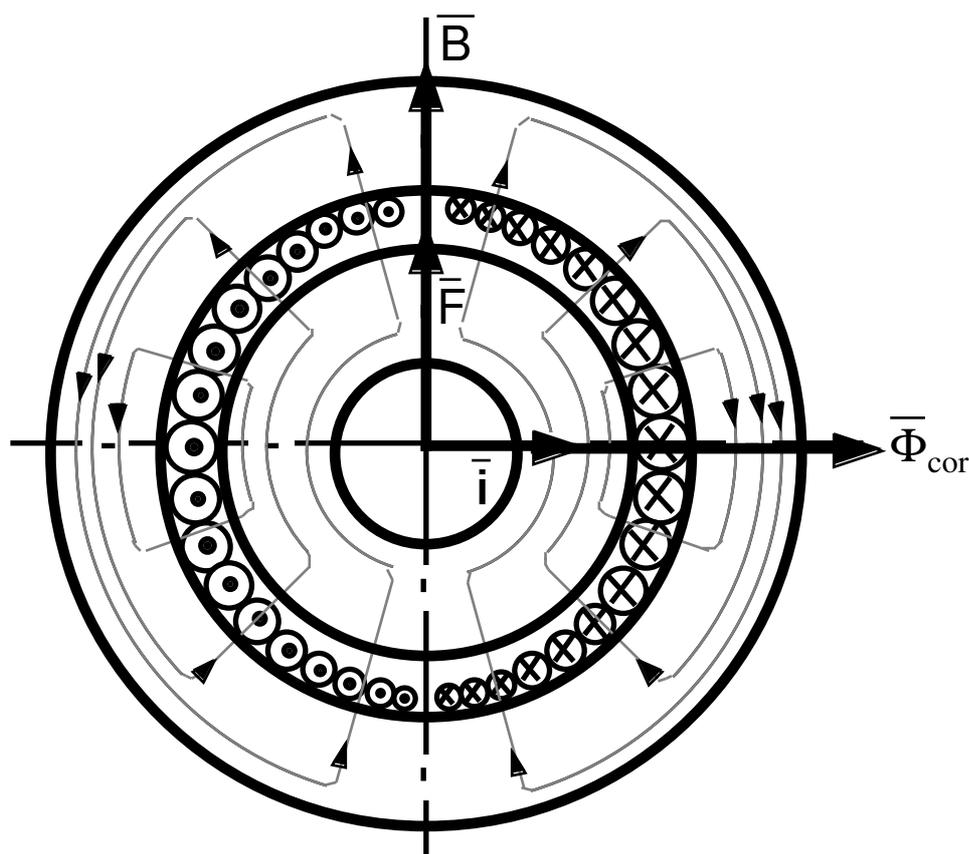


UNIVERSIDAD DE CANTABRIA
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA ELECTRICA Y ENERGETICA

***ANALISIS DE LOS REGIMENES Y
DEL CONTROL DINAMICOS DE LAS
MAQUINAS ASINCRONAS MEDIANTE
LA TEORIA DE LOS FASORES
ESPACIALES***

*TOMO 1:
FASORES ESPACIALES*



Miguel Angel Rodríguez Pozueta

© MIGUEL ANGEL RODRIGUEZ POZUETA

Universidad de Cantabria

Departamento de Ingeniería Eléctrica y Energética

I.S.B.N.: 84-86928-67-2

Depósito Legal: SA-90-1993

Impreso en el Servicio de Publicaciones de la E.T.S.
de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos

INDICE

INDICE

INDICE-0

INDICE

INDICE

PROLOGO

LISTA DE SIMBOLOS

CAPITULO 1º: CONCEPTOS BASICOS

INTRODUCCION	I-1
DEFINICIONES Y PROPIEDADES DEL CAMPO MAGNETICO	
Inducción y flujo magnéticos	I-1
Enlaces de flujo	I-4
Inductancias	I-5
Campos magnéticos total, común y de dispersión ..	I-6
HIPOTESIS SIMPLIFICATIVAS	I-7
INDUCCION Y TENSION MAGNETICAS. CAPA DE CORRIENTE	
Inducción magnética	I-11
Tensión magnética	I-12
Capa de corriente	I-13
FLUJO POR POLO	I-15
INDUCTANCIAS DE LAS MAQUINAS ELECTRICAS	
Inductancia magnetizante de una fase de un devanado polifásico	I-15
Inductancia mutua entre una fase del estator y una fase del rotor cuando ambas están alineadas	I-17

INDICE

OTROS COEFICIENTES DE LAS MAQUINAS ASINCRONAS	I-18
---	------

BIBLIOGRAFIA	I-20
--------------------	------

CAPITULO 2º: FASORES ESPACIALES

INTRODUCCION	II-1
--------------------	------

FUNDAMENTOS Y DEFINICIONES	II-2
----------------------------------	------

SISTEMAS DE COORDENADAS	II-5
-------------------------------	------

FASORES ESPACIALES DE CORRIENTE, DE TENSION Y DE INDUCCION MAGNETICAS Y DE FLUJO DE CORONA ..	II-10
---	-------

Fasor espacial de corriente	II-11
-----------------------------------	-------

Fasor espacial de tensión magnética	II-12
---	-------

Fasor espacial de inducción magnética	II-14
---	-------

Fasor espacial de flujo de corona	II-14
---	-------

FASOR ESPACIAL DE F.E.M. INDUCIDA	II-17
---	-------

FASORES ESPACIALES DE TENSION ELECTRICA	II-22
---	-------

BIBLIOGRAFIA	II-28
--------------------	-------

APENDICES:

DEMOSTRACION DE LA RELACION ENTRE LOS FASORES ESPACIALES DE F.E.M. Y DE FLUJO DE CORONA	II-30
---	-------

FUERZA ELECTROMOTRIZ (F.E.M.) Y FUERZA CONTRAELECTROMOTRIZ (F.C.E.M.)	II-32
---	-------

INDICE

CONVENIOS DE SIGNOS PARA LA TENSION	
Convenio de signos como motor	II-34
Convenio de signos como generador	II-35
ECUACION DE UNA JAULA DE ARDILLA	II-37
ECUACIONES Y DIAGRAMA FASORIAL DE UNA MAQUINA ASINCRONA	II-38
CAPITULO 3º: CORRESPONDENCIA ENTRE FASORES ESPACIALES Y MAGNITUDES EXTERNAS	
INTRODUCCION	III-1
OBTENCION DE LOS FASORES ESPACIALES A PARTIR DE LAS MAGNITUDES DE FASE. FASORES ESPACIALES MATEMATICOS	III-2
Fasor de corriente de un devanado polifásico	III-3
Fasor de tensión eléctrica de un devanado polifásico	III-4
Fasores espaciales de los devanados trifásicos. Vectores espaciales	III-6
Fasores espaciales de una máquina polifásica en régimen permanente. Teorema de correlación fasorial	III-6
OBTENCION DE LAS MAGNITUDES DE FASE A PARTIR DE LOS FASORES ESPACIALES	III-11
Teorema de Correlación General en Régimen Dinámico	III-11
Correlación entre los fasores de corriente y de tensión eléctrica y las corrientes y tensiones de fase	III-13
1º Teorema: Devanados de hasta tres fases	III-13
2º Teorema: Devanados polifásicos en cortocircuito	III-14
3º Teorema: Devanados polifásicos en régimen permanente senoidal	III-15
OBTENCION DEL PAR A PARTIR DE FASORES ESPACIALES	
Expresiones del par en función de fasores espaciales	III-15
Interpretación física de las ecuaciones del par	III-21

INDICE

OBTENCION DE LA POTENCIA A PARTIR DE FASORES ESPACIALES

Potencia interna	III-24
Balance de potencias de un motor asíncrono	III-29
La potencia en un motor polifásico en régimen permanente senoidal	III-32
Potencia electromagnética	III-34

BIBLIOGRAFIA	III-37
--------------------	--------

APENDICES:

PRODUCTO VECTORIAL Y COMPLEJO DE FASORES ESPACIALES	III-39
---	--------

PRODUCTO ESCALAR Y COMPLEJO DE FASORES ESPACIALES	III-40
---	--------

FASORES ESPACIALES DE CORRIENTE Y DE TENSION ELECTRICA DE UN DEVANADO MONOFASICO SIMETRICO	III-41
--	--------

ECUACION FASORIAL DE UN DEVANADO MONOFASICO SIMETRICO	III-44
---	--------

VISUALIZACION DE UN DEVANADO POLIFASICO, SIMETRICO Y EQUILIBRADO SEGUN LA TEORIA DE LOS FASORES ESPACIALES	III-46
--	--------

INDICE ALFABETICO

PROLOGO

PROLOGO

En la actualidad los avances de la Electrónica de Potencia hacen que muchas máquinas de c.a. ya no funcionen conectadas directamente a la red sino a través de un alimentador electrónico, con lo que las corrientes que circulan por sus devanados no tienen una variación senoidal en el tiempo. Por otra parte, las modernas técnicas de control vectorial de las máquinas de c.a. se basan en el conocimiento de la respuesta de estas máquinas en régimen dinámico. Además, existen aplicaciones para estas máquinas en las que se establecen unas especificaciones rigurosas a su comportamiento, incluso durante los regímenes transitorios. Todo esto evidencia que ya no basta con conocer el comportamiento de las máquinas eléctricas de c.a. durante sus regímenes permanentes y alimentadas con corrientes senoidales, sino que es necesario abordar el estudio de sus regímenes dinámicos.

El análisis de los procesos transitorios de las máquinas eléctricas se puede realizar por medio de diversas teorías que van desde la clásica de la Máquina Generalizada a la moderna de los Fasores Espaciales, pasando por la Teoría de los Vectores Espaciales. Entre todas estas teorías, a juicio del autor, la Teoría de los Fasores Espaciales permite realizar un estudio de las máquinas eléctricas más en contacto con su realidad física, amén de utilizar una técnica ya conocida desde antiguo en la Electrotecnia como es la de representar funciones senoidales mediante fasores. Además, esta teoría se adapta muy bien al análisis de los métodos de control vectorial y permite una visualización gráfica de la situación en que se encuentra una máquina eléctrica en un momento dado. Sin embargo, en la actualidad dentro de la bibliografía mundial sólo aparece publicado un libro dedicado al estudio de esta teoría ("Fundamentos de Máquinas Eléctricas Rotativas" del profesor Luis Serrano Iribarnegaray), lo cual ha decidido al autor a escribir este texto donde se incorporan las últimas novedades que han ido surgiendo dentro la Teoría de los Fasores Espaciales.

Esta obra se ha dividido en varios tomos. En el primero se presenta la base

PROLOGO

de la Teoría de los Fasores Espaciales, restringida al caso de máquinas eléctricas simétricas en las que no se consideran los armónicos de orden superior del campo magnético. En los demás tomos se aplica esta teoría para analizar el comportamiento de la máquina asíncrona en diferentes regímenes transitorios y para establecer los principios de su control por orientación del campo. También se incluye en estos tomos una introducción al análisis de la máquina síncrona.

Por lo que se refiere al primer tomo, que el lector tiene entre sus manos, éste ha sido dividido en tres capítulos.

El primer capítulo está dedicado a repasar algunos conceptos básicos de la teoría clásica de las máquinas eléctricas, especialmente las propiedades del campo magnético del entrehierro, y a establecer los convenios e hipótesis que se van a utilizar en todo el libro. También se definen en este capítulo una serie de parámetros de las máquinas asíncronas.

El segundo capítulo presenta los fundamentos de la Teoría de los Fasores Espaciales, define los fasores espaciales que se van a utilizar después y establece las relaciones que existen entre ellos.

El tercer capítulo se dedica a relacionar los fasores espaciales con las magnitudes externas de las máquinas eléctricas y a éstas con aquellos. Así, se establecen relaciones entre los fasores espaciales con las tensiones e intensidades de fase, el par y la potencia.

En cada capítulo se incluye una bibliografía donde el lector puede ampliar los temas analizados y que representa la mayor parte de las referencias que ha utilizado el autor para redactar este libro. En los capítulos segundo y tercero se han añadido sendos apéndices en los que se desarrollan más extensamente algunos aspectos puntuales de estas lecciones.

Algunas de las exposiciones que se incluyen en este texto eran inéditas hasta ahora (hasta donde llega el conocimiento del autor) como, por ejemplo, el estudio

PROLOGO

de la potencia en las máquinas eléctricas mediante fasores espaciales del capítulo III.

El autor ha procurado que este libro sea lo más claro posible, tanto en su contenido como en su presentación, pero toda obra puede ser mejorada por lo que serán bien recibidas todas las sugerencias y avisos de errores que los lectores tengan a bien realizar.

AGRADECIMIENTOS

El autor desea mostrar su agradecimiento a aquellas personas que, de un modo u otro, han colaborado en la confección de este libro.

En primer lugar, al profesor D. Luis Serrano que le inició en el estudio de la Teoría de los Fasores Espaciales y que le transmitió su interés por estos temas. Sus sugerencias le han servido al autor para perfeccionar esta publicación.

También a sus compañeros los profesores D. Jose Antonio de Gurrutxaga y D. Fernando Mantilla, cuyos comentarios sobre el borrador de este libro han permitido mejorarlo. El profesor Mantilla también ha autorizado la reproducción de las figuras I-1 y I-3 de las que es autor.

Por último, a sus alumnos, cuyas preguntas le han permitido redactar mejor y hacer más clara esta obra.

LISTA DE SIMBOLOS

LISTA DE SIMBOLOS

A	Densidad lineal de corriente. Capa de corriente.
A_M	Máxima densidad lineal de corriente.
a	Subíndice que señala la componente real en el sistema de coordenadas del estator.
aro	Subíndice relativo a los aros de cortocircuito de una jaula de ardilla.
B	Valor medio en el entrehierro de la componente radial de \vec{B} .
B_M	Valor máximo de B.
\bar{B}	Fasor espacial de inducción magnética.
\vec{B}	Inducción magnética.
b	Subíndice que señala la componente imaginaria en el sistema de coordenadas del estator.
b	Subíndice que se refiere a una barra de una jaula de ardilla.
C_i	Constante de un devanado definida por la ecuación (II-26).
C_u	Constante de un devanado definida por la ecuación (II-25).
D	Diámetro del entrehierro.
D	Eje real del sistema de coordenadas del rotor.
d	Eje real del sistema de coordenadas k.
E	Valor eficaz de la f.e.m. de una fase.
\bar{E}	Fasor temporal de f.e.m.
e	F.e.m.
e	Base de los logaritmos neperianos.
\bar{e}	Fasor espacial de f.e.m. inducida.
F	Tensión magnética.
F_M	Valor máximo de la tensión magnética del entrehierro.
\bar{F}	Fasor espacial de tensión magnética.
f.c.e.m.	Fuerza contraelectromotriz.
f.d.p.	Factor de potencia.

LISTA DE SIMBOLOS

f.e.m.	Fuerza electromotriz.
g	Subíndice para especificar que un ángulo es geométrico.
gir	Subíndice para las f.e.m.s de rotación o giro.
\vec{H}	Intensidad magnética.
H	Subíndice para especificar que unos enlaces de flujo o una inductancia son principales o comunes.
I	Valor eficaz de la corriente de una fase.
\bar{I}	Fasor temporal de corriente.
Im	Operador que significa "Parte imaginaria de".
i	Valor instantáneo de una corriente de fase.
\vec{i}	Fasor espacial de corriente.
\vec{i}'	Fasor matemático de corriente. Vector espacial de corriente.
\vec{i}	Vector unitario del eje x del sistema de coordenadas.
j	$j = \sqrt{-1}$
\vec{j}	Vector unitario del eje y del sistema de coordenadas.
K	Fase genérica de un devanado polifásico.
K_M	Constante de una máquina definida por la ecuación (III-37).
k	Número de orden de la fase K.
k	Superíndice que indica que un fasor está referido al sistema de coordenadas k.
\vec{k}	Vector unitario del eje z del sistema de coordenadas.
L	Inductancia.
L_{HK}	Inductancia magnetizante de la fase K.
L_R, L_S	Coefficientes de una máquina asíncrona definidos por la ecuación (I-17).
L_{SR}	Inductancia mutua entre una fase del estator y una fase del rotor cuando ambas están alineadas.
$L_\mu = L_{\mu S}$	Coefficiente del estator de una máquina asíncrona dado por la ec. (I-17).
$L_{\mu R}$	Coefficiente del rotor de una máquina asíncrona dado por la ec. (I-17).
$L_{\sigma R}, L_{\sigma S}$	Coefficientes definidos en la ecuación (I-16).
l	Longitud axial del entrehierro.

LISTA DE SIMBOLOS

I_{μ}	Coeficiente de una máquina definido por la ec. (II-12).
I_{σ}	Coeficiente de un devanado definido por la ec. (II-22) o la ec. (II-35).
M	Par eléctrico o interno.
M	Subíndice para el valor máximo.
M_L	Par resistente.
M_u	Par útil.
m	Número de fases de un devanado.
m	Número de barras de una jaula de ardilla.
m	Subíndice que significa que se está usando el convenio de signos motor.
maq	Subíndice para representar que una magnitud es de máquina, es decir, que es debida a la actuación conjunta de todos sus devanados (estator más rotor).
N	Número de espiras en serie de una fase.
P	Potencia.
P_a	Potencia electromagnética.
P_{Cu}	Potencia de pérdidas en el cobre.
P_{Fe}	Potencia de pérdidas en el hierro.
P_m	Potencia de pérdidas mecánicas.
P_{mag}	Potencia magnética.
P_{pR}	Potencia de pérdidas en el rotor.
P_S	Potencia absorbida por el estator.
P_u	Potencia útil.
p	Número de pares de polos.
Q	Eje imaginario del sistema de coordenadas del rotor.
Q_S	Potencia reactiva absorbida por una máquina polifásica cuando funciona en régimen permanente senoidal.
q	Eje imaginario del sistema de coordenadas k.
R	Resistencia.
R	Subíndice para representar que una magnitud es del rotor.
R	Superíndice que indica que un fasor está referido al sistema de coorde-

LISTA DE SIMBOLOS

	nadas del rotor.
Re	Operador que significa "Parte real de".
r	Coefficiente de un devanado definido por la ec. (II-21) o la ec. (II-35).
S	Superficie.
s	Subíndice para representar que una magnitud es del estator.
s	Superíndice que indica que un fasor está referido al sistema de coordenadas del estator.
\bar{S}_S	Potencia compleja absorbida por una máquina polifásica cuando funciona en régimen permanente senoidal.
T_R, T_S	Constantes de tiempo del rotor y del estator, respectivamente.
t	Tiempo.
tran	Subíndice para las f.e.m.s de transformación.
U	Valor eficaz de la tensión de una fase.
\bar{U}	Fasor temporal de tensión eléctrica.
u	Valor medio por conductor de la tensión eléctrica en un punto.
\bar{u}	Fasor espacial de tensión eléctrica.
\bar{u}'	Fasor matemático de tensión eléctrica. Vector espacial de tensión.
Z	Número de conductores en serie de una fase.
α	Eje real del sistema de coordenadas del estator.
α	Coordenada angular medida como ángulo eléctrico.
α_g	Coordenada angular medida como ángulo geométrico.
β	Eje imaginario del sistema de coordenadas del estator.
γ	Angulo eléctrico donde algunas magnitudes alcanzan su valor máximo positivo.
γ	Angulo eléctrico entre dos fases consecutivas de un devanado polifásico.
$\Delta \bar{u}_{ind}$	Fasor espacial de caída de tensión inductiva en un devanado debida a sus enlaces de flujo de dispersión.
$\Delta \bar{u}_{res}$	Fasor espacial de caída de tensión resistiva en un devanado.
ε	Angulo eléctrico del sistema de coordenadas del rotor respecto al sistema de coordenadas del estator.

LISTA DE SIMBOLOS

θ	Angulo eléctrico donde son máximas la capa de corriente y el flujo de corona. Este ángulo también define los ejes de devanado de las fases.
χ	Angulo entre los fasores espaciales \bar{i}_{maq} e \bar{i}_R (Fig. III-2).
μ	Subíndice para las inductancias magnetizantes.
μ_0	Permeabilidad magnética del vacío.
ξ_b	Factor de bobinado.
ρ	Angulo eléctrico del sistema de coordenadas k respecto al sistema de coordenadas del estator.
σ	Coefficiente de dispersión de Blondel.
σ	Subíndice para los enlaces de flujo y las inductancias de dispersión.
σ_R, σ_S	Coefficientes de dispersión del rotor y del estator, respectivamente.
Φ	Flujo magnético.
Φ_{cor}	Flujo de corona.
Φ_{corM}	Valor máximo del flujo de corona.
$\bar{\Phi}_{cor}$	Fasor espacial de flujo de corona.
Φ_M	Flujo por polo.
φ_S	Angulo correspondiente al f.d.p. de una máquina polifásica que funciona en régimen permanente senoidal.
ψ	Enlaces de flujo magnético o flujo concatenado.
Ω	Velocidad geométrica (medida en radianes geométricos/segundo).
ω	Velocidad eléctrica (medida en radianes eléctricos/segundo).
	Representa la operación de calcular el módulo de un vector o de un fasor y darle un signo de acuerdo con el convenio adoptado.
*	Representa la operación de calcular el conjugado de un fasor.
×	Producto vectorial de vectores o de fasores.
•	Producto escalar de vectores o de fasores.
-	Colocado sobre otro símbolo indica que se trata de un fasor.
→	Colocado sobre otro símbolo indica que se trata de un vector.

CAPITULO 1º:

CONCEPTOS BASICOS

- **Introducción**
- **Definiciones y propiedades del campo magnético**
- **Hipótesis simplificativas**
- **Inducción y tensión magnéticas. Capa de corriente**
- **Flujo por polo**
- **Inductancias de las máquinas eléctricas**
- **Otros coeficientes de las máquinas asíncronas**
- **Bibliografía**

CAPITULO 1º: CONCEPTOS BASICOS

INTRODUCCION

- * Este capítulo está destinado a repasar algunos conceptos que más adelante se van a utilizar al analizar la máquina de inducción en régimen transitorio y que corresponden a un curso elemental de Máquinas Eléctricas. Estos conceptos se suponen ya conocidos por el lector por lo que aquí sólo se hará una presentación sucinta y poco detallada de ellos.

El lector interesado en estudiar más profundamente estos conceptos puede acudir a cualquier libro de texto utilizado en las asignaturas de Teoría de Máquinas Eléctricas de las Escuelas Técnicas Superiores de Ingeniería (Ver el apartado de Bibliografía de este capítulo).

DEFINICIONES Y PROPIEDADES DEL CAMPO MAGNETICO

Inducción y flujo magnéticos

- * Las **líneas de inducción magnética** son líneas tangentes en cada uno de sus puntos al vector inducción magnética \vec{B} .

La concentración de líneas de inducción en una zona del espacio es proporcional al valor de la inducción magnética en dicha zona.

- * El **flujo magnético** Φ a través de una superficie S se obtiene mediante esta integral de superficie (Fig. I-1):

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \bullet d\vec{S} \quad (\text{I-1})$$

donde el vector diferencial de superficie, $d\vec{S}$, en cada punto es perpendicular a la superficie S y \bullet es el operador producto escalar de dos vectores.

CONCEPTOS BASICOS

Según el sentido de $d\vec{S}$ en la expresión (I-1) se habla de flujo entrante o saliente. En el caso de que S sea una superficie cerrada se toma usualmente $d\vec{S}$ con sentido saliente.

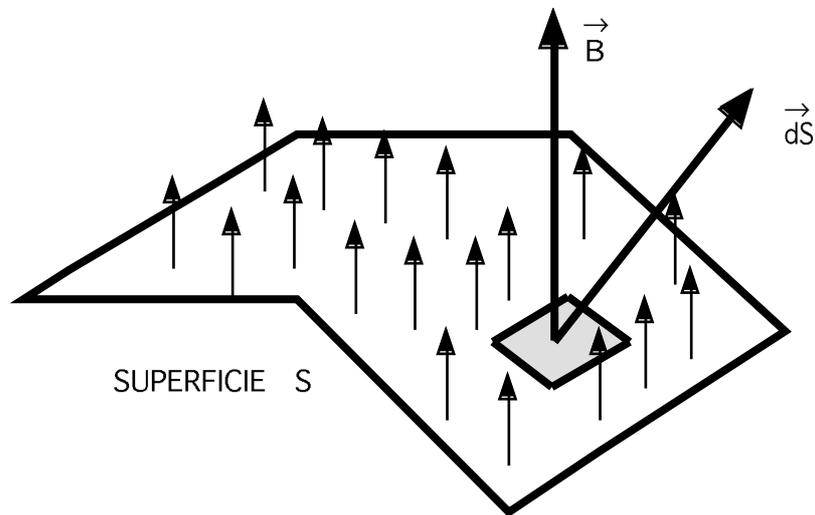


Fig. I-1: Definición del flujo magnético Φ

* El campo \vec{B} tiene divergencia nula en todos sus puntos, luego se trata de un campo solenoidal y posee estas propiedades:

- Carece de puntos fuente y sumidero; es decir, es imposible encontrar un polo magnético aislado. Aunque un imán sea troceado muchas veces, cada una de sus partes tendrá siempre dos polos magnéticos.
- Las líneas de inducción, por lo tanto, no podrán nacer en un punto y morir en otro. Estas líneas son siempre cerradas.
- Como consecuencia de lo anterior, el flujo magnético a través de cualquier superficie cerrada es siempre nulo.
- La propiedad anterior conlleva el que los flujos magnéticos a través de superficies abiertas limitadas por el mismo contorno L (Fig. I-2) sean iguales.
- Aunque inicialmente el flujo es un concepto ligado a una superficie, la propiedad anterior permite definir el **flujo de una espira** (la cuál es

un contorno cerrado) como el flujo que atraviesa cualquiera de las superficies limitadas por dicha espira.

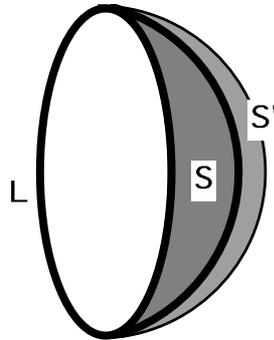


Fig. I-2: Las superficies abiertas S y S' están limitadas por el mismo contorno L, luego están sometidas al mismo flujo magnético.

De las propiedades que se acaban de exponer se deduce que el concepto de **polo magnético**, como zona fuente o sumidero de las líneas de inducción magnética, no tiene un sentido físico riguroso. Sin embargo, resulta cómodo utilizar esta noción de polo referida a un cuerpo que está en el seno de un campo magnético. De esta manera, un polo Norte de un cuerpo es una zona del mismo de donde salen líneas de inducción magnética hacia el exterior y un polo Sur es una zona del cuerpo donde penetran líneas de inducción procedentes del exterior (Fig. I-3).

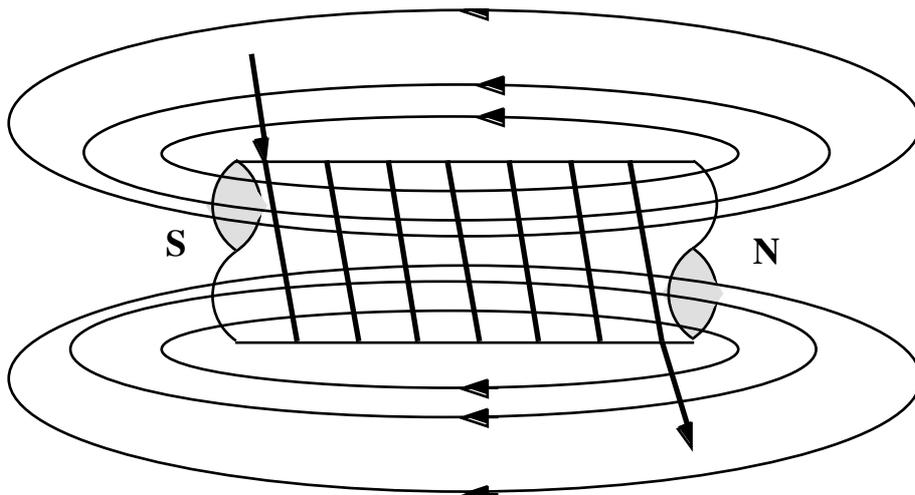


Fig. I-3: Polos Norte y Sur de un solenoide

Enlaces de flujo

- * Sabemos que la Ley de Faraday indica que en una espira atravesada por un flujo magnético Φ aparece una f.e.m. e tal que

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Si tenemos una fase de N espiras en serie, la f.e.m. total inducida en la fase será igual a la suma de las N f.e.m.s inducidas en sus espiras:

$$e = e_1 + e_2 + \dots + e_N = -\left(\frac{d\Phi_1}{dt} + \frac{d\Phi_2}{dt} + \dots + \frac{d\Phi_N}{dt}\right)$$

Y, por lo tanto, tenemos que

$$e = -\frac{d}{dt}(\Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_N) = -\frac{d\psi}{dt}$$

donde

$$\psi = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_N$$

son los **enlaces de flujo** o **flujo concatenado**¹ por la fase.

Si la fase pertenece a un devanado concentrado, de tal manera que todas sus espiras están sometidas simultáneamente al mismo flujo Φ , se cumplirá que

$$\psi = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_N = N \cdot \Phi$$

Si, como es habitual en las máquinas eléctricas, la fase forma parte de un devanado distribuido, las espiras que la forman están sometidas a flujos diferentes. En el caso de que la inducción magnética que actúa sobre la fase esté distribuida senoidalmente en el espacio se cumple que

$$\psi = N \cdot \xi_b \cdot \Phi \quad (\text{I-2})$$

¹ En los países de habla inglesa esta magnitud se suele representar por λ .

Donde

N es el número de espiras en serie de la fase.

ξ_b es el factor de bobinado de la fase.

Φ es el flujo que atravesaría a una espira de paso diametral situada de tal forma que sus ejes ² coincidieran con los de la fase.

Inductancias

- * Si una fase J recorrida por la corriente i_J genera una inducción magnética que al actuar sobre otra fase K hace que ésta reciba un flujo concatenado o enlaces de flujo Ψ_{KJ} , se denomina **inductancia mutua** o **coeficiente de inducción mutua** ³ entre K y J a este coeficiente:

$$L_{KJ} = \frac{\Psi_{KJ}}{i_J} \quad (\text{I-3})$$

En los medios magnéticos lineales (donde la permeabilidad magnética es constante) la inductancia mutua entre dos fases depende sólo de la geometría del sistema. Si las fases están situadas sobre un material ferromagnético, este coeficiente depende también del valor de las corrientes que circulen por los bobinados.

- * En el caso de que sea la misma fase K, recorrida por la corriente i_K , la que genera la inducción magnética y la que origina sobre sí misma los enlaces de flujo Ψ_{KK} , se define otro coeficiente, análogo al anterior, denominado **inductancia propia**, **autoinductancia** o **coeficiente de autoinducción**:

$$L_{KK} = \frac{\Psi_{KK}}{i_K} \quad (\text{I-4})$$

² En el siguiente apartado se definen los ejes de una fase.

³ En otros libros se puede encontrar este coeficiente designado por medio de la letra M.

Campos magnéticos total, común y de dispersión

* Es sabido que una máquina asíncrona consiste básicamente en un circuito magnético, formado por el estator, el rotor y un entrehierro de espesor δ uniforme, y dos devanados, uno situado en el estator y otro en el rotor.

Cuando estos devanados están recorridos por corrientes se genera un campo magnético **total** que se puede descomponer en dos partes:

- a) El campo magnético **común**, también denominado **principal** o **magnetizante**, cuyas líneas de inducción recorren la totalidad del circuito magnético común de la máquina. Es decir, circulan por el estator y el rotor atravesando todos los devanados.
- b) El campo de **dispersión**, también denominado de **fugas**, que incluye el resto de las líneas de inducción.

En general, siempre que se habla de inducciones y tensiones magnéticas, así como de flujos por polo ⁴, se sobreentiende que se refieren a campos comunes. El campo magnético de dispersión sólo se considera en los enlaces de flujo y en las inductancias.

Por lo tanto, sólo será necesario indicar de qué tipo de campo se está hablando -total, común o de dispersión- al referirnos a los enlaces de flujo y a las inductancias. En los demás casos se trata de campos magnéticos comunes.

La nomenclatura que utilizaremos será la siguiente:

- Los enlaces de flujo y las inductancias principales o magnetizantes llevarán el subíndice H. También habrá inductancias magnetizantes con el subíndice μ .
- Los enlaces de flujo y las inductancias de dispersión llevarán el subíndice σ .
- Los enlaces de flujo y las inductancias totales no llevarán ningún

⁴ En los siguientes apartados se definen la tensión magnética y el flujo por polo.

subíndice especial.

Por consiguiente, en una fase tendremos que

$$\Psi = \Psi_H + \Psi_\sigma \quad (I-5)$$

Observese que con esta nomenclatura la inducción magnética, la tensión magnética y el flujo por polo -que no llevan ningún subíndice especial que indique si se trata de campo magnético común, de dispersión o total- se refieren siempre a campos magnéticos comunes. Mientras que cuando los enlaces de flujo o las inductancias no llevan ningún subíndice especial se refieren a campos magnéticos totales.

HIPOTESIS SIMPLIFICATIVAS

- * En este libro el análisis de la máquina asíncrona en régimen transitorio se va a realizar mediante la Teoría de los Fasores Espaciales. Este método permite estudiar los regímenes dinámicos de cualquier tipo de máquina eléctrica, por muy extraña que ésta sea (con devanados asimétricos, con un número de fases cualquiera, con cortocircuitos entre espiras a causa de una avería, ...).

Para no complicar excesivamente nuestro análisis no realizaremos un estudio general sino que nos limitaremos al caso más simple, y más frecuente, de máquina asíncrona polifásica ideal de construcción simétrica y equilibrada.

- * Una máquina es **simétrica** si tanto su circuito magnético como todas las fases de sus devanados, tanto del estator como del rotor, son simétricos y si, además, los números de polos del estator y del rotor son iguales.

En el caso de máquinas asíncronas, en las que el entrehierro se puede considerar de espesor δ uniforme (si se desprecia el efecto del ranurado del estator y del rotor), el circuito magnético siempre es completamente simétrico. Luego la máquina asíncrona será simétrica si lo son todas las fases de sus devanados y si todas generan campos magnéticos con el mismo número de polos.

Una fase se considera que es simétrica si:

- a) Al ser recorrida por una corriente da lugar a un campo magnético en el entrehierro con un número de polos par, de forma que alternativamente se tienen polos Norte y polos Sur a lo largo de la circunferencia del entrehierro. Se denomina p al número de pares de polos, es decir, a la mitad del número de polos.
- b) Para cada par de polos tiene el mismo número de bobinas y la misma disposición espacial de las mismas respecto al eje que separa los dos polos del par.
- c) El conjunto de las bobinas correspondientes a un par de polos se puede dividir en dos mitades antisimétricas; esto quiere decir que estas dos mitades dan lugar en el espacio a distribuciones de corriente similares, pero de sentidos opuestos.

En una máquina simétrica se definen los ángulos eléctricos o magnéticos de forma que a un ciclo magnético (un par de polos) correspondan 360 grados eléctricos o 2π radianes eléctricos. La relación entre ángulos eléctricos α y ángulos geométricos α_g es

$$\alpha = p \cdot \alpha_g \quad (\text{I-6})$$

En este libro los ángulos que no se representen con el subíndice g (que indica que el ángulo es geométrico) se sobreentiende que son eléctricos.

En una fase simétrica se pueden definir dos *ejes de simetría* para cada par de polos (Fig. I-4):

- a) El eje de devanado es el eje de simetría de la distribución espacial de corrientes a que da lugar la fase cuando se la alimenta con corriente. En puntos equidistantes de este eje las distribuciones espaciales de corriente son idénticas y del mismo sentido.

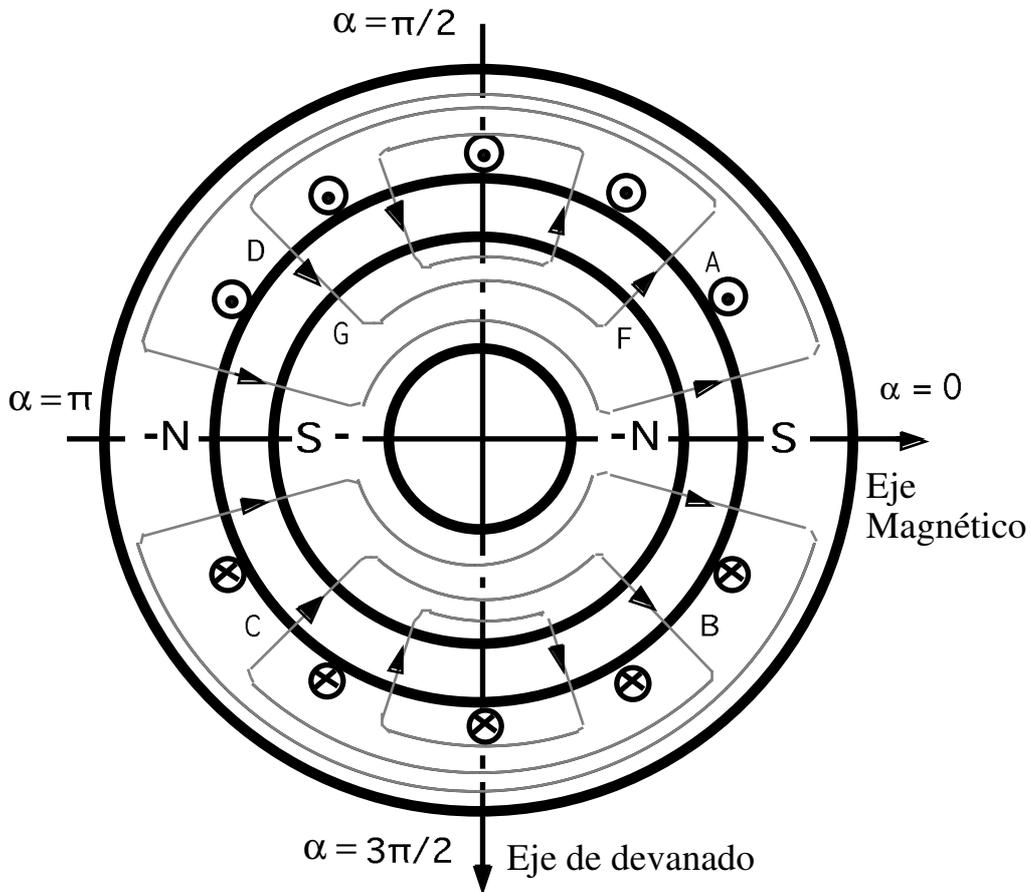


Fig. I-4: Fase simétrica de dos polos con sus ejes de simetría.

- b) El eje magnético es el eje de simetría de la inducción magnética generada por la fase cuando circula corriente por ella si la máquina es ideal. En puntos equidistantes de este eje las distribuciones espaciales de corriente son idénticas, pero de signos opuestos.

Estos dos ejes de simetría por par de polos forman entre sí un ángulo eléctrico de 90 grados sexagesimales.

* Una máquina polifásica de m fases se dice que tiene devanados **equilibrados** si para cada uno de estos devanados sus fases verifican que:

- a) Están igualmente construidas.

b) Los ejes de devanado de dos fases consecutivas forman entre sí un ángulo eléctrico de $2\pi/m$ radianes.

* En una máquina asíncrona **ideal** se acepta que se cumplen estas hipótesis:

a) El estator y rotor son lisos y concéntricos. Esto significa que se desprecia el efecto de las ranuras y se supone que el entrehierro tiene un espesor δ uniforme que, además, es despreciable frente al diámetro D de la circunferencia del entrehierro.

b) Los conductores son paralelos al eje de la máquina y de secciones despreciables. Se supone, pues, nula la influencia del efecto piel (o skin) y que las distribuciones espaciales de corrientes del estator y del rotor pueden ser sustituidas por sendas capas de corriente equivalentes de espesor despreciable y localizadas sobre las superficies límites interna y externa del entrehierro, respectivamente.

c) El circuito magnético es ideal. Esto significa que no hay pérdidas en el hierro y que la permeabilidad magnética del hierro se supone infinita comparada con la del aire.

Como consecuencia de lo anterior, se desprecia el efecto de la saturación de las piezas de hierro del circuito magnético y se puede aplicar el principio de superposición a la inducción magnética del entrehierro \vec{B} .

d) Vamos a estudiar lo que sucede en secciones perpendiculares al eje de la máquina ⁵ lo suficientemente alejadas de los extremos de dicho eje como para que no tengan influencia los efectos de los bordes de la máquina. Por consiguiente, se obtendrá la misma distribución del campo magnético en cualquiera de estas secciones, esto es, el campo no variará según la dirección axial (dirección del eje de giro de la máquina).

e) Los enlaces de flujo de dispersión de una fase son proporcionales en todo

⁵ En estas secciones utilizaremos coordenadas polares. Por lo tanto, tendremos una coordenada en la dirección radial y otra coordenada angular. Denominaremos α a esta coordenada angular (Fig. I-4) si se mide en ángulos eléctricos y α_g si es medida en ángulos geométricos. El sentido positivo para α es el antihorario y el sentido positivo de la coordenada radial va dirigido desde el centro al exterior de la máquina.

momento a la corriente instantánea que la recorre ⁶.

- f) No existen armónicos espaciales de orden superior en los campos magnéticos de estator y rotor. Todos los campos tienen una distribución perfectamente senoidal a lo largo de la circunferencia del entrehierro.

INDUCCION Y TENSION MAGNETICAS. CAPA DE CORRIENTE

Inducción magnética

- * Para el estudio del comportamiento de las máquinas eléctricas no hace falta conocer la inducción magnética común \vec{B} en todos los puntos de la máquina, sino sólo en el entrehierro. Es más, bastará con conocer el valor medio B en cada lugar del entrehierro de la componente radial de la inducción:

$$B = \frac{1}{\delta} \int_{\delta} \vec{B} \cdot d\vec{l} \quad (\text{I-7a})$$

\vec{B} es la inducción magnética.

$d\vec{l}$ es el vector diferencial de longitud según la dirección radial.

• es el operador producto escalar de dos vectores.

δ es el espesor del entrehierro.

\int_{δ} representa una integral a lo largo del espesor δ del entrehierro.

B tiene signo positivo en los lugares del entrehierro donde las líneas de inducción salen del rotor hacia el estator y signo negativo donde las líneas de inducción entran al rotor.

Esto permite trabajar con una magnitud escalar B en lugar de con una magnitud vectorial \vec{B} .

Según las hipótesis d y f establecidas anteriormente, B varía en el espacio sólo a lo largo de la circunferencia del entrehierro, es decir, según la coor-

⁶ Véase el pie de la página I-18.

denada angular α y esta variación es senoidal.

Además, se puede aplicar el principio de superposición (hipótesis c); por lo tanto, si el valor medio en el entrehierro de la componente radial de la inducción magnética común generada por los devanados del estator es B_S , la generada por los devanados del rotor es B_R , la de máquina B_{maq} , generada conjuntamente por todos los devanados de la máquina, vale

$$B_{maq} = B_S + B_R \quad (I-7b)$$

De momento nos referiremos a una inducción magnética genérica B debida a uno o a varios devanados, sin particularizar si es del estator, del rotor o de máquina.

Tensión magnética

* Se denomina **tensión magnética del entrehierro F** a una magnitud escalar, función en el espacio sólo de la coordenada angular α , definida en cada punto del entrehierro por esta expresión:

$$F = \int_{\delta} \vec{H} \cdot d\vec{l} \quad (I-8)$$

donde \vec{H} es la intensidad magnética.

Si μ_0 es la permeabilidad magnética del aire, en el entrehierro se cumple que

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H}$$

En consecuencia, se obtiene que

$$F = \int_{\delta} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{\delta} \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot d\vec{l}$$

$$F = \frac{B}{\mu_0} \cdot \delta \rightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0}{\delta} \cdot F} \quad (I-9)$$

De la expresión (I-9) se deduce que el signo de F en cada punto del entrehierro es el mismo que el de B.

- * Se puede demostrar que una fase recorrida por una corriente i genera una tensión magnética en el entrehierro, cuyo armónico fundamental en el espacio (el único que vamos a tener en cuenta en una máquina ideal) tiene este valor máximo F_M :

$$F_M = \frac{4}{\pi} \xi_b \frac{N \cdot i}{2p} = \xi_b \frac{Z \cdot i}{\pi p} \quad (I-10)$$

Donde

ξ_b es el factor de bobinado de la fase.

N es el número de espiras en serie de la fase.

Z es el número de conductores en serie de la fase. Evidentemente se cumple que $Z = 2N$.

p es el número de pares de polos de la máquina.

Capa de corriente

- * Una **capa de corriente** es un devanado ideal formado por infinidad de conductores de espesor despreciable, aislados entre sí y colocados según la dirección axial, unos al lado de otros, de manera que cubran la totalidad de la circunferencia del entrehierro.
- * La capa de corriente es senoidal si las corrientes que circulan por estos conductores son tales que dan lugar una distribución senoidal de la densidad lineal de corriente A (corriente por unidad de longitud siguiendo la dirección de la circunferencia del entrehierro) de este devanado según la coordenada angular α .

Una capa de corriente así da lugar a una tensión magnética del entrehierro perfectamente senoidal, cuyo valor máximo F_M está relacionado con el valor

máximo A_M de la densidad lineal de corriente mediante la expresión

$$F_M = \frac{D}{2p} A_M \quad (\text{I-11})$$

donde D es el diámetro del entrehierro.

Por convenio, se considera que la densidad lineal de corriente A tiene sentido positivo en aquellos puntos del entrehierro en los que las corrientes son entrantes a un plano perpendicular al eje de la máquina y tiene sentido negativo en los puntos donde las corrientes son salientes.

Cuando se analizan sólo los primeros armónicos espaciales, o armónicos fundamentales, de las inducciones magnéticas en el entrehierro, podremos sustituir un devanado real por una capa de corriente senoidal equivalente tal que ambos devanados originen el mismo primer armónico del campo magnético. Así, de las expresiones (I-10) y (I-11) obtenemos que la capa de corriente senoidal equivalente a una fase tiene un valor máximo dado por esta relación:

$$F_M = \frac{D}{2p} A_M = \frac{4}{\pi} \xi_b \frac{N \cdot i}{2p}$$

$$\boxed{A_M = \frac{4}{\pi D} \cdot \xi_b \cdot N \cdot i = \frac{2}{\pi D} \cdot \xi_b \cdot Z \cdot i} \quad (\text{I-12})$$

- * Naturalmente, todas las magnitudes que hemos analizado en este apartado (inducción y tensión magnéticas, B y F , y capa de corriente, A) pueden variar en el tiempo además de variar en el espacio según la coordenada angular α .

FLUJO POR POLO

- * Se denomina **flujo por polo** Φ_M al flujo debido al campo magnético común que atraviesa a una espira de paso diametral colocada en la posición donde dicho flujo es máximo.

Si sólo se tiene en cuenta el primer armónico de la distribución de la inducción magnética en el entrehierro B , cuyo valor máximo es B_M , se obtiene que

$$\Phi_M = \frac{D \cdot l}{p} B_M \quad (I-13)$$

donde l es la longitud axial del circuito magnético de la máquina.

INDUCTANCIAS DE LAS MAQUINAS ELECTRICAS

Inductancia magnetizante de una fase de un devanado polifásico

- * Consideremos una fase de un devanado polifásico simétrico de una máquina ideal. En este caso las inductancias sólo van a depender de la geometría de la máquina, ya que se desprecia la reluctancia magnética del hierro. Por otra parte, sólo tendremos en cuenta el campo magnético común y despreciaremos, como siempre, los efectos de los armónicos espaciales de orden superior de la distribución de la inducción magnética en el entrehierro; es decir, sólo consideraremos el armónico fundamental.
- * En estas condiciones, la fase K , cuando es recorrida por la corriente i_K , genera una tensión magnética cuyo valor máximo (según (I-10)) es

$$F_{KM} = \frac{4}{\pi} \xi_{bK} \frac{N_K \cdot i_K}{2p}$$

Luego, la inducción magnética del entrehierro generada únicamente por la acción de la fase K tiene (según (I-9)) un valor máximo

$$B_{KM} = \frac{\mu_o}{\delta} \cdot F_{KM}$$

y el flujo por polo debido a esta inducción magnética vale (según (I-13))

$$\Phi_{KM} = \frac{D \cdot l}{p} B_{KM}$$

Dado que la fase K es la que genera el campo, la espira de paso diametral cuyos ejes coinciden con los de la fase K está atravesada por el flujo por polo Φ_{KM} .

Luego, de la expresión (I-2) obtenemos que, si el flujo común de la fase K es el flujo por polo Φ_{KM} , los enlaces de flujo común de la fase K debidos a la inducción magnética generada por la misma fase K, Ψ_{HKK} , valen

$$\Psi_{HKK} = N_K \cdot \xi_{bK} \cdot \Phi_{KM}$$

y la inductancia magnetizante de la fase K, de acuerdo con (I-4), vale lo siguiente

$$L_{HK} = \frac{\Psi_{HKK}}{i_K} = \frac{\mu_o \cdot l \cdot D}{2 \cdot \pi \cdot \delta} \left(\frac{2 \cdot N_K \cdot \xi_{bK}}{p} \right)^2$$

$$\boxed{L_{HK} = \frac{\mu_o \cdot l \cdot D}{2 \cdot \pi \cdot \delta} \left(\frac{Z_K \cdot \xi_{bK}}{p} \right)^2} \quad (I-14)$$

Donde

μ_o es la permeabilidad magnética del aire.

l es la longitud axial del entrehierro.

D es el diámetro del entrehierro.

δ es el espesor del entrehierro.

p es el número de pares de polos de la máquina.

ξ_{bK} es el factor de devanado de la fase K.

N_K es el número de espiras en serie de la fase K.

Z_K es el número de conductores en serie de la fase K. Luego, $Z_K = 2 \cdot N_K$

En un devanado polifásico simétrico todas las fases son iguales y, en consecuencia, todas poseen iguales inductancias magnetizantes.

En una máquina asíncrona denominaremos L_{HS} a la inductancia magnetizante de una fase del estator y L_{HR} a la de una fase del rotor.

Inductancia mutua entre una fase del estator y una fase del rotor cuando ambas están alineadas

* Esta inductancia mutua se obtiene a partir de la ecuación (I-3) cuando K es una de las fases del estator y J es una fase del rotor. Esta inductancia corresponde a la posición donde ambas fases tienen sus ejes alineados, por lo que el flujo que atravesaría a una espira de paso diametral cuyos ejes coincidieran con los de la fase del estator sería precisamente el flujo por polo originado por la fase del rotor. Haciendo un desarrollo similar al efectuado para la inductancia magnetizante de una fase de un devanado polifásico se obtiene que la inductancia mutua entre una fase del estator y del rotor cuando ambas están alineadas, L_{SR} , vale

$$L_{SR} = \frac{\mu_o \cdot l \cdot D}{2 \cdot \pi \cdot \delta} \left(\frac{Z_S \cdot \xi_{bS}}{p} \right) \left(\frac{Z_R \cdot \xi_{bR}}{p} \right) \quad (I-15)$$

donde Z_S y ξ_{bS} son el número de conductores y el factor de bobinado de una fase del estator y Z_R y ξ_{bR} son el número de conductores y el factor de bobinado de una fase del rotor, respectivamente.

El lector puede comprobar fácilmente que se verifica que $L_{RS} = L_{SR}$ y también que

$$L_{SR} = \sqrt{L_{HS} \cdot L_{HR}}$$

OTROS COEFICIENTES DE LAS MAQUINAS ASINCRONAS ⁷

- * Si una fase K tiene unos enlaces de flujo de dispersión $\Psi_{\sigma K}$ y está recorrida por una corriente i_K , se denomina $L_{\sigma K}$ a este cociente ⁸:

$$L_{\sigma K} = \frac{\Psi_{\sigma K}}{i_K} \quad (\text{I-16})$$

Normalmente, en una máquina real este parámetro está poco influenciado por el grado de saturación del hierro de la máquina, ya que las líneas de campo de dispersión recorren trayectos con largos tramos de aire.

En un devanado equilibrado todas sus fases tienen igual valor de $L_{\sigma K}$. En el caso de máquinas asíncronas simétricas y con devanados equilibrados denominaremos $L_{\sigma S}$ al valor de este coeficiente para las fases del estator y $L_{\sigma R}$ para las fases del rotor.

- * En una máquina asíncrona con m_S fases en el estator y m_R fases en el rotor se tienen estos coeficientes:

$$\begin{aligned} L_{\mu S} = L_{\mu} &= \frac{m_S}{2} L_{HS} \quad ; \quad L_{\mu R} = \frac{m_R}{2} L_{HR} \\ L_S &= L_{\mu S} + L_{\sigma S} = \frac{m_S}{2} L_{HS} + L_{\sigma S} \\ L_R &= L_{\mu R} + L_{\sigma R} = \frac{m_R}{2} L_{HR} + L_{\sigma R} \end{aligned} \quad (\text{I-17})$$

Como veremos más adelante, si el rotor real de la máquina se sustituye por uno equivalente reducido al estator sucede que

⁷ En otros libros el lector puede encontrar estos coeficientes representados con el subíndice l en lugar de σ y m en lugar de μ .

⁸ Al definir $L_{\sigma K}$ mediante la ecuación (I-16) se está suponiendo que los enlaces de flujo de dispersión de una fase sólo son debidos a la corriente que circula por dicha fase. En realidad los flujos de dispersión son debidos a la influencia de todas las corrientes de la máquina, pero se obtienen resultados suficientemente precisos a nivel industrial si se trabaja con la simplificación anterior.

$$L_{HS} = L_{HR} = L_{SR}$$

$$m_S = m_R$$

Luego, en este caso $L_{\mu S}$ y $L_{\mu R}$ son iguales, siendo L_{μ} dicho valor común.

- * En la literatura técnica se denominan **inductancias de dispersión** del estator y del rotor a los coeficientes $L_{\sigma S}$ y $L_{\sigma R}$, respectivamente; **inductancias magnetizantes** del estator y del rotor a los coeficientes $L_{\mu S}$ y $L_{\mu R}$, respectivamente, e **inductancias propias** del estator y del rotor a los coeficientes L_S y L_R , respectivamente⁹.
- * Los **coeficientes de dispersión del estator σ_S y del rotor σ_R** vienen dados por las relaciones siguientes:

$$\sigma_S = \frac{L_{\sigma S}}{\frac{m_S}{2} L_{HS}} = \frac{L_{\sigma S}}{L_{\mu S}} \quad ; \quad \sigma_R = \frac{L_{\sigma R}}{\frac{m_R}{2} L_{HR}} = \frac{L_{\sigma R}}{L_{\mu R}} \quad (\text{I-18})$$

- * El **coeficiente de dispersión de Blondel σ** combina los coeficientes de dispersión del estator y del rotor mediante la siguiente expresión:

$$\sigma = 1 - \frac{1}{(1 + \sigma_S) \cdot (1 + \sigma_R)} \quad (\text{I-19})$$

- * Las **constantes de tiempo del estator T_S y del rotor T_R** se obtienen mediante las siguientes relaciones:

$$T_S = \frac{\frac{m_S}{2} L_{HS} + L_{\sigma S}}{R_S} = \frac{L_S}{R_S} \quad ; \quad T_R = \frac{\frac{m_R}{2} L_{HR} + L_{\sigma R}}{R_R} = \frac{L_R}{R_R} \quad (\text{I-20})$$

donde R_S y R_R son las resistencias de una fase del estator y del rotor, respectivamente.

⁹ A pesar de esta nomenclatura, observese que en la definición de estas constantes aparecen los enlaces de flujo debidos a la acción de varias corrientes distintas (para el caso de $L_{\sigma S}$ y de $L_{\sigma R}$ véase el pie de la página anterior) mientras que, en rigor, en la definición de una inductancia deben intervenir los enlaces de flujo generados por una sola corriente.

BIBLIOGRAFIA

- [1] ALGER, P. L. "Induction machines". Gordon and Breach Science Publishers. Nueva York. 1970.
- [2] CORRALES MARTIN, JUAN. "La máquina eléctrica. Teoría, construcción y funcionamiento. Tomo II: Teoría general de funcionamiento". Editorial Labor. Barcelona. 1970.
- [3] CORTES, MANUEL. "Curso moderno de máquinas eléctricas rotativas (5 Tomos)". Editores Técnicos Asociados. Barcelona. 1977.
- [4] FRAILE MORA, JESUS. "Máquinas eléctricas". Servicio de Publicaciones. Revista de Obras Públicas. Madrid. 1992.
- [5] IVANOV-SMOLENSKI, A. V. "Máquinas eléctricas (3 Tomos)". Editorial Mir. Moscú. 1980.
- [6] KOSTENKO, M.P. y PIOTROVSKI, L.M. "Máquinas eléctricas (2 tomos)". Editorial Mir. Moscú. 1976.
- [7] KOVACS, P. K. "Transient phenomena in electrical machines". Elsevier. Amsterdam. 1984.
- [8] SERRANO IRIBARNEGARAY, LUIS. "Fundamentos de máquinas eléctricas rotativas". Marcombo. Barcelona. 1989.

CAPITULO 2º:

FASORES ESPACIALES

- **Introducción**
- **Fundamentos y definiciones**
- **Sistemas de coordenadas**
- **Fasores espaciales de corriente, de tensión y de inducción magnéticas y de flujo de corona**
- **Fasor espacial de f.e.m. inducida**
- **Fasores espaciales de tensión eléctrica**
- **Bibliografía**
- **Apéndices**

CAPITULO 2º: FASORES ESPACIALES

INTRODUCCION

* Existen varias teorías para el análisis de las máquinas eléctricas en régimen transitorio.

Uno de estas teorías, que en su día fue un gran avance en el seno de la Electrotecnia, es la de la *máquina generalizada* (descrita en el tomo 5º del libro de Cortes Cherta [2]) que fue desarrollada por Park y el ingeniero húngaro-norteamericano Gabriel Kron durante los años 30 y 40. Este método goza de gran predicamento en Norteamérica.

La teoría de los *vectores espaciales* (véase el libro de Kovacs [5]) fue desarrollada en Hungría por Kovacs y Racz durante los años 50 y 60. Mediante este método se ha conseguido el control dinámico óptimo en las máquinas de c.a.

La teoría de los vectores espaciales, que en algunas ocasiones ha sido denominada erróneamente de los fasores espaciales, es usada ampliamente en Europa. Sin embargo, en su versión original, sólo es válida para máquinas trifásicas ideales, simétricas y sin armónicos espaciales del campo magnético.

La teoría de los *fasores espaciales* es obra, fundamentalmente, del checoslovaco, nacionalizado luego alemán, J. Stepina, y del español L. Serrano Iribarnegaray.

A J. Stepina se debe el inicio de la teoría así como la definición del fasor espacial de corriente y de los fasores auxiliares relacionados con él para cualquier máquina rotativa, con o sin armónicos espaciales de campo, simétrica o no. Con la ayuda de los mismos estableció las primeras expresiones teóricas correspondientes al régimen dinámico de una máquina asimétrica con devanados de configuración arbitraria, haciendo uso a tal fin de los fasores espaciales hasta entonces introducidos por él ([9], [10], [11]).

L. Serrano es el descubridor del fasor espacial de tensión y de los restantes fasores espaciales auxiliares relacionados con él, lo cual permitió la formulación de las ecuaciones dinámicas utilizando el juego completo de fasores espaciales fundamentales. Esto, le llevó a demostrar, por primera vez, que las ecuaciones del régimen transitorio de toda máquina polifásica simétrica tienen una interpretación física inmediata y son representables mediante un sencillo diagrama fasorial en el espacio ([16], [17], [18]). Asimismo, dedujo los principales teoremas de correlación fasorial y estableció las relaciones existentes entre la teoría de los fasores espaciales, la teoría de los vectores espaciales y la teoría de la máquina generalizada ([18], [19]).

El libro que el lector tiene en sus manos (uno de los primeros existentes sobre el tema en la literatura técnica mundial) sigue la teoría de los fasores espaciales y se basa en el enfoque de Stepina y Serrano, presentando algunas contribuciones complementarias al mismo. En él se simplifica la teoría para considerar únicamente máquinas polifásicas, simétricas, equilibradas, ideales y con sólo los armónicos espaciales fundamentales de los campos magnéticos, según se indicó en el capítulo 1º. No obstante, incluye las últimas novedades que han ido apareciendo sobre esta teoría.

El lector interesado en profundizar en la teoría de los fasores espaciales puede acudir, entre otras, a las publicaciones [1], [6], [7], [8], [10], [12], [14], [16], [17], [18] y [19] citadas en la bibliografía de este capítulo.

FUNDAMENTOS Y DEFINICIONES

* En las máquinas eléctricas podemos distinguir dos tipos de magnitudes: *externas e internas*.

Las magnitudes externas son observables desde el exterior de la máquina (par, corrientes, tensiones, velocidad,...), mientras que las internas se manifiestan dentro de ella (inducción magnética, capas de corriente, ...) y son las que, mediante su interacción, determinan el comportamiento de aquella.

Naturalmente, las magnitudes externas e internas están relacionadas entre sí. Así, en el caso de un motor, las corrientes de alimentación (magnitudes

externas) originan las capas de corriente y las inducciones magnéticas (magnitudes internas) que, al interactuar entre sí, dan lugar al par de la máquina (magnitud externa).

Para un usuario de la máquina puede bastar un análisis en el que sólo intervengan magnitudes externas; es decir, un estudio que considere a la máquina como una "caja negra" en la que se introducen ciertas magnitudes y se obtienen otras. Sin embargo, cuando se aspira a comprender y conocer con detalle los fenómenos que se originan en una máquina eléctrica se deberán considerar las magnitudes internas en su estudio. En este caso, el análisis consistirá en determinar las interacciones entre las magnitudes internas de la máquina y las relaciones entre éstas y las magnitudes externas. Esto exige, a su vez, un estudio previo de qué magnitudes internas son las más adecuadas para analizar la máquina.

- * En una máquina ideal se pueden encontrar multitud de variables internas escalares que en el espacio sólo varían según la coordenada angular α y en las que, además, esta variación es senoidal. Es decir, si x es una de estas magnitudes y la máquina tiene p pares de polos, x variará a lo largo de la circunferencia del entrehierro describiendo p ciclos de una senoide. Por lo tanto, si γ_g es el ángulo geométrico correspondiente a la posición donde se produce uno cualquiera de los p máximos positivos de x ¹ y X_M es este valor máximo, se tiene que

$$x = X_M \cos [p(\alpha_g - \gamma_g)] = X_M \cos [\alpha - \gamma] \quad (\text{II-1})$$

En Ingeniería Eléctrica estamos acostumbrados a representar mediante fasores temporales magnitudes escalares que varían de forma senoidal en el tiempo. Podemos aplicar el mismo procedimiento a magnitudes que varían senoidalmente en el espacio y definir el **fasor espacial** \bar{x} , asociado a la magnitud interna escalar x , como el fasor de módulo el valor máximo de x y argumento el ángulo eléctrico correspondiente a los máximos de x (Fig. II-1):

¹ Dado que la distancia entre dos puntos donde x es máxima es la correspondiente a dos polos, es decir, 2π radianes eléctricos, el valor del ángulo eléctrico $\gamma = p \cdot \gamma_g$ es el mismo independientemente de cuál de los p ángulos geométricos γ_g , correspondientes a los p puntos donde x es máxima, sea el elegido.

$$\bar{x} = X_M \left| \underline{p \cdot \gamma_g} \right. = X_M \cdot e^{j p \gamma_g} = X_M \cdot e^{j \gamma} \quad (\text{II-2})$$

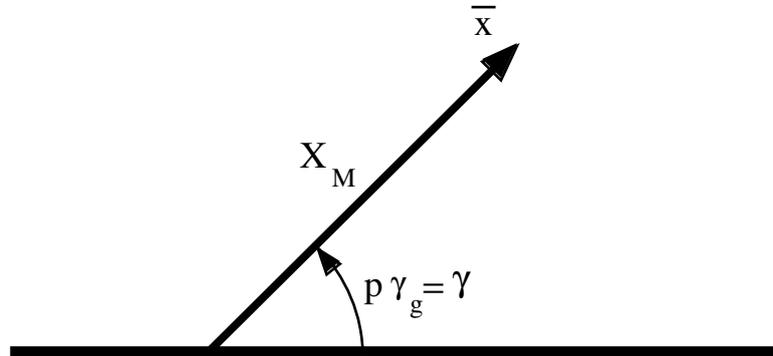


Fig. II-1: Fasor espacial correspondiente a la magnitud x de la ecuación (II-1)

La expresión (II-2) permite obtener el fasor espacial \bar{x} si se conoce la magnitud interna x . Si se da el caso contrario y se desea conocer el valor que x tendrá en un punto, cuya coordenada angular (en ángulos geométricos) vale α_g , utilizando (II-1) y (II-2) a partir del fasor \bar{x} se tiene que

$$\begin{aligned} x(\alpha_g) &= X_M \cos [p(\alpha_g - \gamma_g)] = X_M \cos [p(\gamma_g - \alpha_g)] = \\ &= \text{Re} \left\{ X_M e^{j p (\gamma_g - \alpha_g)} \right\} = \text{Re} \left\{ \left(X_M e^{j p \gamma_g} \right) e^{-j p \alpha_g} \right\} = \text{Re} \left\{ \bar{x} e^{-j p \alpha_g} \right\} \end{aligned}$$

$$\boxed{x(\alpha_g) = \text{Re} \left\{ \bar{x} e^{-j p \alpha_g} \right\}} \quad (\text{II-3})$$

(Re = Parte real de)

Es decir, *la magnitud interna x toma en el punto definido por α_g un valor igual a la proyección² del fasor \bar{x} en la dirección $\alpha = p \cdot \alpha_g$.*

En general, x es una magnitud que también varía en el tiempo, luego el fasor \bar{x} es una función del tiempo.

² En el siguiente apartado se justifica por qué la expresión (II-3) corresponde a una proyección del fasor \bar{x} .

Si x no variase de forma perfectamente senoidal en el espacio, se podría descomponer en serie de Fourier. Los armónicos de la serie son funciones senoidales de α , luego se puede asignar un fasor espacial a cada uno de ellos. Es decir, para una magnitud interna que no varíe senoidalmente en el espacio se utilizarán tantos fasores como armónicos de su serie de Fourier se quieran tener en consideración.

Observese que, si bien matemáticamente un fasor es un vector, físicamente los conceptos de vector y de fasor son diferentes. Un vector representa el valor de una magnitud vectorial (por lo tanto, con dirección y sentido) en un punto y en un instante dados. Un fasor temporal representa el conjunto de valores que va tomando a lo largo del tiempo una magnitud escalar correspondiente a una fase. Un fasor espacial representa el conjunto de valores que toma en el espacio una magnitud escalar en un instante dado. En este libro los vectores se representan con una flechita encima (\vec{x}) y los fasores se escriben con un guión (\bar{x}).

SISTEMAS DE COORDENADAS

* En nuestro estudio vamos a considerar tres sistemas de coordenadas (Fig. II-2) sobre los cuáles vamos a referir los fasores espaciales:

- a) El sistema de coordenadas del estator (α , β) está fijo en el espacio y está ligado al estator, de forma que su eje real α apunta en la dirección del eje de devanado de la fase A del estator.
- b) El sistema de coordenadas del rotor (D , Q) está fijo al rotor y su eje real D apunta en la dirección del eje de devanado de la fase A del rotor. Estos ejes giran con una velocidad angular (velocidad de giro del rotor) de Ω radianes geométricos por segundo o ω ($\omega = p \cdot \Omega$) radianes eléctricos por segundo y están desfasados respecto a los ejes (α , β) un ángulo eléctrico $\varepsilon = p \cdot \varepsilon_g$ variable en el tiempo.

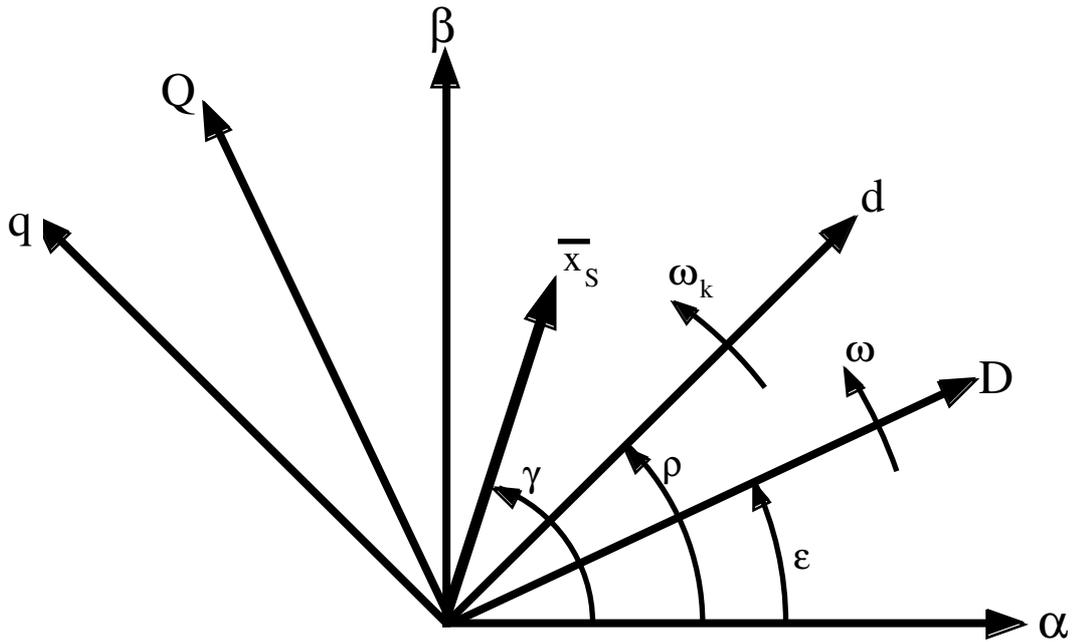


Fig. II-2: Sistemas de coordenadas

- c) El sistema de coordenadas k (d , q) es un sistema de coordenadas genérico que gira respecto a los ejes (α , β) a la velocidad de ω_k radianes eléctricos por segundo. El ángulo eléctrico entre los ejes d y α es $\rho = p \cdot \rho_g$ y varía con el tiempo. Según el estudio que queramos realizar adoptaremos un sistema k que gire a la velocidad de sincronismo ω_1 , a la velocidad de la máquina ω (con lo que se transforma en el sistema (D , Q)), a velocidad nula (con lo que se convierte en el sistema (α , β)), etc.

Obviamente se cumplirá que

$$\omega = \frac{d \epsilon}{d t} \quad ; \quad \omega_k = \frac{d \rho}{d t} \quad (\text{II-4})$$

* La nomenclatura que adoptaremos para indicar a qué sistema de coordenadas está referido cada fasor es el indicado en la tabla II-1.

SIMBOLO	MAGNITUD	SISTEMA DE COORDENADAS
$\bar{x}_S = x_{Sa} + j x_{Sb}$	Estator	Estator (α, β)
$\bar{x}_R = x_{RD} + j x_{RQ}$	Rotor	Rotor (D, Q)
$\bar{x}_S^R = x_{SD} + j x_{SQ}$	Estator	Rotor (D, Q)
$\bar{x}_S^k = x_{Sd} + j x_{Sq}$	Estator	k (d, q)
$\bar{x}_R^S = x_{Ra} + j x_{Rb}$	Rotor	Estator (α, β)
$\bar{x}_R^k = x_{Rd} + j x_{Rq}$	Rotor	k (d, q)

Tabla II-1: Nomenclatura para los fasores espaciales

Denominaremos sistema de coordenadas propio o natural de una magnitud interna del estator o del rotor al sistema de coordenadas fijo al órgano de la máquina a que corresponde dicha magnitud. Por lo tanto, el sistema de coordenadas del estator (α, β) es el sistema de coordenadas propio de las magnitudes del estator y el sistema de coordenadas del rotor (D, Q) es el sistema de coordenadas propio de las magnitudes del rotor.

Hay que señalar que cuando un fasor se expresa analíticamente, esto es, mediante un número complejo, hay que especificar el sistema de coordenadas en el que está referido (para lo cual usaremos la tabla II-1). Sin embargo, en las representaciones gráficas no se indicará el sistema de coordenadas de cada fasor porque el ángulo relativo entre los fasores que forman un diagrama fasorial espacial no depende del sistema de coordenadas elegido. Se sobreentiende que todos los fasores de un diagrama están referidos a un mismo sistema de coordenadas, que no siempre será el sistema de coordenadas propio de cada fasor.

- * El cambio de sistema de coordenadas de un fasor espacial es un proceso matemático que se corresponde con la diferente manera como es vista la magnitud interna representada por el fasor por observadores situados fijos a sistemas de coordenadas distintos.

Además, para los fasores espaciales ligados al campo magnético (los fasores \bar{i} , \bar{F} , \bar{B} y $\bar{\Phi}_{\text{cor}}$ que se definirán más adelante), que representan magnitudes que actúan sobre todas las partes de la máquina, la expresión de un fasor espacial en diferentes sistemas de coordenadas tiene también otra interpretación física: Un fasor referido a un sistema de coordenadas dado indica la forma como la magnitud interna que representa el fasor actúa sobre los devanados situados fijos al sistema de coordenadas.

Sin embargo, los fasores espaciales de tipo eléctrico (los fasores \bar{e} , \bar{u} , $\Delta\bar{u}_{\text{res}}$ e $\Delta\bar{u}_{\text{ind}}$ que se definirán después) sólo actúan sobre los devanados fijos a su sistema de coordenadas propio y carecen de esta segunda interpretación. Cuando son referidos a un sistema de coordenadas distinto del propio no representan su actuación sobre los devanados fijos al nuevo sistema de coordenadas, sino sólo como son vistos desde él.

- * En la fig. II-2 es fácil observar que

$$\bar{x}_S = X_{SM} \cdot e^{j\gamma} = X_{SM} \cdot e^{j\rho} \cdot e^{j\gamma_g}$$

$$\bar{x}_S^R = X_{SM} \cdot e^{j(\gamma-\varepsilon)} = \bar{x}_S \cdot e^{-j\varepsilon}$$

$$\bar{x}_S^k = X_{SM} \cdot e^{j(\gamma-\rho)} = \bar{x}_S \cdot e^{-j\rho}$$

$$\bar{x}_S^R = \bar{x}_S \cdot e^{-j\varepsilon}$$

$$\bar{x}_S^k = \bar{x}_S \cdot e^{-j\rho}$$

(II-5)

Luego:

$$\begin{aligned}
 \bar{x}_R &= \bar{x}_R^S \cdot e^{-j\varepsilon} \\
 \bar{x}_R^k &= \bar{x}_R^S \cdot e^{-j\rho} \\
 \bar{x}_R^S &= \bar{x}_R \cdot e^{j\varepsilon} \\
 \bar{x}_R^k &= \bar{x}_R \cdot e^{j(\varepsilon-\rho)}
 \end{aligned}
 \tag{II-6}$$

Descomponiendo las ecuaciones (II-5) en partes reales e imaginarias se llega a

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} x_{Sa} \\ x_{Sb} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \rho & -\text{sen } \rho \\ \text{sen } \rho & \cos \rho \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_{Sd} \\ x_{Sq} \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} x_{Sd} \\ x_{Sq} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \rho & \text{sen } \rho \\ -\text{sen } \rho & \cos \rho \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_{Sa} \\ x_{Sb} \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{II-7}$$

Una forma de interpretar las expresiones (II-5) y (II-6) es que *las coordenadas del fasor \bar{x} en un nuevo sistema de coordenadas que forma un ángulo eléctrico α con el sistema de coordenadas original, tienen los mismos valores que tendrían en el sistema original si al fasor \bar{x} se lo girara un ángulo eléctrico $-\alpha$.*

Así, por ejemplo, el fasor \bar{x}_S tiene las coordenadas x_{sa} y x_{sb} en el sistema (α, β) . El sistema de coordenadas del rotor (D, Q) forma el ángulo eléctrico ε respecto al sistema del estator (α, β) y las coordenadas de \bar{x}_S en este nuevo sistema son x_{sD} y x_{sQ} . Debe cumplirse que estas coordenadas x_{sD} y x_{sQ} son iguales a las coordenadas en el sistema (α, β) del fasor \bar{x}_S girado un ángulo eléctrico $-\varepsilon$, es decir, las coordenadas de $\bar{x}_S \cdot e^{-j\varepsilon}$.

* Si se desea obtener la proyección de un fasor \bar{x} según la dirección dada por el ángulo eléctrico α se procede según se indica en la figura II-3.

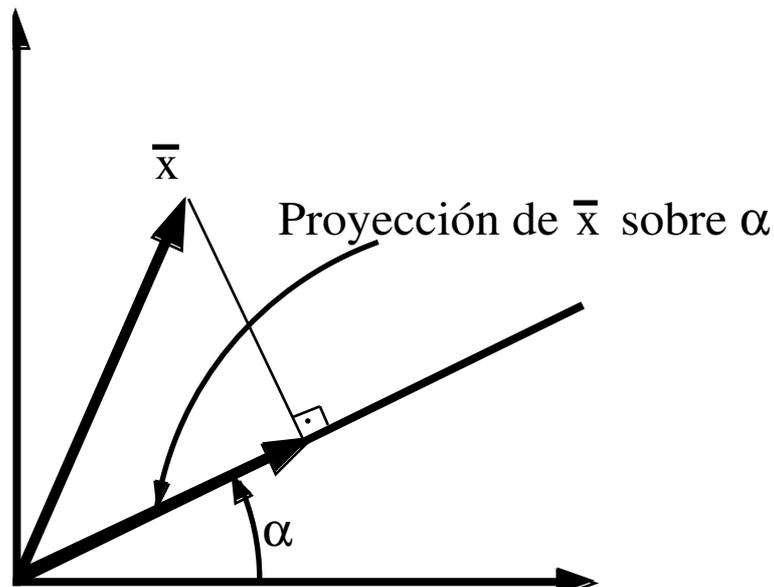


Fig. II-3: Proyección de un fasor

En la figura II-3 se aprecia fácilmente que la proyección de \bar{x} según la dirección α será igual a la coordenada real del fasor \bar{x} cuando se le expresa en un sistema de coordenadas cuyo eje real estuviera orientado según la dirección α . Luego:

$$\text{Proyección de } \bar{x} \text{ según la dirección } \alpha = \text{Re} \{ \bar{x} \cdot e^{-j\alpha} \} \quad (\text{II-8})$$

FASORES ESPACIALES DE CORRIENTE, DE TENSION Y DE INDUCCION MAGNETICAS Y DE FLUJO DE CORONA

* En este apartado vamos a empezar a estudiar algunos de los fasores espaciales que utilizaremos para analizar las máquinas eléctricas. Con todos ellos seguiremos el mismo proceso: definiremos una magnitud interna escalar que varíe senoidalmente según la coordenada angular α y le asociaremos un fasor espacial, el cual ligaremos con los demás fasores mediante las expresiones adecuadas.

De momento vamos a trabajar con los fasores de forma genérica, sin indicar

si corresponden al estator, rotor o a la totalidad de la máquina y sin señalar el sistema de coordenadas en el que están referidos. Sólo cuando sea estrictamente necesario haremos mención de estas cualidades del fasor.

Fasor espacial de corriente

- * Como ya hemos mencionado en el capítulo anterior, los devanados del estator y del rotor, distribuidos y alojados en ranuras, pueden ser sustituidos por sendas capas de corriente senoidales situadas sobre las superficies límites externa e interna del entrehierro, respectivamente.

Para una de estas capas de corriente, se cumplirá que

$$A = A_M \cos[\alpha - \theta]$$

donde θ es el ángulo eléctrico correspondiente a las p posiciones donde esta capa de corriente alcanza su valor máximo positivo A_M (recordemos que, por convenio, se consideran positivas las corrientes entrantes a un plano perpendicular al eje de la máquina).

El fasor espacial asociado a una capa de corriente se denomina **fasor espacial de corriente** y (a partir de las ecuaciones (II-1) y (II-2)) se define así:

$$\vec{i} = A_M \cdot e^{j\theta} \quad (\text{II-9})$$

Dependiendo de la procedencia de la capa de corriente podemos tener fasores espaciales de corriente de una fase de un devanado, situado bien en el estator o bien en el rotor, de la totalidad de las fases de un devanado o del conjunto de todos los devanados de la máquina.

Observese que aunque el fasor \vec{i} se denomina de corriente, realmente no representa corrientes sino densidades lineales de corriente.

Fasor espacial de tensión magnética

* Sabemos del capítulo anterior (ecuación I-11) que un devanado que puede ser representado por una capa de corriente senoidal A genera una tensión magnética F cuyo valor máximo se obtiene así:

$$F_M = \frac{D}{2p} A_M$$

Este valor máximo se localiza en p posiciones adelantadas $\pi/2$ radianes eléctricos respecto a los p lugares donde la capa de corriente A es máxima (Fig. II-4). Luego:

$$F = F_M \cos [\alpha - (\theta + \pi/2)]$$

$$F = \frac{D}{2p} A_M \cos \left[\alpha - \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

Por lo tanto, el **fasor espacial de tensión magnética** (a partir de las ecuaciones (II-1) y (II-2)) vale

$$\bar{F} = F_M \cdot e^{j(\theta + \pi/2)} = \frac{D}{2p} (A_M \cdot e^{j\theta}) e^{j\pi/2}$$

$$\bar{F} = \frac{D}{2p} \bar{i} e^{j\pi/2} = j \frac{D}{2p} \bar{i} \quad (\text{II-10})$$

$$(e^{j\pi/2} = j)$$

En esta ecuación (II-10) los fasores \bar{F} e \bar{i} deben estar expresados en el mismo sistema de coordenadas. Como es natural, cuando en la expresión (II-10) se utiliza el fasor espacial de corriente de un devanado (sea éste del estator, del rotor o equivalente al conjunto de los devanados de toda la máquina) se obtiene el fasor espacial de tensión magnética correspondiente al mismo devanado.

En una máquina bipolar los ángulos eléctricos y geométricos son iguales (pues $p = 1$) y podemos dibujar los fasores espaciales superpuestos a una sección de la máquina. Así, en la figura II-4 se puede apreciar claramente el desfase de

$\pi/2$ radianes eléctricos entre los fasores \bar{F} e \bar{i} .

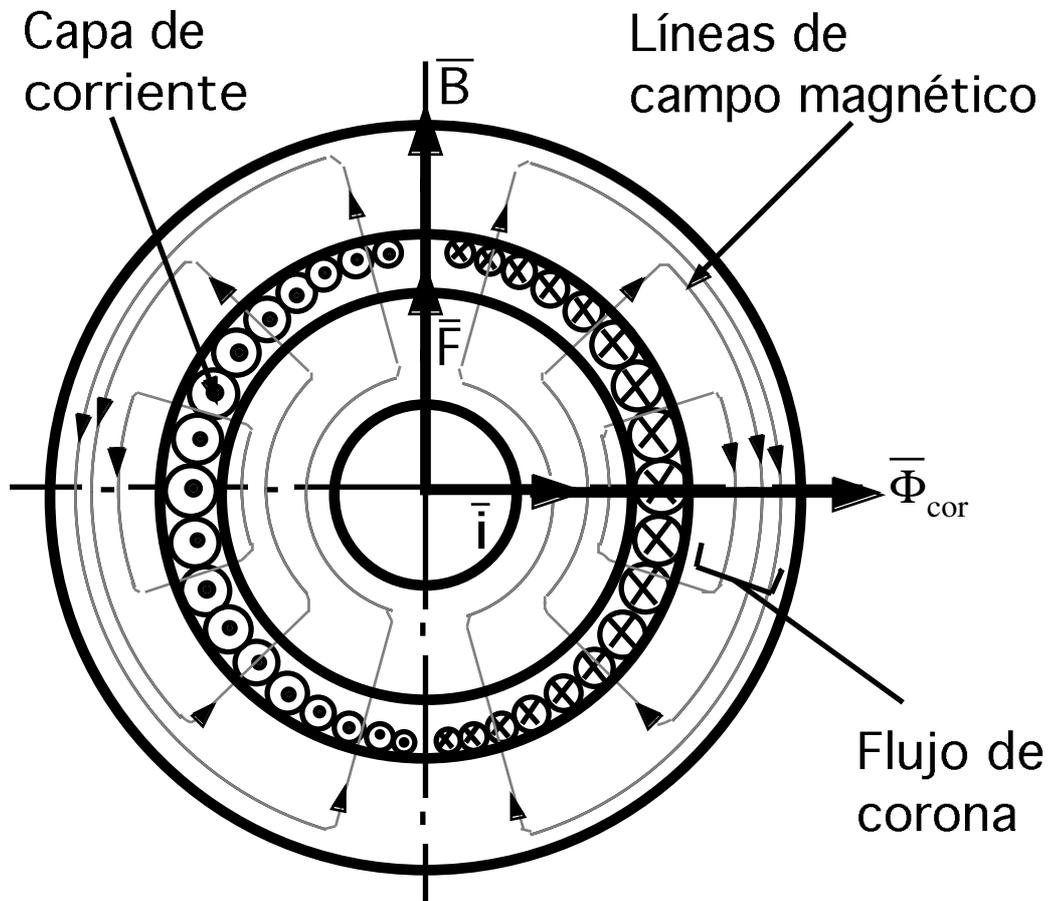


Fig. II-4: Fasores espaciales

Recordemos que hemos adoptado el convenio de considerar positivas la inducción y la tensión magnéticas en los lugares donde las líneas de inducción salen del rotor y entran en el estator. Esto significa que la inducción es positiva frente a los polos Norte del rotor o frente a los polos Sur del estator.

La expresión (II-10) indica que la relación entre los fasores de corriente y de tensión magnética es la misma para todos los devanados de una misma máquina. Conocido uno de estos fasores es inmediato obtener el otro; en una máquina ideal, ambos dependen solamente de la configuración de los devanados. Esto quiere decir que ambos fasores proporcionan la misma información y usaremos uno u otro según resulte más cómodo en cada caso.

Aunque en este libro estamos razonando sobre máquinas ideales, simétricas

y equilibradas, se puede demostrar que la relación (II-10) sigue siendo válida en cualquier tipo de máquina con la única condición de que en ella se pueda considerar que sus piezas de material ferromagnético tienen una reluctancia despreciable frente a la del entrehierro y que no se producen pérdidas en el hierro.

Fasor espacial de inducción magnética

- * La inducción magnética es una magnitud vectorial y, por lo tanto, en principio no puede ser representada por un fasor. Sin embargo, ya dijimos en el capítulo 1° que, en el entrehierro, en lugar de trabajar con el vector \vec{B} íbamos a utilizar la magnitud escalar B , valor medio en cada punto del entrehierro de la componente radial de \vec{B} . El **fasor espacial de inducción magnética** está asociado a esta magnitud escalar B .

En una máquina ideal las ondas espaciales de tensión y de inducción magnéticas están en fase, luego (teniendo en cuenta (I-9)) se verifica que

$$\bar{B} = \frac{\mu_0}{\delta} \bar{F} \quad (\text{II-11})$$

Aunque la expresión (II-11) es válida para máquinas ideales (que son las que vamos a considerar en este libro), es preciso resaltar que si la máquina no tuviera entrehierro uniforme (por ejemplo, si se tratara de una máquina síncrona de polos salientes), las ondas de F y de B ya no estarían en fase. Por lo tanto, la ecuación II-11 es válida para cualquier tipo de máquina (no necesariamente ideal ni simétrica) siempre que tenga entrehierro uniforme.

Fasor espacial de flujo de corona

- * El **flujo de corona** es el flujo que atraviesa una sección radial del yugo o corona de la máquina. Es decir, el flujo de corona es el flujo que atraviesa una sección radial del estator (Fig. II-4).

El flujo de corona se considera positivo cuando es generado por una

corriente positiva (entrante). Por consiguiente, el flujo de corona es positivo en las zonas del estator donde las líneas de inducción circulan en sentido horario.

El flujo de corona siempre se refiere a campos magnéticos comunes (sin incluir los flujos de dispersión). Este flujo se considera a través de una sección del estator, pero esto no quiere decir que sólo los devanados del estator generen flujos de corona. Este tipo de flujo puede estar originado por los devanados del estator y/o del rotor. Así podemos tener flujos de corona de una fase del estator, de una fase del rotor, de todo el estator, de todo el rotor o de toda la máquina (estator más rotor).

El flujo de corona es una magnitud distribuida en el espacio a lo largo de la circunferencia del entrehierro; es decir, es una función de la coordenada angular α . Si la inducción magnética del entrehierro tiene una variación senoidal en el espacio, se puede demostrar que el flujo de corona (que es la integral espacial de la inducción magnética) también varía senoidalmente en el espacio.

En la figura II-4 se puede apreciar que los máximos del flujo de corona se producen con un retraso espacial de $\pi/2$ radianes eléctricos respecto a los máximos de la inducción magnética. También se observa que el valor máximo del flujo de corona es igual a la mitad del flujo por polo.

El flujo por polo correspondiente a una inducción magnética que en el entrehierro alcanza un valor máximo B_M se obtiene mediante la expresión (I-13):

$$\Phi_M = \frac{D \cdot l}{p} B_M$$

Luego, teniendo en cuenta las expresiones (I-9) y (I-11) se llega a

$$\Phi_{\text{corM}} = \frac{\Phi_M}{2} = \frac{B_M \cdot D \cdot l}{2p} = \frac{\frac{\mu_0}{\delta} \cdot F_M \cdot D \cdot l}{2p}$$

$$\Phi_{\text{corM}} = \frac{\mu_0}{\delta} \frac{D \cdot l}{2p} \frac{D}{2p} A_M = \frac{\mu_0}{\delta} \left(\frac{D}{2p} \right)^2 A_M$$

$$\boxed{\begin{aligned} \Phi_{\text{corM}} &= l_{\mu} \cdot A_M \\ \left(l_{\mu} &= \frac{\mu_o l}{\delta} \left(\frac{D}{2p} \right)^2 \right) \end{aligned}} \quad (\text{II-12})$$

donde l_{μ} es una constante de la máquina que tiene el mismo valor en el cálculo de los flujos de corona originados por el estator, el rotor o toda la máquina.

- * Al flujo de corona le asociaremos el **fasor espacial de flujo de corona**. Por las propiedades del flujo de corona obtenemos que su fasor está siempre retrasado un ángulo eléctrico de $\pi/2$ radianes respecto al fasor de inducción magnética. Esto sigue siendo cierto para cualquier tipo de máquina, aunque no sea ni ideal, ni simétrica, ni equilibrada. Además, como ya hemos indicado anteriormente, la relación entre los fasores de flujo de corona y de inducción magnética es la misma para todos los devanados de una misma máquina. Conocido uno de estos fasores es inmediato el obtener el otro. Esto quiere decir que ambos fasores proporcionan la misma información y usaremos uno u otro según resulte más cómodo en cada caso. Normalmente utilizaremos el fasor $\bar{\Phi}_{\text{cor}}$.

Anteriormente hemos visto que, si la máquina tiene entrehierro uniforme los fasores \bar{B} y \bar{F} están en fase y, además, el fasor \bar{i} está retrasado $\pi/2$ radianes eléctricos respecto a \bar{F} si la reluctancia y las pérdidas del hierro son nulas. Luego, en estas condiciones se verifica que los fasores $\bar{\Phi}_{\text{cor}}$ e \bar{i} están en fase (Fig. II-4). Se tiene, pues, que

$$\bar{\Phi}_{\text{cor}} = \Phi_{\text{corM}} \cdot e^{j\theta} = \frac{\mu_o l}{\delta} \left(\frac{D}{2p} \right)^2 \bar{i}$$

$$\boxed{\bar{\Phi}_{\text{cor}} = l_{\mu} \cdot \bar{i}} \quad (\text{II-13})$$

Observese la similitud formal entre las expresiones (II-13) y (I-3).

En esta ecuación (II-13) los fasores $\bar{\Phi}_{\text{cor}}$ e \bar{i} deben estar expresados en el mismo sistema de coordenadas. Como es natural, cuando en la expresión (II-13)

se utiliza el fasor espacial de corriente de un devanado (sea éste del estator, del rotor o equivalente al conjunto de los devanados de toda la máquina) se obtiene el fasor espacial de flujo de corona correspondiente al mismo devanado.

Para acabar este apartado recordemos que el flujo de corona se refiere siempre a campos magnéticos comunes y que la expresión (II-13) sólo es válida si la máquina tiene entrehierro uniforme y su circuito magnético es ideal (sin pérdidas y sin reluctancia en las piezas de hierro).

FASOR ESPACIAL DE F.E.M. INDUCIDA

* Imaginemos que sobre la periferia del rotor colocamos según la dirección axial un conjunto de conductores de sección despreciable, situados uno al lado de otro, aislados entre sí y de forma que en cada punto de la circunferencia del entrehierro hubiera uno de ellos. Cuando estos conductores estén sometidos a la acción del campo común de toda la máquina se inducirá f.e.m. en ellos. Si el campo magnético varía senoidalmente en el espacio la distribución espacial de estas f.e.m.s inducidas en los conductores es también senoidal. Es decir, si en un instante dado medimos las f.e.m.s que se inducirían en unos conductores axiales situados en cada punto de la periferia del rotor debidas a la acción de un campo magnético común de la máquina senoidal, obtenemos un conjunto de valores que forman una distribución senoidal en el espacio.

Análogamente, también se puede obtener una distribución de f.e.m. en el estator considerando las f.e.m.s inducidas en conductores axiales situados en cada punto de la superficie del estator que limita con el entrehierro.

En este libro representaremos las f.e.m.s y tensiones eléctricas mediante flechas cuya punta se dirige al punto de mayor tensión. Además, consideraremos que una f.e.m. es positiva si pretende generar una corriente positiva. Por consiguiente, en las distribuciones espaciales de f.e.m. consideraremos que su valor es positivo en los lugares donde las flechas de f.e.m. tengan sentido entrante a un plano perpendicular al eje de la máquina ³.

Con este convenio de signos a cada una de estas distribuciones de f.e.m. se le

³ En los apéndices de este capítulo se justifica este convenio de signos.

puede asignar un **fasor espacial de f.e.m.** \bar{e} . Se demuestra ⁴ que

$$\bar{e} = - \frac{d \bar{\Phi}_{\text{cor,maq}}}{d t} \quad (\text{II-14})$$

Es importante recordar que en la expresión (II-14) el fasor $\bar{\Phi}_{\text{cor,maq}}$ debe estar referido a un sistema de coordenadas fijo a los conductores donde se induce la f.e.m. y el fasor de f.e.m. que se obtiene está referido a dicho sistema de coordenadas. Así, si se desea obtener el fasor de f.e.m. del estator (en coordenadas del estator), el fasor $\bar{\Phi}_{\text{cor,maq}}$ en la expresión (II-14) debe estar referido a coordenadas del estator. Si se desea obtener el fasor de f.e.m. del rotor (en coordenadas del rotor), el fasor $\bar{\Phi}_{\text{cor,maq}}$ en (II-14) debe estar referido a coordenadas del rotor. La ecuación (II-14) es válida para todo tipo de máquina eléctrica, aunque no sea ideal ni simétrica.

Observese que los fasores de f.e.m. son debidos al campo común (sin incluir el efecto de los flujos de dispersión) de toda la máquina (originado por el estator y el rotor conjuntamente) y que, por definición, sólo hay dos fasores de f.e.m.: el del estator y el del rotor.

* Sabemos que

$$\bar{\Phi}_{\text{cor,maq}} = \Phi_{\text{cor,maq M}} \cdot e^{j\theta_{\text{maq}}}$$

Luego, la ecuación (II-14) queda así:

$$\bar{e} = - \frac{d \bar{\Phi}_{\text{cor,maq}}}{d t} = - \frac{d}{d t} \left(\Phi_{\text{cor,maq M}} \cdot e^{j\theta_{\text{maq}}} \right)$$

Dado que, en general, tanto el argumento, θ_{maq} , como el módulo, $\Phi_{\text{cor,maq M}}$, del fasor $\bar{\Phi}_{\text{cor,maq}}$ son funciones del tiempo, se tiene que

$$\bar{e} = -e^{j\theta_{\text{maq}}} \frac{d \Phi_{\text{cor,maq M}}}{d t} - j \frac{d \theta_{\text{maq}}}{d t} \bar{\Phi}_{\text{cor,maq}}$$

⁴ Veanse los apéndices de este capítulo.

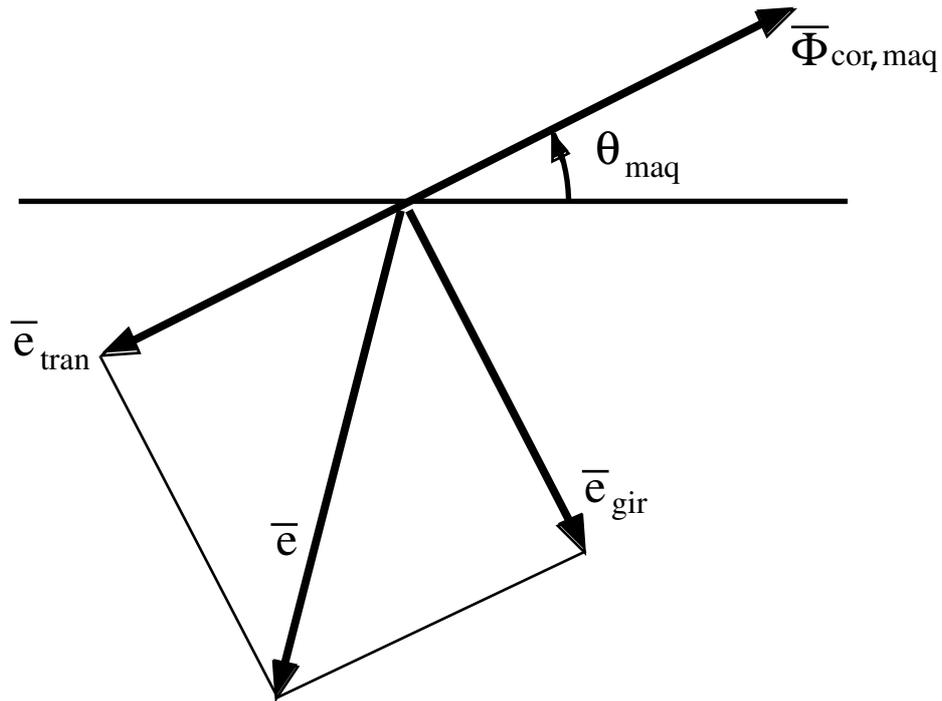


Fig. II-5: Fasores espaciales de f.e.m. de transformación y de rotación o giro

Por consiguiente, podemos descomponer el fasor \bar{e} en dos componentes que forman $\pi/2$ radianes eléctricos entre sí (Fig. II-5):

$$\bar{e} = \bar{e}_{\text{tran}} + \bar{e}_{\text{gir}} \quad (\text{II-15})$$

- a) El **fasor de f.e.m. de transformación** \bar{e}_{tran} tiene la misma dirección que $\bar{\Phi}_{\text{cor,maq}}$ y está en oposición de fase con él (cuando la derivada temporal de $\Phi_{\text{cor,maq} M}$ es positiva). Este fasor es debido a las variaciones temporales del valor del módulo $\Phi_{\text{cor,maq} M}$ del fasor de flujo de corona de la máquina:

$$\bar{e}_{\text{tran}} = \left(-\frac{d \Phi_{\text{cor,maq} M}}{d t} \right) e^{j\theta_{\text{maq}}} \quad (\text{II-16})$$

- b) El **fasor de f.e.m. de rotación o giro** \bar{e}_{gir} está desfasado $\pi/2$ radianes eléctricos respecto al flujo de corona y está en retraso respecto a él (si la derivada temporal de θ_{maq} o, lo que es lo mismo, la velocidad de giro del fasor $\bar{\Phi}_{\text{cor,maq}}$ es positiva (en sentido antihorario)). Este fasor es debido

a la velocidad de giro de $\bar{\Phi}_{\text{cor,maq}}$:

$$\bar{e}_{\text{gir}} = -j \frac{d\theta_{\text{maq}}}{dt} \bar{\Phi}_{\text{cor,maq}} \quad (\text{II-17})$$

- * Comparemos entre sí los fasores de f.e.m. del estator y del rotor de una misma máquina. Para que este análisis sea general consideraremos estos fasores referidos al sistema de coordenadas genérico k. ⁵

Las variaciones del módulo del fasor flujo de corona se aprecian de igual manera desde el rotor y desde el estator, luego se cumplirá que

$$\bar{e}_{\text{tran R}}^k = \bar{e}_{\text{tran S}}^k \quad (\text{II-18})$$

Sin embargo, la velocidad instantánea del fasor $\bar{\Phi}_{\text{cor,maq}}$ es diferente respecto al sistema de coordenadas del rotor que respecto al sistema de coordenadas del estator. Es decir:

$$\bar{e}_{\text{gir R}}^k \neq \bar{e}_{\text{gir S}}^k \quad (\text{II-19})$$

Por lo tanto, los fasores de f.e.m. del estator y del rotor tendrán la misma proyección respecto a la dirección definida por el fasor $\bar{\Phi}_{\text{cor,maq}}^k$, pero sus proyecciones en la dirección perpendicular a $\bar{\Phi}_{\text{cor,maq}}^k$ tendrán valores diferentes (Fig. II-6).

⁵ Cuando un fasor de f.e.m. se expresa en el sistema de coordenadas k lo que se obtiene no es como físicamente este fasor actúa en este sistema de coordenadas, sino como se "ve" desde dicho sistema la actuación del fasor de f.e.m. en su sistema de coordenadas propio. El proceso matemático para obtener un fasor de f.e.m. en el sistema de coordenadas k es así:

- Primero se expresa el fasor $\bar{\Phi}_{\text{cor,maq}}$ en el sistema de coordenadas propio de la f.e.m. que se desea calcular (coordenadas del estator para obtener el fasor de f.e.m. del estator y coordenadas del rotor para el fasor de f.e.m. del rotor).
- Se aplica la expresión (II-14) con lo que se obtiene el fasor de f.e.m. en su sistema de coordenadas propio.
- Por último, el fasor espacial de f.e.m. se cambia de sistema de coordenadas mediante las relaciones (II-5) y (II-6).

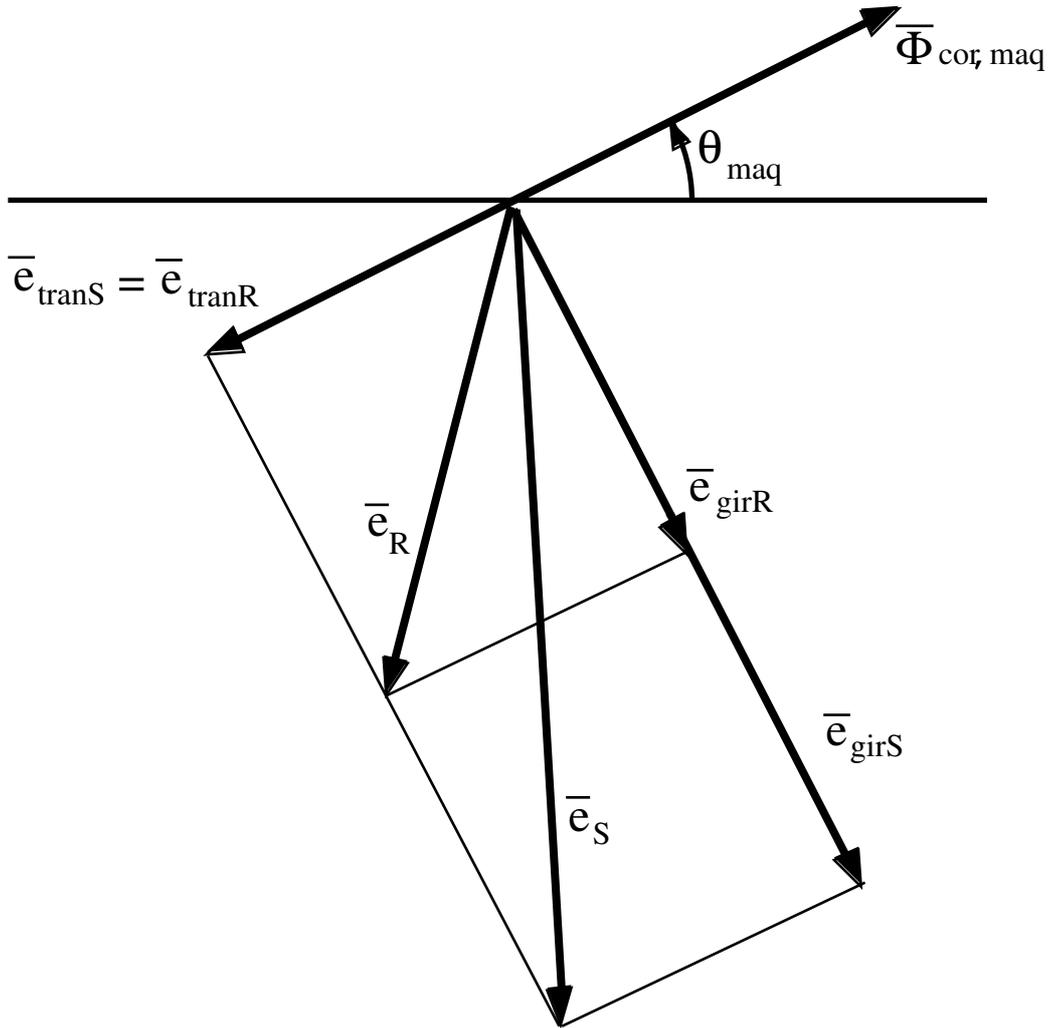


Fig. II-6: Fasores de f.e.m. en el estator y en el rotor de la misma máquina

- * En régimen permanente, estando la máquina alimentada con corrientes senoidales equilibradas y a velocidad constante, los campos magnéticos son giratorios. En este caso, el fasor de flujo de corona tiene amplitud y velocidad constantes. Por lo tanto, se cumple que

$$\frac{d \Phi_{cor,maq} M}{d t} = 0 \quad ; \quad \frac{d \theta_{maq}}{d t} = \text{constante}$$

No existen, pues, f.e.m.s de transformación. Además, los fasores de f.e.m. de giro tendrán amplitud constante e igual velocidad de giro que $\bar{\Phi}_{cor,maq}$. En resumen, se tiene que

$$\bar{e} = \bar{e}_{\text{gir}} \quad (\text{II-20})$$

Por esta razón, cuando se estudia la máquina en régimen permanente y girando en sentido positivo (antihorario), se dibujan siempre los fasores espaciales de f.e.m. retrasados $\pi/2$ radianes eléctricos respecto a $\bar{\Phi}_{\text{cor,maq}}$.

FASORES ESPACIALES DE TENSION ELECTRICA

* Estos fasores acaban de ser incorporados a la teoría ya que fueron descritos por primera vez por Serrano en 1991 ([14]). Para definirlos vamos a suponer primeramente que todos los devanados de una máquina son tales que sólo existen diferencias de tensión eléctrica en los conductores activos y no en las cabezas de bobina. Esto equivale a trabajar con devanados ideales en los que las cabezas de bobina no tienen resistencia ni inductancia de dispersión y en los que a los conductores activos se les ha incrementado su resistencia e inductancia de dispersión en la parte proporcional correspondiente a las cabezas de bobina del devanado real. De esta manera, ambos devanados, el real y el ideal, tienen los mismos valores de resistencia y de inductancia de dispersión por fase.

En uno de estos bobinados ideales, que en el caso más general tienen conductores de diferentes fases dentro de cada ranura, podemos definir las siguientes magnitudes internas distribuidas espacialmente a lo largo del entrehierro:

a) Caída de tensión resistiva media instantánea por conductor Δu_{res}

En cada punto del entrehierro α adopta el valor medio de las caídas de tensión resistivas de todos los conductores del devanado situados en α .

b) Caída de tensión inductiva media instantánea por conductor Δu_{ind}

En cada punto del entrehierro α adopta el valor medio de las caídas de tensión inductivas de todos los conductores del devanado situados en α .

c) Tensión media instantánea por conductor u

Su valor en cada punto del entrehierro α es igual al valor medio de las

diferencias de potencial de todos los conductores del devanado alojados en dicho punto α .

El convenio de signos que adoptaremos para estas tensiones eléctricas es considerar positivas las caídas de tensión y tensiones totales (según el convenio de signos de motor ⁶) producidas por corrientes positivas. Por lo tanto, estas tensiones son positivas si sus flechas representativas (cuya punta señala el punto de mayor tensión eléctrica) son salientes a un plano perpendicular al eje de la máquina.

El conjunto de valores que una cualquiera de estas magnitudes alcanza en un instante dado en todas las ranuras forma una distribución espacial a lo largo de la circunferencia del entrehierro. Esta distribución es una función periódica que se repite para cada par de polos. Dado que sólo se están considerando magnitudes distribuidas de forma senoidal en el espacio, la distribución real de cada una de estas magnitudes internas de tensión eléctrica se sustituye por otra equivalente senoidal y a ésta se le asocia un fasor espacial. Así, se tienen los **fasores espaciales de caída de tensión resistiva $\Delta \bar{u}_{res}$, de caída de tensión inductiva $\Delta \bar{u}_{ind}$ y de tensión \bar{u} .**

Dada la definición de las magnitudes internas de tensión eléctrica se deduce que no se puede aplicar de forma general el principio de superposición a ellas y a sus fasores representativos. Por esta razón, en la práctica sólo se usan los fasores espaciales de tensión eléctrica (de caídas de tensión resistiva e inductiva y de tensión) de cada uno de los devanados y no de la totalidad de la máquina. Así pues, en una máquina asíncrona con un sólo devanado en el estator y un sólo devanado en el rotor únicamente tendremos los fasores de tensión eléctrica del estator y del rotor.

* En el caso de que el devanado sea polifásico, simétrico y equilibrado en [14] se demuestra que se verifica lo siguiente ⁷ :

⁶ Veanse los apéndices de este capítulo.

⁷ En los apéndices de este capítulo se analiza el valor de estos parámetros para una jaula de ardilla.

$$\boxed{\Delta \bar{u}_{\text{res}} = r \cdot \bar{i}} \quad (\text{II-21})$$

$$\left(r = \frac{\pi D}{m} \frac{R}{(Z \cdot \xi_b)^2} \right)$$

y

$$\boxed{\Delta \bar{u}_{\text{ind}} = l_\sigma \cdot \frac{d \bar{i}}{d t}} \quad (\text{II-22})$$

$$\left(l_\sigma = \frac{\pi D}{m} \frac{L_\sigma}{(Z \cdot \xi_b)^2} \right)$$

donde m es el número de fases del devanado, R y L_σ son coeficientes de una fase del devanado. Con estas expresiones se obtienen los fasores de caídas de tensión resistiva e inductiva correspondientes al devanado cuyo fador de corriente se introduce en ellas.

En la expresión (II-22) es preciso hacer las mismas observaciones que hicimos para la expresión del fador de f.e.m. (II-14). Para poder aplicar la expresión (II-22) el fador espacial de corriente debe estar referido a su sistema de coordenadas propio (coordenadas del estator para fasores del estator y coordenadas del rotor para fasores del rotor) y el fador de caída de tensión inductiva que se obtiene de (II-22) está referido también a su sistema de coordenadas propio.

- * Es evidente que en un conductor se cumplirá que la suma de su tensión total y su f.e.m. inducida es igual a la suma de sus caídas de tensión inductiva y resistiva. Por lo tanto, se puede deducir que

$$u + e = \Delta u_{\text{res}} + \Delta u_{\text{ind}}$$

$$u = -e + \Delta u_{\text{res}} + \Delta u_{\text{ind}}$$

Esto nos permite obtener la siguiente relación fasorial, válida para todo tipo de máquinas, incluso cuando no sean ideales, ni simétricas, ni equilibradas:

$$\bar{u} = -\bar{e} + \Delta\bar{u}_{\text{res}} + \Delta\bar{u}_{\text{ind}} \quad (\text{II-23})$$

Si la máquina es simétrica y equilibrada, las relaciones (II-21) y (II-22) permiten convertir la ecuación (II-23) en

$$\bar{u} = -\bar{e} + r \cdot \bar{i} + l_{\sigma} \frac{d\bar{i}}{dt} \quad (\text{II-24})$$

Naturalmente, en las expresiones (II-23) y (II-24) todos los fasores espaciales deben estar referidos al mismo sistema de coordenadas.

- * La expresión (II-23) o la (II-24) es la **ecuación fasorial del devanado** considerado y su representación gráfica da lugar al **diagrama fasorial espacial del bobinado** (Fig. (II-7)).

La figura (II-7) nos permite observar que, en devanados simétricos y equilibrados, el fasor de caída de tensión resistiva, dado por la relación (II-21), está siempre en fase con el fasor espacial de corriente. Sin embargo, el fasor de caída de tensión inductiva, dado por la relación (II-22), no está, en el caso general, adelantado $\pi/2$ radianes eléctricos respecto al fasor de corriente. No obstante, en régimen permanente y en devanados pertenecientes a máquinas polifásicas, simétricas y equilibradas sí que se cumple que el ángulo entre los fasores espaciales de caída de tensión inductiva, $\Delta\bar{u}_{\text{ind}}$, y de corriente, \bar{i} , es de $\pi/2$ radianes eléctricos, siendo $\Delta\bar{u}_{\text{ind}}$ el que está adelantado respecto a \bar{i} si la velocidad de giro de \bar{i} es positiva (giro antihorario) ⁸.

⁸ Esto es así porque el fasor espacial de caída de tensión inductiva $\Delta\bar{u}_{\text{ind}}$ tiene unas propiedades similares a las del fasor de f.e.m. inducida \bar{e} . Así, $\Delta\bar{u}_{\text{ind}}$ puede también ser dividido en dos componentes: una **de transformación**, paralela a \bar{i} y debida a las variaciones temporales del módulo de \bar{i} , y otra **de rotación o giro**, desfasada $\pi/2$ radianes eléctricos respecto a \bar{i} y debida a la velocidad de giro del fasor \bar{i} . En máquinas polifásicas, simétricas y equilibradas funcionando en régimen permanente los campos son perfectamente giratorios. En este caso, la componente de transformación es nula y sólo existe la componente de rotación de $\Delta\bar{u}_{\text{ind}}$.

Por lo tanto, en régimen permanente el diagrama fasorial espacial es una estructura rígida cuya forma no varía en el tiempo, ya que todos los fasores conservan su módulo y giran a igual velocidad. Sin embargo, en los regímenes dinámicos este diagrama es una estructura elástica en la que cada fasor puede cambiar con el tiempo su módulo y argumento; pero cumpliéndose siempre que los cuatro fasores \bar{u} , $\Delta\bar{u}_{res}$, $\Delta\bar{u}_{ind}$ y $-\bar{e}$ forman un polígono cerrado y que el fasor $\Delta\bar{u}_{res}$ es paralelo al fasor \bar{i} (si el devanado es equilibrado y simétrico).

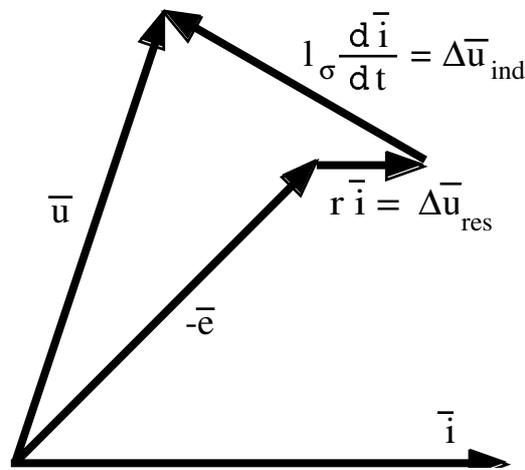


Fig. II-7: Diagrama fasorial espacial de un devanado

- * Los valores de los parámetros r y l_σ de un devanado (Ecuaciones (II-21) y (II-22)) se pueden expresar de una forma más compacta haciendo uso de dos constantes, C_u y C_i , que vamos a usar frecuentemente más adelante:

$$C_u = Z \cdot \xi_b \quad (\text{II-25})$$

$$C_i = \frac{\pi \cdot D}{m \cdot Z \cdot \xi_b} = \frac{\pi \cdot D}{m \cdot C_u} \quad (\text{II-26})$$

$$r = \frac{C_i}{C_u} R \quad ; \quad l_\sigma = \frac{C_i}{C_u} L_\sigma \quad (\text{II-27})$$

- * Obsérvese que, aunque C_u y C_i se han definido de forma matemática por medio de las ecuaciones (II-25) y (II-26), a estas constantes se les puede dar una

interpretación física:

- C_u es el número de conductores efectivos ($Z \cdot \xi_b$) de una fase del devanado cuando sólo se considera el armónico fundamental del campo.
- C_i es igual a la inversa de la densidad lineal de conductores τ (veáse la ecuación (III-106)) que se obtiene cuando se suponen igualmente repartidos a lo largo de la circunferencia del entrehierro los $m \cdot Z \cdot \xi_b$ conductores efectivos de la totalidad de las m fases del devanado.

* Recuérdese que los parámetros r , l_σ , C_u y C_i son característicos de un devanado de una máquina y, por lo tanto, varían de un devanado a otro dentro de la misma máquina. Así, en una máquina asíncrona con sólo un devanado en el estator y un devanado en el rotor tendremos r_S , $l_{\sigma S}$, C_{uS} y C_{iS} para el devanado estatórico y r_R , $l_{\sigma R}$, C_{uR} y C_{iR} para el devanado rotórico. Por el contrario, el parámetro l_μ es característico de la máquina y toma igual valor para todos los devanados de una misma máquina.

De las ecuaciones (I-14), (I-15), (I-16), (II-12), (II-25), y (II-26) se deduce que

$$l_\mu = \frac{C_{iS}}{C_{uS}} L_{\mu S} = \frac{C_{iR}}{C_{uR}} L_{\mu R} \quad (\text{II-28})$$

$$l_\mu = \frac{C_{iS}}{C_{uR}} \left(\frac{m_S}{2} L_{SR} \right) = \frac{C_{iR}}{C_{uS}} \left(\frac{m_R}{2} L_{SR} \right) \quad (\text{II-28}')$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] CARRION PEREZ, PEDRO A. "Simulación y equipo de medida de los regímenes dinámicos en máquinas eléctricas rotativas para su aplicación en los campos de investigación, la docencia y la industria". Tesis Doctoral. Albacete. 1991.
- [2] CORTES, MANUEL. "Curso moderno de máquinas eléctricas rotativas (5 Tomos)". Editores Técnicos Asociados. Barcelona. 1977.
- [3] FRAILE MORA, JESUS. "Máquinas eléctricas". Servicio de Publicaciones. Revista de Obras Públicas. Madrid. 1992.
- [4] IVANOV-SMOLENSKI, A. V. "Máquinas eléctricas (3 Tomos)". Editorial Mir. Moscú. 1980.
- [5] KOVACS, P. K. "Transient phenomena in electrical machines". Elsevier. 1984.
- [6] MANTILLA PEÑALBA, L. F. "La teoría de los fasores espaciales en máquinas eléctricas con armónicos de campo en régimen dinámico. Estudio del fasor de corriente. Modelo matemático de la máquina asíncrona". Tesis Doctoral. Escuela Politécnica Superior de Ingeniería. Santander. 1993.
- [7] MANTILLA, L.F. y RGUEZ. POZUETA, M.A. "Fasores espaciales armónicos de corriente en devanados m-fásicos de máquinas eléctricas en régimen dinámico. Teoremas de Equivalencia y de Correlación". 3as. Jornadas Hispano-Lusas de Ingeniería Eléctrica. Barcelona. Tomo I, pags. 123-132, Julio. 1993.
- [8] RGUEZ. POZUETA, M.A. y MANTILLA, L.F. "Ecuaciones de la Teoría de los Fasores Espaciales para los regímenes dinámicos de las máquinas eléctricas rotativas con armónicos espaciales. Fasor espacial de tensión de vacío ideal". 3as. Jornadas Hispano-Lusas de Ingeniería Eléctrica. Barcelona. Tomo I, pags. 133-142, Julio. 1993.
- [9] STEPINA, J. "Raumzeiger als Grundlage der Theorie der elektrischen Maschinen". Elektrotechnische Zeitschrift ETZ-A, vol. 88, pags. 584-587. 1967..
- [10] STEPINA, J. "Fundamental equations of the space vector analysis of electrical machines". Acta Technica CSAV, vol 12, pags. 184-189. Febrero. 1968.
- [11] STEPINA, J. "Raumzeiger in Matrizendarstellung in der Theorie der elektrischen Maschinen". Archiv für Elektrotechnik, vol. 55, pags. 91-97. 1972.

- [12] SERRANO IRIBARNEGARAY, LUIS. "Fundamentos de máquinas eléctricas rotativas". Marcombo. Barcelona. 1989.
- [13] SERRANO IRIBARNEGARAY, LUIS. "Control electrónico de motores eléctricos". Curso de especialización. Universidad de Cantabria. 1991.
- [14] SERRANO IRIBARNEGARAY, LUIS. "Significado físico del fasor espacial de tensión. Ecuaciones en régimen dinámico de las máquinas eléctricas rotativas". Jornadas Luso-españolas de Ingeniería Eléctrica. Coimbra. Vol 1, pags. 0.51-0.73. Julio de 1991.
- [15] SERRANO, L.; ROGER FOLCH, J.; PINEDA, M. "Fasores espaciales: herramientas fundamentales modernas para el análisis dinámico y el control electrónico de máquinas de alterna". Automática e Instrumentación, nº 168, Abril. 1987.
- [16] SERRANO, L. "The modern space phasors theory: its precise and coherent formulation as well as its advantages for transient analysis and electronic control of a.c. machines". International Aegean Conference on Electrical Machines and Power Electronics. Kusadasi (Turquía), pags. 278-293, Mayo 1992.
- [17] SERRANO IRIBARNEGARAY, LUIS. "Phasorial diagram of A.C. machines in transient state and physical meaning of the voltage space phasor". International Conference on Electrical Machines, pags. 1206-1210. Manchester (Gran Bretaña). Septiembre. 1992.
- [18] SERRANO IRIBARNEGARAY, LUIS. "The modern space phasor theory. Part I: Its coherent formulation and its advantages for transient analysis of converted-fed a.c. machines". European Transactions on Electrical Power Engineering (ETEP), Vol 3, nº2, marzo-abril, pags. 171-180. 1993.
- [19] SERRANO IRIBARNEGARAY, LUIS. "The modern space phasor theory. Part II: Its comparison with the Generalized Machine Theory and the Space Vector Theory". European Transactions on Electrical Power Engineering (ETEP), Vol 3, nº3, mayo-junio, pags. 213-219. 1993.

APENDICES:

DEMOSTRACION DE LA RELACION ENTRE LOS FASORES ESPACIALES DE F.E.M. Y DE FLUJO DE CORONA

* Consideremos un conductor axial a situado en el estator en la posición dada por el ángulo eléctrico γ (Fig. II-8a). La acción del campo magnético común de máquina da lugar a que aparezca una f.e.m. inducida $e_a(\gamma)$ sobre este conductor.

Consideremos ahora la espira anular del estator a-a' (Fig. II-8b) situada también en la posición γ . De esta espira sólo el conductor a corta líneas de campo magnético y, por lo tanto, sólo se genera f.e.m. en este conductor. Es decir, la f.e.m. inducida en el conductor a es igual a la f.e.m. inducida en la bobina anular a-a'.

Por otra parte, la espira a-a' está atravesada por el flujo de corona de máquina correspondiente a la posición angular γ ($\Phi_{\text{cor,maq}}(\gamma)$). Así pues, de la Ley de Faraday se obtiene que

$$e_{a-a'}(\gamma) = e_a(\gamma) = - \frac{d \Phi_{\text{cor,maq}}(\gamma)}{d t}$$

Teniendo en cuenta la relación (II-3), las definiciones de los fasores espaciales de f.e.m. y de flujo de corona y trabajando en el sistema de coordenadas del estator para que el ángulo γ sea constante, se deduce que

$$e_a(\gamma) = \text{Re} \{ \bar{e}_S \cdot e^{-j\gamma} \}$$

$$\Phi_{\text{cor,maq}}(\gamma) = \text{Re} \{ \bar{\Phi}_{\text{cor,maq}}^S \cdot e^{-j\gamma} \}$$

Luego:

$$\text{Re} \{ \bar{e}_S \cdot e^{-j\gamma} \} = - \frac{d}{d t} \left[\text{Re} \{ \bar{\Phi}_{\text{cor,maq}}^S \cdot e^{-j\gamma} \} \right]$$

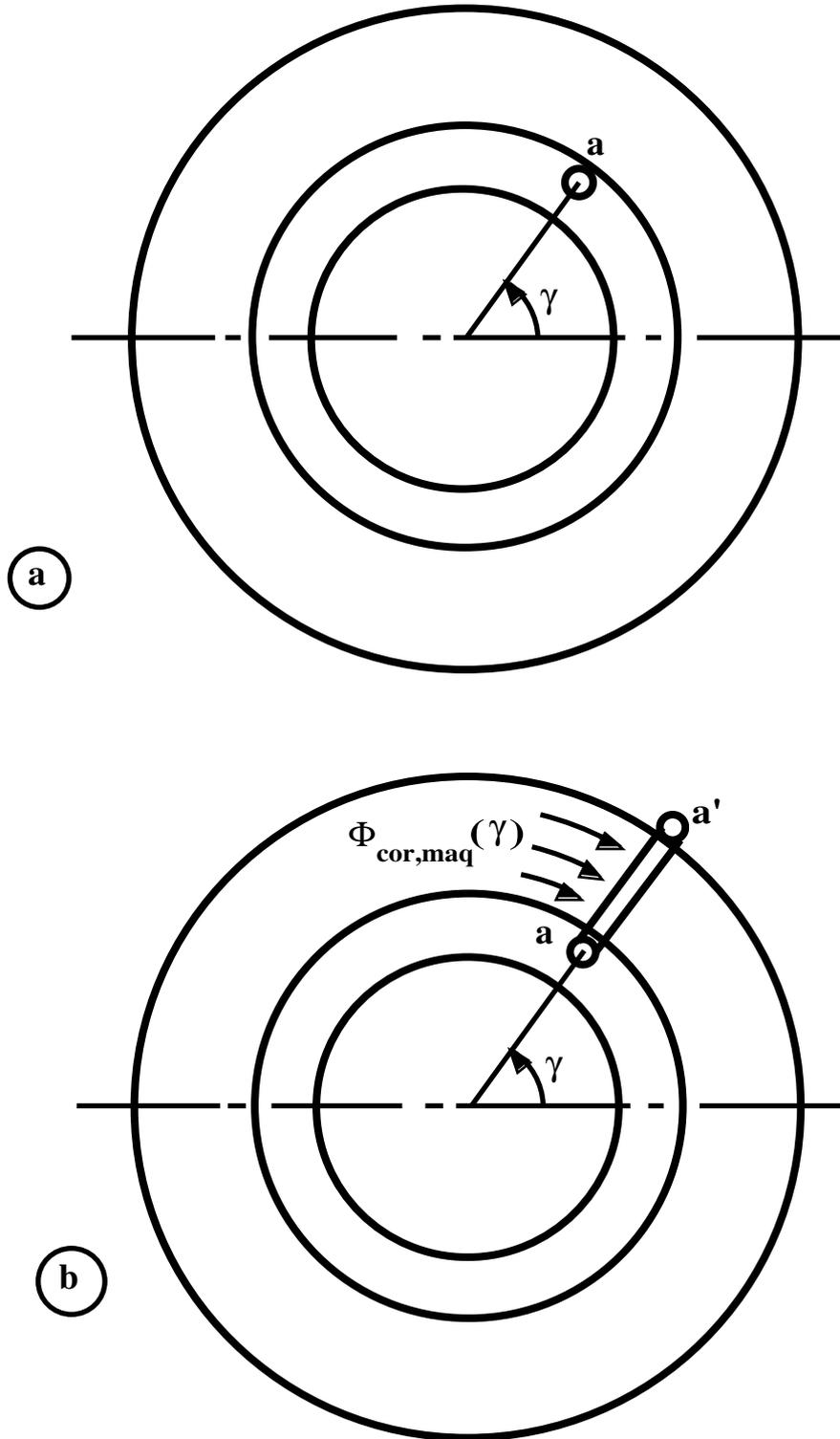


Fig. II-8: Sobre el conductor a y la espira anular a-a' se induce la misma f.e.m.

Como γ es constante en el sistema de coordenadas del estator, se llega a

$$\operatorname{Re}\{\bar{e}_s \cdot e^{-j\gamma}\} = \operatorname{Re}\left\{\left(-\frac{d\bar{\Phi}_{\text{cor,maq}}^S}{dt}\right) \cdot e^{-j\gamma}\right\}$$

Teniendo en cuenta que esta relación se debe cumplir para cualquier posición γ donde se coloque el conductor a, se deduce finalmente que

$$\bar{e}_s = -\frac{d\bar{\Phi}_{\text{cor,maq}}^S}{dt}$$

- * Trabajando de una manera análoga con un conductor y una espira anular situados en el rotor, se obtiene que

$$\bar{e}_R = -\frac{d\bar{\Phi}_{\text{cor,maq}}^R}{dt}$$

Las dos últimas expresiones se resumen en la ecuación (II-14).

FUERZA ELECTROMOTRIZ (F.E.M.) Y FUERZA CONTRAELECTROMOTRIZ (F.C.E.M.)

- * Sea una fase de una máquina recorrida por una corriente i y atravesada por unos enlaces de flujo ψ_H , debidos no sólo a la inducción magnética creada por la propia fase sino también al efecto de las demás fases de la máquina. Por convenio, ψ_H se supone positivo si tiene el sentido de los enlaces de flujo creados únicamente por la fase cuando es recorrida por una corriente positiva, como se representa en la figura II-9.
- * Los enlaces de flujo ψ_H inducirán sobre la fase una **fuerza electromotriz (f.e.m.)** dada por la Ley de Faraday:

$$e = -\frac{d\psi_H}{dt} \quad (\text{II-29})$$

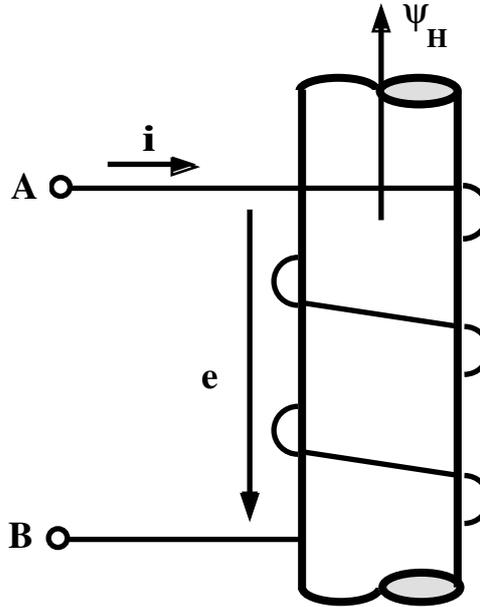


Fig. II-9: Convenio de signos de la f.e.m. de una fase

Sabemos que, según la Ley de Lenz, esta f.e.m. intenta oponerse a las variaciones de ψ_H , lo cual nos va a permitir definir el sentido positivo de e .

La expresión (II-29) indica que e es positiva cuando la derivada temporal de ψ_H es negativa, es decir, cuando el valor de ψ_H disminuye. Dado que e intenta oponerse a que ψ_H disminuya, debe tener un sentido tal que refuerce la corriente de la fase para así crear unos enlaces de flujo adicionales que traten de anular la disminución de ψ_H . Esto lo consigue si e tiene el sentido representado en la figura II-9, ya que si los extremos A y B de la fase estuvieran conectados en cortocircuito una f.e.m. e de este sentido originaría una corriente i positiva.

Por lo tanto, el sentido de la f.e.m. e es positivo cuando su flecha representativa (cuya punta señala el extremo de mayor potencial de la fase) tiene el mismo sentido que la correspondiente a la intensidad positiva.

Esto justifica que se haya adoptado el mismo criterio de signos para los fasores espaciales de corriente y de f.e.m.

* Aunque en este libro siempre vamos a trabajar con f.e.m.s y, por consiguiente, con la Ley de Faraday de la manera indicada por la ecuación (II-

29), otros autores definen e como la **fuerza contraelectromotriz (f.c.e.m.)** dada por la relación

$$e = \frac{d \psi_H}{d t} \quad (\text{II-30})$$

Es decir, para estos autores e no es la f.e.m. que origina la corriente i , sino la caída de tensión generada por i y opuesta a ella. Es fácil comprender que, al haber un cambio de signo entre las ecuaciones (II-29) y (II-30), el sentido positivo para las f.c.e.m.s es opuesto al de las f.e.m.s: Una f.c.e.m. es positiva si su flecha representativa tiene sentido opuesto a la correspondiente a una intensidad positiva.

CONVENIOS DE SIGNOS PARA LA TENSION

Convenio de signos como motor

*

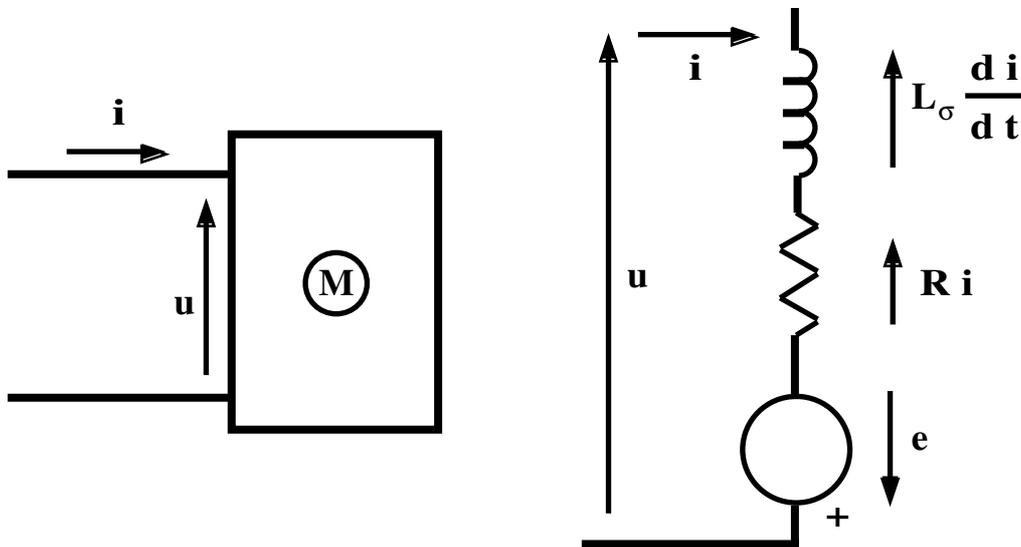


Fig. II-10: Circuito equivalente de una fase con el convenio de signos de motor

Supongamos una fase de una máquina funcionando como motor. En este caso la fase actúa como un receptor eléctrico en el cual la circulación de una corriente i , generada por la red eléctrica a la que está conectado el receptor, provoca en éste una caída de tensión u que se opone al paso de i . Esto da lugar a

que u tenga sentido positivo cuando su flecha representativa es de sentido opuesto al de la corriente positiva (Fig. II-10), o lo que es igual, opuesto a la f.e.m. inducida positiva.

Esta tensión u se descompone en tres términos:

- La caída de tensión resistiva Δu_{res} ($= R i$) que, por ser una caída de tensión, tiene sentido opuesto al de la f.e.m.
- La caída de tensión inductiva Δu_{ind} ($= L_{\sigma} di/dt$) debida a los enlaces de flujo de dispersión de la fase que, por ser una caída de tensión, tiene sentido opuesto al de la f.e.m.
- La f.e.m. inducida e en la fase que, como hemos analizado en el apartado anterior, tiene el mismo convenio de signos que la corriente i .

Por lo tanto, se tiene que

$$u = -e + \Delta u_{\text{res}} + \Delta u_{\text{ind}} = -e + R i + L_{\sigma} \frac{di}{dt} \quad (\text{II-31})$$

Esto justifica que al considerar un devanado de la máquina, supuesto el convenio de signos motor, se adopte para los fasores espaciales \bar{u} , $\Delta \bar{u}_{\text{res}}$ y $\Delta \bar{u}_{\text{ind}}$ un convenio de signos opuesto al de \bar{i} y que la ecuación fasorial del devanado sea

$$\bar{u} = -\bar{e} + \Delta \bar{u}_{\text{res}} + \Delta \bar{u}_{\text{ind}} \quad (\text{II-32})$$

Convenio de signos como generador

* Supongamos ahora una fase de una máquina funcionando como generador. En este caso la tensión u en bornes de la máquina genera la corriente y , por tanto, tiene el mismo convenio de signos que la f.e.m. y que la intensidad (Fig. II-11).

Al igual que en el caso anterior, esta tensión u se descompone en las caídas de tensión resistiva e inductiva (de convenios de signos opuestos al de la f.e.m.

por tratarse de caídas de tensión) y en la f.e.m. inducida. Así pues, se cumple que

$$u = e - \Delta u_{\text{res}} - \Delta u_{\text{ind}} = e - R i - L_{\sigma} \frac{di}{dt} \quad (\text{II-33})$$

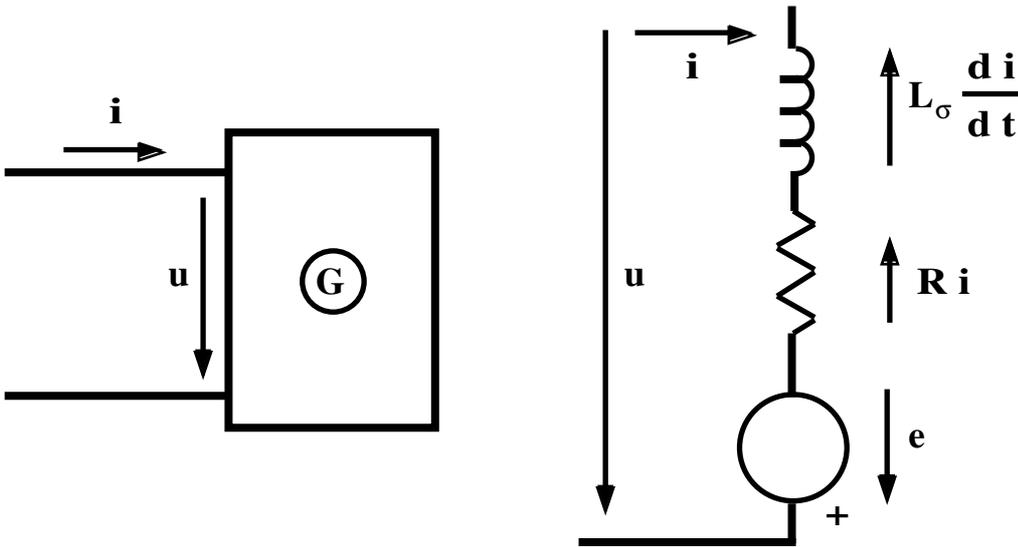


Fig. II-11: Circuito equivalente de una fase con el convenio de signos de generador

Luego, si se utiliza el convenio de signos generador para el devanado de una máquina, el sentido positivo para los fasores espaciales de tensión, f.e.m. y corriente es el mismo (entrante) y opuesto al convenio de signos de las caídas de tensión resistiva e inductiva.

Luego, con el convenio de signos generador la ecuación fasorial de un devanado es así:

$$\bar{u} = \bar{e} - \Delta \bar{u}_{\text{res}} - \Delta \bar{u}_{\text{ind}} \quad (\text{II-34})$$

* De momento en este libro vamos a estudiar la máquina asíncrona actuando como motor y utilizaremos el convenio de signos motor.

Sin embargo, más adelante nos referiremos a la máquina síncrona, que normalmente funciona como generador, y, por tanto, emplearemos el convenio de signos generador para estudiar su devanado inducido.

ECUACION DE UNA JAULA DE ARDILLA

* Cuando se aplica la ecuación fasorial (II-24) al rotor de una máquina asíncrona calculando los parámetros r y l_{σ} mediante las relaciones (II-21) y (II-22) se está suponiendo que el rotor está bobinado.

Dado que, como veremos en un próximo capítulo, normalmente se utiliza un rotor reducido al estator; no tiene importancia el trabajar así aún cuando el rotor sea de jaula de ardilla (al reducir al estator se opera con un rotor bobinado equivalente).

En el caso de no reducir el rotor al estator, los parámetros r y l_{σ} de (II-24) no deben calcularse con las relaciones (II-21) y (II-22), sino mediante estas expresiones:

$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{\pi D}{m} \left[R_b + \frac{R_{aro}}{2m \text{ Sen}^2 \left(\frac{\pi p}{m} \right)} \right] \\ l_{\sigma} &= \frac{\pi D}{m} \left[L_{\sigma b} + \frac{L_{\sigma aro}}{2m \text{ Sen}^2 \left(\frac{\pi p}{m} \right)} \right] \end{aligned} \right\} \quad \text{(II-35)}$$

Donde

R_b y $L_{\sigma b}$ son coeficientes de una barra de la jaula de ardilla.

R_{aro} y $L_{\sigma aro}$ son coeficientes de uno de los aros de cortocircuito de la jaula de ardilla.

m es el número de barras de la jaula de ardilla.

ECUACIONES Y DIAGRAMA FASORIAL ESPACIAL DE UNA MAQUINA ASINCRONA

* Dedicaremos un próximo capítulo al estudio de las ecuaciones de la máquina asíncrona, pero aquí nos adelantaremos a él para presentar un ejemplo de aplicación de la ecuación fasorial de un devanado (II-24) y de su diagrama fasorial (Fig. II-7) a la totalidad de una máquina eléctrica. Esta va a ser una máquina asíncrona ideal, equilibrada y simétrica cuyo rotor está en cortocircuito (luego $\bar{u}_R = 0$). Las ecuaciones fasoriales de estator y rotor serán las siguientes:

$$\begin{aligned}\bar{u}_S &= r_S \bar{i}_S + l_{\sigma S} \frac{d\bar{i}_S}{dt} - \bar{e}_S \\ 0 &= r_R \bar{i}_R + l_{\sigma R} \frac{d\bar{i}_R}{dt} - \bar{e}_R\end{aligned}\tag{II-36}$$

es decir:

$$\begin{aligned}\bar{u}_S &= r_S \bar{i}_S + l_{\sigma S} \frac{d\bar{i}_S}{dt} - \bar{e}_S \\ \bar{e}_R &= r_R \bar{i}_R + l_{\sigma R} \frac{d\bar{i}_R}{dt}\end{aligned}\tag{II-37}$$

Teniendo en cuenta, además, las relaciones entre los fasores de f.e.m. de estator y rotor, representadas en la figura II-6, que el fasor \bar{i}_{maq} se obtiene por suma de los fasores \bar{i}_S e \bar{i}_R y que se cumple la relación (II-13) para el flujo de corona de máquina:

CAPITULO 3º:

CORRESPONDENCIA ENTRE
FASORES ESPACIALES Y
MAGNITUDES EXTERNAS

- **Introducción**
- **Obtención de los fasores espaciales a partir de las magnitudes de fase. Fasores espaciales matemáticos**
- **Obtención de las magnitudes de fase a partir de los fasores espaciales**
- **Obtención del par a partir de fasores espaciales**
- **Obtención de la potencia a partir de fasores espaciales**
- **Bibliografía**
- **Apéndices**

CAPITULO 3º: CORRESPONDENCIA ENTRE FASORES ESPACIALES Y MAGNITUDES EXTERNAS

INTRODUCCION

* En el capítulo anterior se han definido diversas magnitudes internas a las cuales se les ha asociado un fasor espacial y se han establecido las relaciones que existen entre estos fasores espaciales.

El siguiente paso es relacionar estos fasores con las magnitudes externas de la máquina, de tal forma que a partir de los primeros podamos obtener las segundas y viceversa.

Cuando se trabaja con todos los armónicos espaciales de los campos magnéticos de la máquina es posible siempre establecer estas correspondencias. Así, el profesor Fernando Mantilla junto con el autor de este libro han desarrollado diversos teoremas de correlación para los fasores de corriente ([5], [6]).

Sin embargo, cuando se trabaja sólo con el armónico fundamental, como estamos haciendo en este libro, no siempre es posible establecer correspondencias entre fasores y valores de fase si el número de fases a considerar es elevado (ya que, por ejemplo, pueden existir infinidad de combinaciones de corrientes de fase que den lugar al mismo fasor espacial de corriente). Afortunadamente, en los casos más habituales podemos obtener todos los valores de fase a partir de los fasores espaciales correspondientes mediante los teoremas de correlación desarrollados por el profesor Serrano en [8] y [9].

En este capítulo también se van a definir los *fasores espaciales matemáticos* que son unos elementos auxiliares muy útiles para el cálculo de los fasores espaciales de una máquina polifásica equilibrada a partir de las magnitudes de fase. Los fasores espaciales matemáticos permitirán también enlazar la teoría de los fasores espaciales con la de los vectores espaciales de Kovacs y Racz [4].

OBTENCION DE LOS FASORES ESPACIALES A PARTIR DE LAS MAGNITUDES DE FASE. FASORES ESPACIALES MATEMATICOS

* Vamos a considerar un devanado polifásico, simétrico y equilibrado ¹ de m fases (A, B, C, ..., M). Las corrientes y tensiones de cada una de sus fases son i_A, i_B, \dots, i_M y u_A, u_B, \dots, u_M , respectivamente.

El ángulo eléctrico que forman en el espacio dos fases consecutivas de este devanado vale $2\pi/m$ radianes y el sistema de coordenadas se supone fijo al devanado. Esto significa que todas las expresiones que vamos a obtener en este apartado darán el valor de los fasores espaciales referidos a su sistema de coordenadas propio (sistema de coordenadas del estator para fasores del estator y sistema de coordenadas del rotor para fasores del rotor).

Con estos convenios, si el eje de devanado de la fase A forma un ángulo θ_A respecto al eje real del sistema de coordenadas, el ángulo eléctrico θ_B del eje de devanado de la fase B vale $(\theta_A + 2\pi/m)$ radianes y el ángulo θ_K que forma el eje de devanado de una fase genérica K respecto al eje real del sistema de coordenadas, expresado en radianes eléctricos, vale

$$\theta_K = (k - 1) \frac{2\pi}{m} + \theta_A \quad \text{(III-1a)}$$

En esta expresión el valor de k es el número de orden de la fase K considerada. Este número de orden vale 1 para la fase A, vale 2 para la fase B, vale 3 para la fase C, etc.

Cuando el devanado considerado está situado sobre un órgano de la máquina -estator o rotor- donde no hay otros bobinados, se toma el eje real de su sistema de coordenadas propio coincidente con el eje de devanado de su fase A. Esto da lugar a que el ángulo θ_A sea nulo y que

$$\theta_K = (k - 1) \frac{2\pi}{m} \quad \text{(III-1b)}$$

¹ Para devanados monofásicos veanse los apéndices de este capítulo.

Fasor de corriente de un devanado polifásico

* Una fase K actuando individualmente equivale a una capa de corriente senoidal cuyo valor máximo A_{KM} se puede obtener a partir de la ecuación (I-12):

$$A_{KM} = \frac{2}{\pi D} \cdot \xi_b \cdot Z \cdot i_K$$

Este valor máximo se produce en la dirección de su eje de devanado θ_K (Ver figuras (I-4) y (II-4)). Por lo tanto, el fasor espacial de corriente de la fase K, \bar{i}_K , vale

$$\bar{i}_K = A_{KM} \cdot e^{j\theta_K} = \frac{2 \cdot Z \cdot \xi_b}{\pi D} \cdot i_K \cdot e^{j\theta_K} \quad \text{(III-2)}$$

El fasor de corriente del devanado será igual a la suma vectorial de los fasores de corriente de todas las m fases del devanado:

$$\bar{i} = \sum_{k=1}^m \bar{i}_K = \sum_{k=1}^m \frac{2 \cdot Z \cdot \xi_b}{\pi D} \cdot i_K \cdot e^{j\theta_K}$$

En estos sumatorios se supone que el subíndice K varía de acuerdo con el número de orden k de la fase. Así, si k vale 1, K es igual a A; si k vale 2, K es igual a B; etc.

Denominamos **fasor espacial matemático de corriente \bar{i}'** al fasor auxiliar definido así:

$$\bar{i}' = i_A \cdot e^{j\theta_A} + i_B \cdot e^{j\theta_B} + \dots + i_M \cdot e^{j\theta_M}$$

$$\boxed{\bar{i}' = \sum_{k=1}^m i_K \cdot e^{j\theta_K}} \quad \text{(III-3)}$$

Recordemos de (II-26) que llamamos C_i a esta constante real del devanado:

$$C_i = \frac{\pi \cdot D}{m \cdot Z \cdot \xi_b} \quad (\text{III-4})$$

Luego, finalmente queda que

$$\boxed{\bar{i} = \frac{\bar{i}'}{\frac{m}{2} C_i}} \quad (\text{III-5})$$

En esta expresión ambos fasores, \bar{i} e \bar{i}' , deben estar referidos al mismo sistema de coordenadas.

Fasor de tensión eléctrica de un devanado polifásico

* En una fase K de un bobinado polifásico de m fases se verifica que

$$u_K = R \cdot i_K + L_\sigma \frac{di_K}{dt} - e_K \quad (\text{III-6})$$

Por otra parte, veremos más adelante (ecuación (III-16)) que se cumple lo siguiente:

$$e_K = C_u \cdot \text{Re}\{\bar{e} \cdot e^{-j\theta_K}\} = \frac{C_u}{2} [\bar{e} \cdot e^{-j\theta_K} + \bar{e}^* \cdot e^{j\theta_K}] \quad (\text{III-7})$$

donde * significa "fasor conjugado de" y C_u ya hemos visto en (II-25) que es una constante real que vale:

$$C_u = Z \cdot \xi_b \quad (\text{III-8})$$

Por consiguiente, se pueden establecer estas igualdades correspondientes a las m fases del devanado:

11) y entre (III-5) y (III-12).

Fasores espaciales de los devanados trifásicos. Vectores espaciales

- * En el caso de devanados trifásicos, simétricos, equilibrados y sin armónicos superiores del campo, el ángulo eléctrico γ entre dos fases vale $2\pi/3$ radianes. Luego, si θ_A es nulo los fasores matemáticos de corriente y de tensión, dados de forma general por las ecuaciones (III-3) y (III-11), valen ahora

$$\begin{aligned}\bar{i}' &= i_A + i_B e^{j\gamma} + i_C e^{j2\gamma} \\ \bar{u}' &= u_A + u_B e^{j\gamma} + u_C e^{j2\gamma} \\ \left(\gamma = \frac{2\pi}{3} \right)\end{aligned}\tag{III-13}$$

Existe una teoría anterior a la de los fasores espaciales desarrollada por Kovacs y Racz que utiliza los *vectores espaciales* (aunque algunos autores los denominan también fasores espaciales, lo que puede dar lugar a confusión con los verdaderos fasores espaciales). En [14] el lector puede encontrar una comparación entre las teorías de los vectores y de los fasores espaciales.

Las fórmulas que definen los vectores espaciales son idénticas a las (III-13). En una máquina trifásica, simétrica, equilibrada, con entrehierro constante y sin armónicos espaciales superiores del campo, los vectores espaciales son idénticos a los fasores espaciales matemáticos.

Fasores espaciales de una máquina polifásica en régimen permanente. Teorema de correlación fasorial

- * Si un devanado polifásico simétrico y equilibrado se alimenta con un sistema equilibrado de corrientes senoidales de secuencia directa y de frecuencia f_{dev} ($\omega_{\text{dev}} = 2\pi f_{\text{dev}}$) y si \bar{U}_A e \bar{I}_A son los fasores temporales de tensión e intensidad de la fase A de dicho devanado, se obtiene a partir de (III-1b), (III-3) y (III-11) que los fasores espaciales matemáticos de tensión y de corriente valen

$$\begin{aligned}\bar{i}' &= \frac{m}{2} \sqrt{2} \bar{I}_A e^{j\omega_{\text{dev}} t} \\ \bar{u}' &= \frac{m}{2} \sqrt{2} \bar{U}_A e^{j\omega_{\text{dev}} t}\end{aligned}\tag{III-14}$$

Luego, de (III-5), (III-12) y (III-14) se obtiene que, en este caso, los fasores espaciales físicos de tensión y de intensidad son

$$\begin{aligned}\bar{i} &= \frac{\sqrt{2} \bar{I}_A e^{j\omega_{\text{dev}} t}}{C_i} \\ \bar{u} &= \frac{\sqrt{2} \bar{U}_A e^{j\omega_{\text{dev}} t}}{C_u}\end{aligned}\tag{III-15}$$

En estas expresiones los fasores están referidos a un sistema de coordenadas fijo al devanado cuyo eje real coincide con el eje de devanado de la fase A ($\theta_A=0$).

En (III-14) y (III-15) se puede apreciar que los fasores espaciales son funciones del tiempo. Como es lógico, en régimen permanente se obtiene ((III-14) y (III-15)) que estos fasores representan campos giratorios perfectamente circulares: su amplitud permanece constante y giran con una velocidad constante de ω_{dev} radianes eléctricos por segundo.

- * Observando las dos ecuaciones (III-15) se puede comprobar que en régimen permanente los ángulos que forman entre sí los fasores espaciales \bar{u} e \bar{i} y los fasores temporales \bar{U}_A e \bar{I}_A son iguales.

Sea un devanado polifásico, simétrico y equilibrado perteneciente a una máquina eléctrica sin armónicos espaciales de campo de orden superior y que funciona en régimen permanente senoidal (es decir, a velocidad constante y alimentada con corrientes senoidales equilibradas). Se puede demostrar (véase [8]) que, si las magnitudes internas de la máquina giran con velocidad positiva (en sentido antihorario) respecto al devanado, los ángulos eléctricos entre fasores espaciales son idénticos a los formados por sus fasores temporales

homólogos. Por lo tanto, los diagramas fasoriales espaciales y temporales son angularmente superponibles. Este es el **Teorema de Correlación Fasorial**.

Si las magnitudes internas de la máquina giran en sentido negativo (horario) respecto al devanado los ángulos entre dos fasores espaciales y entre sus dos fasores homólogos en el tiempo tienen signos opuestos.

<u>TIEMPO</u>	<u>ESPACIO</u>
Enlaces de flujo $\bar{\Psi}$	Flujo de corona $\bar{\Phi}_{cor}$
F.e.m. inducida \bar{E}	F.e.m. inducida \bar{e}
Corriente \bar{I}	Corriente \bar{i}
Tensión \bar{U}	Tensión \bar{u}
Caída de tensión re- sistiva $R \cdot \bar{I}$	Caída de tensión re- sistiva $\Delta \bar{u}_{res} = r \cdot \bar{i}$
Caída de tensión in- ductiva $j X_{\sigma} \cdot \bar{I}$	Caída de tensión in- ductiva $\Delta \bar{u}_{ind} = l_{\sigma} (d\bar{i}/dt)$

Tabla (III-1): Fasores espaciales y temporales homólogos

Los fasores espaciales y temporales homólogos están indicados en la tabla (III-1). Nótese que los fasores temporales de corriente \bar{I} , f.e.m. \bar{E} y tensión \bar{U} se representan mediante letras mayúsculas mientras que sus fasores espaciales homólogos, \bar{i} , \bar{e} y \bar{u} , se representan mediante letras minúsculas. Los fasores espaciales de tensión e inducción magnéticas, \bar{F} y \bar{B} , no tienen fasores temporales homólogos.

* Recordemos que cuando se trabaja con una máquina polifásica, simétrica, equilibrada y sin armónicos espaciales de campo funcionando en régimen permanente senoidal con velocidad de giro positiva (antihoraria) se verifica que:

- Los fasores espaciales de f.e.m. \bar{e} sólo tienen la componente de giro y, por tanto, están retrasados $\pi/2$ radianes eléctricos respecto al fasor de flujo de corona de la máquina $\bar{\Phi}_{cor, maq}$.
- Los fasores espaciales de caída de tensión inductiva $\Delta \bar{u}_{ind} = l_{\sigma} (d\bar{i}/dt)$ están

adelantados $\pi/2$ radianes eléctricos respecto a los fasores espaciales de corriente \bar{i} respectivos.

- Existe correlación entre los diagramas fasoriales en el espacio y en el tiempo.

* Como ejemplo de aplicación del teorema de correlación fasorial, en la figura (III-1) se han representado los diagramas fasoriales en el tiempo y el espacio de un motor síncrono de rotor liso polifásico en régimen permanente senoidal. En este caso las magnitudes del rotor corresponden a la excitación de la máquina ² y las del estator al inducido. Dado que el rotor (excitación) está alimentado con corriente continua no existen fasores temporales del rotor (éstos sólo representan magnitudes alternas) y el diagrama fasorial temporal únicamente representa lo que sucede en una fase del estator. Sin embargo, en el diagrama fasorial espacial podemos representar lo que pasa tanto en el rotor como en el estator y, por consiguiente, este diagrama proporciona más información que el temporal.

El ángulo relativo entre los fasores que forman un diagrama fasorial espacial no depende del sistema de coordenadas elegido. Por esta razón, en la explicación que aparece en el siguiente párrafo, relativa a un diagrama espacial, usaremos el sistema de coordenadas genérico k . Recordemos que al representar gráficamente los fasores espaciales en un diagrama fasorial no se incluyen los superíndices que indican el sistema de coordenadas.

En el diagrama espacial (Fig. III-1a) vemos que \bar{i}_{maq}^k se obtiene por suma de \bar{i}_S^k y de \bar{i}_R^k y que $\bar{\Phi}_{cor,maq}^k$ está en fase con \bar{i}_{maq}^k . El fasor \bar{F}_{maq}^k está adelantado $\pi/2$ radianes eléctricos respecto a $\bar{\Phi}_{cor,maq}^k$ mientras que \bar{e}_S^k está retrasado $\pi/2$ radianes eléctricos. El fasor de tensión \bar{u}_S^k es igual a la suma de $-\bar{e}_S^k$ más $\Delta\bar{u}_{ress}^k$ y $\Delta\bar{u}_{indS}^k$.

² En régimen permanente el rotor gira a la velocidad de sincronismo y, por lo tanto, no se inducen corrientes en el devanado de amortiguación si la máquina es ideal. En consecuencia, en régimen permanente los fasores del rotor de una máquina síncrona corresponden sólo a su devanado de excitación.

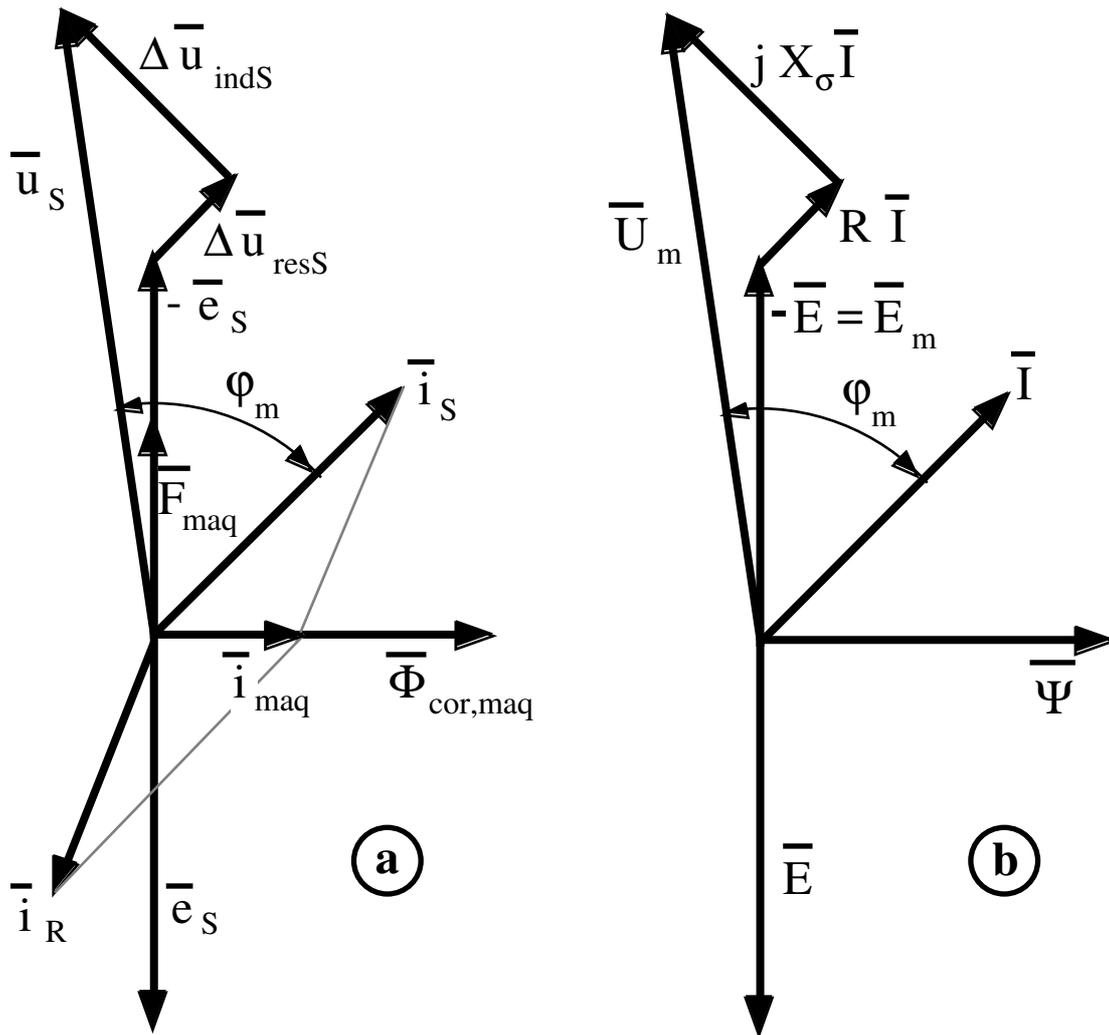


Fig. III-1: Diagramas fasoriales espacial (a) y temporal (b) de un motor síncrono

En el diagrama temporal (Fig. III-1b) se observa que la tensión en bornes de la máquina \bar{U}_m ³ se obtiene como suma de $-\bar{E}$ ($=\bar{E}_m$) y de las caídas de tensión resistiva e inductiva. El ángulo entre \bar{I} y \bar{U}_m es el ángulo φ_m (según convenio de signos de motor). Luego, por correlación fasorial, también el ángulo entre \bar{i}_s y \bar{u}_s es φ_m .

³ Se ha puesto el subíndice m al fasor temporal de tensión en bornes del estator para indicar que se trata de una tensión eléctrica según el convenio de signos de motor. El ángulo φ_m , según el criterio de signos de motor, es el ángulo entre \bar{I} y \bar{U}_m . También es frecuente denominar con el subíndice m al fasor temporal de f.e.m. generada en el estator cambiado de signo, es decir, al fasor de f.c.e.m.

OBTENCION DE LAS MAGNITUDES DE FASE A PARTIR DE LOS FASORES ESPACIALES

Existen varios teoremas de correlación que permiten obtener magnitudes de fase (tensión, intensidad, f.e.m. y enlaces de flujo) a partir de los fasores espaciales correspondientes. Todos estos teoremas tienen una estructura similar, siendo el valor de la magnitud de fase proporcional a la proyección del fesor correspondiente en la dirección dada por el eje de devanado de la fase considerada.

No obstante, si el número de fases del devanado es superior a tres no siempre es posible calcular las magnitudes de fase a partir de los fasores espaciales, como ya dijimos en la introducción de este capítulo. Por esta razón, el lector debe tener especial cuidado en fijarse en cuáles son los límites de validez de cada teorema de correlación.

Teorema de Correlación General en Régimen Dinámico

- * Este teorema permite relacionar los enlaces de flujo común y la f.e.m. de cada fase con los fasores de flujo de corona y de f.e.m. inducida, respectivamente.

En su forma general (veáse [8]) este teorema es válido para cualquier tipo de máquina, aunque no sea ideal ni simétrica ni equilibrada y aunque se consideren varios armónicos espaciales del campo. Restringiéndonos al caso que nos ocupa de máquinas en las que sólo se considera el armónico fundamental del campo magnético, el Teorema de Correlación General en Régimen Dinámico se puede deducir sabiendo que una fase K con Z_K espiras en serie y un factor de bobinado ξ_{bK} puede ser sustituida por una fase anular equivalente (formada por bobinas concentradas de espiras anulares como la dibujada en la figura II-8b) de $Z_K \cdot \xi_{bK}$ espiras en serie situada de tal forma que su eje de devanado tenga la misma dirección θ_K que el de la fase real.

Todas las espiras de esta fase anular están atravesadas por el mismo flujo común y éste es el flujo de corona correspondiente a la posición θ_K . Así, los

enlaces de flujo común de la fase anular y, por equivalencia, de la fase K, Ψ_{HK} , tienen un valor igual a $Z_K \cdot \xi_{bK} (= C_u)$ veces el flujo de corona en la posición θ_K , el cual puede ser obtenido a partir del fasor espacial de flujo de corona por medio de la relación (II-3).

Análogamente, la f.e.m. inducida en la fase anular (y, por tanto, en la fase real K) es igual a $Z_K \cdot \xi_{bK} (= C_u)$ veces la f.e.m. inducida en una de sus espiras. La f.e.m. de una espira anular es igual, como ya dijimos en un apéndice del capítulo anterior, a la inducida en su lado activo, la cual puede obtenerse a partir del correspondiente fasor espacial de f.e.m. mediante la relación (II-3).

Por lo tanto, el Teorema de Correlación General en Régimen Dinámico para máquinas en las que sólo se considera el armónico fundamental del campo magnético adopta la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \Psi_{HK} &= C_u \cdot \text{Re} \left\{ \bar{\Phi}_{\text{cor}} \cdot e^{-j\theta_K} \right\} \\ e_K &= C_u \cdot \text{Re} \left\{ \bar{e} \cdot e^{-j\theta_K} \right\} \end{aligned} \tag{III-16}$$

Naturalmente, en esta expresión los fasores $\bar{\Phi}_{\text{cor}}$ y \bar{e} deben ser los relativos al devanado al que pertenece la fase K, cuyos enlaces de flujo común y f.e.m. se desean obtener.

A partir de este teorema se deduce que los fasores $\bar{\Phi}_{\text{cor}}$ y \bar{e} tienen una doble interpretación física. Por un lado, representan en un instante dado a las ondas espaciales de flujo de corona y de f.e.m. unitaria inducida. Por otro lado, sus proyecciones sobre los ejes de devanado de las fases dan, a escala C_u , los valores instantáneos de los enlaces de flujo común de las fases y de las f.e.m.s inducidas en ellas, respectivamente.

Correlación entre los fasores de corriente y de tensión eléctrica y las corrientes y tensiones de fase

- * Aunque cuando se conoce suficiente número de armónicos se pueden establecer teoremas generales de correlación para corrientes y tensiones eléctricas (veáanse [5], [6]), en el caso de considerar únicamente el armónico fundamental del campo se pueden establecer tres teoremas de correlación parciales válidos sólo para devanados polifásicos equilibrados. El primer teorema es válido para devanados que no estén en cortocircuito y que no tengan más de tres fases con la condición, además, de que en el caso trifásico las tres intensidades de fase o las tres tensiones de fase sumen cero, según se trate de correlación para intensidades o tensiones. El segundo teorema se utiliza en devanados en cortocircuito y es válido para un número de fases m cualquiera. El tercero se aplica en devanados equilibrados de cualquier número de fases cuando pertenecen a máquinas polifásicas, simétricas y equilibradas funcionando en régimen permanente senoidal.

1º Teorema: Devanados de hasta tres fases

- * Supongamos un devanado trifásico en el que se verifique siempre que la suma de las tres corrientes de fase es nula. Esto sucede cuando el devanado está conectado en triángulo o en estrella con su neutro aislado.

La primera ecuación compleja (III-13), descompuesta en sus partes real e imaginaria, nos da dos ecuaciones reales que, junto con la condición de que las tres corrientes de fase suman cero, nos permiten despejar los valores de las corrientes de fase a partir de los fasores espaciales matemáticos. Se obtiene que

$$i_K = \frac{2}{3} \operatorname{Re}\{\bar{i}' \cdot e^{-j\theta_K}\} \quad (\text{III-17})$$

Trabajando de forma análoga con la segunda ecuación compleja (III-13) y si se cumple que las tres tensiones de fase suman cero, se obtiene que

$$u_K = \frac{2}{3} \operatorname{Re}\{\bar{u}' \cdot e^{-j\theta_K}\} \quad (\text{III-18})$$

Considerando, además, las relaciones (III-5) y (III-12) resulta que el teorema de correlación de un devanado trifásico y equilibrado, cuyas corrientes e intensidades de fase suman cero, que liga sus fasores espaciales de corriente y de tensión eléctrica con las corrientes y tensiones de fase es así:

$$\boxed{i_K = \frac{\pi D}{3 Z \xi_b} \operatorname{Re}\{\bar{i} \cdot e^{-j\theta_K}\} = C_i \operatorname{Re}\{\bar{i} \cdot e^{-j\theta_K}\}} \quad (\text{III-19})$$

$$\boxed{u_K = Z \xi_b \operatorname{Re}\{\bar{u} \cdot e^{-j\theta_K}\} = C_u \operatorname{Re}\{\bar{u} \cdot e^{-j\theta_K}\}} \quad (\text{III-20})$$

Naturalmente, en las expresiones (III-17), (II-18), (III-19) y (III-20) los fasores \bar{i}' , \bar{u}' , \bar{i} y \bar{u} deben ser los relativos al devanado cuyas corrientes y tensiones de fase se desean obtener.

* Para devanados bifásicos se puede hacer un desarrollo similar y se obtienen expresiones análogas:

$$i_K = \operatorname{Re}\{\bar{i}' \cdot e^{-j\theta_K}\} \quad (\text{III-21})$$

$$u_K = \operatorname{Re}\{\bar{u}' \cdot e^{-j\theta_K}\} \quad (\text{III-22})$$

$$\boxed{i_K = \frac{\pi D}{2 Z \xi_b} \operatorname{Re}\{\bar{i} \cdot e^{-j\theta_K}\} = C_i \operatorname{Re}\{\bar{i} \cdot e^{-j\theta_K}\}} \quad (\text{III-23})$$

$$\boxed{u_K = Z \xi_b \operatorname{Re}\{\bar{u} \cdot e^{-j\theta_K}\} = C_u \operatorname{Re}\{\bar{u} \cdot e^{-j\theta_K}\}} \quad (\text{III-24})$$

2º Teorema: Devanados polifásicos en cortocircuito

* En el caso de devanados polifásicos equilibrados en cortocircuito se demuestra que la intensidad instantánea en cualquiera de sus m fases es igual a la proyección del fasor espacial de intensidad del devanado sobre el eje de devanado de la fase multiplicada por la constante real C_i :

$$\boxed{i_K = \frac{\pi D}{m Z \xi_b} \operatorname{Re}\{\bar{i} \cdot e^{-j\theta_K}\} = C_i \operatorname{Re}\{\bar{i} \cdot e^{-j\theta_K}\}} \quad (\text{III-25})$$

3° Teorema: Devanados polifásicos en régimen permanente senoidal

* En el caso de devanados polifásicos equilibrados pertenecientes a máquinas simétricas y equilibradas que están funcionando en régimen permanente senoidal se cumplen siempre las relaciones (III-24) y (III-25), independientemente del número de fases del devanado.

* Así pues, los tres teoremas parciales que acabamos de ver se pueden resumir en las dos expresiones (III-24) y (III-25), teniendo cuidado de recordar cuando son válidas. Estas dos expresiones son válidas para devanados polifásicos equilibrados cuyo número de fases es igual a 2 o 3, con la condición adicional en el caso trifásico de que las tres intensidades de fase deben sumar cero para que se cumpla (III-25) y que las tres tensiones de fase deben sumar cero para que se cumpla (III-24). En régimen permanente las expresiones (III-24) y (III-25) siguen siendo válidas aunque el número de fases sea superior a tres. La fórmula (III-25) también es válida para devanados polifásicos equilibrados de cualquier número de fases cuando están conectados en cortocircuito.

Apreciese la similitud formal de los Teoremas de Correlación para f.e.m.s (III-16) y para tensiones de fase (III-24), aunque sus límites de validez son distintos.

OBTENCION DEL PAR A PARTIR DE FASORES ESPACIALES

Expresiones del par en función de fasores espaciales

* La Mecánica define el par \vec{M} ⁴ como una magnitud vectorial dirigida en la dirección perpendicular a la del plano donde se produce el movimiento de giro que pretende originar. El sentido de \vec{M} es el de avance de un sacacorchos que

⁴ En otros libros esta magnitud se representa utilizando la letra T o la letra C.

gira movido por \vec{M} .

En el caso de las máquinas eléctricas rotativas es evidente que \vec{M} tiene dirección axial, por lo que para definir esta magnitud basta con dar su módulo y sentido. Es decir, para conocer \vec{M} basta con saber M , que es una magnitud escalar cuyo valor es igual al módulo de \vec{M} con signo positivo si el par pretende producir un giro antihorario (velocidad positiva) y con signo negativo si \vec{M} pretende girar el rotor de la máquina en sentido horario (velocidad negativa). Esto lo expresamos así:

$$M = |\vec{M}|$$

donde $|\cdot|$ representa la operación de calcular el módulo y darle el signo correspondiente según el convenio adoptado.

- * Supongamos una máquina eléctrica ideal que en un instante dado está en la situación representada por el diagrama fasorial espacial de la figura (III-2).

Dado que el fasor \vec{i}_{maq} representa la capa de corriente equivalente al conjunto de los devanados de la máquina cuyo valor máximo es A_{maqM} , se tiene que

$$A_{maq} = A_{maqM} \cos[\alpha - \theta_{maq}] \quad (III-26)$$

Análogamente se obtiene que

$$B_{maq} = B_{maqM} \cos\left[\alpha - \left(\theta_{maq} + \frac{\pi}{2}\right)\right] \quad (III-27)$$

$$A_R = A_{RM} \cos[\alpha - \theta_R] \quad (III-28)$$

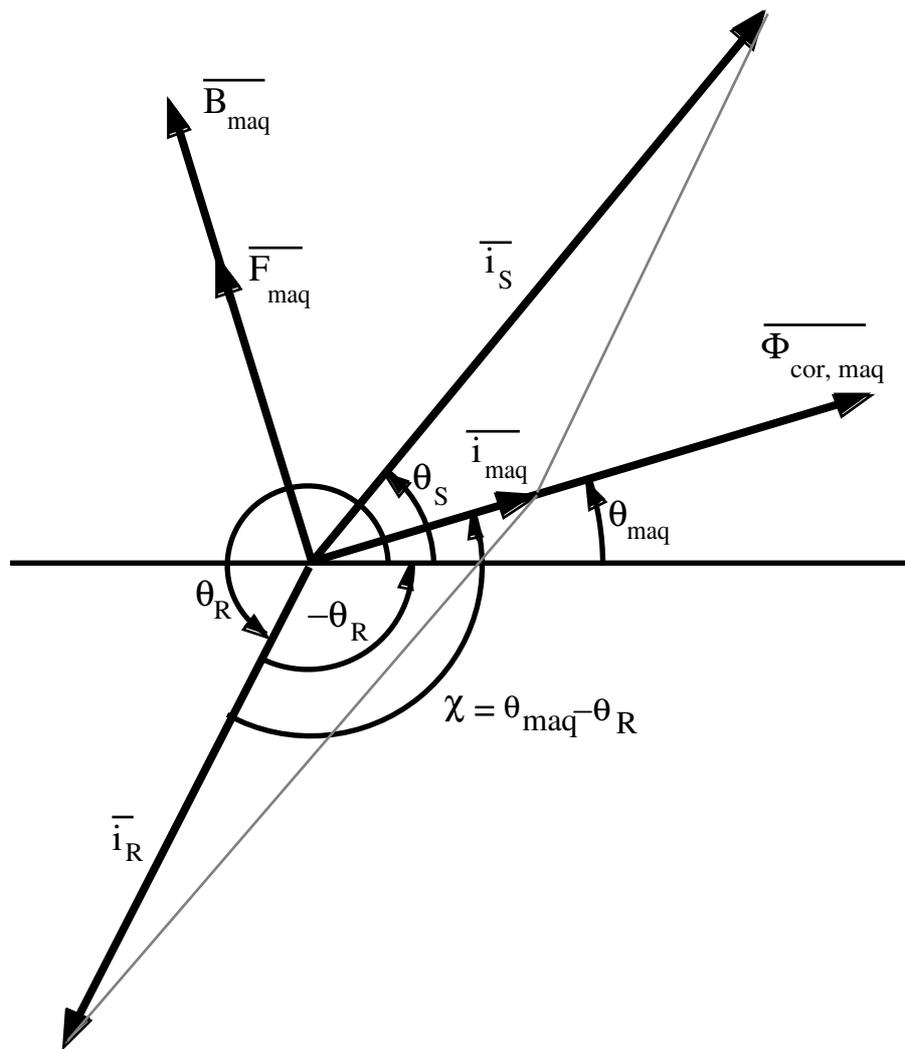


Fig. III-2: Diagrama fasorial espacial de una máquina ideal

Consideremos un elemento del rotor de longitud dx (Fig. III-3), dentro del cual se puede suponer que A_R y \vec{B}_{maq} no varían en el espacio. Por lo tanto, este elemento abarca una corriente de valor

$$A_R \cdot dx = A_R \left(\frac{D}{2} \right) d\alpha_g = A_R \frac{D}{2p} d\alpha \quad (\text{III-29})$$

La acción del campo magnético de máquina \vec{B}_{maq} sobre esta corriente da lugar, según la Ley de Laplace, a una fuerza diferencial $d\vec{F}$ cuyo módulo vale

$$dF = B_{maq} (A_R \cdot dx) l \quad (III-30)$$

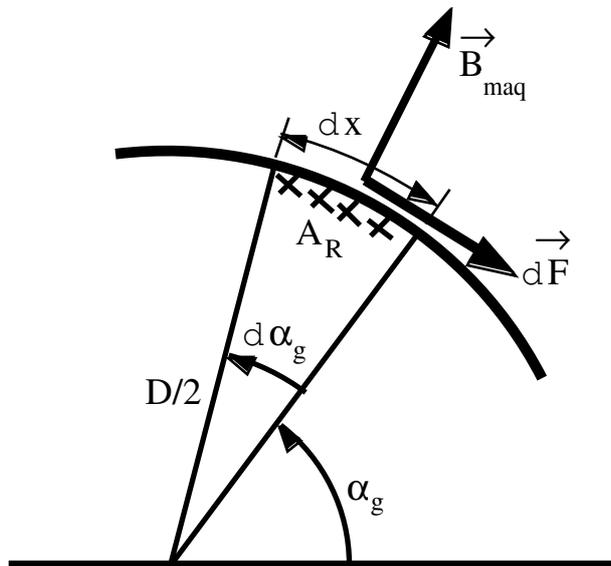


Fig. III-3: Elemento del rotor de longitud diferencial

Por lo tanto, aparece un par diferencial de valor

$$dM = -\frac{D}{2} B_{maq} (A_R \cdot dx) l$$

$$dM = -\frac{D^2 l}{4 p} B_{maq} \cdot A_R \cdot d\alpha \quad (III-31)$$

El signo negativo que aparece en estas expresiones es debido a que, como se puede comprobar mediante la regla de la mano izquierda, cuando B_{maq} y A_R son positivos el par resultante tiene sentido negativo según el convenio de signos adoptado (Ver la fig. III-3).

Teniendo en cuenta las expresiones (III-27) y (III-28) la ecuación (III-31) queda así:

$$dM = -\frac{D^2 l}{4 p} B_{maq} M \cos \left[\alpha - \left(\theta_{maq} + \frac{\pi}{2} \right) \right] \cdot A_{RM} \cos [\alpha - \theta_R] \cdot d\alpha \quad (III-32)$$

El par total es igual a p veces el producido por un único par de polos y un

par de polos abarca 2π radianes eléctricos, luego:

$$M = p \int_0^{2\pi} dM \quad (\text{III-33})$$

Operando se llega a la siguiente expresión:

$$M = -\frac{\pi D^2 l}{4} B_{\text{maq M}} \cdot A_{\text{RM}} \text{sen } \chi \quad (\text{III-34})$$

$$(\chi = \theta_{\text{maq}} - \theta_{\text{R}})$$

Tomando en consideración las relaciones (I-9) y (I-11) se tiene que

$$B_{\text{maq M}} = \frac{\mu_0}{\delta} F_{\text{maq M}} = \frac{\mu_0 D}{2 p \delta} A_{\text{maq M}} \quad (\text{III-35})$$

Luego (III-34) se convierte en

$$M = -\frac{\mu_0 \pi l D^3}{8 p \delta} A_{\text{maq M}} \cdot A_{\text{RM}} \text{sen } \chi \quad (\text{III-36})$$

Desde un punto de vista puramente matemático podemos considerar los fasores \vec{i}_{maq} e \vec{i}_{R} como vectores en el espacio ⁵ con su coordenada según la dirección axial de la máquina de valor nulo. Entonces tenemos que el módulo de su producto vectorial (afectado de signo + o - según su sentido) vale

$$\left| \vec{i}_{\text{R}} \times \vec{i}_{\text{maq}}^{\text{R}} \right| = A_{\text{maq M}} \cdot A_{\text{RM}} \text{sen } \chi$$

Luego:

$$M = K_{\text{M}} \left| \vec{i}_{\text{R}} \times \vec{i}_{\text{maq}}^{\text{R}} \right|$$

donde K_{M} es una constante real de la máquina cuyo valor es

⁵ Veanse los apéndices de este capítulo.

$$\boxed{K_M = \frac{\mu_o \pi l D^3}{8 p \delta} = \frac{\pi D}{2} p l \mu} \quad (\text{III-37})$$

Trabajando con el par expresado en forma vectorial, \vec{M} , y teniendo en cuenta que el producto vectorial de dos vectores no varía al cambiar de sistema de coordenadas, tenemos en el sistema de coordenadas k que

$$\boxed{\vec{M} = K_M (\vec{i}_R^k \times \vec{i}_{maq}^k)} \quad (\text{III-38})$$

Sabemos que

$$\vec{i}_R^k \times \vec{i}_{maq}^k = \vec{i}_R^k \times (\vec{i}_S^k + \vec{i}_R^k) = (\vec{i}_R^k \times \vec{i}_S^k) + (\vec{i}_R^k \times \vec{i}_R^k) = \vec{i}_R^k \times \vec{i}_S^k$$

ya que el producto vectorial de un vector por sí mismo es nulo.

Por lo tanto, se cumple que

$$\boxed{\vec{M} = K_M (\vec{i}_R^k \times \vec{i}_S^k)} \quad (\text{III-39})$$

También se verifica que

$$\vec{i}_R^k \times \vec{i}_S^k = (\vec{i}_R^k \times \vec{i}_S^k) + (\vec{i}_S^k \times \vec{i}_S^k) = (\vec{i}_R^k + \vec{i}_S^k) \times \vec{i}_S^k = \vec{i}_{maq}^k \times \vec{i}_S^k$$

Luego:

$$\boxed{\vec{M} = K_M (\vec{i}_{maq}^k \times \vec{i}_S^k)} \quad (\text{III-40})$$

Por otra parte, teniendo presente las relaciones (II-9) y (II-12a) la expresión (III-34) da lugar también a las siguientes:

$$\left. \begin{aligned} \vec{M} &= \frac{K_M}{l_\mu} \left(\vec{i}_R^k \times \vec{\Phi}_{\text{cor,maq}}^k \right) = \frac{\pi D}{2} p \left(\vec{i}_R^k \times \vec{\Phi}_{\text{cor,maq}}^k \right) \\ \vec{M} &= \frac{K_M}{l_\mu} \left(\vec{\Phi}_{\text{cor,maq}}^k \times \vec{i}_S^k \right) = \frac{\pi D}{2} p \left(\vec{\Phi}_{\text{cor,maq}}^k \times \vec{i}_S^k \right) \end{aligned} \right\} \quad \text{(III-41)}$$

Observese que en todas estas relaciones se obtiene una magnitud vectorial (\vec{M}) a partir del producto vectorial de dos fasores, los cuales, si bien matemáticamente son vectores, representan magnitudes físicas escalares.

Las expresiones (III-38), (III-39) y (III-40) sólo se pueden aplicar en máquinas eléctricas con circuito magnético ideal (sin saturación, ni reluctancia ni pérdidas en el hierro) y entrehierro uniforme. Sin embargo, las ecuaciones (III-41) se pueden aplicar aunque el circuito magnético no sea ideal. En el caso de que el entrehierro no sea uniforme, aún sigue siendo válida una de las fórmulas (III-41): la que contiene el fasor de corriente del órgano cilíndrico de la máquina. Así, por ejemplo, en una máquina síncrona cuyo estator es cilíndrico y cuyo rotor tiene polos salientes sigue siendo válida la segunda ecuación (III-41).

El par dado por las expresiones anteriores es el par instantáneo de la máquina en el momento considerado que, en el caso general, cambia de un instante a otro. Sin embargo, en máquinas ideales, polifásicas y simétricas funcionando en régimen permanente el par permanece constante en el tiempo, como se va a comprobar en el apartado siguiente.

Interpretación física de las ecuaciones del par

* A partir de las expresiones obtenidas anteriormente podemos hacer las siguientes observaciones:

- 1) Si se desea que la máquina proporcione un par constante en el tiempo se deben mantener constantes las amplitudes de las capas de corriente de estator y rotor y el ángulo entre ellas, lo cual es equivalente a conservar constantes

las amplitudes de los campos magnéticos generados por el estator y por el rotor y el desfase entre ellos. Esto exige que la velocidad de giro de ambos campos magnéticos sean iguales, lo cual sucede en la mayoría de las máquinas eléctricas clásicas cuando funcionan en régimen permanente.

- 2) Se puede interpretar la ecuación (III-40) en el sentido de que el par es producido por la tendencia que presentan las capas de corriente del estator y del rotor a alinearse sobre el mismo eje. Esto mismo sucede respecto a los campos magnéticos del estator y del rotor. Así, en régimen permanente el fasor \bar{B}_R tiende a alinearse con \bar{B}_S , pero no lo consigue, manteniéndose constante el ángulo de separación entre estos fasores espaciales porque ambos giran con igual velocidad.
- 3) El par es nulo cuando el ángulo de separación entre los fasores de corriente, o lo que es igual, entre los fasores de campo magnético es nulo. Sin embargo, para campos magnéticos de estator y rotor de módulos constantes, el par es máximo cuando el ángulo entre \bar{B}_R y \bar{B}_S es de $\pi/2$ radianes eléctricos.
- 4) El par producido al interaccionar el campo magnético del rotor, representado por \bar{B}_R , y la capa de corriente del rotor, representada por \bar{i}_R , es nulo. En efecto, calculando este par de una manera similar a como se ha hecho en el apartado anterior se llegaría a una expresión en la que el par figuraría como proporcional al producto vectorial del fasor \bar{i}_R por sí mismo, lo cual da un resultado nulo. Lo mismo sucede si se considera el par que aparece sobre el estator debido a la interacción de \bar{B}_S con \bar{i}_S .

Por consiguiente se deduce que *las corrientes que circulan por un devanado no producen par al interactuar con el campo magnético generado por ellas mismas* (si la máquina es ideal).

- 5) La observación anterior justifica físicamente que el par de la máquina pueda calcularse tanto mediante la ecuación (III-38) como la (III-39). En efecto, para pasar de (III-39) a (III-38) sustituimos \bar{i}_S por \bar{i}_{maq} (que es igual a la suma de los fasores de corriente del estator y del rotor), pero como \bar{i}_R no genera par sobre sí mismo, el par sigue siendo el mismo.

- 6) El principio de acción y reacción dice que el par ejercido sobre el rotor es igual y de sentido contrario al par de reacción que se ejerce sobre el estator. Este par de reacción será absorbido por el soporte de la máquina.

Trabajando como en el apartado anterior obtendríamos que este par de reacción se calcularía mediante una expresión similar a la (III-38) en la cual el fasor de corriente del rotor estaría sustituido por el fasor de corriente del estator. Según acabamos de ver, cambiando de signo a esta expresión calcularíamos el par de la máquina. La ecuación que se obtendría entonces sería la (III-40) (recuérdese que un producto vectorial cambia de signo si se cambia el orden de sus factores). En resumen, *el que las fórmulas (III-38) y (III-40) representen el mismo par está justificado físicamente por el principio de acción y reacción.*

- 7) La fórmula (III-34) es importante para el cálculo de máquinas eléctricas. Indica que *el par es igual al producto del volumen del rotor ($\pi l D^2/4$) por el valor máximo del campo magnético en el entrehierro y por el valor máximo de la densidad lineal de corriente del rotor.*
- 8) Resaltemos que debido al efecto de pantalla magnética que los dientes ejercen sobre los conductores de los devanados, alojados en ranuras, el par no se ejerce sobre los conductores sino sobre los dientes. Esto es ventajoso, ya que los dientes son de hierro y tienen mayor resistencia mecánica que los conductores del devanado y que, sobre todo, sus aislantes.
- 9) El par calculado mediante las fórmulas deducidas anteriormente es el *par interno o par eléctrico*. Cuando la máquina actúa como motor, el *par útil* M_u que suministra se obtiene restando al par interno los pares de frenado debidos a los rozamientos mecánicos de la máquina y a la energía disipada por el ventilador de la misma, si lo tuviese acoplado a su eje.

En el caso de generadores, el par que desarrolla la máquina es un par de frenado. En efecto, un generador absorbe la energía mecánica que le suministra un motor primario (por ejemplo, un motor Diesel o una turbina de vapor) para transformarla en energía eléctrica. Si el generador "roba" energía al motor es que lo frena, es decir, que ejerce un par resistente. En

este caso, el par absorbido por el generador al motor primario es igual al par interno más los pares de rozamiento y de ventilación.

La potencia mecánica correspondiente al par interno es la potencia interna P_i . En los motores P_i es la parte de la energía eléctrica absorbida que se transforma en energía mecánica mediante fenómenos electromagnéticos. En los generadores P_i es la fracción de la energía mecánica absorbida que se transforma en energía eléctrica. En ambos casos, si la máquina eléctrica gira con una velocidad de Ω radianes geométricos por segundo, se tiene que

$$P_i = M \cdot \Omega \quad (\text{III-42})$$

Hay veces que es más sencillo calcular P_i y obtener el par M a partir de ella despejándolo de la ecuación (III-42).

OBTENCION DE LA POTENCIA A PARTIR DE FASORES ESPACIALES

Potencia interna

* La expresión (III-42) permite calcular la potencia interna P_i de cualquier máquina. De ella, expresando la velocidad del rotor en forma de ω radianes eléctricos por segundo, obtenemos que

$$P_i = M \frac{\omega}{p} \quad (\text{III-43})$$

Si tenemos una máquina ideal podemos calcular el módulo M del par a partir de la primera ecuación (III-41) con lo cual, si se tiene en cuenta que el valor de K_M viene dado por (III-37), se llega a:

$$P_i = \frac{K_M}{l_\mu} \frac{\omega}{p} \left| \vec{i}_R^k \times \vec{\Phi}_{\text{cor, maq}}^k \right| = \frac{\pi D}{2} \omega \left| \vec{i}_R^k \times \vec{\Phi}_{\text{cor, maq}}^k \right| \quad (\text{III-44})$$

* Por otra parte, sabemos por (II-17) que, si el fasor espacial de flujo de corona de máquina en coordenadas del estator es así:

$$\overline{\Phi}_{\text{cor, maq}}^S = \Phi_{\text{cor, maq}} M \cdot e^{j\theta_{\text{maq}}} \quad (\text{III-45})$$

el fasor espacial de f.e.m. de giro del estator vale

$$\overline{e}_{\text{gir S}} = -j \overline{\Phi}_{\text{cor, maq}}^S \frac{d\theta_{\text{maq}}}{dt} \quad (\text{III-46})$$

que referido al sistema de coordenadas k mediante (II-5) queda así:

$$\begin{aligned} \overline{e}_{\text{gir S}}^k &= \overline{e}_{\text{gir S}} \cdot e^{-j\rho} = -j \left(\overline{\Phi}_{\text{cor, maq}}^S \cdot e^{-j\rho} \right) \frac{d\theta_{\text{maq}}}{dt} \\ \overline{e}_{\text{gir S}}^k &= -j \overline{\Phi}_{\text{cor, maq}}^k \frac{d\theta_{\text{maq}}}{dt} \end{aligned} \quad (\text{III-47})$$

* El fasor de flujo de corona de máquina referido al sistema de coordenadas del rotor se obtiene a partir de (II-5) y de (III-45):

$$\overline{\Phi}_{\text{cor, maq}}^R = \overline{\Phi}_{\text{cor, maq}}^S \cdot e^{-j\varepsilon} = \Phi_{\text{cor, maq}} M \cdot e^{j(\theta_{\text{maq}} - \varepsilon)} \quad (\text{III-48})$$

Luego, el fasor de f.e.m. de giro del rotor vale

$$\begin{aligned} \overline{e}_{\text{gir R}} &= -j \overline{\Phi}_{\text{cor, maq}}^R \frac{d(\theta_{\text{maq}} - \varepsilon)}{dt} = -j \overline{\Phi}_{\text{cor, maq}}^R \left[\frac{d\theta_{\text{maq}}}{dt} - \omega \right] \\ &\left(\omega = \frac{d\varepsilon}{dt} \right) \end{aligned} \quad (\text{III-49})$$

que en el sistema de coordenadas k es así:

$$\overline{e}_{\text{gir R}}^k = -j \overline{\Phi}_{\text{cor, maq}}^k \left[\frac{d\theta_{\text{maq}}}{dt} - \omega \right] \quad (\text{III-50})$$

* Restando las ecuaciones (III-47) y (III-50) obtenemos lo siguiente:

$$\bar{e}_{\text{gir R}}^k - \bar{e}_{\text{gir S}}^k = j \omega \bar{\Phi}_{\text{cor, maq}}^k \quad (\text{III-51})$$

Teniendo en cuenta (II-18) llegamos a

$$\bar{e}_{\text{gir R}}^k - \bar{e}_{\text{gir S}}^k = (\bar{e}_{\text{gir R}}^k + \bar{e}_{\text{tran R}}^k) - (\bar{e}_{\text{gir S}}^k + \bar{e}_{\text{tran S}}^k) = \bar{e}_R^k - \bar{e}_S^k \quad (\text{III-52})$$

Luego:

$$\bar{e}_R^k - \bar{e}_S^k = j \omega \bar{\Phi}_{\text{cor, maq}}^k \quad (\text{III-53})$$

* Combinando las expresiones (III-44) y (III-53) se deduce que

$$P_i = \frac{\pi D}{2} \left| \bar{i}_R^k \times \frac{\bar{e}_R^k - \bar{e}_S^k}{j} \right| \quad (\text{III-54})$$

En los apéndices de este capítulo se obtiene la relación (III-88) que permite expresar la ecuación (III-54) de esta manera:

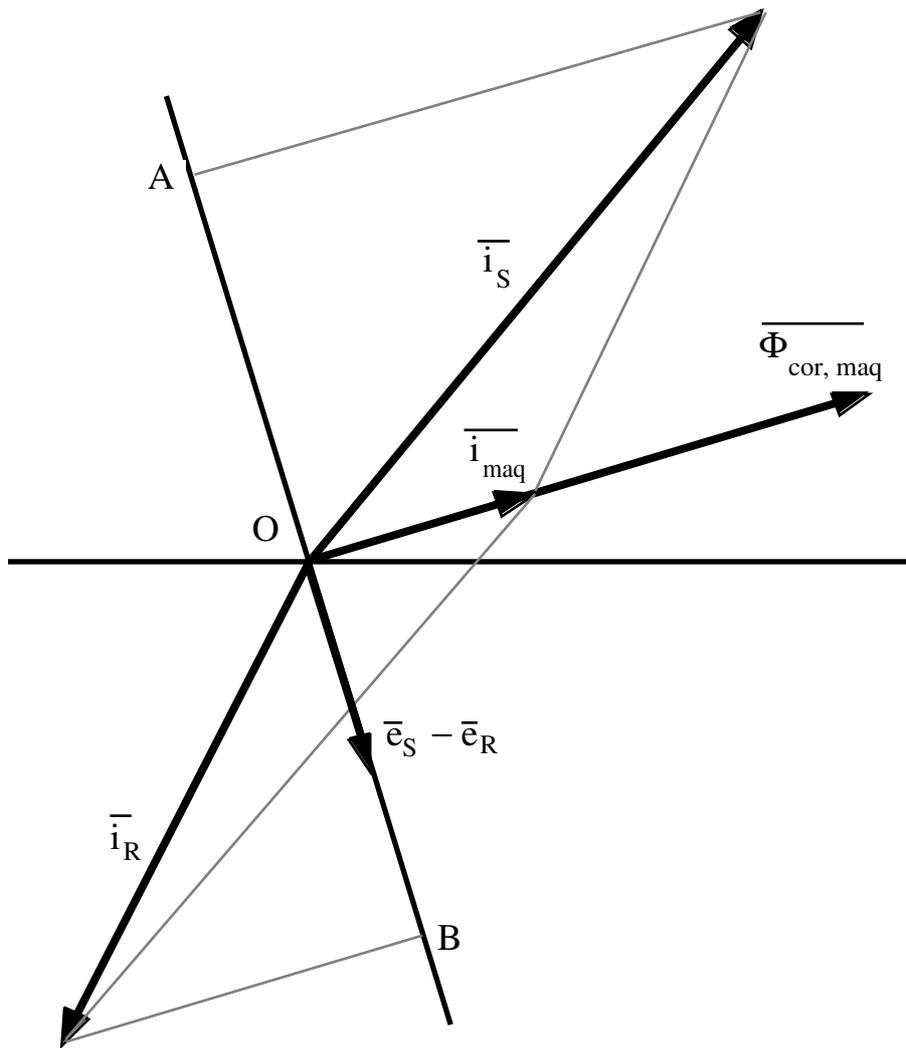
$$\boxed{P_i = \frac{\pi D}{2} [\bar{i}_R^k \bullet (\bar{e}_S^k - \bar{e}_R^k)] = \frac{\pi D}{2} [\bar{i}_R^k \bullet (\bar{e}_{\text{gir S}}^k - \bar{e}_{\text{gir R}}^k)]} \quad (\text{III-55})$$

donde \bullet es el operador producto escalar de dos vectores.

* Si en vez de partir de la primera de las ecuaciones (III-41) se parte de la segunda se llega a

$$\boxed{P_i = -\frac{\pi D}{2} [\bar{i}_S^k \bullet (\bar{e}_S^k - \bar{e}_R^k)] = -\frac{\pi D}{2} [\bar{i}_S^k \bullet (\bar{e}_{\text{gir S}}^k - \bar{e}_{\text{gir R}}^k)]} \quad (\text{III-56})$$

* Comparando las ecuaciones (III-55) y (III-56) se deduce que las proyecciones de los fasores espaciales \bar{i}_S^k e \bar{i}_R^k en la dirección dada por el fasor $(\bar{e}_S^k - \bar{e}_R^k)$ son de igual valor, pero de signos opuestos.



$$\vec{OA} = \text{Proyección de } \vec{i}_S^k \text{ sobre } (\vec{e}_S^k - \vec{e}_R^k)$$

$$\vec{OB} = -\vec{OA} = \text{Proyección de } \vec{i}_R^k \text{ sobre } (\vec{e}_S^k - \vec{e}_R^k)$$

Fig. III-4: La suma de las proyecciones de \vec{i}_S^k e \vec{i}_R^k sobre la dirección perpendicular a \vec{i}_{maq}^k es nula.

Este resultado no es nada sorprendente si tenemos en cuenta que, por (III-52), el fasor $(\vec{e}_S^k - \vec{e}_R^k)$ tiene la misma dirección que los fasores de f.e.m. de giro, es decir, la dirección perpendicular a los fasores espaciales $\vec{\Phi}_{cor,maq}^k$ e \vec{i}_{maq}^k . Dado que

$$\vec{i}_{maq}^k = \vec{i}_S^k + \vec{i}_R^k$$

es lógico que la proyección de $\vec{i}_S^k + \vec{i}_R^k$ en la dirección perpendicular a \vec{i}_{maq}^k sea nula (vease la figura III-4). Esto es, las proyecciones de los fasores \vec{i}_S^k e \vec{i}_R^k sobre la dirección perpendicular al fasor \vec{i}_{maq}^k son de igual valor, pero de signos opuestos.

* Como consecuencia de lo anterior tenemos que

$$\vec{i}_R^k \bullet \vec{e}_{gir S}^k = -\vec{i}_S^k \bullet \vec{e}_{gir S}^k \quad (III-57)$$

con lo que de (III-55) se obtiene

$$\boxed{P_i = -\frac{\pi D}{2} \left[\left(\vec{i}_S^k \bullet \vec{e}_{gir S}^k \right) + \left(\vec{i}_R^k \bullet \vec{e}_{gir R}^k \right) \right] =} \quad (III-58)$$

$$= -\frac{\pi D}{2} \left[\left(\vec{i}_S^k \bullet \vec{e}_{gir S}^k \right) + \left(\vec{i}_R^k \bullet \vec{e}_{gir R}^k \right) \right]$$

ya que el producto escalar de dos vectores no depende del sistema de coordenadas elegido.

* En las expresiones (III-55), (III-56) y (III-58) podemos apreciar que la constante real que aparece es $\pi D / 2$, es decir, la mitad de la longitud de la circunferencia del entrehierro.

De estas expresiones deducimos que la potencia interna depende de los fasores de f.e.m. de giro, pero no de los fasores de f.e.m. de transformación, y de las proyecciones de los fasores de corriente sobre la dirección perpendicular al flujo de corona de máquina.

* A partir de estas ecuaciones de la potencia interna y aplicando la fórmula (III-42) se pueden desarrollar unas nuevas expresiones del par.

Balace de potencias de un motor asíncrono

* Vamos a considerar un motor asíncrono ideal, simétrico y equilibrado cuyo rotor esté conectado en cortocircuito.

En esta máquina las ecuaciones fasoriales del estator y del rotor son las (II-37), luego:

$$\begin{aligned}\bar{e}_{gir S} &= \bar{e}_S - \bar{e}_{tran S} = -\bar{u}_S + r_S \bar{i}_S + l_{\sigma S} \frac{d\bar{i}_S}{dt} - \bar{e}_{tran S} \\ \bar{e}_{gir R} &= \bar{e}_R - \bar{e}_{tran R} = r_R \bar{i}_R + l_{\sigma R} \frac{d\bar{i}_R}{dt} - \bar{e}_{tran R}\end{aligned}\tag{III-59}$$

Por consiguiente, en este motor la ecuación (III-58) se transforma en

$$\begin{aligned}P_i &= \frac{\pi D}{2} \left[(\bar{i}_S \bullet (-\bar{e}_{gir S})) - (\bar{i}_R \bullet \bar{e}_{gir R}) \right] \\ P_i &= \frac{\pi D}{2} \left[\left(\bar{i}_S \bullet \left(\bar{u}_S - r_S \bar{i}_S - l_{\sigma S} \frac{d\bar{i}_S}{dt} + \bar{e}_{tran S} \right) \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left(\bar{i}_R \bullet \left(r_R \bar{i}_R + l_{\sigma R} \frac{d\bar{i}_R}{dt} - \bar{e}_{tran R} \right) \right) \right]\end{aligned}\tag{III-60}$$

Ordenando y agrupando los términos de esta ecuación se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{\pi D}{2} (\bar{u}_S \bullet \bar{i}_S) &= \frac{\pi D}{2} \left[r_S (\bar{i}_S \bullet \bar{i}_S) + r_R (\bar{i}_R \bullet \bar{i}_R) \right] + \\ &\quad + \frac{\pi D}{2} \left[l_{\sigma S} \left(\frac{d\bar{i}_S}{dt} \bullet \bar{i}_S \right) + l_{\sigma R} \left(\frac{d\bar{i}_R}{dt} \bullet \bar{i}_R \right) - \right. \\ &\quad \left. - (\bar{i}_S \bullet \bar{e}_{tran S} + \bar{i}_R \bullet \bar{e}_{tran R}) \right] + P_i\end{aligned}\tag{III-61}$$

Vamos a desarrollar el último paréntesis de (III-61) teniendo presente la

igualdad (II-18) y que el producto escalar de dos vectores no depende del sistema de coordenadas:

$$\begin{aligned} \bar{i}_S \bullet \bar{e}_{\text{tran S}} + \bar{i}_R \bullet \bar{e}_{\text{tran R}} &= \bar{i}_S \bullet \bar{e}_{\text{tran S}} + \bar{i}_R^S \bullet \bar{e}_{\text{tran R}}^S = \\ &= (\bar{i}_S + \bar{i}_R^S) \bullet \bar{e}_{\text{tran S}} = \bar{i}_{\text{maq}}^S \bullet \bar{e}_{\text{tran S}} \end{aligned} \quad (\text{III-62})$$

Como los fasores \bar{i}_{maq}^S y $\bar{e}_{\text{gir S}}$ son perpendiculares entre sí, su producto escalar es nulo. Luego:

$$\begin{aligned} \bar{i}_{\text{maq}}^S \bullet \bar{e}_{\text{tran S}} &= \bar{i}_{\text{maq}}^S \bullet \bar{e}_{\text{tran S}} + \bar{i}_{\text{maq}}^S \bullet \bar{e}_{\text{gir S}} = \\ &= \bar{i}_{\text{maq}}^S \bullet (\bar{e}_{\text{tran S}} + \bar{e}_{\text{gir S}}) = \bar{i}_{\text{maq}}^S \bullet \bar{e}^S \end{aligned} \quad (\text{III-63})$$

Considerando las relaciones (II-14) y (II-38) queda que

$$\bar{i}_{\text{maq}}^S \bullet \bar{e}^S = -\bar{i}_{\text{maq}}^S \bullet \frac{d\bar{\Phi}_{\text{cor,maq}}^S}{dt} = -l_\mu \left(\bar{i}_{\text{maq}}^S \bullet \frac{d\bar{i}_{\text{maq}}^S}{dt} \right) \quad (\text{III-64})$$

Por lo tanto, a partir de las ecuaciones (III-61) a (III-64) se obtiene el siguiente *balance de potencias*:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\pi D}{2} (\bar{u}_S \bullet \bar{i}_S) &= \frac{\pi D}{2} [r_S (\bar{i}_S \bullet \bar{i}_S) + r_R (\bar{i}_R \bullet \bar{i}_R)] + \\ &+ \frac{\pi D}{2} \left[l_{\sigma S} \left(\frac{d\bar{i}_S}{dt} \bullet \bar{i}_S \right) + l_{\sigma R} \left(\frac{d\bar{i}_R}{dt} \bullet \bar{i}_R \right) + \right. \\ &\left. + l_\mu \left(\frac{d\bar{i}_{\text{maq}}^S}{dt} \bullet \bar{i}_{\text{maq}}^S \right) \right] + P_i \end{aligned}} \quad (\text{III-65})$$

Si el motor no fuese ideal este balance de potencias incluiría también la potencia de pérdidas en el hierro, P_{Fe} , a la derecha del signo igual.

* El significado físico de los términos que aparecen en el balance (III-65) es el

siguiente:

- **Potencia absorbida en el estator**

Esta es la potencia que el motor absorbe de la red. Su valor viene dado por las siguientes expresiones:

$$P_S = \frac{\pi D}{2} (\bar{u}_S \bullet \bar{i}_S) = \frac{\pi D}{2} \operatorname{Re} \{ \bar{u}_S \cdot \bar{i}_S^* \} \quad (\text{III-66})$$

en las cuáles el símbolo * representa el operador tomar el conjugado de un fasor.

- **Potencia de pérdidas en el cobre**

Es la potencia perdida por efecto Joule en los devanados del estator y del rotor. Su valor viene dado por las fórmulas siguientes:

$$\begin{aligned} P_{Cu} &= \frac{\pi D}{2} [r_S (\bar{i}_S \bullet \bar{i}_S) + r_R (\bar{i}_R \bullet \bar{i}_R)] = \\ &= \frac{\pi D}{2} [r_S (\bar{i}_S \cdot \bar{i}_S^*) + r_R (\bar{i}_R \cdot \bar{i}_R^*)] = \quad (\text{III-67}) \\ &= \frac{\pi D}{2} [r_S A_{SM}^2 + r_R A_{RM}^2] \end{aligned}$$

- **Potencia magnética**

Es la potencia originada por las variaciones en el tiempo de la energía almacenada en los campos magnéticos del motor. Su valor viene dado por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
 P_{\text{mag}} &= \frac{\pi D}{2} \left[l_{\sigma S} \left(\frac{d\bar{i}_S}{dt} \bullet \bar{i}_S \right) + l_{\sigma R} \left(\frac{d\bar{i}_R}{dt} \bullet \bar{i}_R \right) + l_{\mu} \left(\frac{d\bar{i}_{\text{maq}}^k}{dt} \bullet \bar{i}_{\text{maq}}^k \right) \right] = \\
 &= \frac{\pi D}{2} \text{Re} \left\{ l_{\sigma S} \left(\frac{d\bar{i}_S}{dt} \cdot \bar{i}_S^* \right) + l_{\sigma R} \left(\frac{d\bar{i}_R}{dt} \cdot \bar{i}_R^* \right) + l_{\mu} \left(\frac{d\bar{i}_{\text{maq}}^k}{dt} \cdot \bar{i}_{\text{maq}}^{k*} \right) \right\} = \\
 &= \frac{\pi D}{2} \left[l_{\sigma S} \left(\frac{dA_{SM}}{dt} A_{SM} \right) + l_{\sigma R} \left(\frac{dA_{RM}}{dt} A_{RM} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + l_{\mu} \left(\frac{dA_{\text{maq}M}}{dt} A_{\text{maq}M} \right) \right] \\
 P_{\text{mag}} &= \frac{\pi D}{4} \left[l_{\sigma S} \left(\frac{dA_{SM}^2}{dt} \right) + l_{\sigma R} \left(\frac{dA_{RM}^2}{dt} \right) + l_{\mu} \left(\frac{dA_{\text{maq}M}^2}{dt} \right) \right] \quad (\text{III-68})
 \end{aligned}$$

* El balance de potencias (III-65) se puede escribir así:

$$\boxed{P_S = P_{Cu} + P_{\text{mag}} + P_i} \quad (\text{III-69})$$

Es decir:

$$\boxed{P_S = P_{Cu} + P_{\text{mag}} + P_m + P_u} \quad (\text{III-70})$$

ya que la potencia interna, P_i , es igual a la potencia de útil, P_u , que suministra el motor por su eje más su potencia de pérdidas mecánicas, P_m .

En una máquina real habría que sumar la potencia de pérdidas en el hierro, P_{Fe} , a la derecha del signo igual de la ecuación (III-70).

La potencia en un motor polifásico en régimen permanente senoidal

* Si tenemos un motor polifásico funcionando en régimen permanente alimentado por un sistema equilibrado de corrientes senoidales sucede que los

campos magnéticos son giratorios circulares. Esto quiere decir que los fasores espaciales \vec{i}_S , \vec{i}_R e \vec{i}_{maq} conservan constante su amplitud y, por (III-68), resulta que la potencia magnética, P_{mag} , es nula. Es decir, la energía magnética almacenada en el motor no varía en el tiempo.

Así pues, en este caso el balance de potencias de un motor asíncrono, suponiendo despreciables las pérdidas en el hierro por tratarse de un motor ideal, se reduce a

$$P_S = P_{Cu} + P_m + P_u \quad (III-71)$$

- * Una carga polifásica equilibrada en régimen permanente senoidal consume una potencia invariable en el tiempo e igual a su potencia activa. Por lo tanto, en régimen permanente la potencia P_S (que se calcula mediante las expresiones (III-66)) es la **potencia activa** del motor.

A esta misma conclusión se llega también si se emplean las relaciones (III-15), válidas sólo para máquinas polifásicas equilibradas funcionando en régimen permanente senoidal, en (III-66).

- * Por analogía con lo expuesto para la potencia activa, es evidente que en régimen permanente senoidal se puede obtener la **potencia reactiva** Q_S absorbida de la red por un motor polifásico mediante esta expresión:

$$Q_S = \frac{\pi D}{2} \text{Im} \{ \bar{u}_S \cdot \vec{i}_S^* \} = \frac{\pi D}{2} | \vec{i}_S \times \bar{u}_S | \quad (III-72)$$

(Im significa: "Parte imaginaria de")

Asímismo, la **potencia compleja** $\bar{A}\bar{E}\bar{S}_S$ se obtendrá así:

$$\bar{S}_S = P_S + jQ_S = \frac{\pi D}{2} (\bar{u}_S \cdot \vec{i}_S^*) \quad (III-73)$$

y el **factor de potencia** $\cos \varphi_S$ se calculará a partir de

$$\varphi_S = \text{atan} \frac{\text{Im} \{ \bar{u}_S \cdot \vec{i}_S^* \}}{\text{Re} \{ \bar{u}_S \cdot \vec{i}_S^* \}} \quad (III-74)$$

Potencia electromagnética

* Teniendo en cuenta la relación (III-61) podemos expresar la potencia magnética P_{mag} así:

$$\begin{aligned}
 P_{mag} &= P_{magS} + P_{magR} \\
 P_{magS} &= l_{\sigma S} \left(\frac{d\bar{i}_S}{dt} \bullet \bar{i}_S \right) - (\bar{i}_S \bullet \bar{e}_{tranS}) \\
 P_{magR} &= l_{\sigma R} \left(\frac{d\bar{i}_R}{dt} \bullet \bar{i}_R \right) - (\bar{i}_R \bullet \bar{e}_{tranR})
 \end{aligned}
 \tag{III-75}$$

Esta potencia P_{mag} está físicamente ubicada en el entrehierro (ya que las piezas de hierro se suponen de permeabilidad magnética infinita), pero de una manera convencional podemos suponer que la fracción P_{magS} , debida a las corrientes del estator, se produce en el estator y que la fracción P_{magR} , debida a las corrientes del rotor, se produce en el rotor.

* Teniendo en cuenta la consideración anterior denominaremos como potencia electromagnética P_a a la potencia que sale del estator y llega al rotor a través del entrehierro. Es claro que esta potencia es igual a la absorbida por el motor, P_S , menos la perdida en el estator, la cual es igual a la potencia de pérdidas en el cobre del estator, P_{CuS} , más la potencia electromagnética del estator, P_{magS} (más las pérdidas en el hierro del estator, P_{FeS} , si la máquina no fuera ideal). Por lo tanto, en un motor ideal se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 P_a &= P_S - P_{CuS} - P_{magS} = \\
 &= \frac{\pi D}{2} \left(\bar{u}_S \bullet \bar{i}_S - r_S \bar{i}_S \bullet \bar{i}_S - l_{\sigma S} \frac{d\bar{i}_S}{dt} \bullet \bar{i}_S + \bar{e}_{tranS} \bullet \bar{i}_S \right) = \\
 &= \frac{\pi D}{2} \left(\bar{u}_S - r_S \bar{i}_S - l_{\sigma S} \frac{d\bar{i}_S}{dt} + \bar{e}_{tranS} \right) \bullet \bar{i}_S = \frac{\pi D}{2} (-\bar{e}_S + \bar{e}_{tranS}) \bullet \bar{i}_S \\
 P_a &= -\frac{\pi D}{2} (\bar{e}_{girS} \bullet \bar{i}_S)
 \end{aligned}
 \tag{III-76}$$

- * Si el motor es asíncrono, parte de la potencia electromagnética P_a se convierte en potencia mecánica (esta es la potencia interna P_i) y el resto se gasta en el rotor en forma de pérdidas en el cobre, P_{CuR} , y de potencia magnética, P_{magR} (más pérdidas en el hierro, P_{FeR} , si la máquina no fuera ideal). La potencia perdida en el rotor vale, pues, lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 P_{pR} &= P_{CuR} + P_{magR} = \\
 &= \frac{\pi D}{2} \left[r_R \bar{i}_R \bullet \bar{i}_R + l_{\sigma R} \frac{d\bar{i}_R}{dt} \bullet \bar{i}_R - \bar{e}_{tranR} \bullet \bar{i}_R \right] = \\
 &= \frac{\pi D}{2} \left[r_R \bar{i}_R + l_{\sigma R} \frac{d\bar{i}_R}{dt} - \bar{e}_{tranR} \right] \bullet \bar{i}_R \\
 P_{pR} &= \frac{\pi D}{2} (\bar{e}_{girR} \bullet \bar{i}_R) \tag{III-77}
 \end{aligned}$$

Observando las ecuaciones (III-76) y (III-77) se comprueba que la ecuación (III-58) representa lo que hemos estado diciendo: *en un motor asíncrono la potencia interna P_i es igual a la potencia electromagnética P_a menos la potencia perdida en el rotor P_{pR} .*

- * Desarrollemos la expresión (III-76) que da la potencia electromagnética:

$$\begin{aligned}
 P_a &= -\frac{\pi D}{2} (\bar{e}_{girS} \bullet \bar{i}_S) = \\
 &= \frac{\pi D}{2} \left(j \bar{\Phi}_{cor,maq}^S \frac{d\theta_{maq}}{dt} \bullet \bar{i}_S \right) = \frac{\pi D}{2} \frac{d\theta_{maq}}{dt} \left| \bar{\Phi}_{cor,maq}^S \times \bar{i}_S \right| \tag{III-76'}
 \end{aligned}$$

Si llamamos Ω_{maq} a la velocidad de giro del fasor $\bar{\Phi}_{cor,maq}^S$ respecto al estator (velocidad de sincronismo) medida en radianes geométricos por segundo, sucede que

$$\begin{aligned}
 \Omega_{maq} &= \frac{d\theta_{maq}}{dt} = \frac{1}{p} \frac{d\theta_{maq}}{dt} \\
 \frac{d\theta_{maq}}{dt} &= p \Omega_{maq}
 \end{aligned}$$

Combinando esta ecuación con las (III-37), (III-41) y (III-76') se obtiene que

$$P_a = M \Omega_{maq}$$

$$\boxed{M = \frac{P_a}{\Omega_{maq}}} \quad \text{(III-78)}$$

El par de un motor se puede obtener dividiendo la potencia electromagnética, P_a , por la velocidad de giro, Ω_{maq} , del fasor de flujo de corona de máquina, $\bar{\Phi}_{cor,maq}^S$, respecto al estator.

BIBLIOGRAFIA

- [1] CARRION PEREZ, PEDRO A. "Simulación y equipo de medida de los regímenes dinámicos en máquinas eléctricas rotativas para su aplicación en los campos de investigación, la docencia y la industria". Tesis Doctoral. Albacete. 1991.
- [2] CORTES, MANUEL. "Curso moderno de máquinas eléctricas rotativas (5 Tomos)". Editores Técnicos Asociados. Barcelona. 1977.
- [3] IVANOV-SMOLENSKI, A. V. "Máquinas eléctricas (3 Tomos)". Editorial Mir. Moscú. 1980.
- [4] KOVACS, P. K. "Transient phenomena in electrical machines". Elsevier. 1984.
- [5] MANTILLA PEÑALBA, L. F. "La teoría de los fasores espaciales en máquinas eléctricas con armónicos de campo en régimen dinámico. Estudio del fasor de corriente. Modelo matemático de la máquina asíncrona". Tesis Doctoral. Escuela Politécnica Superior de Ingeniería. Santander. 1993.
- [6] MANTILLA, L.F. y RGUEZ. POZUETA, M.A. "Fasores espaciales armónicos de corriente en devanados m-fásicos de máquinas eléctricas en régimen dinámico. Teoremas de Equivalencia y de Correlación". 3as. Jornadas Hispano-Lusas de Ingeniería Eléctrica. Barcelona. Tomo I, pags. 123-132, Julio. 1993.
- [7] STEPINA, J. "Fundamental equations of the space vector analysis of electrical machines". Acta Technica CSAV, vol 12, pags. 184-189. Febrero. 1968.
- [8] SERRANO IRIBARNEGARAY, LUIS. "Fundamentos de máquinas eléctricas rotativas". Marcombo. Barcelona. 1989.
- [9] SERRANO IRIBARNEGARAY, LUIS. "Control electrónico de motores eléctricos". Curso de especialización. Universidad de Cantabria. 1991.
- [10] SERRANO IRIBARNEGARAY, LUIS. "Significado físico del fasor espacial de tensión. Ecuaciones en régimen dinámico de las máquinas eléctricas rotativas". Jornadas Luso-españolas de Ingeniería Eléctrica. Coimbra. Vol 1, pags. 0.51-0.73. Julio de 1991.
- [11] SERRANO, L. "The modern space phasors theory: its precise and coherent formulation as well as its advantages for transient analysis and electronic control of a.c. machines". International Aegean Conference on Electrical Machines and Power Electronics. Kusadasi (Turquía), pags. 278-293, Mayo 1992.

- [12] SERRANO IRIBARNEGARAY, LUIS. "Phasorial diagram of A.C. machines in transient state and physical meaning of the voltage space phasor". International Conference on Electrical Machines, pags. 1206-1210. Manchester (Gran Bretaña). Septiembre. 1992.
- [13] SERRANO IRIBARNEGARAY, LUIS. "The modern space phasor theory. Part I: Its coherent formulation and its advantages for transient analysis of converted-fed a.c. machines". European Transactions on Electrical Power Engineering (ETEP), Vol. 3, n^o2, marzo-abril, pags. 171-180. 1993.
- [14] SERRANO IRIBARNEGARAY, LUIS. "The modern space phasor theory. Part II: Its comparison with the Generalized Machine Theory and the Space Vector Theory". European Transactions on Electrical Power Engineering (EETEP), Vol. 3, n^o3, mayo-junio, pags. 213-219. 1993.
- [15] VAN DER MERWE. "The analysis of an electric machine with a smooth air-gap allowing for all winding MMF harmonics. Part 1: The basic space vector component machine equations". Archiv für Elektrotechnik (Germany), vol 58, pags. 283-292. 1976.
- [16] VAS, PETER. "Electrical Machines and Drives. A Space-Vector Theory Approach". Oxford University Press. 1992.

APENDICES:

PRODUCTO VECTORIAL Y COMPLEJO DE FASORES ESPACIALES

* Matemáticamente podemos considerar los fasores espaciales como vectores planos o, simplemente como números complejos. Así, en el sistema de coordenadas genérico k , dos fasores espaciales \bar{x} e \bar{y} se representan de esta manera:

$$\begin{aligned}\bar{x}^k &= x_d + jx_q \\ \bar{y}^k &= y_d + jy_q\end{aligned}\tag{III-79}$$

También podemos considerar los fasores espaciales como vectores de tres dimensiones con su tercera componente (en la dirección del eje de la máquina) de valor nulo. En este caso, el sistema de coordenadas k tiene tres ejes: el eje x coincidente con el eje real, el eje y coincidente con el eje imaginario y el eje z que tiene la dirección del eje de giro de la máquina y cuyo sentido positivo es saliente (sentido de avance de un sacacorchos que gire yendo desde el eje x al eje y por el camino más corto). Los vectores unitarios de estos tres ejes son \vec{i} , \vec{j} y \vec{k} , respectivamente. Por lo tanto, los fasores \bar{x} e \bar{y} también se pueden representar así:

$$\begin{aligned}\bar{x}^k &= x_d \vec{i} + x_q \vec{j} + 0 \vec{k} \\ \bar{y}^k &= y_d \vec{i} + y_q \vec{j} + 0 \vec{k}\end{aligned}\tag{III-80}$$

* Trabajando con tres dimensiones es posible realizar el producto vectorial de los fasores espaciales \bar{x} e \bar{y} . Se obtiene lo siguiente:

$$\bar{x}^k \times \bar{y}^k = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_d & x_q & 0 \\ y_d & y_q & 0 \end{vmatrix} = (x_d y_q - x_q y_d) \vec{k}\tag{III-81}$$

Si consideramos sólo el módulo, con su signo, de este producto vectorial se deduce que

$$\boxed{|\bar{x} \times \bar{y}| = \text{Im} \{ \bar{x}^* \cdot \bar{y} \}} \quad (\text{III-82})$$

donde Im significa: "Parte imaginaria de" y el símbolo $*$ representa la operación de calcular el conjugado de un número complejo.

- * Recordemos que el producto vectorial es una operación cuyo resultado no depende del sistema de coordenadas en el que se trabaje y que goza de la siguiente propiedad:

$$\bar{x} \times \bar{y} = -\bar{y} \times \bar{x} \quad (\text{III-83})$$

PRODUCTO ESCALAR Y COMPLEJO DE FASORES ESPACIALES

- * Trabajando en el sistema de coordenadas k el producto escalar de dos fasores espaciales \bar{x} e \bar{y} se puede calcular así:

$$\bar{x}^k \bullet \bar{y}^k = x_d y_d + x_q y_q \quad (\text{III-84})$$

Luego es fácil comprobar que se verifica lo siguiente:

$$\boxed{\bar{x} \bullet \bar{y} = \text{Re} \{ \bar{x}^* \cdot \bar{y} \} = \text{Re} \{ \bar{x} \cdot \bar{y}^* \}} \quad (\text{III-85})$$

donde Re significa: "Parte real de" y el símbolo $*$ representa la operación de calcular el conjugado de un número complejo.

- * Recordemos que el producto escalar es una operación cuyo resultado no depende del sistema de coordenadas en el que se trabaje y que goza de la propiedad conmutativa:

$$\bar{x} \bullet \bar{y} = \bar{y} \bullet \bar{x} \quad (\text{III-86})$$

* Teniendo en cuenta las relaciones (III-82) y (III-85) se puede obtener fácilmente que

$$\boxed{|\bar{x} \times (j \bar{y})| = \bar{x} \cdot \bar{y}} \quad \text{(III-87)}$$

y, en consecuencia, se cumplen también la siguientes relaciones:

$$\boxed{\left| \bar{x} \times \frac{\bar{y}}{j} \right| = -\bar{x} \cdot \bar{y}} \quad \text{(III-88)}$$

$$\boxed{|\bar{x} \times \bar{y}| = -\bar{x} \cdot (j \bar{y}) = \bar{x} \cdot \left(\frac{\bar{y}}{j} \right)} \quad \text{(III-89)}$$

FASORES ESPACIALES DE CORRIENTE Y DE TENSION ELECTRICA DE UN DEVANADO MONOFASICO SIMETRICO

* En un devanado monofásico simétrico de Z conductores, factor de bobinado ξ_b , recorrido por la corriente i y cuyo eje de devanado viene dado por el ángulo eléctrico θ , su fasor de corriente, según (III-2) y (III-3), será así:

$$\begin{aligned} \bar{i} &= A_M e^{j\theta} = \frac{2 Z \xi_b}{\pi D} i e^{j\theta} = \frac{2 Z \xi_b}{\pi D} \bar{i}' \\ \bar{i}' &= i e^{j\theta} \end{aligned} \quad \text{(III-90)}$$

En devanados monofásicos la constante C_i se calcula así:

$$C_i = \frac{\pi D}{2 Z \xi_b} \quad \text{(III-91)}$$

Luego:

$$\boxed{\bar{i} = \frac{i}{C_i} e^{j\theta} = \frac{\bar{i}'}{C_i}} \quad \text{(III-92)}$$

Despejando la corriente i en la segunda expresión (III-90) se obtiene que

$$i = \bar{i}' e^{-j\theta} = \text{Re}\{\bar{i}' e^{-j\theta}\} \quad (\text{III-93})$$

Luego, de (III-92) y (III-93) se deduce que

$$\boxed{i = C_i \text{Re}\{\bar{i}' e^{-j\theta}\}} \quad (\text{III-94})$$

* La expresión (III-90) se puede transformar en

$$\bar{i}' = \frac{2Z}{\pi D} \bar{\xi}'_b i$$

Donde $\bar{\xi}'_b$ es el **factor de devanado complejo** de la fase. Para devanados simétricos este factor verifica que

$$\bar{\xi}'_b = \xi_b e^{j\theta}$$

En el libro [8] el lector puede encontrar expresiones más generales que permiten obtener este coeficiente para fases pertenecientes a cualquier tipo de devanado, simétrico o asimétricos.

* Trabajando en el sistema de coordenadas propio del bobinado monofásico considerado, el eje de devanado de la fase tiene una dirección θ invariable en el tiempo. Luego, en dicho sistema de coordenadas sucede que

$$\frac{d\bar{i}'}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{i}{C_i} e^{j\theta} \right] = \frac{1}{C_i} \left[\frac{di}{dt} \right] e^{j\theta} \quad (\text{III-95})$$

Es decir, *en un bobinado monofásico los fasores \bar{i}' y $\frac{d\bar{i}'}{dt}$ tienen siempre la dirección θ del eje de devanado de la fase.*

* Se puede demostrar que la expresión (III-24) sigue siendo válida en los devanados monofásicos:

$$\boxed{u = C_u \operatorname{Re}\{\bar{u} e^{-j\theta}\}} \quad (\text{III-96})$$

$$C_u = Z \cdot \xi_b \quad (\text{III-97})$$

Sea \bar{u}_θ la componente de \bar{u} según la dirección θ del eje de devanado de la fase:

$$\bar{u}_\theta = \left[\operatorname{Re}\{\bar{u} e^{-j\theta}\} \right] e^{j\theta} \quad (\text{III-98})$$

Comparando las relaciones (III-96) y (III-98) se obtiene que

$$\boxed{\bar{u}_\theta = \frac{u}{C_u} e^{j\theta} = \frac{\bar{u}'}{C_u}} \quad (\text{III-99})$$

$$\bar{u}' = u e^{j\theta}$$

* Por otra parte, el Teorema de Correlación General en Régimen Dinámico (III-16) tiene validez general y, por lo tanto, es aplicable a los devanados monofásicos:

$$e = C_u \operatorname{Re}\{\bar{e} e^{-j\theta}\} \quad (\text{III-100})$$

Sea \bar{e}_θ la componente del fasor de f.e.m. \bar{e} según el eje de devanado de la fase:

$$\bar{e}_\theta = \left[\operatorname{Re}\{\bar{e} e^{-j\theta}\} \right] e^{j\theta} \quad (\text{III-101})$$

De las dos expresiones anteriores se tiene que

$$\bar{e}_\theta = \frac{e}{C_u} e^{j\theta} \quad (\text{III-102})$$

- * En resumen, en los bobinados monofásicos los fasores espaciales \bar{i} y $\frac{d\bar{i}}{dt}$ tienen siempre la dirección θ del eje de devanado de la fase, lo que no necesariamente sucede con los fasores espaciales \bar{e} y \bar{u} , cuyas componentes según θ son \bar{e}_θ y \bar{u}_θ , respectivamente.

Además, las expresiones (III-4), (III-5), (III-8), (III-12), (III-16), (III-24) y (III-25), que relacionan los fasores espaciales de devanados polifásicos con los valores de fase de varias magnitudes externas, siguen siendo válidos para devanados monofásicos si en ellas se toma m igual a 2 (es decir, las relaciones válidas para los devanados bifásicos sirven también para los devanados monofásicos) y si se tiene en cuenta que la expresión (III-12) (o lo que es igual, la fórmula (III-99)) en este caso sólo proporciona el valor del fasor \bar{u}_θ , no de \bar{u} .

ECUACION FASORIAL DE UN DEVANADO MONOFASICO SIMETRICO

- * En un devanado monofásico simétrico se cumple que

$$u = -e + Ri + L_\sigma \frac{di}{dt} \quad (III-103)$$

De (III-92), (III-95), (III-99) y (III-102) se obtiene que

$$u e^{j\theta} = -e e^{j\theta} + R i e^{j\theta} + L_\sigma \frac{di}{dt} e^{j\theta}$$

$$C_u \bar{u}_\theta = -C_u \bar{e}_\theta + C_i R \bar{i} + C_i L_\sigma \frac{d\bar{i}}{dt}$$

$$\bar{u}_\theta = -\bar{e}_\theta + \frac{C_i}{C_u} R \bar{i} + \frac{C_i}{C_u} L_\sigma \frac{d\bar{i}}{dt}$$

$$\boxed{\bar{u}_\theta = -\bar{e}_\theta + r \bar{i} + l_\sigma \frac{d\bar{i}}{dt}} \quad (III-104)$$

Esta es la ecuación fasorial que utilizaremos para los devanados monofásicos. En ella los parámetros r y l_σ se calculan así:

$$r = \frac{\pi D}{2(Z \xi_b)^2} R = \frac{C_i}{C_u} R \quad \text{(III-105a)}$$

$$l_\sigma = \frac{\pi D}{2(Z \xi_b)^2} L_\sigma = \frac{C_i}{C_u} L_\sigma \quad \text{(III-105b)}$$

Se aprecia que las relaciones (III-105a) y (III-105b) son similares a las (II-21) y (II-22), utilizadas en los devanados polifásicos cuando m vale 2 (devanados bifásicos).

La ecuación (III-104) se representa gráficamente por medio del siguiente diagrama fasorial:

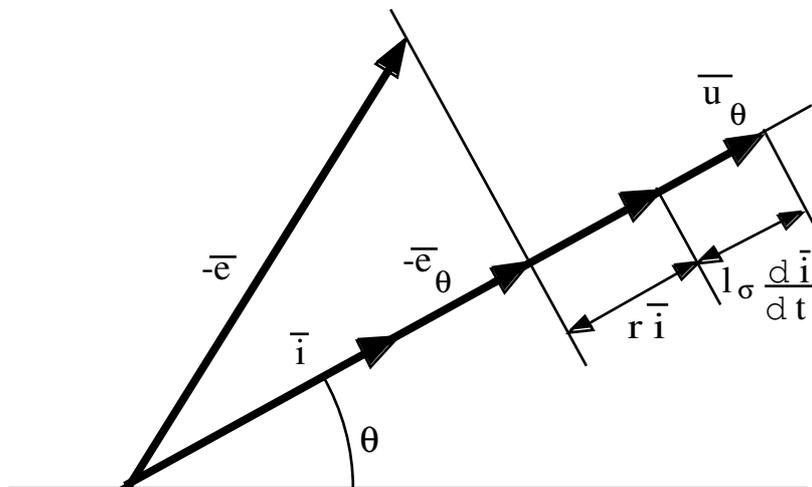


Fig. III-5: Diagrama fasorial correspondiente a un devanado monofásico

- * En un devanado polifásico la ecuación fasorial (II-24) permite reducir a una sola ecuación de variable compleja el conjunto de las m ecuaciones (III-9) de sus fases, simplificando así el análisis de la máquina.

Sin embargo, hemos de hacer notar que en el caso monofásico esta simplificación no existe ya que sólo hay una ecuación de fase (III-103).

Es más, pudiera parecer que la ecuación fasorial (III-104) complica el problema ya que es una ecuación de variable compleja mientras que la ecuación (III-103) es una ecuación de variable real. Esto no es así porque el argumento θ de los fasores que aparecen en la ecuación fasorial (III-104) es conocido a priori; de tal manera que, si se utiliza un sistema de coordenadas donde el ángulo θ sea nulo, como es lo habitual, la ecuación (III-104) se convierte en una ecuación real.

En resumen, para devanados monofásicos podemos utilizar indistintamente las ecuaciones (III-103) o (III-104), sin que ninguna de ellas represente una mayor simplificación en el análisis de la máquina.

No obstante, la ecuación (III-104) tiene las ventajas de que se puede representar gráficamente en un diagrama fasorial (Fig. III-5) y de que utiliza como variables algunos de los fasores espaciales que aparecerán también en las ecuaciones fasoriales de los demás devanados de la máquina; ya que, al menos, alguno de éstos normalmente será polifásico. De esta manera se trabaja con variables del mismo tipo en todos los devanados de una misma máquina.

VISUALIZACION DE UN DEVANADO POLIFASICO, SIMETRICO Y EQUILIBRADO SEGUN LA TEORIA DE LOS FASORES ESPACIALES

* Todas las expresiones que se han obtenido en este capítulo y en el anterior se pueden entender y recordar más fácilmente y de una manera más física teniendo en cuenta que, cuando sólo se considera el armónico fundamental del campo magnético, cada devanado polifásico de una máquina simétrica y equilibrada puede ser interpretado (según [10]) como *una capa de conductores uniformemente distribuida a lo largo de la circunferencia del entrehierro, teniendo todos los conductores de esta capa iguales valores de resistencia y de inductancia de dispersión. Cada uno de estos conductores está sometido a una tensión u diferente, de forma que el conjunto de los valores de u forma una función senoidal en el espacio. Esto origina que también i , corriente que circula por un conductor de la capa, varíe senoidalmente a lo largo del entrehierro.*

* En los siguientes párrafos se va a comprobar cómo esta visualización de los

devanados de una máquina es coherente con las expresiones que se han obtenido hasta ahora.

- Si sólo se considera el armónico fundamental en el espacio del campo magnético, se tiene que cada fase posee $Z \xi_b$ conductores efectivos. Luego, la totalidad de un devanado de m fases tiene $m Z \xi_b$ conductores efectivos, dando lugar a una densidad lineal de conductores uniforme τ así:

$$\tau = \frac{m Z \xi_b}{\pi D} \quad (\text{III-106})$$

- La corriente de un conductor de la capa varía senoidalmente en el espacio

$$i = i_M \cos(\alpha - \theta) \quad (\text{III-107})$$

dando lugar a una capa de corriente senoidal

$$A = \tau \cdot i = \tau \cdot i_M \cos(\alpha - \theta) = A_M \cos(\alpha - \theta) \quad (\text{III-108})$$

Teniendo en cuenta las expresiones (III-107) y (II-9), la fórmula (III-5) permite obtener una expresión para la corriente de un conductor i . Es evidente que esta corriente i y la capa de corriente A están en fase.

- La resistencia efectiva de un conductor de la capa vale

$$R_{\text{con}} = \frac{R}{Z \xi_b} \quad (\text{III-109})$$

y la caída de tensión resistiva en un conductor vale

$$\Delta u_{\text{res}} = R_{\text{con}} i = \frac{R_{\text{con}}}{\tau} (\tau i) \quad (\text{III-110})$$

$$\Delta u_{\text{res}} = r A \quad (\text{III-111})$$

De las expresiones (III-108), (III-109), (III-110) y (III-111) se obtiene que

$$r = \frac{R_{\text{con}}}{\tau} = \frac{\pi D}{m(Z \xi_b)^2} R \quad (\text{III-112})$$

Análogamente se obtiene que

$$l_\sigma = \frac{\pi D}{m(Z \xi_b)^2} L_\sigma \quad (\text{III-113})$$

Estas ecuaciones coinciden con las (II-21) y (II-22) obtenidas anteriormente.

- La potencia absorbida de la red por un conductor de la capa vale

$$P_{\text{con}} = u \cdot i \quad (\text{III-114})$$

y el valor medio de P_{con} para el conjunto de los $m Z \xi_b$ conductores de la capa es

$$P_{\text{conMed}} = \frac{u_M i_M}{2} \cos \varphi \quad (\text{III-115})$$

siendo φ el desfase espacial entre las distribuciones de u e i .

Por consiguiente, la potencia total absorbida por toda la capa vale

$$\begin{aligned} P &= (m Z \xi_b) P_{\text{conMed}} = \frac{\pi D \tau}{2} u_M i_M \cos \varphi = \\ &= \frac{\pi D}{2} u_M A_M \cos \varphi = \frac{\pi D}{2} (\bar{u} \bullet \bar{i}) \end{aligned} \quad (\text{III-116})$$

expresión coherente con la (III-66).

Operando de manera análoga se pueden deducir las expresiones correspondientes a las pérdidas en el cobre y a la potencia magnética debida a un devanado, obteniéndose resultados concordantes con los obtenidos anteriormente y que confirman la validez de la visualización de un devanado propuesta.

INDICE ALFABETICO

INDICE ALFABETICO

A

Angulos eléctricos o magnéticos I-8
Autoinductancia I-5

B

Balance de potencias de un motor asíncrono III-29
Blondel, coeficiente de dispersión de I-19

C

Campo magnético común I-6
Campo magnético de dispersión I-6
Campo magnético de fugas I-6
Campo magnético magnetizante I-6
Campo magnético principal I-6
Campo magnético total I-6
Capa de corriente I-13, II-11
 C_i II-27, III-4, 41
Coeficiente de autoinducción I-5
Coeficiente de inducción mutua I-5
Coeficientes de dispersión I-19
Constantes de tiempo del estator y del rotor I-19
Convenio de signos como generador II-35
Convenio de signos como motor II-34
 C_u II-27, III-4, 43

D

Diagrama fasorial espacial de un devanado monofásico III-45
Diagrama fasorial espacial de un devanado polifásico II-26
Diagrama fasorial espacial de una máquina asíncrona en régimen transitorio II-39
Diagramas fasoriales de un motor síncrono en régimen permanente III-9

E

Ecuación fasorial de un devanado II-25, 37
de un devanado monofásico III-44

Ecuación fasorial de una jaula de ardilla II-37
Ecuaciones fasoriales de una máquina asíncrona II-38
Eje de devanado I-8
Eje magnético I-9
Ejes de simetría I-8
Enlaces de flujo I-4, III-12
Equilibrados, devanados equilibrados I-9

F

Factor de devanado complejo III-42
Factor de potencia III-33
Faraday, Ley de I-4, II-32
Fasor espacial II-3
Fasor espacial de caída de tensión inductiva II-24, 34, 37
Fasor espacial de caída de tensión resistiva II-24, 34, 37
Fasor espacial de corriente II-11
Fasor espacial de corriente de un devanado monofásico III-41
Fasor espacial de corriente de un devanado polifásico III-3
Fasor espacial de f.e.m. de rotación o giro II-20
Fasor espacial de f.e.m. de transformación II-19
Fasor espacial de f.e.m. inducida II-17, 32
Fasor espacial de flujo de corona II-14
Fasor espacial de inducción magnética II-14
Fasor espacial de tensión eléctrica II-22, 34
Fasor espacial de tensión eléctrica de un devanado monofásico III-43
Fasor espacial de tensión eléctrica de un devanado polifásico III-4
Fasor espacial de tensión magnética II-12
Fasor espacial matemático de corriente III-3
Fasor espacial matemático de tensión eléctrica III-5
Fasores espaciales de los devanados trifásicos III-6
Fasores espaciales en régimen permanente III-7
Fasores espaciales y temporales homólogos III-8
Flujo concatenado (Veáse Enlaces de flujo)
Flujo magnético I-1
Flujo magnético de una espira I-3

INDICE ALFABETICO

Flujo por polo I-15
Fuerza contraelectromotriz (f.c.e.m.) II-34
Fuerza electromotriz (f.e.m.) II-32, III-12

I

Ideal, máquina eléctrica ideal I-10
Inducción magnética, líneas de I-1
Inducción magnética, propiedades I-2
Inducciones magnéticas de una máquina eléctrica I-12, II-14
Inductancia magnetizante de una fase I-15
Inductancia magnetizante del estator I-17
Inductancia magnetizante del rotor I-17
Inductancia mutua I-5
Inductancia mutua entre fases de estator y rotor I-17
Inductancia propia I-5
Inductancias de dispersión I-18
Inductancias magnetizantes I-18
Inductancias propias del rotor y del estator I-18

K

K_M III-20

L

l_μ II-16, 27
 l_σ II-24, 27, 37, III-45, 48

M

Magnitudes internas y externas II-2
Máquina generalizada II-1
Medios magnéticos lineales I-5
Momento (Veáse Par)

P

Par III-15, 36
Pares útil e interno o eléctrico III-23
Polo magnético I-3
Potencia absorbida en el estator III-31, 48

Potencia activa III-33
Potencia compleja III-33
Potencia de pérdidas en el cobre III-31
Potencia de pérdidas en el hierro I-10, III-32
Potencia de pérdidas mecánicas III-32
Potencia electromagnética III-34
Potencia interna III-24, 32
Potencia magnética III-31
Potencia reactiva III-33
Potencia útil III-32
Producto escalar de fasores III-40
Producto vectorial de fasores III-39
Propiedades del campo magnético I-2
Proyección de un fesor II-9

R

r II-24, 27, 37, III-45, 48
Resistencias del estator y del rotor I-19

S

Simetría, máquinas eléctricas simétricas I-7
Sistemas de coordenadas II-5

T

Tensión magnética del entrehierro I-12, II-12
Teorema de correlación fasorial III-6
Teorema de Correlación General en Régimen Dinámico III-11
Teoremas de correlación para tensiones y corrientes III-13

V

Vectores espaciales II-1, III-6
Velocidad de sincronismo III-35
Visualización de un devanado polifásico III-46