operatorname{tg} \phi')$$

$$Q_C = X_C I_C^2 = X_C \left(\frac{V}{X_C} \right)^2$$

$$= \frac{V^2}{X_C} = \frac{V^2}{1 / \omega C}$$

$$C = \frac{Q_C}{\omega V^2} = \frac{Q_C}{(2 \pi f) V^2}$$

(En estas expresiones se utiliza el valor absoluto de Q_C)