



**UNIVERSIDAD DE CANTABRIA**  
**DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA**  
**ELÉCTRICA Y ENERGÉTICA**



**MÁQUINA ASÍNCRONA:**  
**CIRCUITOS EQUIVALENTES**  
**SIMPLIFICADOS.**  
**OTROS PARES**

**Miguel Angel Rodríguez Pozueta**

**Doctor Ingeniero Industrial**

© 2015, Miguel Angel Rodríguez Pozueta

Universidad de Cantabria (España)

Departamento de Ingeniería Eléctrica y Energética

*This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Unported License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/> or send a letter to Creative Commons, 444 Castro Street, Suite 900, Mountain View, California, 94041, USA.*

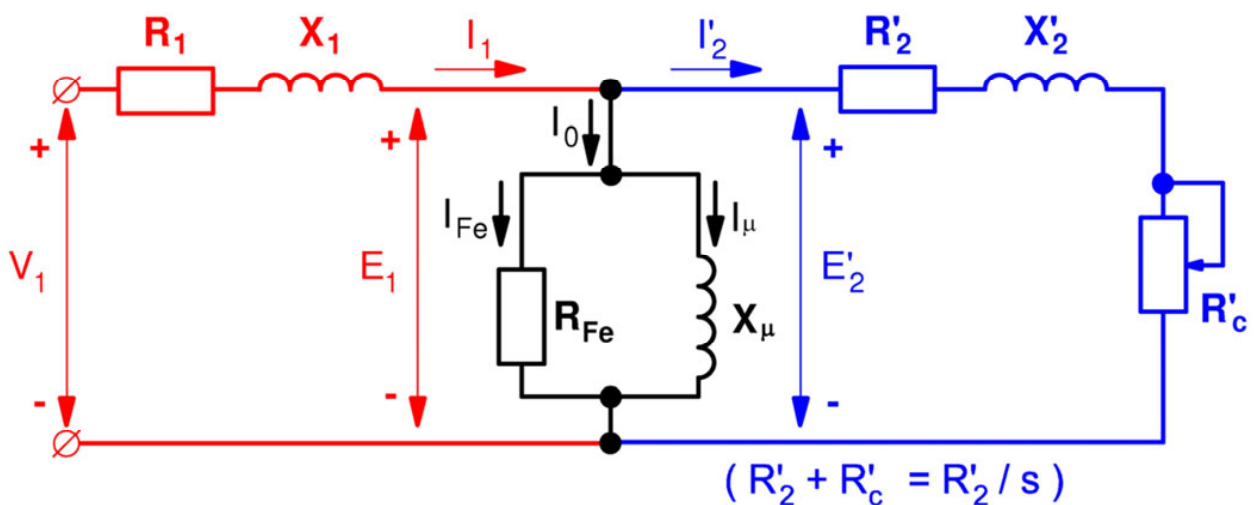


*Está permitida la reproducción total o parcial de este documento bajo la licencia Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 3.0 Unported que incluye, entre otras, la condición inexcusable de citar su autoría (Miguel Angel Rodríguez Pozueta - Universidad de Cantabria) y su carácter gratuito.*

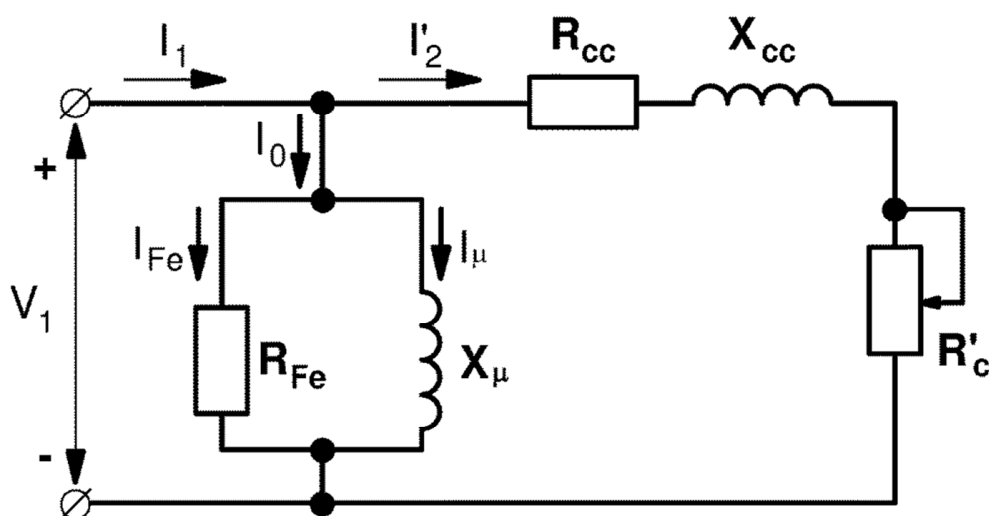
*Este documento puede descargarse gratuitamente desde esta Web:*  
<http://personales.unican.es/rodrigma/primer/publicaciones.htm>

## CIRCUITOS EQUIVALENTES SIMPLIFICADOS PRESENTACIÓN

La corriente de vacío de un motor asíncrono es mucho mayor que la de un transformador de tamaño similar. Esto es debido a que su componente  $I_\mu$  debe ser grande porque su circuito magnético tiene entrehierros. Esto hace que en el circuito equivalente aproximado empleado hasta ahora, el cálculo de la corriente del rotor  $I'_2$  (que se utiliza para obtener las fórmulas del par  $M$ ) tenga un cierto error. Vamos a buscar circuitos equivalentes simplificados que den menos error en el cálculo de  $I'_2$ .



*Circuito equivalente exacto*

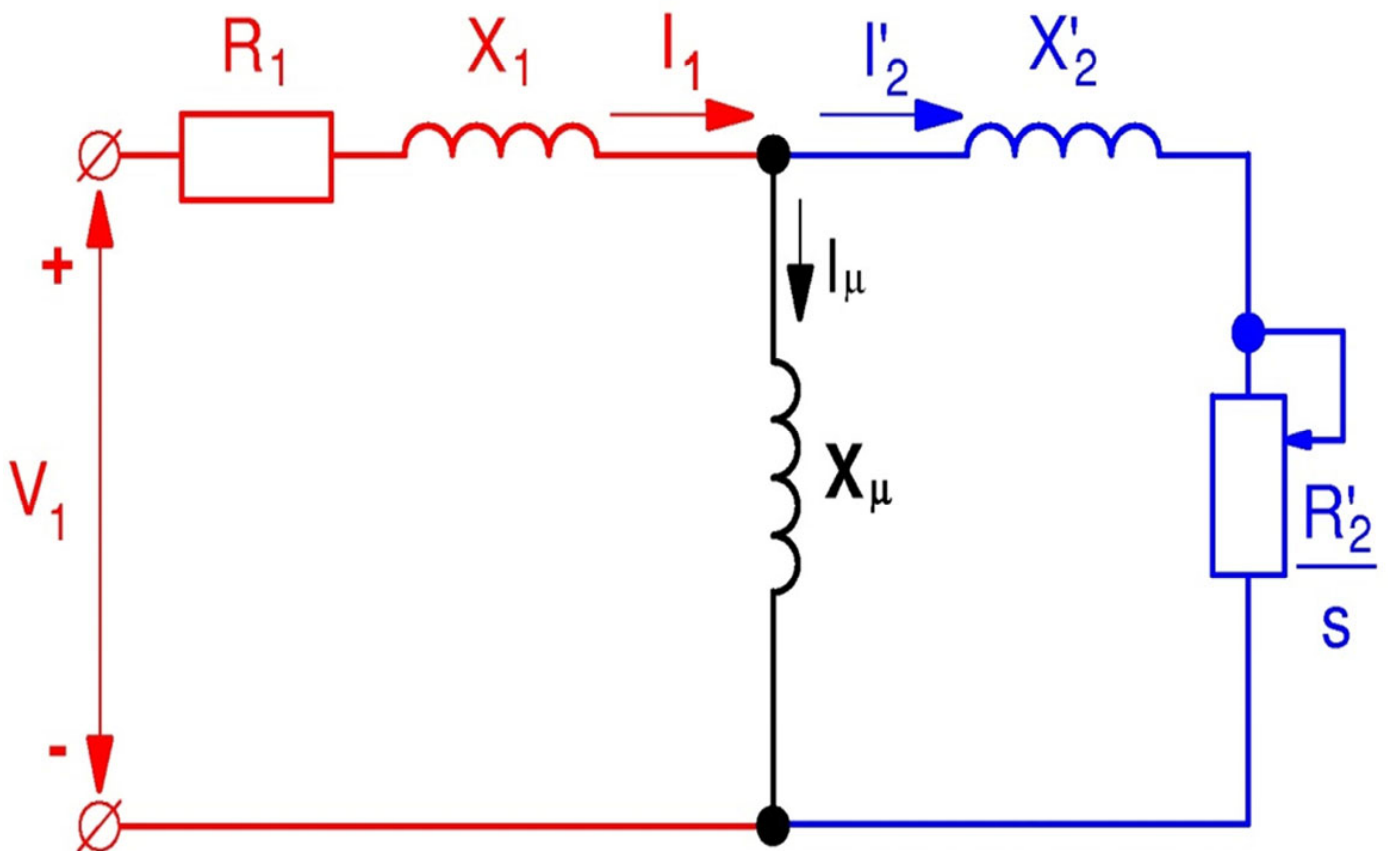


*Circuito equivalente aproximado*

## CIRCUITOS EQUIVALENTES SIMPLIFICADOS

### **CIRCUITO EQUIVALENTE EXACTO SIN $R_{Fe}$**

En una máquina asíncrona  $I_{\mu} \gg I_{Fe}$  por lo que no se cometerá mucho error en el cálculo de la corriente  $I'_2$  si se desprecia  $I_{Fe}$  frente a  $I_{\mu}$  y se parte de un circuito equivalente en el que se ha quitado la resistencia  $R_{Fe}$  al circuito equivalente exacto:



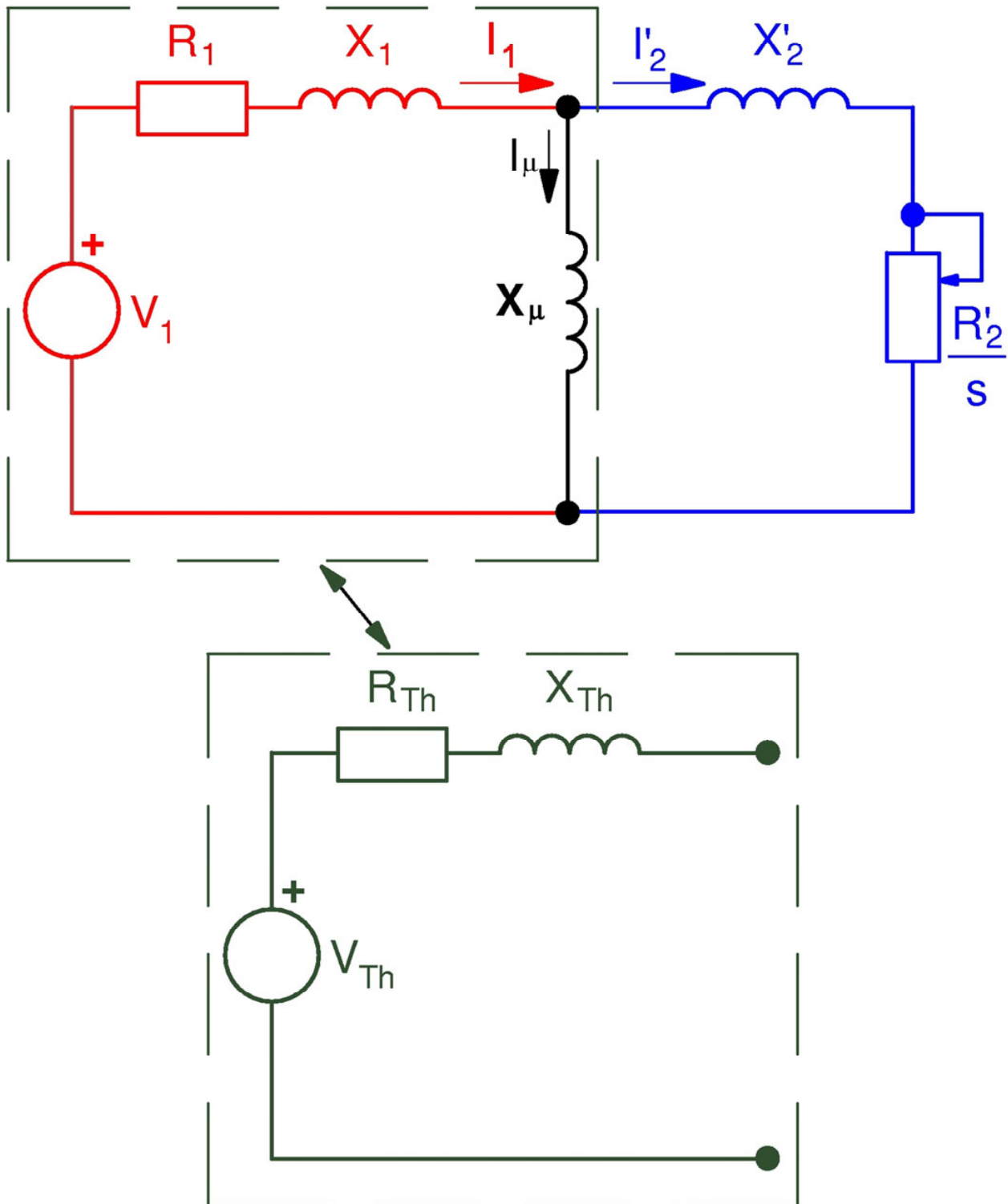
*Circuito equivalente en el que se ha suprimido la resistencia  $R_{Fe}$  al circuito equivalente exacto*

En este circuito se ha reunido en la resistencia  $R'_2/s$  al conjunto de  $R'_2$  y  $R'_c$ :

$$R'_2 + R'_c = R'_2 + R'_2 \left( \frac{1}{s} - 1 \right) = \frac{R'_2}{s}$$

# CIRCUITOS EQUIVALENTES SIMPLIFICADOS

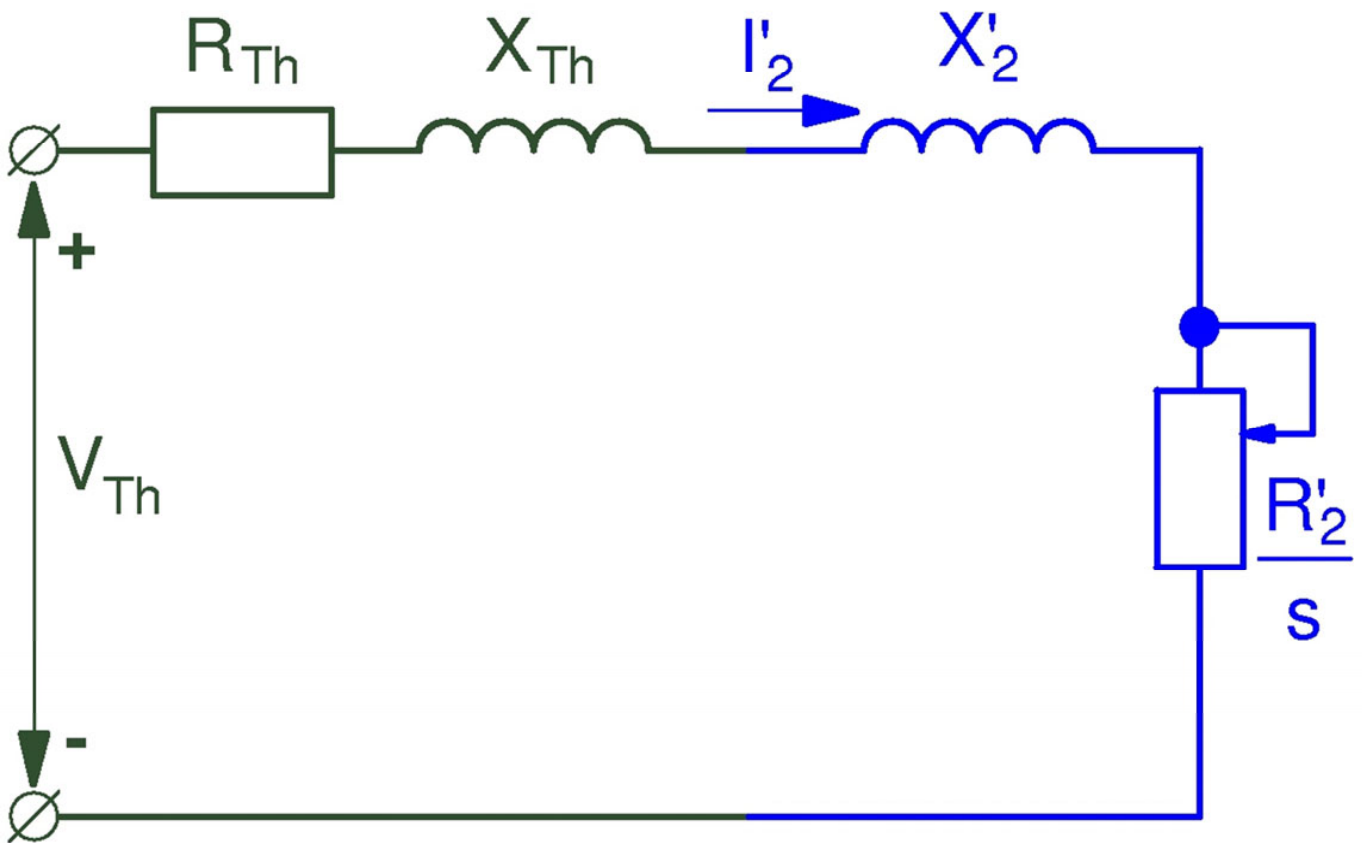
## CIRCUITO EQUIVALENTE SERIE (1)



Mediante el equivalente de Thevenin del conjunto de la impedancia estator y de la reactancia magnetizante se obtiene un circuito equivalente simplificado con una sola rama con resistencias y reactancias en serie.

## CIRCUITOS EQUIVALENTES SIMPLIFICADOS

### CIRCUITO EQUIVALENTE SERIE (2)



Llamaremos  $c_1$  a:

$$c_1 = 1 + \frac{X_1}{X_\mu}$$

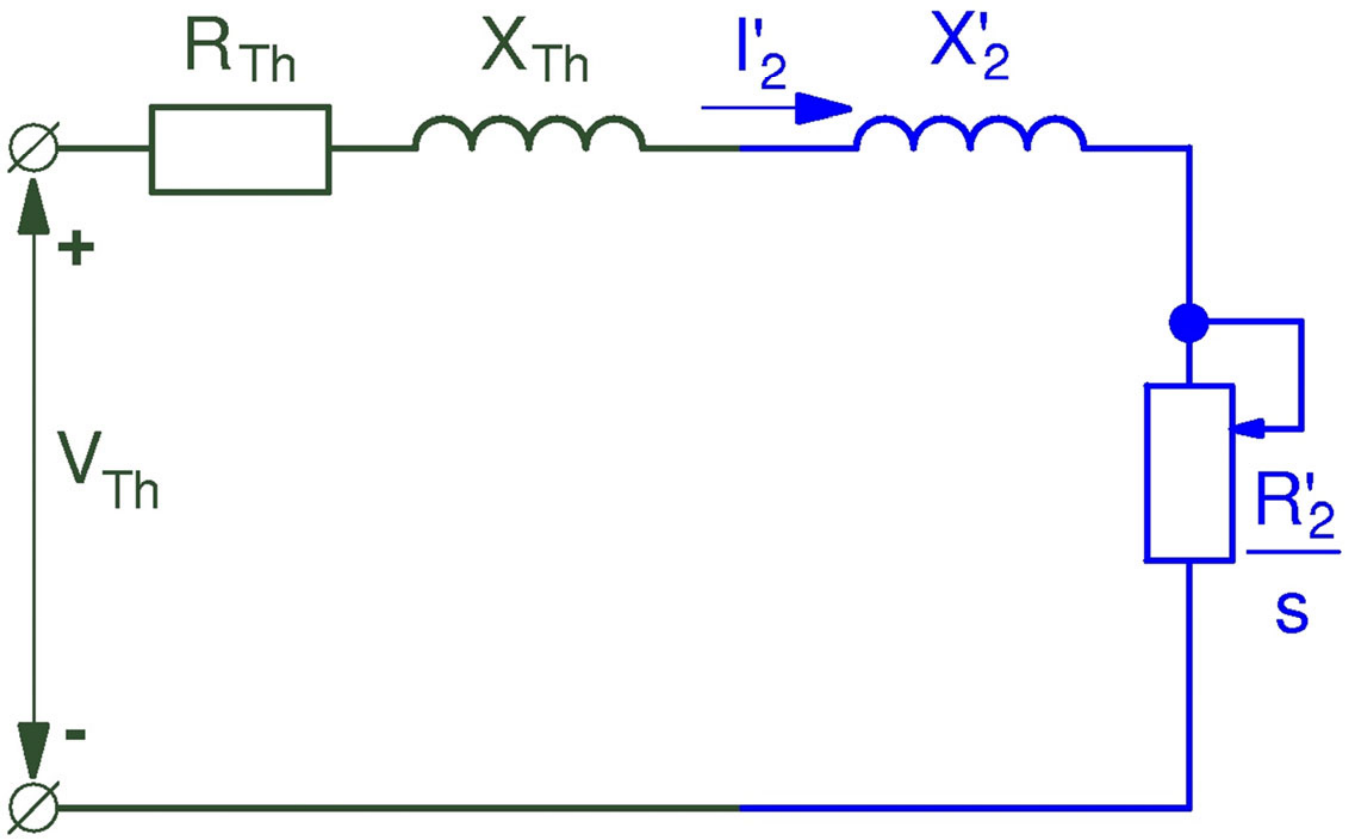
### Tensión de Thevenin

$$\bar{V}_{Th} = \bar{V}_1 \frac{j X_\mu}{(R_1 + j X_1) + j X_\mu} \approx \bar{V}_1 \frac{j X_\mu}{j (X_1 + X_\mu)}$$

$$\bar{V}_{Th} \approx \bar{V}_1 \frac{X_\mu}{(X_1 + X_\mu)} \rightarrow \boxed{\bar{V}_{Th} = \frac{\bar{V}_1}{c_1}}$$

## CIRCUITOS EQUIVALENTES SIMPLIFICADOS

### CIRCUITO EQUIVALENTE SERIE (3)



$$c_1 = 1 + \frac{X_1}{X_\mu} \quad \bar{Z}_1 = R_1 + jX_1$$

### Impedancia de Thevenin

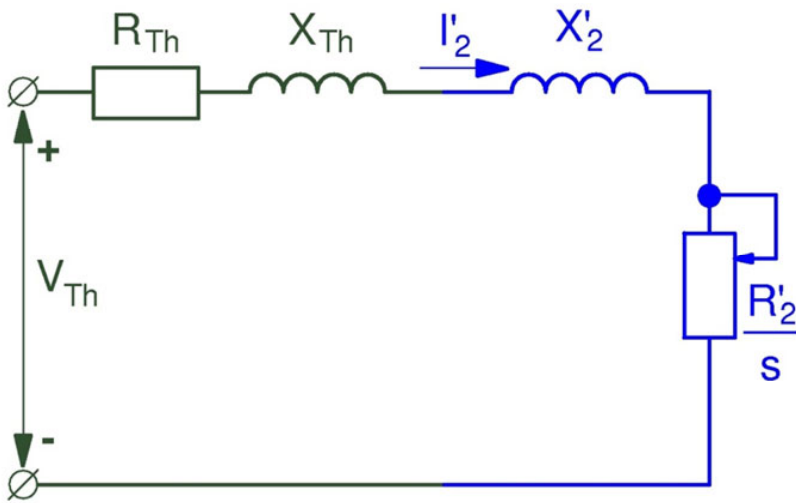
$$\frac{1}{\bar{Z}_{Th}} = \frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{jX_\mu} \rightarrow \bar{Z}_{Th} = \frac{jX_\mu (R_1 + jX_1)}{R_1 + j(X_1 + X_\mu)}$$

$$\bar{Z}_{Th} \approx \frac{jX_\mu (R_1 + jX_1)}{j(X_1 + X_\mu)} \rightarrow \boxed{\bar{Z}_{Th} = \frac{\bar{Z}_1}{c_1}}$$

$$R_{Th} = \frac{R_1}{c_1} \quad X_{Th} = \frac{X_1}{c_1}$$

## CIRCUITOS EQUIVALENTES SIMPLIFICADOS

### CIRCUITO EQUIVALENTE SERIE (4)



$$c_1 = 1 + \frac{X_1}{X_\mu}$$

$$\bar{V}_{Th} = \frac{\bar{V}_1}{c_1}$$

$$R_{Th} = \frac{R_1}{c_1}; \quad X_{Th} = \frac{X_1}{c_1}$$

En este circuito equivalente el valor eficaz  $I'_2$  de la **corriente del rotor** reducida al estator se calcula de una manera más exacta que mediante el circuito aproximado:

$$(I'_2)^2 = \frac{V_{Th}^2}{\left(R_{Th} + \frac{R'_2}{s}\right)^2 + (X_{Th} + X'_2)^2}$$

$$(I'_2)^2 = \frac{\left(\frac{V_1}{c_1}\right)^2}{\left(\frac{R_1}{c_1} + \frac{R'_2}{s}\right)^2 + \left(\frac{X_1}{c_1} + X'_2\right)^2}$$

$$(I'_2)^2 = \frac{V_1^2}{\left(R_1 + c_1 \frac{R'_2}{s}\right)^2 + (X_1 + c_1 X'_2)^2}$$



# **CIRCUITOS EQUIVALENTES SIMPLIFICADOS**

## **CIRCUITO EQUIVALENTE SERIE (5)**

### **Fórmulas del par mejoradas**

Usando el valor de  $I'_2$  obtenido del circuito equivalente serie:

$$c_1 = 1 + \frac{X_1}{X_\mu} \quad (m_1 = 3 \text{ fases})$$

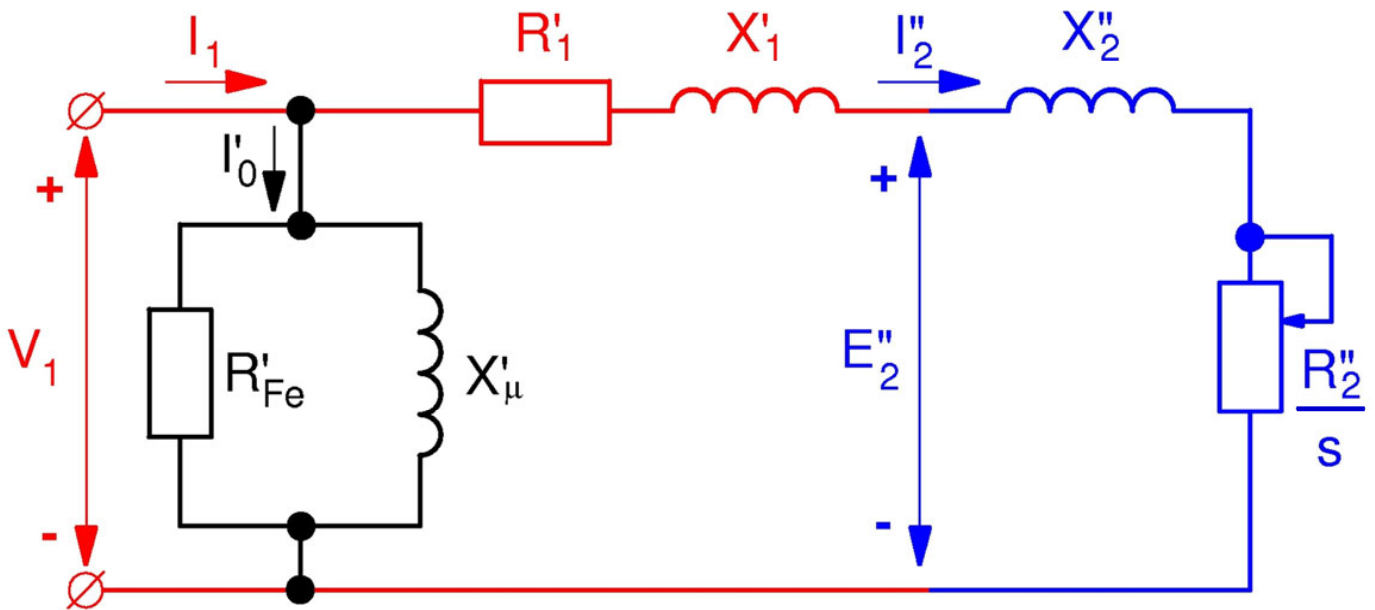
$$M = \frac{m_1 \frac{R'_2}{s}}{\frac{2\pi}{60} n_1} \frac{\left(\frac{V_1}{c_1}\right)^2}{\left(\frac{R_1}{c_1} + \frac{R'_2}{s}\right)^2 + \left(\frac{X_1}{c_1} + X'_2\right)^2}$$

$$M = \frac{m_1 \frac{R'_2}{s}}{\frac{2\pi}{60} n_1} \frac{V_1^2}{\left(R_1 + c_1 \frac{R'_2}{s}\right)^2 + (X_1 + c_1 X'_2)^2}$$

Por consiguiente, si se quiere mejorar la precisión en las ecuaciones del par obtenidas mediante el circuito equivalente aproximado hay que corregir las magnitudes  $V_1$ ,  $R_1$  y  $X_1$  dividiéndolas por  $c_1$ . O bien, hay que corregir los parámetros  $R'_2$  y  $X'_2$  sólo en el denominador de esta expresión multiplicándolos por  $c_1$ .

## CIRCUITOS EQUIVALENTES SIMPLIFICADOS

### CIRCUITO EQUIVALENTE EN L (1)



$$c_1 = \frac{X_1}{X_\mu} + 1 = \frac{X_1 + X_\mu}{X_\mu}$$

$$R'_{Fe} = c_1 R_{Fe}$$

$$X'_{\mu} = c_1 X_{\mu}$$

$$\bar{I}''_2 = \frac{\bar{I}'_2}{c_1}$$

$$R'_1 = c_1 R_1$$

$$X'_1 = c_1 X_1$$

$$\bar{E}''_2 = c_1 \bar{E}'_2$$

$$R''_2 = c_1^2 R'_2$$

$$X''_2 = c_1^2 X'_2$$

$$\bar{I}'_0 = \frac{\bar{V}_1}{R'_{Fe} + jX'_{\mu}} = \frac{\bar{V}_1}{c_1 (R_{Fe} + jX_{\mu})}$$

$$\bar{I}'_0 = \frac{X_{\mu}}{X_1 + X_{\mu}} \frac{\bar{V}_1}{(R_{Fe} + jX_{\mu})} \rightarrow \boxed{\bar{I}'_0 \approx \frac{\bar{V}_1}{j(X_1 + X_{\mu})}}$$

$\bar{I}'_0$  es igual a la corriente consumida en la marcha en vacío

# CIRCUITOS EQUIVALENTES SIMPLIFICADOS

## CIRCUITO EQUIVALENTE EN L (2)

### Corriente del rotor

$$(I''_2)^2 = \frac{V_1^2}{\left(R'_1 + \frac{R''_2}{s}\right)^2 + (X'_1 + X''_2)^2}$$

$$(I''_2)^2 = \frac{V_1^2}{\left(c_1 R_1 + c_1^2 \frac{R'_2}{s}\right)^2 + \left(c_1 X_1 + c_1^2 X'_2\right)^2}$$

$$(I''_2)^2 = \frac{1}{c_1^2} \left[ \frac{V_1^2}{\left(R_1 + c_1 \frac{R'_2}{s}\right)^2 + (X_1 + c_1 X'_2)^2} \right] = \left(\frac{I'_2}{c_1}\right)^2$$

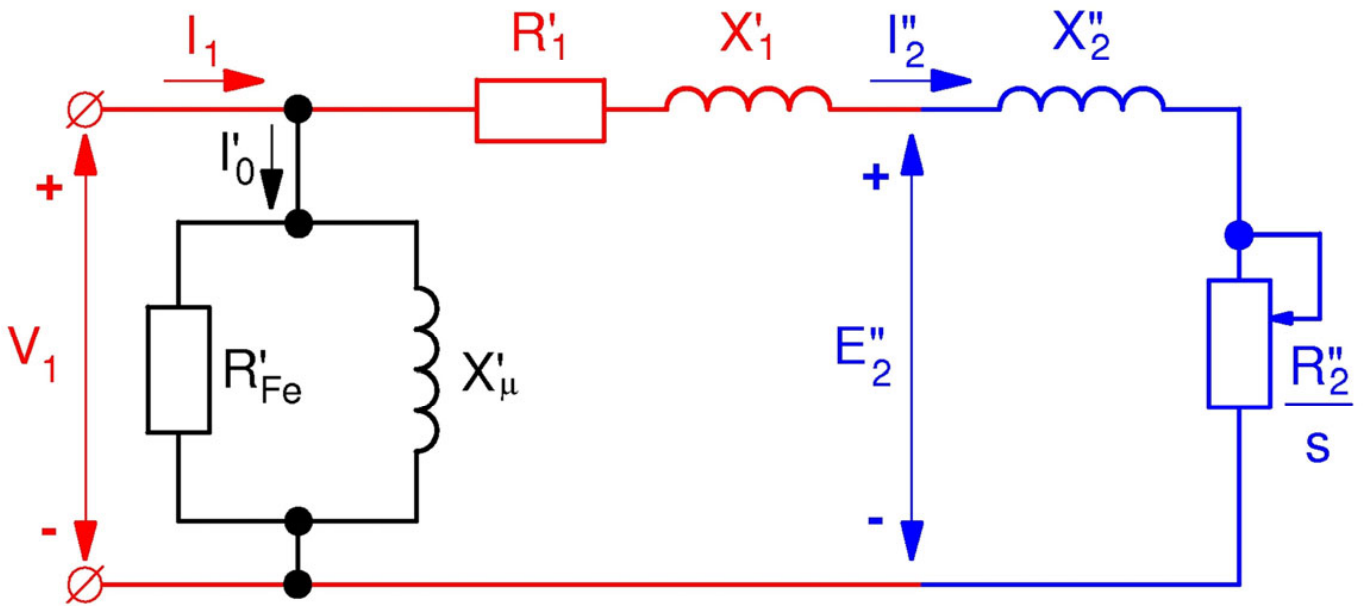
$$I''_2 = \frac{I'_2}{c_1} \rightarrow \boxed{\bar{I}''_2 = \frac{\bar{I}'_2}{c_1}}$$

### F.e.m. del rotor

$$\bar{E}''_2 = \bar{I}''_2 (R''_2 + jX''_2) = \frac{\bar{I}'_2}{c_1} (c_1^2 R_2 + j c_1^2 X'_2)$$

$$\bar{E}''_2 = c_1 [\bar{I}'_2 (R'_2 + jX'_2)] \rightarrow \boxed{\bar{E}''_2 = c_1 \bar{E}'_2}$$

## CIRCUITOS EQUIVALENTES SIMPLIFICADOS CIRCUITO EQUIVALENTE EN L (3)



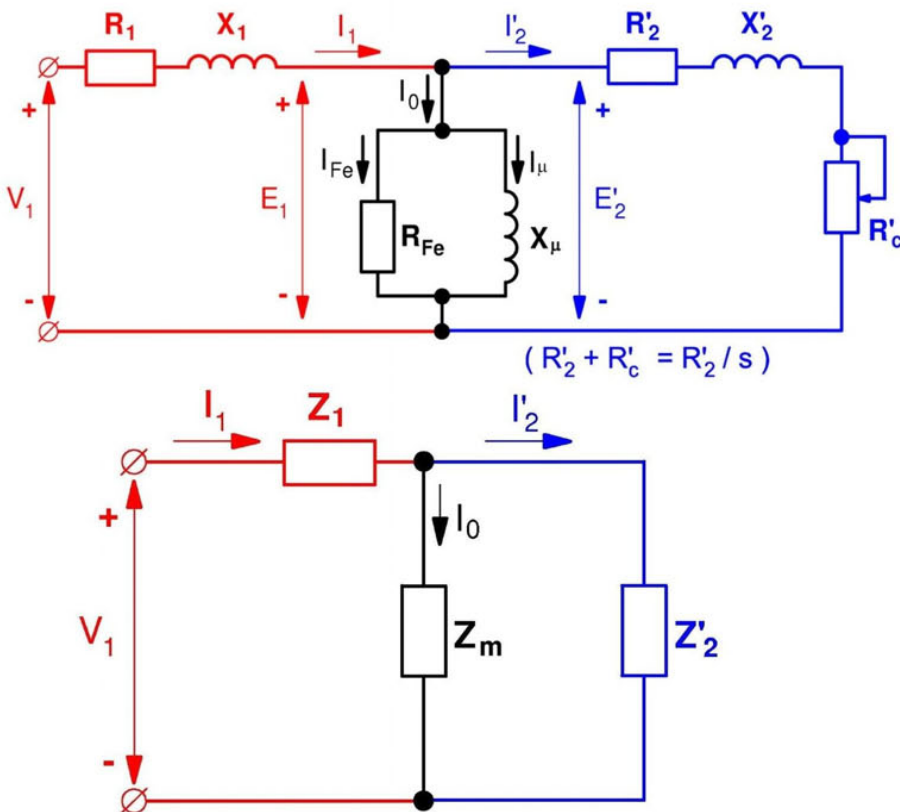
$$\begin{array}{lll}
 R'_{Fe} = c_1 R_{Fe} & X'_{\mu} = c_1 X_{\mu} & c_1 = 1 + (X_1/X_{\mu}) \\
 R'_1 = c_1 R_1 & X'_1 = c_1 X_1 & \bar{I}''_2 = \frac{\bar{I}'_2}{c_1} \\
 R''_2 = c_1^2 R'_2 & X''_2 = c_1^2 X'_2 & \bar{E}''_2 = c_1 E'_2
 \end{array}$$

Este circuito equivalente tiene la ventaja de que se alimenta con la verdadera tensión del primario  $V_1$  y que consume la verdadera corriente del primario  $I_1$ . Además, las potencias consumidas en su rotor son iguales a las potencias consumidas en el rotor del circuito equivalente exacto. Así, por ejemplo, pasa esto con las pérdidas en el cobre del rotor:

$$P''_{Cu2} = m_1 R''_2 I''_2{}^2 = m_1 (c_1^2 R'_2) \left( \frac{I'_2}{c_1} \right)^2 = m_1 R'_2 I'^2_2$$

$$\underline{P''_{Cu2} = P_{Cu2}}$$

**CIRCUITOS EQUIVALENTES SIMPLIFICADOS EXACTOS (1)**  
**CIRCUITO EQUIVALENTE EXACTO**



$$\bar{Z}_1 = R_1 + jX_1$$

$$\bar{Z}'_2 = \frac{R'_2}{s} + jX'_2$$

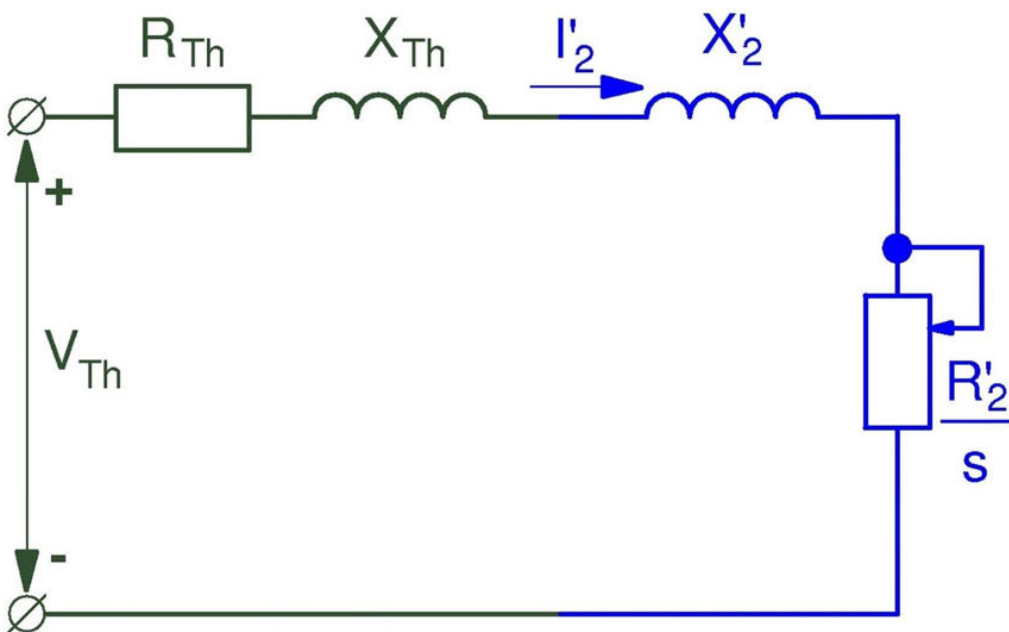
$$\frac{1}{\bar{Z}_m} = \frac{1}{R_{Fe}} + \frac{1}{jX_\mu}$$

$$\bar{Z}_m = R_m + jX_m = \frac{jR_{Fe}X_\mu}{R_{Fe} + jX_\mu}$$

$$\bar{c}_1 = 1 + \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_m} = \frac{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_m}{\bar{Z}_m}$$

**CIRCUITOS EQUIVALENTES SIMPLIFICADOS EXACTOS (2)**  
**CIRCUITO EQUIVALENTE SERIE**

Ahora ya no despreciamos  $R_1$  frente a  $X_1$  ni  $I_{Fe}$  frente a  $I_\mu$ . Se obtiene el mismo valor de la potencia en el entrehierro  $P_a$  y del par  $M$  que en el circuito exacto.



$$\bar{V}_{Th} = \frac{\bar{E}_1}{\bar{c}_1}$$

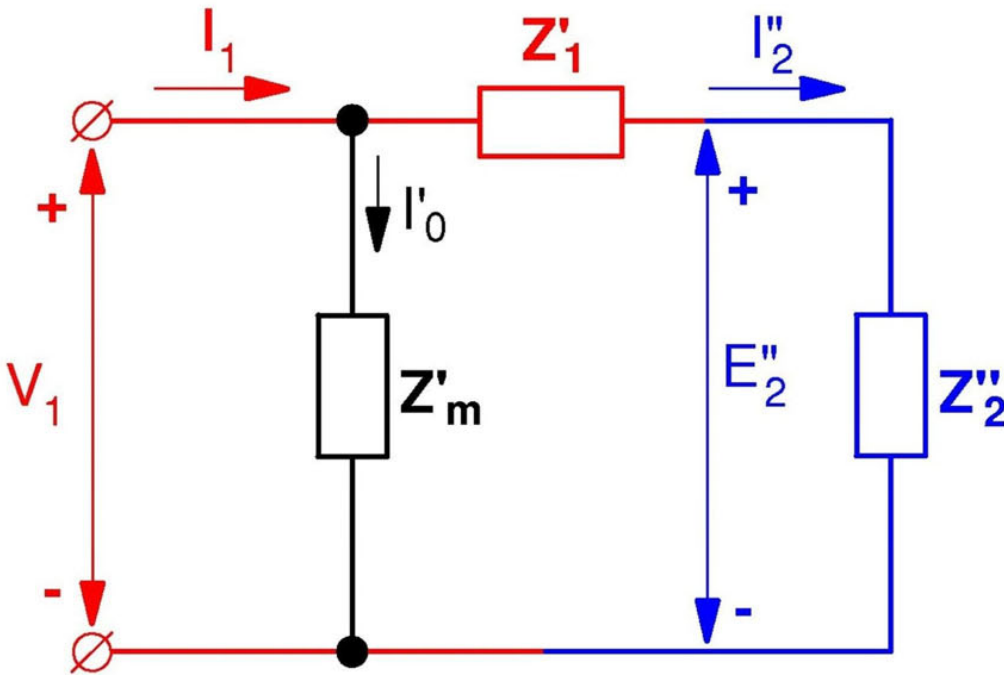
$$\bar{Z}_{Th} = R_{Th} + jX_{Th}$$

$$\bar{Z}_{Th} = \frac{\bar{Z}_1}{\bar{c}_1}$$

$$\bar{c}_1 = 1 + \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_m}$$

## CIRCUITOS EQUIVALENTES SIMPLIFICADOS EXACTOS (3)

### CIRCUITO EQUIVALENTE EN L



$$\bar{Z}'_1 = \bar{c}_1 \cdot \bar{Z}_1$$

$$\bar{Z}'_m = \bar{c}_1 \cdot \bar{Z}_m$$

$$\bar{Z}''_2 = (\bar{c}_1)^2 \cdot \bar{Z}'_2$$

$$\bar{I}''_2 = \frac{\bar{I}'_2}{\bar{c}_1}$$

$$\bar{E}''_2 = \bar{c}_1 \cdot \bar{E}'_2$$

$$\bar{c}_1 = 1 + \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_m}$$

## CIRCUITOS EQUIVALENTES SIMPLIFICADOS EXACTOS (4)

### Equivalente serie

Si  $c_1 = |\bar{c}_1|$  ahora sucede que:

$$V_{Th} = |\bar{V}_{Th}| = \frac{V_1}{c_1}$$

$$R_{Th} = \text{Re} \{ \bar{Z}_{Th} \} \neq \frac{R_1}{c_1}$$

$$X_{Th} = \text{Im} \{ \bar{Z}_{Th} \} \neq \frac{X_1}{c_1}$$

$$M = \frac{m_1 \frac{R'_2}{s}}{2\pi n_1} \frac{V_{Th}^2}{\left( R_{Th} + \frac{R'_2}{s} \right)^2 + (X_{Th} + X'_2)^2}$$

$$M = \frac{m_1 \frac{R''_2}{s}}{2\pi n_1} \frac{V_1^2}{\left( R'_1 + \frac{R''_2}{s} \right)^2 + (X'_1 + X''_2)^2}$$

### Equivalente en L

$$R'_1 = \text{Re} \{ \bar{Z}'_1 \} \neq c_1 \cdot R_1$$

$$X'_1 = \text{Im} \{ \bar{Z}'_1 \} \neq c_1 \cdot X_1$$

( $\text{Re}$  = Parte real;  $\text{Im}$  = Parte imaginaria)

$$R'_m = \text{Re} \{ \bar{Z}'_m \} \neq c_1 \cdot R_m \neq c_1 \cdot R_{Fe}$$

$$X'_m = \text{Im} \{ \bar{Z}'_m \} \neq c_1 \cdot X_m \neq c_1 \cdot X_\mu$$

$$\frac{R''_2}{s} = \text{Re} \{ \bar{Z}''_2 \} \Rightarrow R''_2 \neq c_1^2 \cdot R'_2$$

$$X''_2 = \text{Im} \{ \bar{Z}''_2 \} \neq c_1^2 \cdot X'_2$$

$R''_2$  y  $X''_2$  ahora son funciones de  $s$

$$I''_2 = |\bar{I}''_2| = \frac{I'_2}{c_1}$$

$$E''_2 = |\bar{E}''_2| = c_1 \cdot E'_2$$

**EFFECTOS DE LA ALIMENTACIÓN DESEQUILIBRADA  
EN UNA MÁQUINA ASÍNCRONA  
(COMPONENTES SIMÉTRICAS)**

**Miguel Ángel Rodríguez Pozueta**

Un sistema trifásico de tensiones o de intensidades es equilibrado si las tensiones o intensidades de las tres fases tienen el mismo valor eficaz y el desfase temporal entre dos de ellas es de  $120^\circ$ . Si no se cumple alguna de estas condiciones el sistema es desequilibrado. Las tres tensiones o intensidades de un sistema equilibrado suman siempre cero.

Los efectos de los desequilibrios en las tensiones de alimentación de las fases del estator se estudian mediante el método de las componentes simétricas.

El método de las componentes simétricas indica que un sistema trifásico de tensiones o de intensidades desequilibrado es equivalente a la suma de tres sistemas:

- Un sistema equilibrado de secuencia directa o positiva que tiene la misma secuencia de fases que el sistema trifásico desequilibrado de partida.
- Un sistema equilibrado de secuencia inversa o negativa cuya secuencia de fases es opuesta a la del sistema desequilibrado de partida.
- Un sistema desequilibrado homopolar o de secuencia cero. En él las tensiones o las intensidades de las tres fases están en fase y, por lo tanto, estas tres tensiones o intensidades son iguales, tanto en módulo como en argumento.

Es fácil comprobar, entonces, que la suma de las tres tensiones o intensidades del sistema homopolar no es igual a cero. En consecuencia, si las tres tensiones o intensidades del sistema desequilibrado original suman cero, su correspondiente sistema homopolar es nulo (carecen de sistema homopolar).

Dado que un motor se comporta como un conjunto equilibrado de impedancias, sólo pueden aparecer desequilibrios entre las corrientes de las fases del estator si existen desequilibrios en las tensiones. Por lo tanto, la componente de secuencia directa de las corrientes es debida sólo a la componente de secuencia directa de las tensiones. Análogamente, la componente de secuencia inversa de las corrientes sólo es debida a la componente de secuencia inversa de las tensiones y la componente homopolar de las corrientes sólo sería debida a la componente homopolar de las tensiones.

Ahora bien, en un motor asíncrono sólo se usan las conexiones estrella con neutro aislado y triángulo para conectar las fases del estator. La conexión estrella con el neutro unido a la red no se utiliza en estas máquinas. De esto se deduce que en estas máquinas no existen corrientes homopolares en el estator.

En efecto, la conexión estrella con el neutro aislado no permite la circulación de corriente por el neutro, lo que obliga a que las tres corrientes de fase sumen cero en todo momento y, consecuentemente, no exista la componente homopolar de las corrientes. Por otra parte, la conexión triángulo obliga a que las tres tensiones de fase sumen cero en todo momento, lo que obliga a que la componente homopolar de las tensiones de fase sea siempre nula. Como la componente homopolar de las corrientes sólo puede ser debida a la componente homopolar de las tensiones, se deduce que en la conexión triángulo tampoco existe la componente homopolar de las corrientes.

El comportamiento de una máquina asíncrona frente a las corrientes de secuencia directa es similar a lo estudiado hasta ahora y el motor se puede analizar mediante su circuito equivalente con una resistencia de carga  $R'_{c+}$ :

$$R'_{c+} = R'_2 \left( \frac{1}{s_+} - 1 \right) \quad (1)$$

donde

$$s_+ = \frac{n_1 - n}{n_1} \quad (2)$$

Las corrientes de secuencia inversa generan un campo giratorio cuya velocidad vale  $-n_1$ , pues rota en sentido opuesto al campo giratorio directo. Luego, el comportamiento del motor con corrientes de secuencia inversa puede estudiarse mediante su circuito equivalente con una resistencia de carga  $R'_{c-}$ :

$$R'_{c-} = R'_2 \left( \frac{1}{s_-} - 1 \right) \quad (3)$$

donde

$$s_- = \frac{(-n_1) - n}{(-n_1)} = 2 - s_+ \quad (4)$$

(Realmente, si se trata de una máquina de doble jaula o de ranura profunda los valores de  $R'_2$  en las expresiones (1) y (3) serían diferentes porque la frecuencia  $f_2$  de las corrientes del rotor es diferente para las corrientes de secuencia directa que para las de secuencia inversa. Aquí no tendremos en cuenta estas variaciones de  $R'_2$ ).

Si, como es normal, el efecto de las corrientes de secuencia directa es predominante, el deslizamiento  $s_+$  es pequeño y estas tensiones ejercen un par motor (positivo)  $M_+$ . Sin embargo, el deslizamiento  $s_-$  será grande (de un valor próximo 2) y el efecto de las corrientes de secuencia inversa será el crear un par de frenado (negativo) a contracorriente cuyo valor es  $M_-$ . El par total se obtendrá mediante la suma

$$M = M_+ + M_- \quad (5)$$

Dado que  $s_+$  es mucho más pequeño que  $s_-$  ( $s_+ \lll s_-$ ) la impedancia total que presenta el circuito equivalente para las componentes de secuencia inversa  $Z_-$  es menor que para las de secuencia directa  $Z_+$ . Por ello, un pequeño desequilibrio en las tensiones origina un desequilibrio mayor en las corrientes (pequeñas  $V_-$  originan grandes  $I_-$  porque  $Z_-$  es pequeño).

Además de producir el par de frenado  $M_-$ , la componente inversa de las corrientes provoca unas pérdidas en el cobre adicionales.



**PARES ADICIONALES DEBIDOS A LOS ARMÓNICOS TEMPORALES EN LAS  
CORRIENTES DE ALIMENTACIÓN DE UNA MÁQUINA ASÍNCRONA TRIFÁSICA**

**Miguel Angel Rodríguez Pozueta**

Supongamos que un motor asíncrono trifásico tiene unos devanados de estator y rotor que generan campos magnéticos en el entrehierro distribuidos de manera perfectamente sinusoidal. Esto significa que en esta máquina no existen armónicos en el espacio del campo magnético.

Si este motor se alimenta con tensiones no perfectamente sinusoidales, por cada fase de la máquina circulará una corriente con armónicos en el tiempo así:

$$i = \sum_{h'} \sqrt{2} I_{h'} \cos(\omega_{h'} t + \gamma_{h'})$$

( $h'$  = número impar;  $\omega_{h'} = 2 \pi f_{h'}$ )

$$f_{h'} = h' f_1 \quad (0)$$

Estos armónicos temporales de la corriente originarán un campo magnético así:

- Los armónicos temporales de corriente de orden  $h' = 3k$  ( $k$  = número entero) generan un campo magnético total nulo y no dan par.

De hecho, como estos armónicos forman un sistema homopolar y en las máquinas de inducción no se utiliza la conexión estrella con el neutro unido a la red (se utilizan las conexiones triángulo o estrella con el neutro aislado), normalmente ni siquiera existirán estos armónicos de corriente.

- Los demás armónicos temporales de corriente generan campos magnéticos giratorios, todos ellos de igual número de polos ( $2p$ ) pero de velocidades distintas  $\Omega_{h'}$  que verifican que

$$|\Omega_{h'}| = \frac{2 \pi f_{h'}}{p} = h' \frac{2 \pi f_1}{p} = h' \cdot \Omega_1$$
$$\Omega_{h'} = \pm h' \cdot \Omega_1 \quad (n_{h'} = \pm h' \cdot n_1) \quad (1)$$

donde  $\Omega_1$  (o  $n_1$ , si se mide en r.p.m.) es la velocidad de giro del armónico fundamental (velocidad de sincronismo).

Los armónicos temporales de corriente de orden  $h' = 6k + 1$  ( $h' = 1, 7, 13, \dots$ ) originan campos magnéticos que giran en el mismo sentido que el armónico fundamental (o primer armónico ( $h' = 1$ )) y para ellos se pondrá el signo + en la relación (1).

Los armónicos temporales de corriente de orden  $h' = 6k - 1$  ( $h' = 5, 11, 17, \dots$ ) originan campos magnéticos que giran en sentido contrario al armónico fundamental y para ellos se pondrá el signo - en la relación (1).

Los sentidos de giro de estos campos magnéticos son lógicos, pues los armónicos de corriente de orden  $h' = 6k + 1$  forman un sistema trifásico directo y los armónicos de corriente de orden  $h' = 6k - 1$  constituyen un sistema trifásico inverso.

El par total de la máquina será la suma de los originados por cada campo giratorio actuando individualmente más los pares debidos a la interacción de cada uno de estos campos magnéticos con los demás.

Dado que todos estos campos magnéticos armónicos son de igual número de polos (2p), no se puede considerar a priori que las interacciones mutuas entre ellos son nulas y no producen pares.

Lo que sucede es que las velocidades de giro de estos campos magnéticos armónicos son diferentes y, en consecuencia, el ángulo que forman entre sí en el espacio va ir variando en el tiempo entre 0 y  $2\pi$  radianes eléctricos. Es decir, en unos instantes la interacción entre dos de estos campos da lugar a un par de sentido positivo y en otros origina un par negativo. El par medio resultante es, pues, nulo.

Por lo tanto, las interacciones entre estos campos giratorios provocan unas pequeñas oscilaciones del par que dan lugar a un par medio nulo (y a vibraciones en la máquina). Así pues, el par medio total de la máquina M es la suma de los pares  $M_{h'}$  producidos actuando cada armónico por separado; esto es, se puede aplicar el principio de superposición a los pares cuando se trata de calcular el par medio:

$$M = \sum_{h'=1}^{\infty} M_{h'} \quad (2)$$

Cada uno de estos campos magnéticos armónicos actúa individualmente de igual manera que el fundamental, dando lugar a una curva de par similar a la del fundamental, pero con una velocidad de sincronismo diferente dada por la relación (1). En la Fig. 1 se muestra las curvas de par para los armónicos fundamental, 5º y 7º. En ella se muestra la velocidad de sincronismo de cada campo y los pares debidos a cada armónico cuando la máquina gira a la velocidad asignada. Las escalas horizontal (de velocidad) y vertical (de par) se han tomado diferentes para cada armónico (las tres curvas no están a la misma escala).

Si la máquina está girando a una velocidad  $\Omega$ , el deslizamiento para el armónico  $h'$  vale

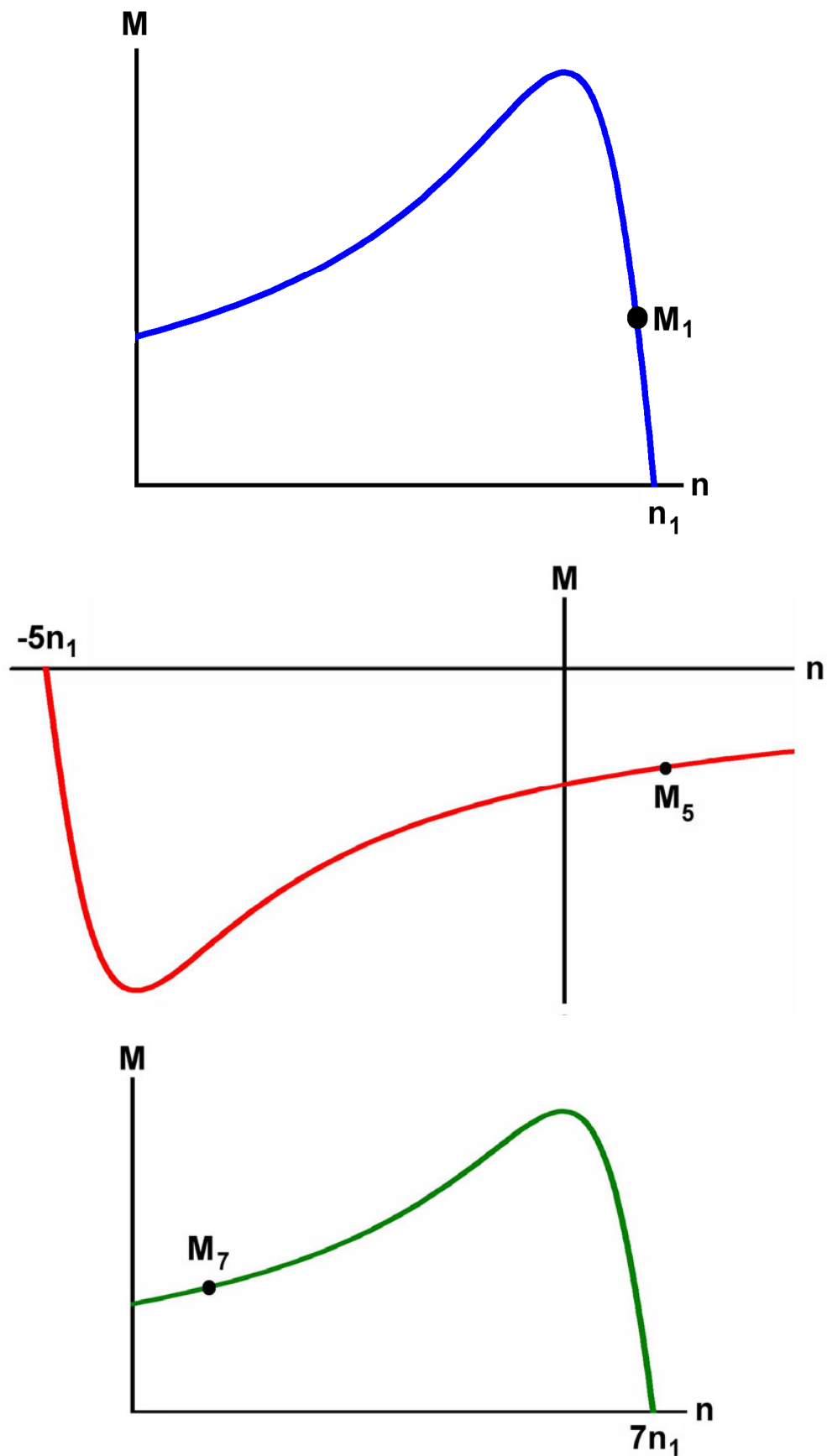
$$s_{h'} = \frac{\Omega_{h'} - \Omega}{\Omega_{h'}} = 1 - \frac{\Omega}{\Omega_{h'}} = 1 - \frac{\Omega}{\pm h' \cdot \Omega_1} \quad (3)$$

Para el armónico fundamental el deslizamiento vale

$$s = 1 - \frac{\Omega}{\Omega_1} \quad (4)$$

Luego:

$$\frac{1-s}{1-s_{h'}} = \frac{\frac{\Omega}{\Omega_1}}{\frac{\Omega}{\pm h' \cdot \Omega_1}} = \pm h'$$



*Fig. 1: Curvas de par para varios armónicos del campo magnético actuando aisladamente*

$$s_{h'} = 1 - \left( \frac{1 - s}{\pm h'} \right) \quad (5)$$

Si la máquina actúa como motor, el deslizamiento  $s$  para el armónico fundamental toma valores comprendidos entre 0 y 1. En consecuencia, el deslizamiento  $s_{h'}$  para otro armónico distinto del fundamental toma valores próximos a la unidad ( $s_{h'} \approx 1$ ). Esto se cumple más exactamente a medida que aumenta el orden  $h'$  del armónico.

Por lo tanto, el par producido por cada armónico de corriente es de un valor próximo al que produce en el arranque (donde el deslizamiento vale 1).

De la relación (5) y de la figura 1 se deduce que:

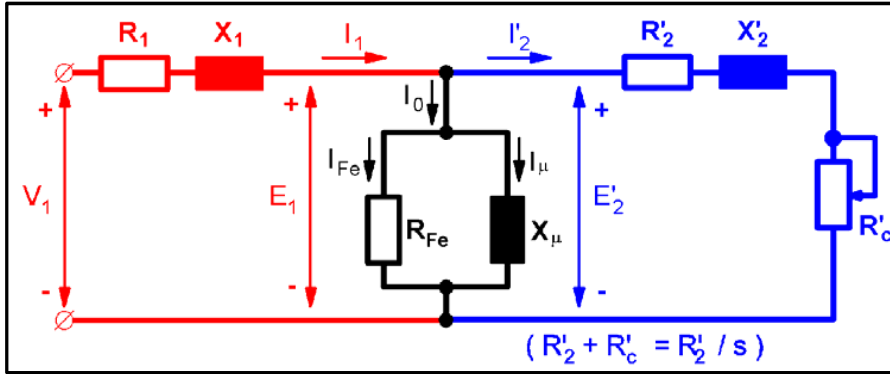
- Los armónicos temporales de corriente de orden  $h' = 6k - 1$  trabajan con deslizamientos ligeramente superiores a 1. Luego, ejercen un efecto de frenado a contracorriente y dan pares negativos (de signo contrario al par producido por el armónico fundamental).
- Los armónicos temporales de corriente de orden  $h' = 6k + 1$  trabajan con deslizamientos ligeramente inferiores a 1. Es decir, funcionan en la zona de motor. Por lo tanto dan pares positivos.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] ALGER, P. L. 1970. *Induction machines. Their behavior and uses*. 2ª edición. New York: Gordon and Breach Science Publishers.
- [2] BOLDEA, I. y NASAR, S. A. 2010. *The Induction Machine Design Handbook*. New York: CRC Press.
- [3] CORRALES MARTÍN, J. 1982. *Cálculo industrial de máquinas eléctricas. Tomo II: Método de cálculo*. Barcelona: Marcombo Boixareu Editores.
- [4] CORTES CHERTA. 1994. *Curso moderno de máquinas eléctricas rotativas. Tomo III: Máquinas de corriente alterna asíncronas*. Barcelona. Editores Técnicos Asociados.
- [5] DESHPANDE, M.V. *Design and testing of electrical machines*. New Delhi (India). PHI Learning Private Limited. 2010.
- [6] HAMDÍ, E.S. *Design of small electrical machines*. New York. John Wiley & Sons.
- [7] IVANOV-SMOLENSKI. 1984. *Máquinas eléctricas. Tomo 1*. Moscú: Editorial Mir.
- [8] KOSTENKO y PIOTROVSKI. 1979. *Máquinas eléctricas. Tomo II*. Moscú: Editorial Mir.
- [9] PYRHÖNEN, JUHA y otros. 2010. *Design of rotating electrical machines*. West Sussex (Inglaterra): John Wiley & Sons Ltd.
- [10] SANZ FEITO. 2002. *Máquinas eléctricas*. Madrid: Pearson Educación.
- [11] UPADHYAY, K. G. 2008. *Design of electrical machines*. New Delhi (India): New Age International Publishers.

# FUNCIONAMIENTO CON TENSION FLUJO O CORRIENTE CONSTANTE. FUNCIONAMIENTO CON DESLIZAMIENTOS PEQUEÑOS

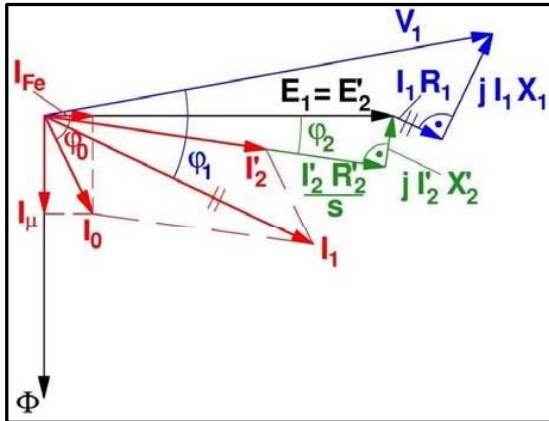
## Ecuaciones básicas



$$M = \frac{P_a}{\Omega_1} = \frac{P_a}{\frac{2\pi}{60} n_1}$$

$$P_a = m_1 I_2'^2 \frac{R_2'}{s}$$

$$P_a = m_1 E_2' I_2' \cos \varphi_2$$



$$E_2' = E_1 = 4,44 N_1 f_1 \xi_{b1} \Phi_M$$

$$\bar{I}_2' = \frac{\bar{E}_2'}{\frac{R_2'}{s} + j X_2'} \Rightarrow I_2'^2 = \frac{E_2'^2}{\left(\frac{R_2'}{s}\right)^2 + X_2'^2}$$

$$\cos \varphi_2 = \frac{\frac{R_2'}{s}}{\sqrt{\left(\frac{R_2'}{s}\right)^2 + X_2'^2}}$$

$$X_1 = 2\pi f_1 L_{d1} \quad X_2 = 2\pi f_1 L_{d2} \quad X_2' = 2\pi f_1 L_{d2}' \quad X_{\mu} = 2\pi f_1 L_{\mu}$$

## Flujo y tensión en un motor asíncrono con deslizamientos pequeños

Para deslizamientos  $s$  pequeños la corriente del estator  $I_1$  no alcanza valores excesivamente altos (como mucho no es muy superior a la corriente asignada  $I_{1N}$ ). Esto significa que las caídas de tensión en la resistencia  $R_1$  y reactancia  $X_1$  del estator son pequeñas y se puede aceptar que la f.e.m.  $E_1$  y la tensión  $V_1$  del estator son prácticamente iguales:

$$s \ll \Rightarrow \bar{V}_1 = \bar{E}_1 + \bar{I}_1 (R_1 + j X_1) \approx \bar{E}_1 \Rightarrow V_1 \approx E_1$$

En estas condiciones se deduce que si se mantienen constantes el valor eficaz  $V_1$  y la frecuencia  $f_1$  de la tensión del estator el flujo por polo  $\Phi_M$  es prácticamente constante:

$$\left. \begin{array}{l} s \ll \text{ y } V_1 = \text{cte} \Rightarrow E_1 \approx \text{cte} \\ (V_1 \text{ no muy pequeño}) \quad f_1 = \text{cte} \end{array} \right\} \Rightarrow \Phi_M = \frac{E_1}{4,44 N_1 \xi_{b1} f_1} \approx \text{cte}$$

Luego, para deslizamientos pequeños el comportamiento de la máquina alimentada a tensión  $V_1$  y frecuencia  $f_1$  constantes es el mismo que cuando funciona con el flujo por polo  $\Phi_M$  y la frecuencia  $f_1$  constantes.

## Ecuaciones del par

$$M = \frac{m_1 V_1^2}{2 \pi n_1} \frac{\frac{R'_2}{s}}{\left(R_1 + \frac{R'_2}{s}\right)^2 + X_{cc}^2}$$

$$M = C_{MI} \frac{\cos^2 \varphi_2}{R'_2} \Phi_M^2 f_2$$

$$(C_{MI} = \pi m_1 \rho N_1^2 \xi_{b1}^2)$$

$$M = C_{MII} \Phi_M I_2 \cos \varphi_2 = C'_{MII} \Phi_M I'_2 \cos \varphi_2$$

$$\left(C_{MII} = \frac{\rho m_2 N_2 \xi_{b2}}{\sqrt{2}}\right) \quad \left(C'_{MII} = m_i \cdot C_{MII} = \frac{\rho m_1 N_1 \xi_{b1}}{\sqrt{2}}\right)$$

$C_{MI}$ ,  $C_{MII}$  y  $C'_{MII}$  son constantes constructivas de cada máquina

## Ecuaciones del par para deslizamientos pequeños

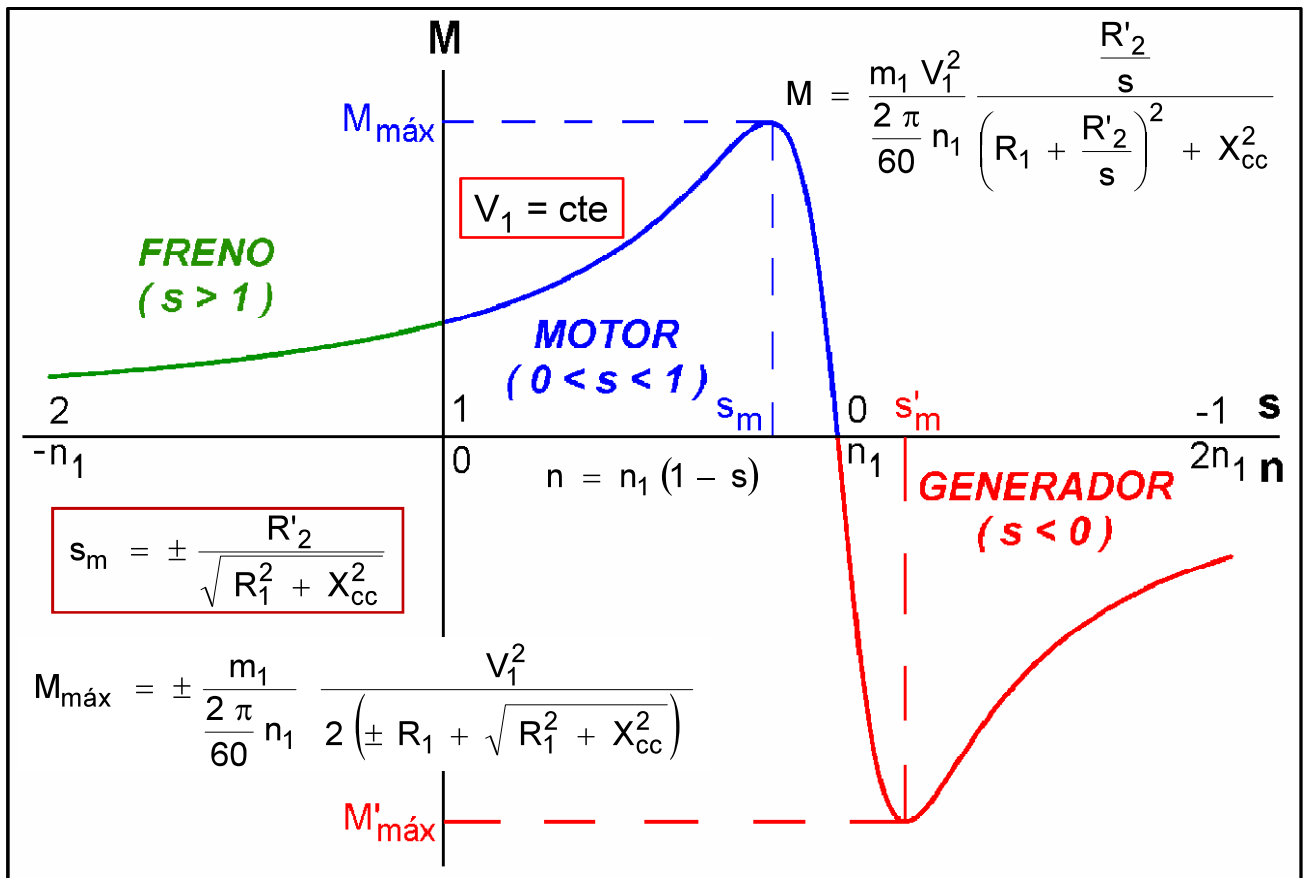
$$s \ll \Rightarrow \frac{R'_2}{s} \gg X'_2; \quad \frac{R'_2}{s} \gg X_{cc}; \quad \frac{R'_2}{s} \gg R_1$$

$$\cos \varphi_2 = \frac{\frac{R'_2}{s}}{\sqrt{\left(\frac{R'_2}{s}\right)^2 + X_2'^2}} \approx 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} M \approx \frac{C_{MI}}{R'_2} \Phi_M^2 f_2 = \frac{C_{MI}}{R'_2} \Phi_M^2 f_1 s \\ M \approx C_{MII} \Phi_M I_2 = C'_{MII} \Phi_M I'_2 \end{array} \right.$$

$$M \approx \frac{m_1 V_1^2}{2 \pi n_1} \frac{s}{R'_2}$$

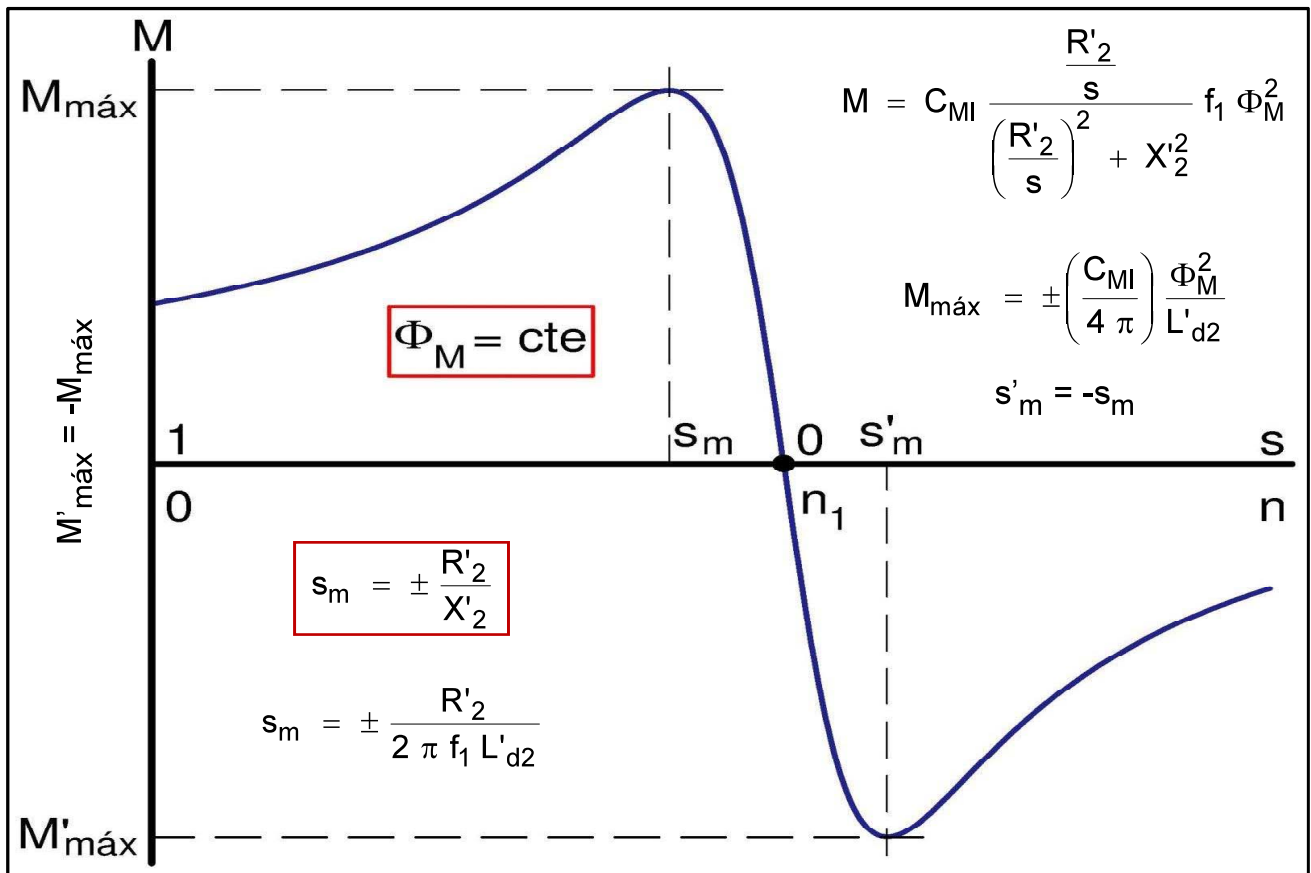
Para deslizamientos pequeños y cuando la frecuencia del estator  $f_1$  se conserva constante, el par  $M$  varía linealmente con el deslizamiento  $s$  si se mantiene constante también el flujo por polo  $\Phi_M$  o la tensión del estator  $V_1$ .

## Curva de par a tensión y frecuencia constantes



- La figura muestra la curva de par de una máquina asíncrona cuando funciona con una tensión estática de valor eficaz  $V_1$  y frecuencia  $f_1$  fijas.
- Como la frecuencia del estator  $f_1$  es constante, la velocidad de sincronismo  $n_1$  también es constante y el deslizamiento  $s$  y la velocidad  $n$  del rotor están relacionadas unívocamente. Por esto en el eje de abscisas de la figura se indican ambas magnitudes.
- La curva se divide en tres zonas: **motor** ( $1 \geq s \geq 0$ ;  $0 \leq n \leq n_1$ ), **generador** ( $s < 0$ ;  $n > n_1$ ) y **freno a contracorriente** ( $s > 1$ ;  $n < 0$ ).
- El par interno  $M$  es nulo a la velocidad de sincronismo  $n_1$  ( $n = n_1$ ;  $s = 0$ ). El par útil  $M_u$  incluye las pérdidas mecánicas y se anulará a una velocidad ligeramente inferior a la de sincronismo  $n_1$ .
- La curva de par es ligeramente asimétrica. El par máximo (en valor absoluto) cuando la máquina es generador  $M'_{máx}$  es ligeramente superior al par máximo como motor  $M_{máx}$ .
- Los dos valores máximos de par se originan con valores de deslizamiento de igual valor absoluto y signos opuestos ( $s'_m = -s_m$ ).
- El par depende cuadráticamente del valor eficaz de la tensión  $V_1$ .
- Los pares máximos,  $M_{máx}$  y  $M'_{máx}$ , dependen del cuadrado de la tensión del estator  $V_1$  y no dependen de la resistencia del rotor  $R'_2$ .
- Los deslizamientos de par máximo,  $s_m$  y  $s'_m$ , son proporcionales a la resistencia del rotor  $R'_2$  y no dependen de la tensión del estator  $V_1$ .

## Curva de par a flujo y frecuencia constantes



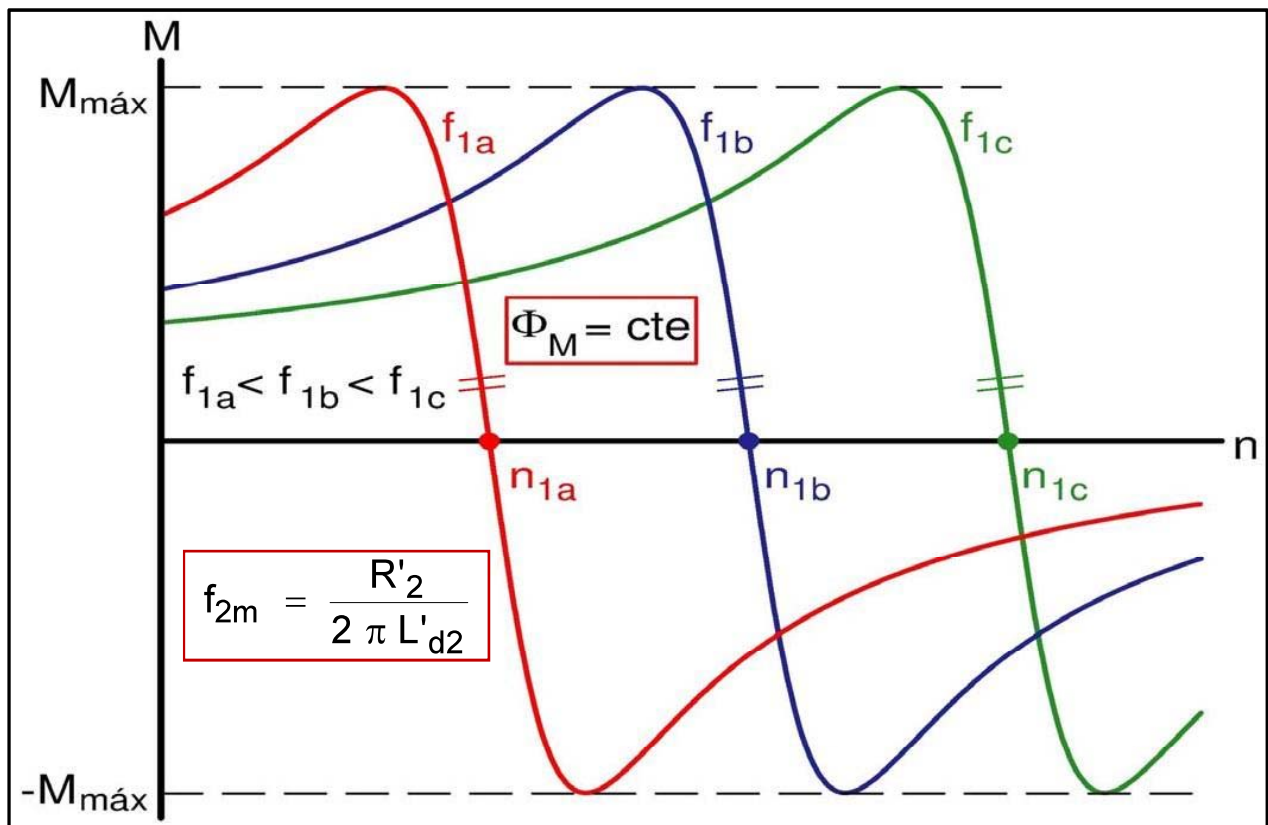
- La figura anterior muestra la curva de par de una máquina asíncrona cuando se la alimenta de tal forma que su frecuencia  $f_1$  y su flujo por polo  $\Phi_M$  conservan los mismos valores para todas las velocidades.
- La curva de par ahora es completamente simétrica. En valor absoluto los valores máximos del par para la máquina actuando como motor  $M_{\text{máx}}$  y como generador  $M'_{\text{máx}}$  son iguales ( $M'_{\text{máx}} = -M_{\text{máx}}$ ).
- Los dos máximos de la curva de par ( $M'_{\text{máx}}$  y  $M_{\text{máx}}$ ) se originan con valores de deslizamiento de igual valor absoluto y signos opuestos ( $s'_m = -s_m$ ).
- El par depende cuadráticamente del valor del flujo por polo  $\Phi_M$ .
- El par máximo  $M_{\text{máx}}$  depende del cuadrado del flujo por polo  $\Phi_M$  y no depende de la resistencia del rotor  $R'_2$  ni de la frecuencia  $f_1$  del estator.
- Los deslizamientos de par máximo,  $s_m$  y  $s'_m$ , son proporcionales a la resistencia del rotor  $R'_2$ , no dependen del flujo por polo  $\Phi_M$  y son inversamente proporcionales a la frecuencia del estator  $f_1$ .
- Si el deslizamiento s es pequeño sucede que

$$M \approx \frac{C_{MI}}{R'_2} \Phi_M^2 f_2 \quad M \approx C_{MII} \Phi_M I_2 = C'_{MII} \Phi_M I'_2$$

Luego, para deslizamientos s pequeños y flujo por polo  $\Phi_M$  constante el par M depende linealmente de  $I_2$  (o de  $I'_2$ ) y de  $f_2$ , independientemente del valor de la frecuencia del estator  $f_1$ .



## Curvas de par-velocidad a flujo constante para varias frecuencias $f_1$

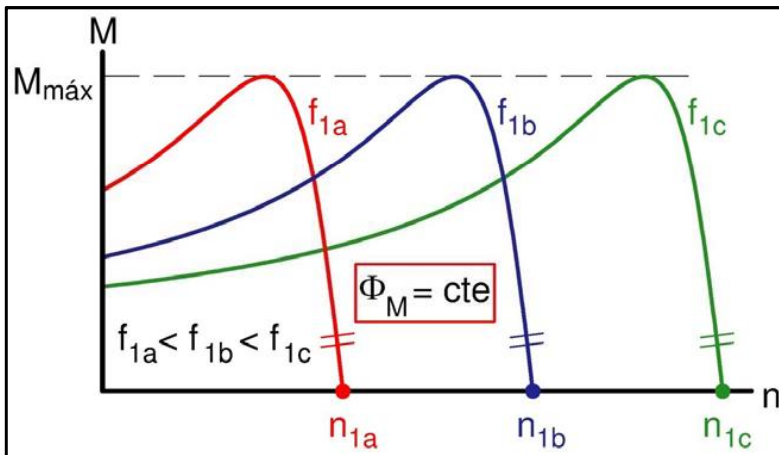
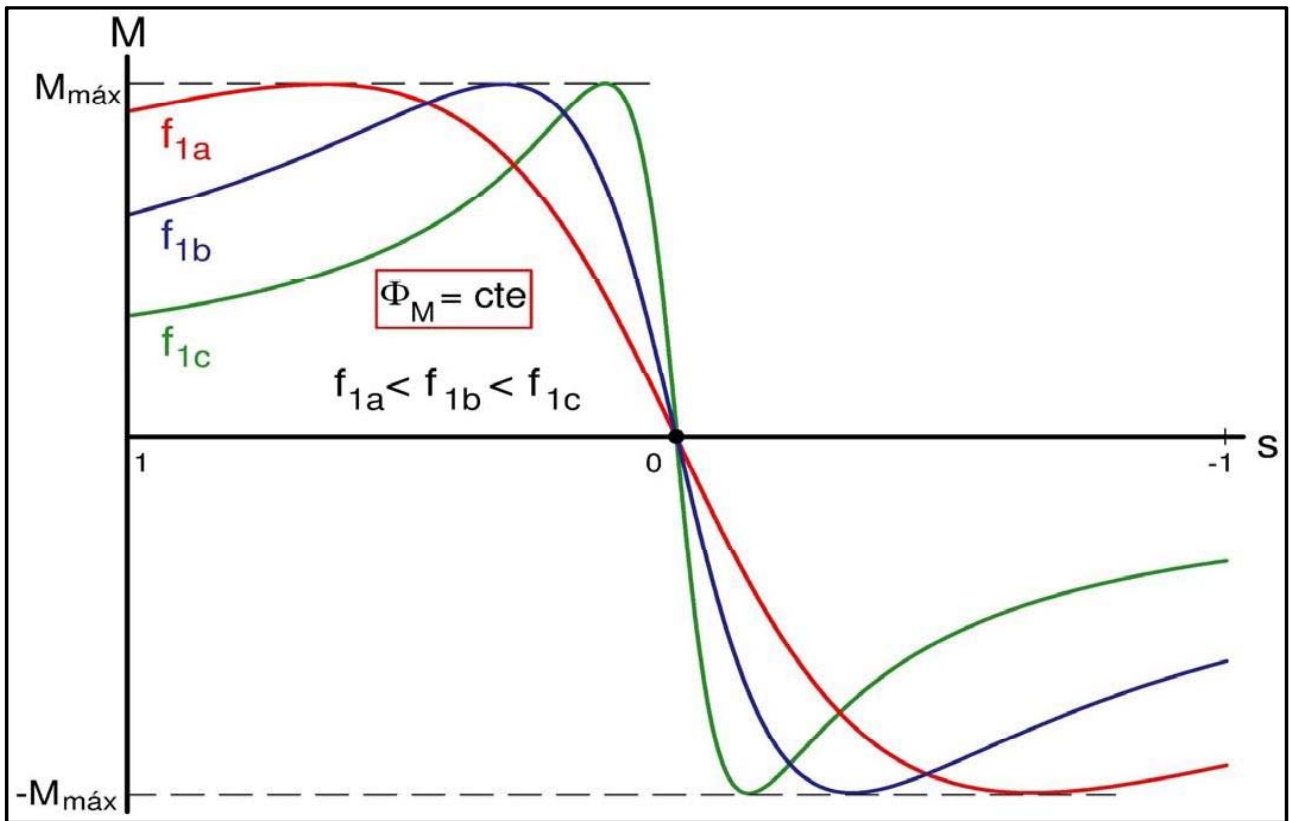


- La figura anterior muestra las curvas de par-velocidad a diferentes frecuencias  $f_1$  de una máquina asíncrona cuando se la alimenta mediante una fuente que es capaz de variar la frecuencia del estator  $f_1$  manteniendo siempre el mismo valor del flujo por polo  $\Phi_M$  (es decir, el flujo  $\Phi_M$  no va a variar con la velocidad  $n$  ni con la frecuencia  $f_1$ ).
- En este caso el par máximo  $M_{máx}$  conserva el mismo valor para todas las frecuencias  $f_1$  del estator.
- La frecuencia del rotor  $f_{2m}$  de par máximo tiene siempre el mismo valor, independiente de la frecuencia  $f_1$  del estator (si se acepta que los parámetros de resistencia  $R'_2$  y de inductancia de dispersión  $L'_{d2}$  del rotor (reducido al estator) son constantes):

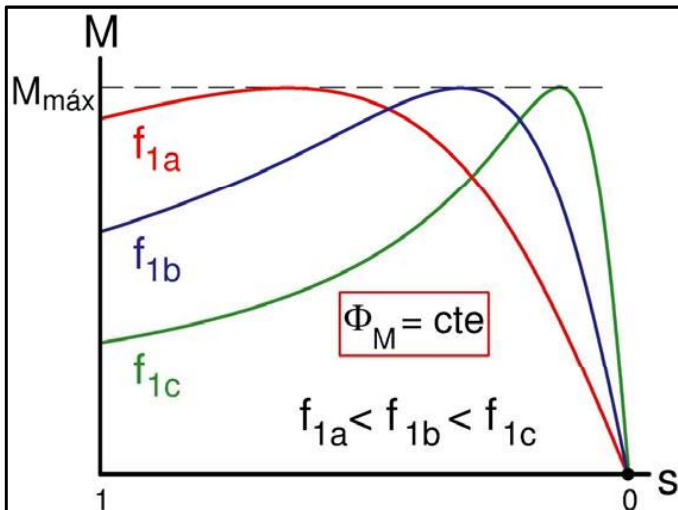
$$s_m = \pm \frac{R'_2}{2\pi f_1 L'_{d2}} \Rightarrow f_{2m} = s_m \cdot f_1 = \pm \frac{R'_2}{2\pi L'_{d2}}$$

- Se aprecia que para pequeños deslizamientos  $s$  las curvas de par-velocidad para diferentes frecuencias del estator  $f_1$  son rectas paralelas.
- A cada frecuencia  $f_1$  la velocidad de sincronismo  $n_1$  es diferente. Por esta causa, la relación entre la velocidad del rotor y el deslizamiento es distinta para cada frecuencia  $f_1$ . Esto hace que la familia de curvas par-velocidad (figura anterior) y la familia de curvas par-deslizamiento (figura siguiente) a diferentes frecuencias den lugar a gráficas distintas.

## Curvas de par- deslizamiento a flujo constante para varias frecuencias $f_1$



## Curvas de par a flujo constante para varias frecuencias $f_1$ . Funcionamiento como motor



Para deslizamientos pequeños se puede demostrar que si se mantienen constantes el valor eficaz  $V_1$  y la frecuencia  $f_1$  de la tensión del estator, también se mantiene prácticamente constante el flujo por polo  $\Phi_M$ .

Luego, para deslizamientos pequeños la curva de par para  $V_1$  y  $f_1$  constantes también corresponde a  $\Phi_M$  constante.

# Motor asíncrono con deslizamientos pequeños

- Para deslizamientos  $s$  pequeños ya sabemos que se cumple lo siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} V_1 = \text{cte} \\ f_1 = \text{cte} \end{array} \right\} \Rightarrow \Phi_M = \text{cte} \quad \left| \quad \begin{array}{l} M \approx \frac{C_{MI}}{R'_2} \Phi_M^2 f_2 = \frac{C_{MI}}{R'_2} \Phi_M^2 f_1 s \\ M \approx C_{MII} \Phi_M I_2 = C'_{MII} \Phi_M I'_2 \end{array} \right.$$

- Luego, si el flujo  $\Phi_M$  se mantiene constante, aunque la frecuencia  $f_1$  sea variable, se deduce que:
  - El par  $M$  varía linealmente con la frecuencia del rotor  $f_2$ .
  - El par  $M$  varía linealmente con la corriente del rotor  $I_2$  (o  $I'_2$ ).
  - Si el par  $M$  es constante, la corriente absorbida por el estator  $I_1$  es constante, independientemente de la frecuencia  $f_1$ .

En efecto, si el flujo por polo  $\Phi_M$  permanece constante, la corriente magnetizante  $I_\mu$  también es constante. Por otra parte, se acaba de ver que el par  $M$  varía con la corriente del rotor  $I'_2$ . Si  $M$  es constante, también  $I'_2$  será constante. Como se verifica que  $\bar{I}_1 = \bar{I}_0 + \bar{I}'_2 \approx \bar{I}_\mu + \bar{I}'_2$ , se deduce que en este caso la corriente  $I_1$  permanece prácticamente constante.

- Si el flujo por polo  $\Phi_M$  y la frecuencia  $f_1$  son constantes o bien la tensión  $V_1$  y la frecuencia  $f_1$  son constantes, se obtiene que:
  - El par  $M$  varía linealmente con el deslizamiento  $s$ .
  - Cuando el par  $M$  se mantiene constante y se varía la resistencia del rotor  $R_2$  (y, por tanto, también  $R'_2$ ), el deslizamiento  $s$  varía linealmente con  $R_2$  (o  $R'_2$ ) (Fig. a).
  - Cuando el par  $M$  se mantiene constante y se varía el flujo por polo  $\Phi_M$  (o, lo que es equivalente, la tensión  $V_1$ ) el deslizamiento  $s$  varía inversamente proporcional a  $(\Phi_M)^2$  (o a  $V_1^2$ ) (Fig. b).

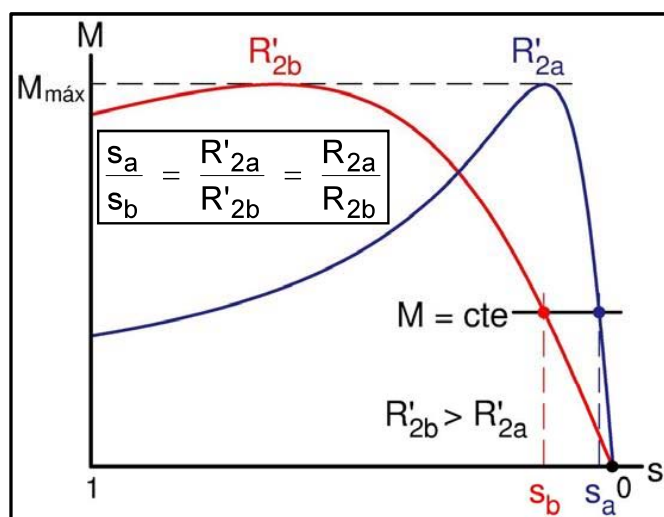


Fig. a: Variación de  $R_2$  a  $M$  cte.

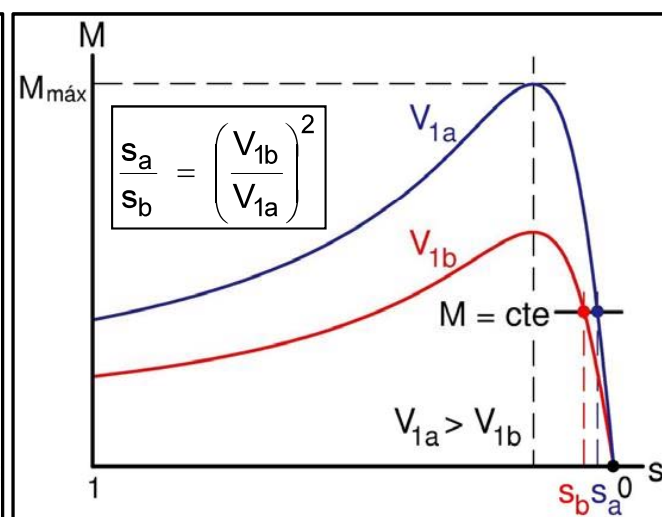
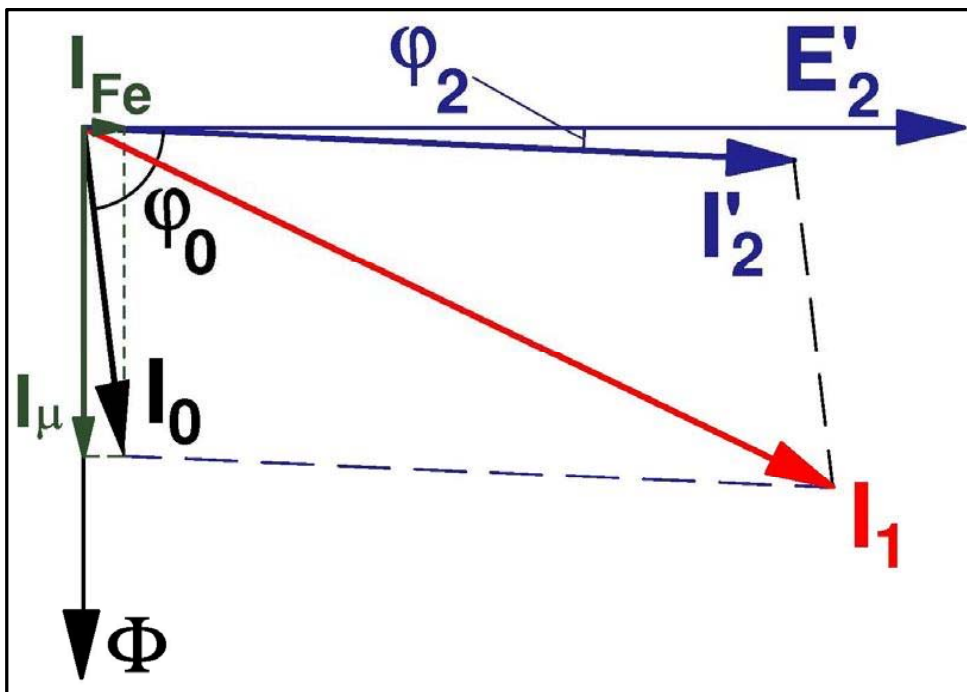


Fig. b: Variación de  $V_1$  a  $M$  cte.

## Corrientes con deslizamientos pequeños



Para deslizamientos pequeños:

$$I_1^2 \approx I_0^2 + I_2'^2$$

- Dado que en una máquina asíncrona sucede que

$$I_\mu \gg I_{Fe}$$

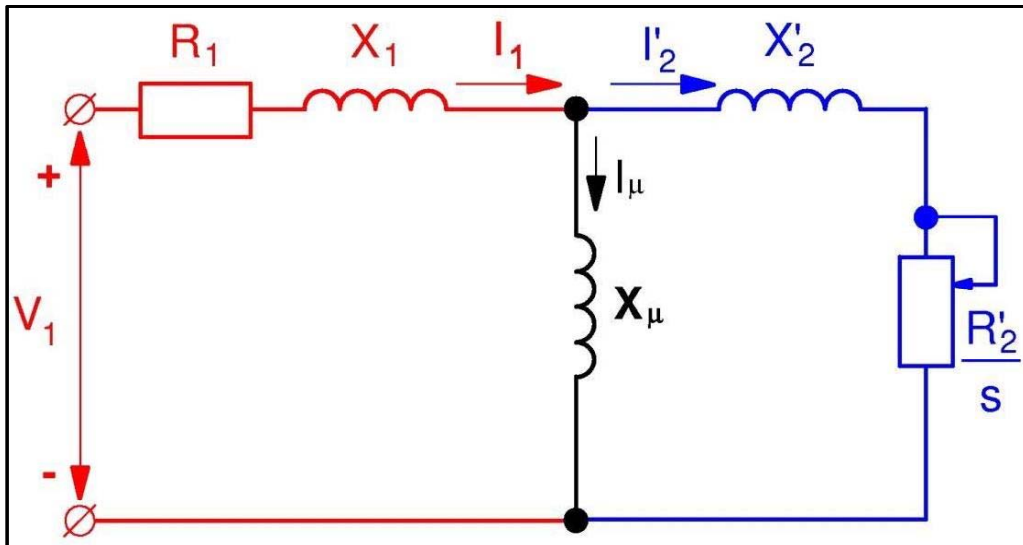
la corriente de vacío  $I_0$  es prácticamente perpendicular a la f.e.m. del rotor  $E'_2$ :

$$I_\mu \gg I_{Fe} \rightarrow \bar{I}_0 \approx \bar{I}_\mu \rightarrow \varphi_0 \approx 90^\circ$$

- Cuando el deslizamiento  $s$  es pequeño, el ángulo  $\varphi_2$  es muy pequeño ( $\cos \varphi_2 \approx 1$ ;  $\varphi_2 \approx 0$ ), luego la corriente del rotor  $I'_2$  es prácticamente paralela a la f.e.m. del rotor  $E'_2$ .
- Luego, las corrientes  $I_0$  e  $I'_2$  son casi perpendiculares (ver la figura anterior) y sucede que

$$\bar{I}_1 = \bar{I}_0 + \bar{I}'_2 \Rightarrow I_1^2 \approx I_0^2 + I_2'^2$$

# Funcionamiento a $I_1$ y $f_1$ constantes



(Se desprecia  $I_{Fe}$  frente a  $I_{\mu}$ )

$$I'_2 = \frac{X_{\mu}}{\sqrt{\left(\frac{R'_2}{s}\right)^2 + (X'_2 + X_{\mu})^2}} I_1 \quad I_{\mu} = \frac{\sqrt{\left(\frac{R'_2}{s}\right)^2 + X'_2{}^2}}{\sqrt{\left(\frac{R'_2}{s}\right)^2 + (X'_2 + X_{\mu})^2}} I_1$$

$$M = \frac{P_a}{\Omega_1} = \frac{P_a}{\frac{2\pi}{60} n_1}$$

$$P_a = m_1 I_2'^2 \frac{R'_2}{s}$$

$$M = \frac{m_1 \frac{R'_2}{s}}{\frac{2\pi}{60} n_1} \frac{X_{\mu}^2}{\left(\frac{R'_2}{s}\right)^2 + (X'_2 + X_{\mu})^2} I_1^2$$

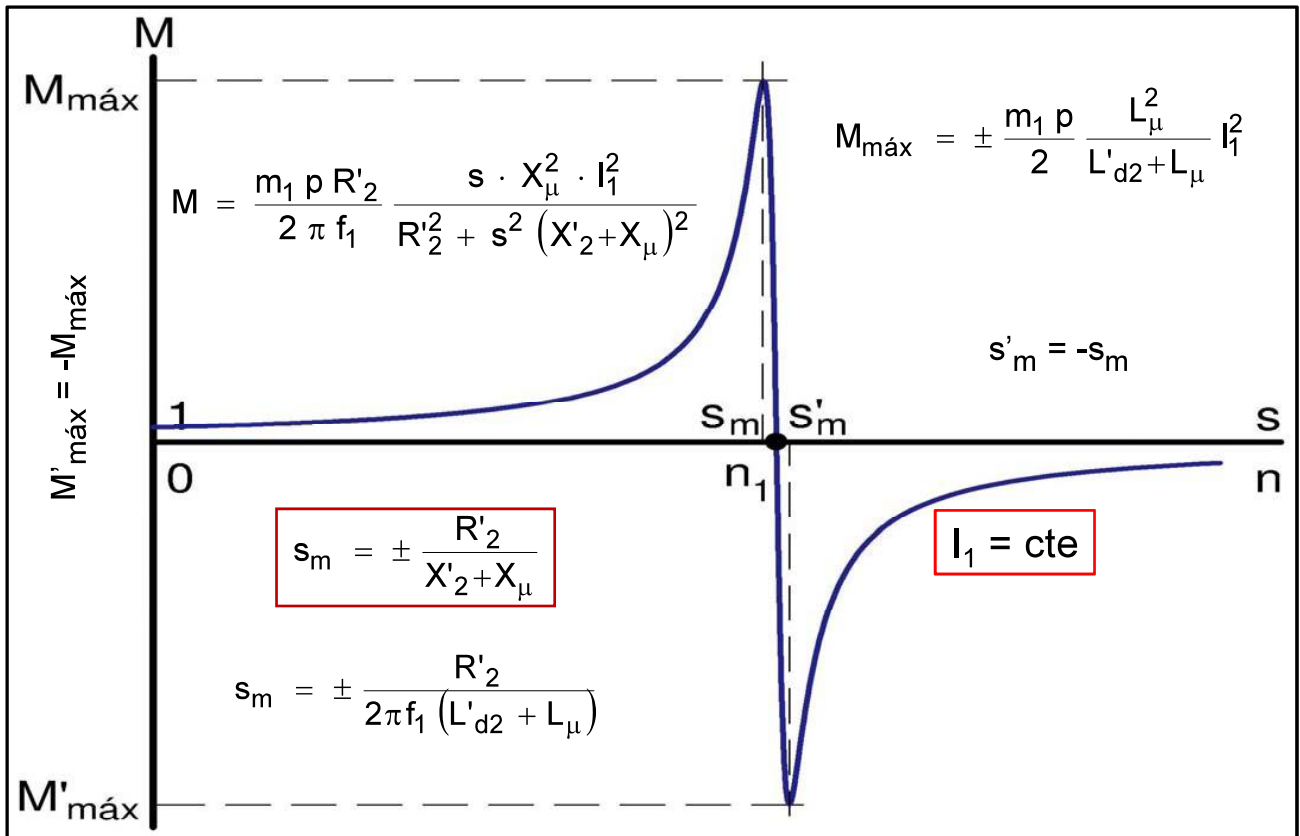
$$\Omega_1 = \frac{2\pi}{60} n_1 = \frac{2\pi f_1}{p}$$

$$M = \frac{m_1 p R'_2}{2\pi f_1} \frac{s \cdot X_{\mu}^2}{R'_2{}^2 + s^2 (X'_2 + X_{\mu})^2} I_1^2$$

$$s_m = \pm \frac{R'_2}{X'_2 + X_{\mu}} = \pm \frac{R'_2}{2\pi f_1 (L'_{d2} + L_{\mu})} \Rightarrow f_{2m} = s_m \cdot f_1 = \pm \frac{R'_2}{2\pi (L'_{d2} + L_{\mu})}$$

$$M_{\text{máx}} = \pm \frac{m_1 p}{2} \frac{L_{\mu}^2}{L'_{d2} + L_{\mu}} I_1^2$$

## Curva de par a intensidad $I_1$ y frecuencia $f_1$ constantes



- La figura anterior muestra la curva de par de una máquina asíncrona cuando se la alimenta de tal forma que para todas las velocidades se mantienen constantes el valor eficaz  $I_1$  y la frecuencia  $f_1$  de la corriente del estator.
- La curva de par ahora es completamente simétrica. En valor absoluto los valores máximos del par para la máquina actuando como motor  $M_{máx}$  y como generador  $M'_{máx}$  son iguales ( $M'_{máx} = -M_{máx}$ ).
- Los dos máximos de la curva de par ( $M'_{máx}$  y  $M_{máx}$ ) se originan con valores de deslizamiento de igual valor absoluto y signos opuestos ( $s'_m = -s_m$ ).
- El par depende cuadráticamente del valor eficaz de la corriente  $I_1$ .
- El par máximo  $M_{máx}$  depende del cuadrado de la corriente  $I_1$  y no depende de la resistencia del rotor  $R'_2$  ni de la frecuencia  $f_1$  del estator.
- Los deslizamientos de par máximo,  $s_m$  y  $s'_m$ , son proporcionales a la resistencia del rotor  $R'_2$ , no dependen de la corriente del estator  $I_1$  y son inversamente proporcionales a la frecuencia del estator  $f_1$ .
- El par de arranque es muy pequeño. Por esta causa, no se puede usar este sistema de alimentación en sistemas de frecuencia  $f_1$  fija. La alimentación en corriente se usa para sistemas de frecuencia  $f_1$  variable.
- Comparando la expresión que permite calcular el deslizamiento de par máximo  $s_m$  con las que han aparecido en los casos anteriores, es fácil ver que ahora este es muy pequeño. El par máximo se produce a un deslizamiento extraordinariamente pequeño.

- Con alimentación en corriente sucede que la corriente magnetizante  $I_\mu$  aumenta a medida que disminuye el deslizamiento  $s$ . Esto quiere decir que a medida que disminuye el deslizamiento  $s$  aumenta el flujo por polo  $\Phi_M$  y, consecuentemente, la f.e.m.  $E_1$  y la tensión  $V_1$  del estator.
- Sea  $I_{\mu\text{sat}}$  la corriente magnetizante (que se produce cuando el deslizamiento es  $s_{\text{sat}}$  y la frecuencia del rotor es  $f_{2\text{sat}}$ ) a partir de la cual el flujo es suficientemente alto como para que la saturación de la máquina sea apreciable. Esto significa que la máquina se considerará saturada cuando el deslizamiento  $s$  adopte valores inferiores a  $s_{\text{sat}}$  o la frecuencia del rotor  $f_2$  sea inferior a  $f_{2\text{sat}}$ :

$$I_{\mu\text{sat}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{R'_2}{s_{\text{sat}}}\right)^2 + X_2'^2}}{\sqrt{\left(\frac{R'_2}{s_{\text{sat}}}\right)^2 + (X_2' + X_\mu)^2}} I_1 \Rightarrow s_{\text{sat}} = \frac{R'_2 \sqrt{I_1^2 - I_{\mu\text{sat}}^2}}{\sqrt{I_{\mu\text{sat}}^2 (X_\mu + X_2')^2 - I_1^2 X_2'^2}}$$

$$f_{2\text{sat}} = f_1 \cdot s_{\text{sat}} = \frac{R'_2 \sqrt{I_1^2 - I_{\mu\text{sat}}^2}}{2 \pi \sqrt{I_{\mu\text{sat}}^2 (L_\mu + L'_{d2})^2 - I_1^2 L_{d2}'^2}}$$

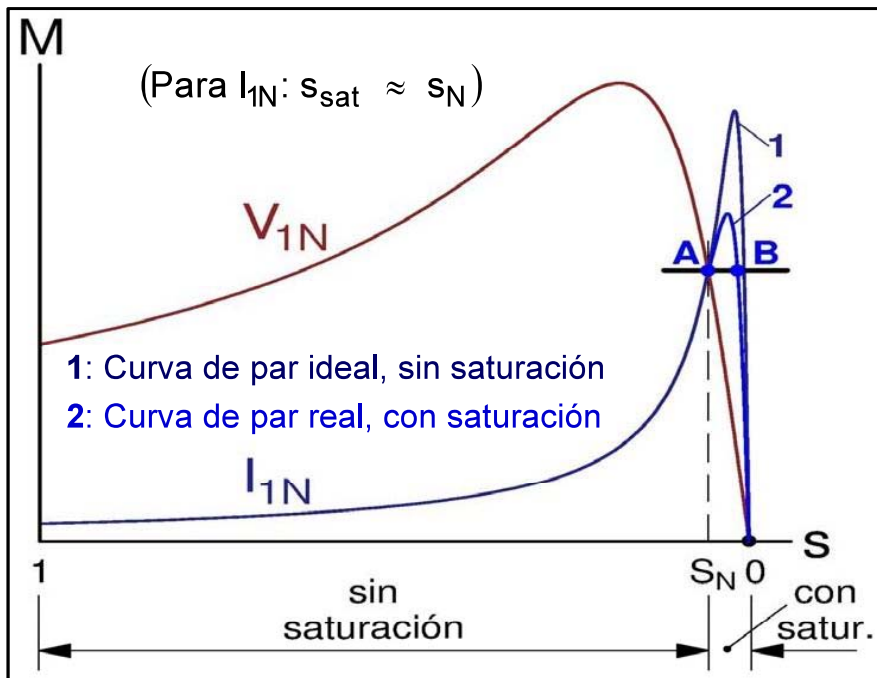
- El deslizamiento  $s_{\text{sat}}$  y la frecuencia del rotor  $f_{2\text{sat}}$  dependen de la corriente  $I_1$ . La frecuencia del rotor a la cual la máquina empieza a saturarse  $f_{2\text{sat}}$  es independiente de la frecuencia del estator  $f_1$ .
- Se suele usar como criterio para determinar la corriente  $I_{\mu\text{sat}}$  el elegir aquella corriente de excitación  $I_\mu$  que hace que la tensión del estator  $V_1$  sea igual a la asignada  $V_{1N}$  (es decir, se supone que la máquina empieza a saturarse cuando su tensión supera a  $V_{1N}$ ). Por lo tanto, se puede adoptar este criterio:

$$I_{\mu\text{sat}} \approx I_0$$

- En la figura siguiente se han dibujado en la misma gráfica dos curvas de par de la máquina asíncrona funcionando como motor: una alimentada a corriente  $I_1$  y frecuencia  $f_1$  asignadas ( $I_{1N}$  y  $f_{1N}$ ) y otra alimentada con tensión  $V_1$  y frecuencia  $f_1$  asignadas ( $V_{1N}$  y  $f_{1N}$ ). En el punto de corte **A** de ambas curvas la máquina funciona con los valores asignados  $V_{1N}$  de tensión,  $I_{1N}$  de corriente y  $f_{1N}$  de frecuencia y, por lo tanto, está en condiciones asignadas. El deslizamiento en **A** será pues  $s_N$ . Como en este caso, este es el deslizamiento en el que la máquina alcanza la tensión  $V_{1N}$ , esto significa que cuando la máquina se alimenta con la corriente asignada  $I_{1N}$ , el deslizamiento de saturación es el asignado:

$$I_1 = I_{1N} \rightarrow s_{\text{sat}} = s_N$$

## Efecto de la saturación sobre la curva de par a $I_1$ y $f_1$ ctes. Funcionamiento como motor.



- Se acepta que, con alimentación con corriente  $I_{1N}$  constante, la saturación empieza a ser alta para deslizamientos  $s$  inferiores al asignado  $s_N$ .
- La máquina funciona en el punto **A** ya que en **B** está demasiado saturada y la tensión  $V_1$  es muy alta.
- **A** es inestable, luego la máquina asíncrona sólo puede ser alimentada con una fuente de corriente si funciona en bucle cerrado de velocidad.

$$s_{sat} = \frac{R'_2 \sqrt{I_1^2 - I_{\mu sat}^2}}{\sqrt{I_{\mu sat}^2 (X_\mu + X'_2)^2 - I_1^2 X_2'^2}}$$

$$f_{2sat} = \frac{R'_2 \sqrt{I_1^2 - I_{\mu sat}^2}}{2 \pi \sqrt{I_{\mu sat}^2 (L_\mu + L'_{d2})^2 - I_1^2 L_{d2}^2}}$$

- Por tanto, funcionando a corriente asignada  $I_{1N}$  constante, la saturación empieza a ser alta para deslizamientos  $s$  inferiores al asignado  $s_N$ .
- Esto significa que, con  $I_{1N}$  constante, a la derecha del punto **A** la máquina se satura, tanto más cuanto más a la derecha nos movamos, lo cual reduce el valor de  $X_\mu$  ( $X_\mu$  deja de poderse considerar constante). Por lo tanto, como se muestra en la figura la curva real de funcionamiento será la **2** (con  $X_\mu$  variable) y no la **1** (con  $X_\mu$  constante).
- Hay dos puntos de la curva de par a  $I_1$  constante donde el motor da el mismo par  $M$ . Uno de estos puntos está en la zona estable (para deslizamientos inferiores al de par máximo  $s_m$ ) y otro en la zona inestable (para deslizamientos superiores a  $s_m$ ). En la figura se muestra esto para el caso de par nominal  $M_N$  que, para funcionamiento con  $I_{1N}$  constante, puede producirse en los puntos **A** y **B**.
- El deslizamiento en la zona estable (punto **B**) es pequeño y la máquina está muy saturada. Esto origina una distribución anómala del campo magnético en el entrehierro, un aumento importante de las pérdidas en el hierro y una tensión estática  $V_1$  grande, superior a la asignada  $V_{1N}$ .
- Por esta razón, cuando la máquina está alimentada por una fuente de corriente se la hace funcionar en la zona inestable (punto **A**), lo que obliga a emplear un sistema de control en lazo cerrado de velocidad que la permita funcionar permanente en la zona inestable.



## Convertidor de frecuencia actuando como fuente de tensión

$$E_1 = 4,44 N_1 \xi_{b1} f_1 \Phi_M \Rightarrow \Phi_M = \text{cte} \rightarrow \frac{E_1}{f_1} = \text{cte}$$

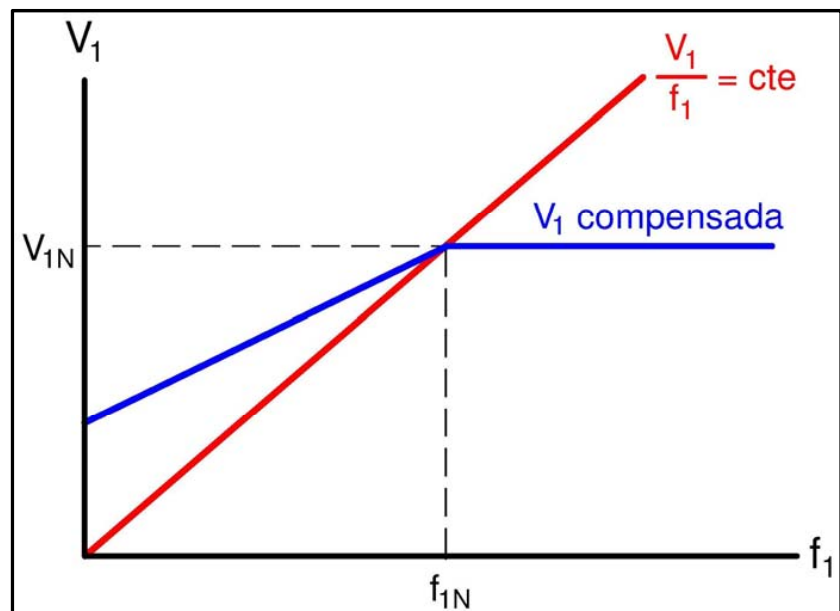
$$\bar{E}_1 = \bar{V}_1 - \bar{I}_1 (R_1 + j X_1) = \bar{V}_1 - \bar{I}_1 \bar{Z}_1$$

- Si el convertidor de frecuencia actúa como fuente de tensión y se quiere mantener constante el flujo  $\Phi_M$  para todas las frecuencias por debajo de  $f_{1N}$ , hay que variar la tensión  $V_1$  de forma que se mantenga constante el cociente  $E_1/f_1$ .
- Para conseguir que el cociente  $E_1/f_1$  fuera exactamente constante habría que variar  $E_1$  no sólo con  $f_1$  sino también con la corriente  $I_1$ .
- Usualmente la caída de tensión en  $Z_1$  es pequeña frente a  $V_1$  si el deslizamiento  $s$  no es grande y, por consiguiente,  $E_1 \approx V_1$ . Por lo tanto, en estas circunstancias, se puede adoptar esta aproximación:

$$\Phi_M = \text{cte} \rightarrow \frac{V_1}{f_1} = \text{cte}$$

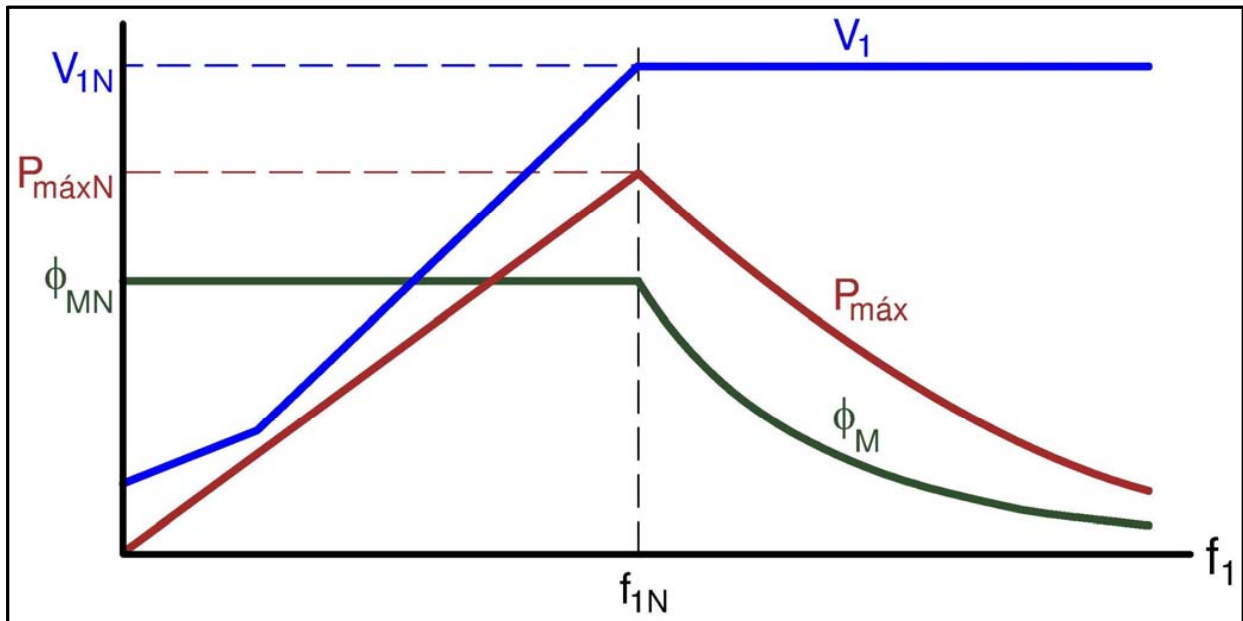
## Compensación de la tensión a bajas frecuencias

- A frecuencias pequeñas la f.e.m.  $E_1$  es pequeña y, en consecuencia, la caída de tensión en  $Z_1$  deja de ser despreciable frente a  $E_1$ .
- Esto hace que, a bajas frecuencias, para que  $\Phi_M$  sea constante la tensión  $V_1$  deba tener un valor mayor que el que se obtiene con la aproximación  $V_1/f_1 = \text{cte}$ .



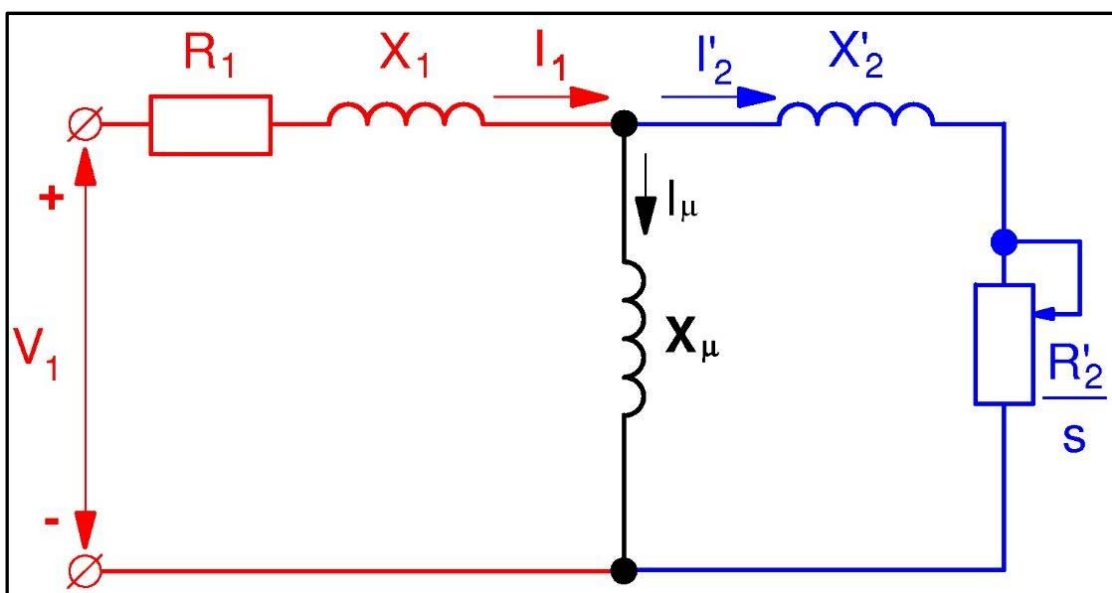
- Para tener esto en cuenta de una forma aproximada –lo que permite usar un convertidor de frecuencia más barato– se aumenta el valor de  $V_1$  a bajas frecuencias siguiendo una ley sencilla (usualmente lineal). En las figuras adjunta y siguiente se muestran dos de las formas de como se hace esto.

# Convertidor de frecuencia actuando como fuente de tensión con compensación de la tensión a bajas frecuencias



En esta figura se muestra que para frecuencias por encima de  $f_{1N}$  la tensión  $V_1$  se mantiene constante, lo que hace que el flujo  $\Phi_M$  ya no sea constante y se vaya debilitando a medida que aumenta la frecuencia  $f_1$ .

- Para frecuencias  $f_1$  por encima de la asignada, el mantener el flujo constante daría lugar a f.e.m.s elevadas y la tensión  $V_1$  sería superior a la asignada. Por esta razón, con estas frecuencias no se mantiene el flujo constante, sino la tensión constante, lo que hace que el flujo se debilite a medida que aumenta la frecuencia  $f_1$ .
- Circuito equivalente de un motor asíncrono trifásico en el que se ha despreciado la resistencia de pérdidas en el hierro  $R_{Fe}$ :



## Convertidor de frecuencia actuando como fuente de corriente

- La estrategia para mantener el flujo  $\Phi_M$  constante –para frecuencias por debajo de  $f_{1N}$ – es actuar sobre la corriente  $I_1$  de forma que la corriente de excitación  $I_\mu$  se conserve constante.
- Del circuito equivalente de un motor (ver la figura anterior) se deduce que la ley de variación de  $I_1$  con  $f_1$  para mantener  $I_\mu$  constante es:

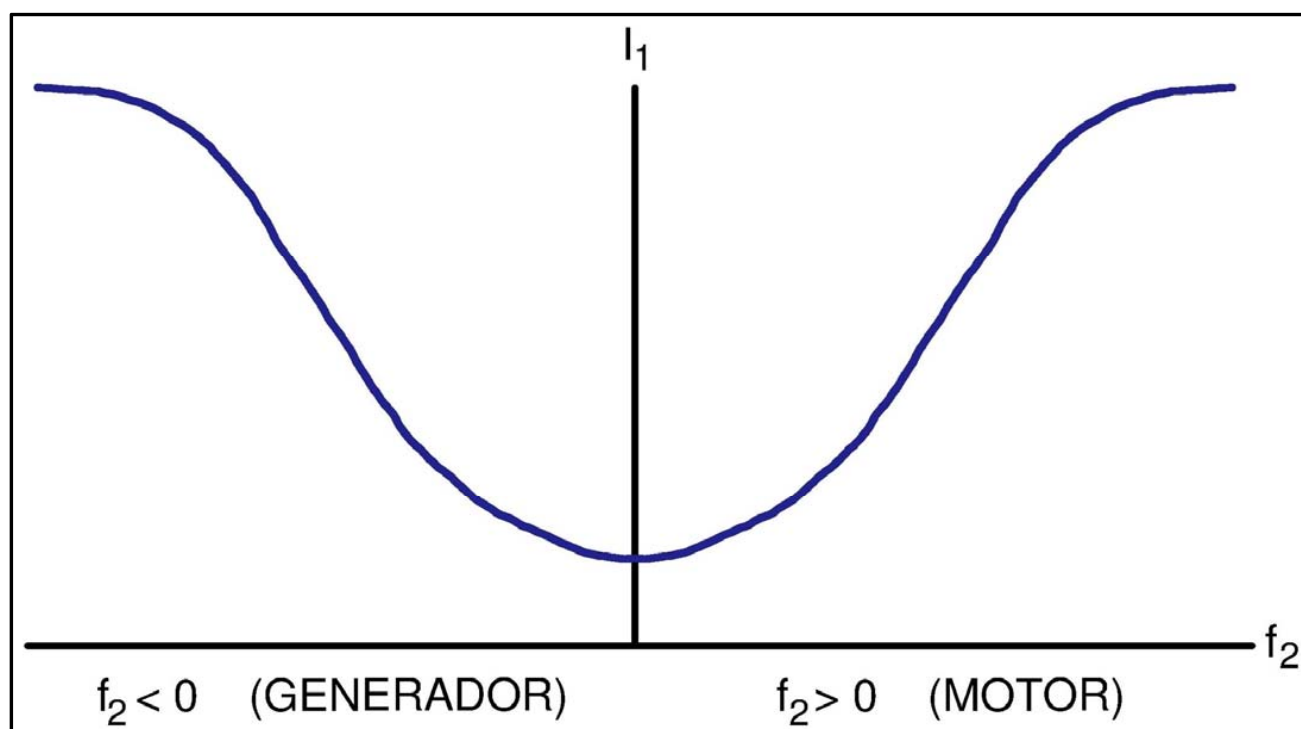
$$I_1 = \frac{\sqrt{\left(\frac{R'_2}{2\pi f_2}\right)^2 + (L'_2 + L_\mu)^2}}{\sqrt{\left(\frac{R'_2}{2\pi f_2}\right)^2 + (L'_2)^2}} I_\mu$$

$$f_2 = s \cdot f_1$$

$$s = \frac{n_1 - n}{n_1}$$

- Luego, para mantener  $I_\mu$  (y  $\Phi_M$ ) constante hay que variar la corriente  $I_1$  en función sólo de la frecuencia del rotor  $f_2$ , lo cual exige medir la velocidad del motor  $n$ . Por lo tanto, en este caso el convertidor de frecuencia funciona forzosamente con un control en lazo cerrado de velocidad.
- Para frecuencias por encima de la asignada  $f_{1N}$  (zona de campo debilitado) la corriente  $I_1$  se varía de forma que la tensión  $V_1$  se conserve constante.

## Ley de variación de la corriente del estator $I_1$ con la frecuencia $f_1$



## **BIBLIOGRAFÍA**

- [1] ALGER, P. L. 1970. *Induction machines. Their behavior and uses*. 2ª edición. New York: Gordon and Breach Science Publishers.
- [2] APARICIO MARZO, J. L. 1987. *Criterios de diseño de convertidores estáticos para accionamientos regulados en corriente alterna con motores de inducción*. Santiago de Compostela. Saber Hoy, S.A. de Ediciones.
- [3] BOSE, B. K. 1986. *Power electronics and AC drives*. New Jersey - U.S.A. Prentice-Hall.
- [4] CHAPMAN. 2005. *Máquinas eléctricas*. Madrid: McGraw-Hill Interamericana.
- [5] CORTES CHERTA. 1994. *Curso moderno de máquinas eléctricas rotativas. 5 tomos*. Barcelona: Editores Técnicos Asociados.
- [6] FITZGERALD, KINGSLEY Y UMANS. 2004. *Máquinas eléctricas*. Madrid: McGraw-Hill Interamericana.
- [7] FAURE BENITO. 2000. *Máquinas y accionamientos eléctricos*. Madrid: Colegio oficial de ingenieros navales y oceánicos.
- [8] FRAILE MORA, J. 2015. *Máquinas eléctricas*. Madrid: Ibergarceta Publicaciones, S.L.
- [9] IVANOV-SMOLENSKI. 1984. *Máquinas eléctricas*. Moscú: Editorial Mir.
- [10] KOSTENKO y PIOTROVSKI. 1979. *Máquinas eléctricas*. Moscú: Editorial Mir.
- [11] LANGSDORF. 1968. *Teoría de las máquinas de corriente alterna*. Madrid. Editorial Castillo D.L.
- [12] LEONHARD, W. 1985. *Control of electrical drives*. Berlin. Springer-Verlag.
- [13] MURPHY, J. M. D. & TURNBULL, F. G. 1988. *Power electronic control of AC motors*. Oxford - Gran Bretaña. Pergamon Press.
- [14] SANZ FEITO, JAVIER. 2002. *Máquinas eléctricas*. Madrid: Pearson Education.
- [15] SERRANO IRIBARNEGARAY, L. 1989. *Fundamentos de máquinas eléctricas rotativas*. Barcelona: Marcombo Boixareu Editores.
- [16] SUÁREZ CREO, J.M. y MIRANDA BLANCO, B.N. 2006. *Máquinas eléctricas. Funcionamiento en régimen permanente*. Santiago de Compostela: Tórculo Edicións, S.L.
- [17] WILDI, T. 2007. *Máquinas eléctricas y sistemas de potencia*. México: Pearson Educación.