



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA  
*DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA  
ELÉCTRICA Y ENERGÉTICA*



# **CAMPOS MAGNÉTICOS DE DISPERSIÓN**

**Miguel Ángel Rodríguez Pozueta**

© 2011, Miguel Angel Rodríguez Pozueta

Universidad de Cantabria (España)

Departamento de Ingeniería Eléctrica y Energética

*This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Unported License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/> or send a letter to Creative Commons, 444 Castro Street, Suite 900, Mountain View, California, 94041, USA.*



*Está permitida la reproducción total o parcial de este documento bajo la licencia Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 3.0 Unported que incluye, entre otras, la condición inexcusable de citar su autoría (Miguel Angel Rodríguez Pozueta - Universidad de Cantabria) y su carácter gratuito.*

*Este documento puede descargarse gratuitamente desde esta Web: <http://personales.unican.es/rodrigma/primer/publicaciones.htm>*

# ÍNDICE

# ÍNDICE

## **CAMPOS MAGNÉTICOS DE DISPERSIÓN**

*Abreviaturas*

*Lista de símbolos*

Introducción .....	1
Campos magnéticos común y de dispersión .....	1
Reactancias de dispersión .....	3
Componentes de los campos magnéticos de dispersión .....	5
Clasificación de los campos de dispersión .....	5
Dispersión de ranura .....	6
Dispersión en las cabezas de diente y zig-zag .....	7
Dispersión armónica .....	8
Dispersión por inclinación de ranura .....	10
Dispersión de las cabezas de bobina .....	13
Dispersión periférica .....	13
Permeancias de dispersión .....	14
Permeancia e inductancia .....	14
Permeancia combinada de dispersión de un devanado .....	17
Permeancia combinada de dispersión de una jaula de ardilla .....	20
Permeancia específica de dispersión de ranura .....	22
Permeancia específica de dispersión de ranura en devanados de una capa .....	22
Permeancia específica de dispersión de ranura en devanados de dos capas .....	25
Otras permeancias específicas de dispersión .....	28
Bibliografía .....	33

## ÍNDICE

### *Apéndices*

<i>Apéndice A.</i> Entrehierro equivalente. Factor de Carter .....	35
<i>Apéndice B.</i> Longitudes axiales efectivas .....	39
Longitud geométrica del entrehierro .....	39
Canales radiales de ventilación .....	39
Longitud efectiva del entrehierro .....	40
Longitud efectiva del circuito magnético de dispersión de ranura .....	46
Longitud útil del hierro. Factor de empilado .....	48
Resumen de longitudes efectivas .....	49
<i>Apéndice C.</i> Inductancia magnetizante de un devanado .....	51
Flujo por polo .....	51
Factor de saturación .....	51
Inductancia magnetizante de una fase .....	55
Inductancia magnetizante de un devanado polifásico .....	57
Inductancias magnetizantes de un devanado polifásico en una máquina de polos salientes .....	59
<i>Apéndice D.</i> Ejemplo de cálculo de la reactancia de dispersión de un devanado de tambor .....	63
Datos .....	63
Resolución .....	64
Cálculo de otras dimensiones de la máquina .....	64
Dimensiones efectivas .....	65
Magnitudes del devanado del estator .....	66
Reactancia magnetizante del estator .....	68
Permeancias específicas de dispersión del estator .....	68
Reactancia de dispersión del estator .....	70

# ABREVIATURAS

## **Abreviaturas utilizadas en el texto:**

° eléctrico    Grado eléctrico (se refiere a ángulos eléctricos medidos en grados sexagesimales)

c.a.            Corriente alterna

c.c.            Corriente continua

f.c.e.m.        Fuerza contraelectromotriz

f.e.m.          Fuerza electromotriz

f.m.m.          Fuerza magnetomotriz

# **LISTA DE SÍMBOLOS**

**LISTA DE SÍMBOLOS**

Símbolo	Descripción	Pág.	Fig.	Ecuación
$a'$	Número de ramas en paralelo de una fase	57		
$B$	Inducción magnética en el entrehierro	52		
$B_M$	Valor máximo del primer armónico de la distribución de $B$ en el entrehierro	51		
$b$	Número de bobinas de una fase por par de polos	18		
$b$	Ancho de ranura medido como arco de circunferencia	47	B9	
$b_1, b_2, \dots$	Ancho de ranura medido como arco de circunferencia a diferentes alturas de la ranura	22	13	
$b_m$	Ancho medio de ranura; es decir, medido como arco de la circunferencia de diámetro $d_m$	29	16	
$b_\delta$	Ancho de la abertura de la ranura medido como arco de circunferencia	22	13	
$b_{\delta 1}$	Ancho de la abertura de una ranura del estator medido como arco de circunferencia	61		
$b_{\delta 2}$	Ancho de la abertura de una ranura del rotor medido como arco de circunferencia	61		
$d$	Diámetro del entrehierro	51		
$d_1$	Diámetro interior del estator	62	D2	
$d_2$	Diámetro exterior del rotor	62	D2	D36
$d_m$	Diámetro medio de los dientes; es decir, el que corresponde a la circunferencia que pasa a mitad de altura de los dientes	31	16	
$e$	Saliente recto de una bobina por un lado del entrehierro	29	17	
$e$	Valor instantáneo de la f.e.m. o de la f.c.e.m. en una fase debida al campo magnético principal	5		3 y 4
$e_\sigma$	Valor instantáneo de la f.c.e.m. de dispersión	4		
$E$	Valor eficaz de la f.e.m. o de la f.c.e.m. en una fase debida al campo magnético principal	5		
$E_\sigma$	Valor eficaz de la f.c.e.m. de dispersión	4		
$I$	Fuerza magnetomotriz (f.m.m.)	15		14
$I_M$	Valor máximo del primer armónico de la fuerza magnetomotriz en el entrehierro	52		
$I_{Md}$	Valor máximo del primer armónico de la componente de la fuerza magnetomotriz en el entrehierro según el eje $d$	59		



LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Descripción	Pág.	Fig.	Ecuación
$I_{Mq}$	Valor máximo del primer armónico de la componente de la fuerza magnetomotriz en el entrehierro según el eje q	60		
F	Tensión magnética	52		
$F_{y1}$	Tensión magnética en el yugo del estator	53	C2	C4
$F_{y1 30^\circ}$	Valor de la tensión magnética en el yugo del estator para la línea de inducción que pasa en el entrehierro a 30° eléctricos del centro de un polo	54		
$F_{y2}$	Tensión magnética en el yugo del rotor	53	C2	C4
$F_{y2 30^\circ}$	Valor de la tensión magnética en el yugo del rotor para la línea de inducción que pasa en el entrehierro a 30° eléctricos del centro de un polo	54		
$F_{t1}$	Tensión magnética en un diente del estator	53	C2	C4
$F_{t1 30^\circ}$	Valor de la tensión magnética en un diente del estator para la línea de inducción que pasa en el entrehierro a 30° eléctricos del centro de un polo	54		
$F_{t2}$	Tensión magnética en un diente del rotor	53	C2	C4
$F_{t2 30^\circ}$	Valor de la tensión magnética en un diente del rotor para la línea de inducción que pasa en el entrehierro a 30° eléctricos del centro de un polo	54		
$F_\delta$	Tensión magnética en el entrehierro	51	C2	C2
$F_{\delta 30^\circ}$	Valor de la tensión magnética en el entrehierro para la línea de inducción que pasa en el entrehierro a 30° eléctricos del centro de un polo	54		
$F_{\delta M}$	Valor máximo del primer armónico la tensión magnética en el entrehierro	53		
$F_{\delta Md}$	Valor máximo del primer armónico de la componente de la tensión magnética en el entrehierro según el eje d	59		
$F_{\delta Mq}$	Valor máximo del primer armónico de la componente de la tensión magnética en el entrehierro según el eje q	60		
f	Frecuencia	4		
$f_1$	Frecuencia del estator	8		
$f_2$	Frecuencia del rotor	8		
H	Intensidad magnetizante o excitación magnética	52		C2
h	Orden de un armónico	9		
h	Altura de una zona de una ranura	22	13	
$h_1, h_2, \dots$	Alturas de diferentes zonas de una ranura	22	13	

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Descripción	Pág.	Fig.	Ecuación
$h_t$	Altura total de una ranura o de un diente	62	D1	
$I$	Valor eficaz de una corriente	4		
$I_b$	Valor eficaz de la corriente de barra en una jaula de ardilla	21		27
$i$	Valor instantáneo de una corriente	4		
$j$	Separación entre las cabezas de bobina	29	17	
$K$	Número total de ranuras de un núcleo magnético	57		
$K_1$	Número de ranuras del estator	61		
$K_2$	Número de ranuras del rotor	61		
$K_C$	Factor de Carter	38		A4
$K_{C1}$	Factor de Carter del estator	38		A5
$K_{C2}$	Factor de Carter del rotor	38		A5
$k_1$	Coefficiente de corrección de $\lambda_{\sigma r}$ por acortamiento de paso que se aplica en las zonas de la ranura que no concatenan íntegramente a todos los conductores	27		39
$k_2$	Coefficiente de corrección de $\lambda_{\sigma r}$ por acortamiento de paso que se aplica en las zonas de la ranura que concatenan íntegramente a todos los conductores	27		39
$k_{Fe}$	Factor de empilado	49		
$k_{Fe1}$	Factor de empilado del estator	61		
$k_{Fe2}$	Factor de empilado del rotor			
$k_s$	Factor de saturación	53		C5 a C7
$k_{sd}$	Factor de saturación según el eje d en máquinas de polos salientes	59		C22
$k_{sq}$	Factor de saturación según el eje q en máquinas de polos salientes	60		C24
$k_{st}$	Factor de saturación de los dientes	54		C8
$k_\lambda$	Coefficiente de corrección de $\lambda_{\sigma r}$ por efecto piel	23		
$L$	Coefficiente de autoinducción, autoinductancia o inductancia	15		16
$L_H$	Inductancia magnetizante de una fase	56		C13
$L_\mu$	Inductancia magnetizante de un devanado	56		C14
$L_{\mu d}$	Inductancia magnetizante de un devanado según el eje d en una máquina de polos salientes	59		C21

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Descripción	Pág.	Fig.	Ecuación
$L_{\mu q}$	Inductancia magnetizante de un devanado según el eje q en una máquina de polos salientes	59		C21
$L_{\sigma}$	Inductancia de dispersión	4		1
$L_{\sigma a}$	Inductancia de dispersión armónica	8		6
$L_{\sigma bob}$	Inductancia de dispersión de una bobina	17		22
$L_{\sigma cb}$	Inductancia de dispersión de las cabezas de bobina	13		6
$L_{\sigma i}$	Inductancia de dispersión por inclinación de ranura	10		
$L_{\sigma p}$	Inductancia de dispersión periférica	13	7	11
$L_{\sigma r}$	Inductancia de dispersión de ranura	6	3 y 4	
$L_{\sigma rama}$	Inductancia de dispersión de una rama en paralelo	19		
$L_{\sigma t}$	Inductancia de dispersión de cabezas de los dientes y zig-zag	7	4	
$l_{cb}$	Longitud media de las cabezas de bobina	29	17	48 a 50
$l_{Fe}$	Longitud útil del hierro	48		B14
$l_{Fe1}$	Longitud útil del hierro en el estator	50		
$l_{Fe2}$	Longitud útil del hierro en el rotor	50		
$l_g$	Longitud geométrica	39	B1	
$l_n$	Longitud efectiva para la dispersión de ranura	46		B11 y B12
$l_{nb1}$	Longitud efectiva para la dispersión de ranura en una zona de la ranura cuyo ancho vale $b_1$	23		
$l_{nb\delta}$	Longitud efectiva para la dispersión de ranura en la abertura de la ranura (cuyo ancho vale $b_\delta$ )	24		
$l_v$	Longitud de un canal radial de ventilación cuando sólo hay canales en el estator o sólo en el rotor	40	B1	
	Longitud común de los canales del estator y del rotor que están directamente enfrentados	43	B8	
$l_{v1}$	Longitud de un canal radial de ventilación del estator	43	B6	
$l_{v2}$	Longitud de un canal radial de ventilación del rotor	43	B6	
$l_\delta$	Longitud efectiva del entrehierro	40	B5	B9
$m$	Número de fases de un devanado	56		
$N$	Número de espiras de una de las ramas en paralelo de una fase	57		C18
$N_f$	Número de espiras de una fase	57		C18'

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Descripción	Pág.	Fig.	Ecuación
$N_r$	Número de espiras de una bobina	17		
$n_1$	Velocidad de sincronismo (en r.p.m.)	8		
$n_v$	Número de canales radiales de un núcleo magnético	42		
$n_{v1}$	Número de canales radiales de ventilación en el estator	42		
$n_{v1,2}$	Número de canales radiales del estator enfrentados directamente a otros tantos canales del rotor	44		
$n_{v2}$	Número de canales radiales de ventilación en el rotor	42		
$p$	Número de pares de polos	9		
$Q$	Número de ranuras por polo	57		C17
$q$	Número de ranuras por polo y fase	57		C17
$R$	Resistencia de una fase	5		
$U$	Reluctancia magnética	15		13
$s$	Deslizamiento (en máquinas asíncronas)	8		
$t_m$	Paso medio de ranura; es decir, medido como arco de la circunferencia de diámetro $d_m$	29	16	
$t_p$	Paso polar medido como arco de circunferencia del entrehierro	57		C15
$t_r$	Paso de ranura medido como longitud de arco de la circunferencia que mira al entrehierro	38		
$t_{r1}$	Paso de ranura del estator	62		D37
$t_{r2}$	Paso de ranura del rotor	63		D38
$V$	Valor eficaz de la tensión en una fase	5		
$w$	Longitud axial del vuelo de la parte inclinada de una cabeza de bobina	29	17	47
$X_\mu$	Reactancia magnetizante	66		D69
$X_\sigma$	Reactancia de dispersión	4		1
$y_1$	Paso de bobina medido como número de ranuras	10		
$y_p$	Paso polar expresado como número de ranuras	10		
$Z_n$	Número de conductores en una ranura	18		

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Descripción	Pág.	Fig.	Ecuación
$\alpha_i$	Ángulo de inclinación de las ranuras	11	5	
$\beta$	Ángulo eléctrico de acortamiento de las bobinas	65		D59
$\beta_y$	Paso de bobina relativo = $y_1/y_p$ (vale 1 en bobinas de paso diametral)	27		D57
$\delta$	Entrehierro equivalente	35	A3	A3
$\delta_d$	Entrehierro equivalente según el eje d en una máquina de polos salientes	59		C23
$\delta_g$	Entrehierro geométrico	35	A1	
$\delta_{gmax}$	Entrehierro geométrico máximo en una máquina de polos salientes	29	15	
$\delta_{gmin}$	Entrehierro geométrico mínimo en una máquina de polos salientes	29	15	
$\delta_{min}$	Entrehierro equivalente mínimo en una máquina de polos salientes	59		
$\delta_q$	Entrehierro equivalente según el eje q en una máquina de polos salientes	60		C25
$\Phi$	Flujo	15		
$\Phi_M$	Flujo por polo	51	C1	C1
$\gamma$	Paso de ranura expresado como ángulo eléctrico = ángulo eléctrico de separación entre dos ranuras consecutivas	65		D58
$\gamma_g$	Ángulo geométrico de separación entre dos ranuras consecutivas	65		D58
$\kappa$	Coefficiente adimensional para obtener la expansión de las líneas de campo en las ranuras en el cálculo de $K_C$	35	A2	A2
$\kappa'$	Coefficiente adimensional para obtener la expansión de las líneas de campo en los canales radiales en el cálculo de $l_\delta$	41	B4	B3
$\kappa'_1$	Coefficiente adimensional para obtener la expansión de las líneas de campo en los canales radiales del estator en el cálculo de $l_\delta$	43	B7	B8
$\kappa'_{1,2}$	Coefficiente adimensional para obtener la expansión de las líneas de campo en los canales radiales del estator y del rotor enfrentados en el cálculo de $l_\delta$	43	B8	B8
$\kappa'_2$	Coefficiente adimensional para obtener la expansión de las líneas de campo en los canales radiales del rotor en el cálculo de $l_\delta$	43	B7	B8
$\kappa''$	Coefficiente adimensional para obtener la expansión de las líneas de campo en los canales radiales en el cálculo de $l_n$	47		B12

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Descripción	Pág.	Fig.	Ecuación
$\Lambda$	Permeancia magnética	15		15
$\Lambda_L$	Permeancia equivalente en bobinas con concatenación progresiva	17		21
$\Lambda_\sigma$	Permeancia combinada de dispersión	17		26
$\Lambda_{\sigma a}$	Permeancia de dispersión armónica	19		26
$\Lambda_{\sigma bob}$	Permeancia de dispersión de una bobina	17		
$\Lambda_{\sigma cb}$	Permeancia de dispersión de cabezas de bobina	19	6	26
$\Lambda_{\sigma i}$	Permeancia de dispersión de inclinación de ranura	19		26
$\Lambda_{\sigma p}$	Permeancia de dispersión periférica	19	7	26
$\Lambda_{\sigma r}$	Permeancia de dispersión de ranura	22	3 y 4	
$\Lambda_{\sigma t}$	Permeancia de dispersión de cabezas de diente y zig-zag	19	4b	26
$\lambda_\mu$	Permeancia específica magnetizante	58		C20
$\lambda_\sigma$	Permeancia específica combinada de dispersión	18		24
$\lambda_{\sigma a}$	Permeancia específica de dispersión armónica	31		52
$\lambda_{\sigma cb}$	Permeancia específica de dispersión de cabezas de bobina	29	6	44 a 46
$\lambda_{\sigma i}$	Permeancia específica de dispersión de inclinación de ranura	31		53
$\lambda_{\sigma p}$	Permeancia específica de dispersión periférica	32	7	54
$\lambda_{\sigma r}$	Permeancia específica de dispersión de ranura	22	3 y 4	36 y 40
$\lambda_{\sigma t}$	Permeancia específica de dispersión de cabezas de diente y zig-zag	28	4b	42
$\mu_0$	Permeabilidad magnética del vacío ( $= 4 \pi 10^{-7}$ )	9		
$\xi_a$	Factor de paso para el primer armónico	65		D61
$\xi_{ah}$	Factor de paso para armónico de orden h	9		
$\xi_b$	Factor de bobinado para el primer armónico	65		D63
$\xi_{bh}$	Factor de bobinado para armónico de orden h			
$\xi_d$	Factor de distribución para el primer armónico	65		D60
$\xi_{dh}$	Factor de distribución para armónico de orden h	9		
$\xi_i$	Factor de inclinación de ranura para el primer armónico	12		10
$\xi_{ih}$	Factor de inclinación de ranura para armónico de orden h	12		
$\Psi$	Valor eficaz de los enlaces de flujo común	4		

*LISTA DE SÍMBOLOS*

<b>Símbolo</b>	<b>Descripción</b>	<b>Pág.</b>	<b>Fig.</b>	<b>Ecuación</b>
$\Psi_{\sigma}$	Valor eficaz de los enlaces de flujo de dispersión	4		
$\psi$	Recubrimiento polar. Es el cociente entre el ancho de un polo saliente y el ancho del paso polar	29		
$\psi$	Valor instantáneo de los enlaces de flujo común	4		
$\psi_{\sigma}$	Valor instantáneo de los enlaces de flujo de dispersión	4		

## CAMPOS MAGNÉTICOS DE DISPERSIÓN

Miguel Ángel Rodríguez Pozueta

### INTRODUCCIÓN

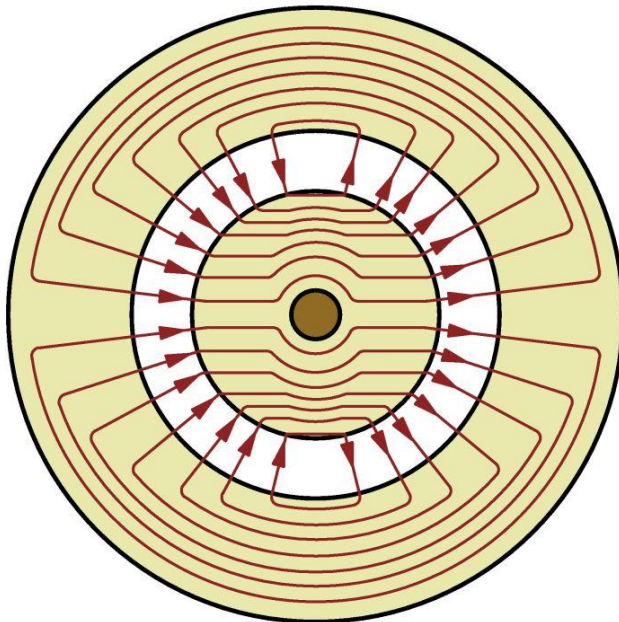
En otros textos de mi Web ([15]) se ha tratado del campo magnético principal, que es el que da lugar al funcionamiento de una máquina eléctrica.

Además de este campo magnético principal, en una máquina eléctrica aparecen otros campos de menor cuantía, los campos de dispersión. Estos campos originan la aparición de unos flujos de dispersión cuyos efectos son los de una autoinducción y se analizan mediante inductancias de dispersión y sus correspondientes reactancias de dispersión.

El presente texto pretende presentar una visión general de los campos magnéticos de dispersión y de los fundamentos del cálculo de las inductancias y reactancias de dispersión. El lector que quiera abordar el cálculo detallado de estos parámetros deberá acudir a los libros citados en la bibliografía que se presenta al final de este texto.

Para abordar los contenidos de este texto es preciso que el lector tenga unos conocimientos previos de electromagnetismo, de la constitución de las máquinas eléctricas, del cálculo del campo magnético en el entrehierro y de la generación de fuerzas electromotrices en los devanados. Para ello puede consultar los textos [15], [16] y [17] de mi Web.

### CAMPOS MAGNÉTICOS COMÚN Y DE DISPERSIÓN



*Fig. 1: Campo magnético cuyas líneas de inducción atraviesan el entrehierro*

El campo magnético en una máquina eléctrica es originado por la totalidad de las corrientes que circulan por sus devanados. Aunque este campo magnético es único, para su análisis el **campo magnético total** de una máquina eléctrica se lo puede descomponer en varios:

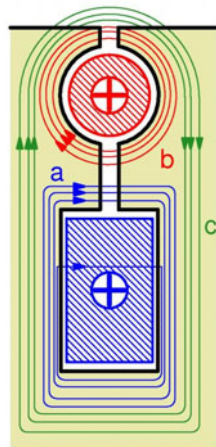


- El **campo magnético común, principal** o **magnetizante** es aquel que transmite energía entre el estator y rotor. Luego, sus líneas de campo<sup>1</sup> (o líneas de inducción) concatenan a todos los devanados de la máquina, recorren tanto el estator como el rotor y atraviesan el entrehierro dos veces (Fig. 1).

Al concatenar sus líneas de campo a todos los devanados de la máquina, el campo magnético común depende de las corrientes de todos sus devanados.

- Los **campos magnéticos de dispersión**, también denominados **de fugas**, no contribuyen a la transmisión de energía a través del entrehierro e incluyen el resto de las líneas de campo. Es decir, las líneas de inducción de estos campos magnéticos no concatenan a todos los devanados de la máquina y gran parte de ellas no cruzan el entrehierro (como se indica seguidamente, en máquinas de corriente alterna la dispersión resulta ser la suma de los campos cuyas líneas de inducción no atraviesan el entrehierro más los armónicos espaciales de orden superior del campo magnético del entrehierro<sup>2</sup>).

Estos campos de dispersión se pueden clasificar según los devanados que concatenan y, por consiguiente, de las corrientes que los generan. Así, en una máquina de dos devanados, uno en el estator y otro en el rotor, según este criterio habrá dos campos magnéticos de dispersión: el del estator y el del rotor. En máquinas de más de dos devanados (Fig. 2) existirán los campos magnéticos de dispersión que concatenan sólo a un devanado y, además, los que concatenan a varios devanados, aunque evidentemente nunca puede haber un campo magnético de dispersión que concatene a todos los devanados de la máquina. Como las líneas de campo de dispersión no afectan a devanados de ambos lados del entrehierro sucede que cuando hay campos de dispersión que concatenan varios devanados, estos bobinados son todos del estator o todos del rotor, pero no habrá líneas de campo de dispersión comunes a arrollamientos del estator y del rotor.



*Fig. 2: Líneas de inducción de los campos magnéticos de dispersión en el rotor de una máquina de doble jaula:  
a y b: Campos de dispersión que concatenan a una sola jaula.  
c: Campo de dispersión que concatena a las dos jaulas.*

Es preciso señalar que el campo magnético común está formado por casi todas las líneas de inducción que atraviesan el entrehierro (Fig. 1), pero que algunas de las líneas de campo que atraviesan el entrehierro y recorren el estator y el rotor no sirven para la

<sup>1</sup> Una línea de campo magnético o línea de inducción es una línea cerrada que es tangente al vector inducción magnética  $\vec{B}$  en cada uno de los puntos de su recorrido.

<sup>2</sup> A partir de ahora se llamará “*campo magnético que atraviesa el entrehierro*” o, simplemente, “*campo magnético del entrehierro*” al representado en la Fig. 1. Es decir, al campo cuyas líneas de inducción atraviesan el entrehierro dos veces y abrazan a conductores del estator y del rotor.

transmisión de energía y, por lo tanto, no forman parte del campo común. En efecto, la transmisión de energía entre el estator y el rotor de una máquina eléctrica se puede analizar como la interacción entre la fuerza magnetomotriz (f.m.m.) del devanado inducido y la inducción del campo magnético del entrehierro, el cual está originado por la actuación conjunta de todos los devanados de la máquina. Estas dos magnitudes se distribuyen de forma periódica a lo largo de la circunferencia del entrehierro y, por lo tanto, se pueden descomponer en series de Fourier. Pues bien, existe transmisión de energía entre un armónico de f.m.m. y un armónico de inducción magnética si se cumplen estas condiciones:

- Tienen el mismo número de polos, lo que quiere decir que son armónicos espaciales de igual orden  $h$ .
- Giran con igual velocidad. (Si giran a distinta velocidad la transmisión de energía entre el estator y el rotor es variable con el tiempo y tiene un valor medio nulo).
- El desfase entre ambos armónicos no es nulo (la máxima transferencia de energía a través del entrehierro se produce cuando el desfase es igual a  $90^\circ$  eléctricos).

Basándose en lo anterior se deduce que en las máquinas de corriente alterna, funcionando con velocidades no muy distintas a la asignada, la transmisión de energía se debe únicamente a la interacción de los primeros armónicos espaciales de la f.m.m. del inducido y de la inducción magnética en el entrehierro. Por consiguiente, el campo magnético común se lo puede considerar igual al primer armónico o armónico fundamental del campo magnético que atraviesa el entrehierro<sup>3</sup>, el cual en régimen permanente gira a la velocidad de sincronismo, y los armónicos espaciales de orden superior del campo magnético que atraviesa el entrehierro forman parte de los campos magnéticos de dispersión.

## REACTANCIAS DE DISPERSIÓN

Considérese de momento una máquina de corriente alterna con sólo dos devanados, uno en el estator y otro en el rotor. Las líneas de inducción del campo magnético de dispersión del estator sólo concatenan al devanado del estator y las del rotor sólo concatenan al devanado del rotor. Cada uno de estos campos está originado por las corrientes que son concatenadas por sus líneas de inducción. Luego, el campo magnético de dispersión del estator sólo está originado por las corrientes que circulan por el devanado estatórico y, análogamente, el campo de dispersión del rotor sólo está originado por las corrientes que circulan por el devanado rotórico.

Estos campos magnéticos no originan par ni transferencia de energía entre el estator y el rotor. El efecto de estos campos se reduce, pues, a crear sendos enlaces de flujo de dispersión en las fases de los devanados que concatenan.

Por lo que se ha mencionado hasta ahora, los flujos de dispersión constituyen un efecto de autoinducción. En efecto, se tratan de enlaces de flujo sobre un devanado originados exclusivamente por las corrientes que circulan por dicho devanado. Esto permite calcular estos enlaces de flujo mediante sus correspondientes *inductancias de dispersión* por fase o mediante las *reactancias de dispersión* por fase correspondientes.

---

<sup>3</sup> Cuando hay inclinación de las ranuras hay una pequeña parte del primer armónico espacial del campo magnético del entrehierro que tampoco forma parte del campo magnético común. Más adelante se trata este tema en este texto.

## CAMPOS MAGNÉTICOS DE DISPERSIÓN

El lector puede objetar que, si bien el razonamiento anterior es válido en devanados monofásicos, en devanados trifásicos el flujo de dispersión de una fase será debido no sólo a la corriente de dicha fase sino también al efecto de las corrientes de las otras fases del devanado. Esto es cierto, en una fase de un devanado trifásico el flujo de dispersión, en principio, es la suma del efecto de autoinducción de dicha fase más los efectos de inducción mutua de las otras dos.

No obstante, es posible demostrar que en una fase de un devanado trifásico las otras dos fases ejercen un efecto sobre los enlaces de flujo de dispersión que equivale a un efecto de autoinducción. Es decir, las inducciones mutuas de las otras dos fases sobre la que se analiza -las cuáles, en principio, dependen de las corrientes de las otras dos fases- son equivalentes a un efecto de autoinducción que sólo depende de la corriente de la fase considerada.

En consecuencia, en una máquina con un devanado en el estator y otro en el rotor, la dispersión en uno de estos devanados se puede tratar como un efecto de autoinducción, aunque dicho devanado sea trifásico.

En esta máquina de dos devanados que estamos considerando, cuando por uno de sus arrollamientos circula una corriente de valor instantáneo  $i$ , valor eficaz  $I$  y frecuencia  $f$ , en cada una de las fases de este bobinado aparecen unos enlaces de flujo de dispersión de valor instantáneo  $\psi_\sigma$  y valor eficaz  $\Psi_\sigma$ . La inductancia  $L_\sigma$  y la reactancia de dispersión  $X_\sigma$  de este devanado verifican estas fórmulas:

$$L_\sigma = \frac{\Psi_\sigma}{i} \rightarrow \psi_\sigma = L_\sigma \cdot i \rightarrow \Psi_\sigma = L_\sigma \cdot I \quad (1)$$
$$X_\sigma = 2 \pi f L_\sigma$$

Casi todas las líneas de inducción de los campos magnéticos de dispersión tienen un recorrido que en gran medida discurre fuera de los núcleos magnéticos del estator y del rotor; es decir, a través de un medio no ferromagnético. Por lo tanto, en estas líneas de inducción se puede despreciar la reluctancia de los tramos de hierro y considerar que los campos magnéticos de dispersión apenas están afectados por el nivel de saturación de los núcleos magnéticos. Esto permite que tanto la inductancia  $L_\sigma$  como la reactancia  $X_\sigma$  de dispersión de un devanado sean consideradas muchas veces como parámetros constantes.

En esta máquina de dos devanados, cuando por uno de sus arrollamientos circula la corriente de valor instantáneo  $i$  y valor eficaz  $I$ , en cada una de sus fases se produce una fuerza contraelectromotriz de valor instantáneo  $e_\sigma$  y valor eficaz  $E_\sigma$  que equivale a la caída de tensión en su reactancia de dispersión  $X_\sigma$ :

$$e_\sigma = \frac{d\psi_\sigma}{dt} = L_\sigma \frac{di}{dt} \rightarrow \bar{E}_\sigma = j X_\sigma \cdot \bar{I} \rightarrow E_\sigma = X_\sigma \cdot I \quad (2)$$

Por otra parte, el conjunto de todas las corrientes de los dos devanados de la máquina que se está estudiando crea el campo magnético común o principal, el cual origina en una fase del devanado que se analiza unos enlaces de flujo de valor instantáneo  $\psi$  y valor eficaz  $\Psi$ . Evidentemente, los enlaces de flujo  $\Psi$  en parte son debidos a la corriente  $i$  y adoptaremos los convenios de signos para  $\psi$  e  $i$  en correspondencia, de tal manera que cuando la corriente  $i$  es positiva da lugar a unos enlaces de flujo  $\psi$  positivos.

Supóngase en esta máquina de dos bobinados que uno de ellos, cuya resistencia por fase es  $R$ , tiene sus fases alimentadas con tensiones de valor eficaz  $V$ , lo que origina en estas fases la circulación de corrientes equilibradas de valor eficaz  $I$ . Por otra parte, el campo magnético principal induce en una fase de este devanado una fuerza contraelectromotriz (f.c.e.m.) de valor instantáneo  $e$  y valor eficaz  $E$ . Es decir, este devanado actúa como un receptor eléctrico alimentado por la tensión  $V$  de la red a la que está conectado. En estas circunstancias, la ecuación eléctrica de una fase de este devanado es así:

$$\bar{V} = \bar{E} + R \cdot \bar{I} + j X_{\sigma} \cdot \bar{I} \quad (\text{Convenio motor}) \quad (3)$$

$$e = + \frac{d \psi}{d t} \quad (\text{f.c.e.m.})$$

Si ahora se supone que en este devanado el campo magnético principal induce en una fase una fuerza electromotriz (f.e.m.) de valor instantáneo  $e$  y valor eficaz  $E$  y esto provoca la circulación de la corriente  $I$  y la aparición de la tensión en bornes  $V$ , este bobinado está actuando como un generador que suministra la tensión  $V$  a la red a la que está conectado. En estas circunstancias, la ecuación eléctrica de una fase de este devanado es así:

$$\bar{E} = \bar{V} + R \cdot \bar{I} + j X_{\sigma} \cdot \bar{I} \quad (\text{Convenio generador})$$

$$\bar{V} = \bar{E} - R \cdot \bar{I} - j X_{\sigma} \cdot \bar{I} \quad (\text{Convenio generador}) \quad (4)$$

$$e = - \frac{d \psi}{d t} \quad (\text{f.e.m.})$$

En el caso de máquinas de más de dos devanados, por ejemplo, un motor de doble jaula (Fig. 2), sucede que en uno o en ambos órganos de la máquina (estator o rotor) hay dos o más devanados. Como ya se ha indicado anteriormente, en este caso hay líneas de campo de dispersión comunes a los devanados situados en el mismo órgano y, entonces, en cada uno de estos devanados la dispersión se calcula como un efecto de autoinducción más los efectos de inducción mutua de los devanados situados en el mismo órgano.

A partir de ahora este texto se va a centrar exclusivamente en máquinas de corriente alterna con sólo dos bobinados, uno de estator y otro de rotor, en los que la dispersión se calcula teniendo en cuenta sólo el efecto autoinductivo caracterizado por  $L_{\sigma}$  o por  $X_{\sigma}$ . Se va a estudiar la dispersión magnética en devanados de tambor; es decir, en bobinados alojados en ranuras.

## COMPONENTES DE LOS CAMPOS MAGNÉTICOS DE DISPERSIÓN

### Clasificación de los campos de dispersión

Para facilitar el cálculo de la inductancia de dispersión de un devanado se divide su campo magnético de dispersión en varias componentes de acuerdo con el recorrido que siguen sus líneas de inducción.

No todos los autores tratan este tema de la misma manera y, además, no todos utilizan la misma denominación para estas componentes. En este texto se usará la siguiente clasificación (Ver la Tabla I):

Tabla I: Clasificación de los campos magnéticos de dispersión según su recorrido

CAMPOS MAGNÉTICOS DE DISPERSIÓN						
Tipo de dispersión	Dispersión de ranura	Dispersión de cabezas de diente y zig-zag	Dispersión armónica	Dispersión por inclinación de ranura	Dispersión de las cabezas de bobina	Dispersión periférica
Inductancia	$L_{\sigma r}$	$L_{\sigma t}$	$L_{\sigma a}$	$L_{\sigma i}$	$L_{\sigma cb}$	$L_{\sigma p}$

- Dispersión de ranura ( $L_{\sigma r}$ ) (Fig. 3)
- Dispersión zig-zag y en las cabezas de diente ( $L_{\sigma t}$ ) (Fig. 4)
- Dispersión armónica ( $L_{\sigma a}$ )
- Dispersión por inclinación de ranura ( $L_{\sigma i}$ )
- Dispersión en las cabezas de bobina ( $L_{\sigma cb}$ ) (Fig. 6)
- Dispersión periférica ( $L_{\sigma p}$ ) (Fig. 7)

En los siguientes apartados de este texto se describen cada uno de estos tipos de dispersión.

Para cada uno de estos tipos de dispersión existen fórmulas que permiten obtener su correspondiente inductancia de dispersión. La inductancia de dispersión total por fase  $L_{\sigma}$  del devanado se obtiene mediante suma de las inductancias parciales:

$$L_{\sigma} = L_{\sigma r} + L_{\sigma t} + L_{\sigma a} + L_{\sigma i} + L_{\sigma cb} + L_{\sigma p} \quad (5)$$

En la práctica, en función del tipo de máquina a analizar las dispersiones que se tienen en cuenta son unas u otras y se desprecian las demás. En consecuencia, se despreciarán algunos de los sumandos de la relación (5).

### Dispersión de ranura

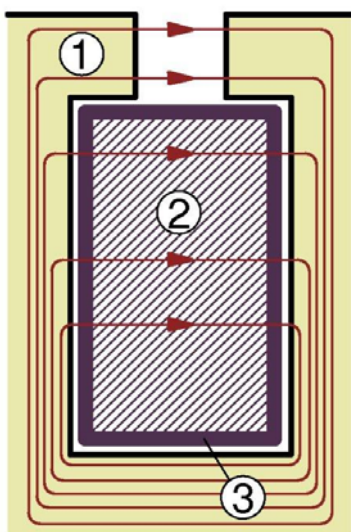


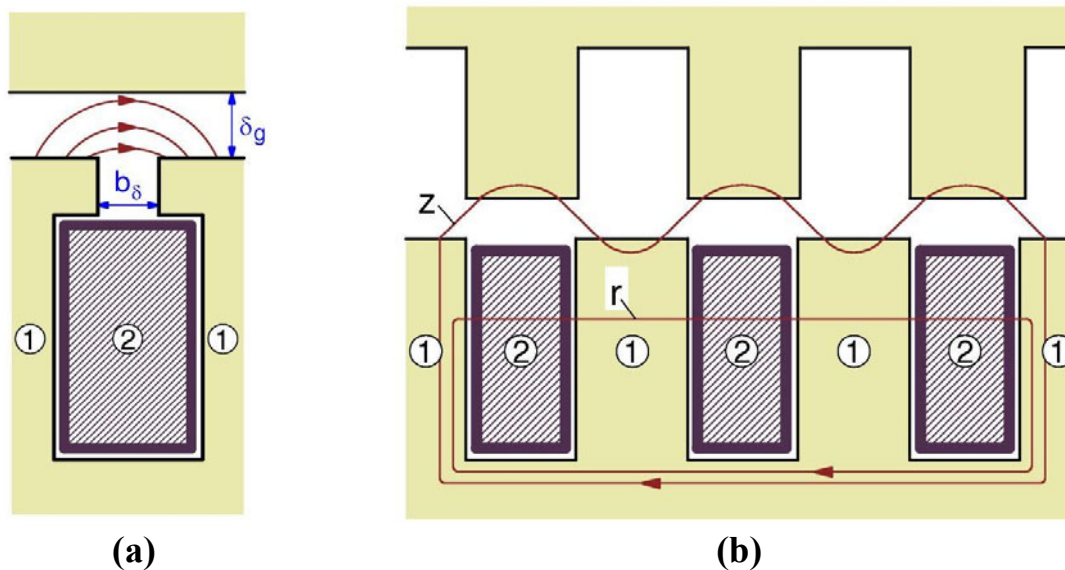
Fig. 3: Dispersión de ranura  
 1: Diente  
 2: Conductores  
 3: Aislante

Esta dispersión es debida a las líneas de campo que rodean a las ranuras concatenando a los conductores alojados en ellas. Como se aprecia en la Fig. 3 estas líneas de inducción no llegan a alcanzar el entrehierro, atraviesan a la ranura horizontalmente y se cierran a través del núcleo ferromagnético donde está situada la ranura. Las líneas campo de esta dispersión pueden rodear a una (Fig. 3) o, lo que es más frecuente, a varias ranuras contiguas (Fig. 4b).

Esta dispersión se cuantifica por medio de la inductancia  $L_{\sigma}$ . El cálculo de esta inductancia se indica más adelante en el apartado dedicado a las permeancias de dispersión.

### Dispersión en las cabezas de diente y zig-zag

Hay líneas de inducción que pasan a través del entrehierro, pero sin llegar a atravesarlo (sin llegar a pasar de estator a rotor o viceversa), de un diente a otro contiguo (Fig. 4a) situado en el mismo órgano (estator o rotor) de la máquina. Esta es la **dispersión en las cabezas de diente** y es más grande cuanto mayor es el entrehierro. Por esta razón, es importante en las máquinas síncronas, las cuáles tienen un entrehierro grande; mientras que resulta despreciable en las máquinas asíncronas, cuyo entrehierro es pequeño.



*Fig. 4: Dispersión: (a) en las cabezas de diente, (b) en zig-zag (z) y de ranura (r) en un rotor. (No se han dibujado los conductores del estator)  
1: Diente; 2: Ranura con conductores*

Si el entrehierro se reduce, las líneas de inducción pasan preferentemente de un diente a otro que está enfrente, al otro lado del entrehierro, antes que al diente contiguo situado en el mismo órgano de la máquina. En este caso cada una de estas líneas de inducción tiene un recorrido en el entrehierro que lo atraviesa varias veces, yendo sucesivamente de un diente a otro situado enfrente (Fig. 4b). Esta es la **dispersión en zig-zag** y se produce en máquinas de pequeño entrehierro, como las máquinas asíncronas. En este caso, aunque las líneas de inducción llegan a pasar del estator al rotor y viceversa no llegan a concatenar a los devanados situados al otro lado del entrehierro y constituyen una dispersión magnética.

Las Figs. 3 y 4, así como otras que van a ir apareciendo en este texto, muestran una parte de las ranuras y del entrehierro en una sección perpendicular al eje de giro de la máquina. Para facilitar su representación estas figuras se han dibujado con el entrehierro desarrollado; es decir, se supone que se ha “estirado” la máquina de forma que el entrehierro es rectilíneo en vez de circular.

En estas figuras se coloca el estator en la parte superior y el rotor en la parte inferior. Por lo tanto, en las Figs. 3 y 4 las líneas de inducción que se han dibujado corresponden a la dispersión magnética del devanado del rotor.

En algunas figuras, como en la Fig. 4a, no se dibujan las líneas de campo completas (son líneas cerradas), sino sólo su trayecto fuera del hierro.

Por lo visto hasta ahora se deduce que en máquinas de gran entrehierro, como las síncronas, hay dispersión en las cabezas de diente y la dispersión zig-zag es despreciable. Por el contrario, en máquinas de pequeño entrehierro, como las asíncronas, hay dispersión zig-zag y la dispersión en las cabezas de diente es despreciable.

Según varios autores, como Boldea y Nasar [2], estas dos dispersiones se pueden cuantificar conjuntamente mediante la inductancia  $L_{\sigma t}$ . Más adelante, en el apartado dedicado a las permeancias de dispersión, se presenta una expresión que permite el cálculo de esta inductancia.

### **Dispersión armónica**

Como ya se indicó anteriormente no todo el campo magnético que atraviesa el entrehierro (Fig. 1) forma parte del campo común. En las máquinas de corriente alterna sólo el primer armónico de la distribución espacial del campo magnético del entrehierro sirve para transmitir energía entre el estator y el rotor; por lo que los armónicos espaciales de orden superior (es decir, los de orden  $h$  distinto a 1) del campo magnético del entrehierro forman parte del campo de dispersión.

La **dispersión armónica o diferencial** se da en las máquinas de corriente alterna y es debida a los armónicos del campo magnético del entrehierro que aparecen como consecuencia de los armónicos de orden superior (de orden  $h$  distinto a 1) de la distribución espacial de la f.m.m. de un devanado. Esta dispersión se cuantifica mediante la inductancia  $L_{\sigma a}$  y sólo tiene un valor apreciable en máquinas de entrehierro pequeño, como las asíncronas.

El estudio del comportamiento de una máquina de corriente alterna se realiza considerando que la transmisión de energía entre estator y rotor se debe sólo al primer armónico (o armónico fundamental) en el espacio del campo magnético del entrehierro. En régimen permanente, este primer armónico es debido a corrientes de frecuencia  $f_1$  en el estator y de frecuencia  $f_2$  en el rotor ( $f_2 = 0$  (corriente continua) en máquinas síncronas, y  $f_2 = s f_1$  ( $s$  = deslizamiento), en máquinas asíncronas).

Al analizar la dispersión armónica sólo interesa incluir en ella los armónicos de orden superior que influyen sobre las corrientes que intervienen en la generación del primer armónico del campo magnético. Por consiguiente, en la inductancia de dispersión armónica, en principio, sólo habrá que incluir los armónicos espaciales que en régimen permanente inducen f.e.m.s de frecuencia  $f_1$  en el estator (máquinas síncronas y asíncronas) y  $f_2$  en el rotor (máquinas asíncronas).

En un devanado monofásico situado en el estator en régimen permanente todos los armónicos espaciales del campo magnético que genera son inmóviles y varían en el tiempo con la misma frecuencia  $f_1$  que la corriente de alimentación. En consecuencia, todos los armónicos espaciales inducen f.e.m.s de esta frecuencia  $f_1$  y en la inductancia armónica  $L_{\sigma a}$  deben incluirse todos los armónicos espaciales distintos del primer armónico o armónico fundamental.

En un devanado estatórico trifásico en régimen permanente y alimentado con un sistema trifásico de corrientes de frecuencia  $f_1$  el armónico espacial del campo magnético que genera cuyo orden es  $h$  tiene  $h \cdot p$  pares de polos y gira a una velocidad  $n_1/h$  r.p.m. ( $n_1$  es la velocidad de sincronismo para el primer armónico). Por lo tanto, la f.e.m. de autoinducción debida a este armónico espacial actuando sobre el propio estator tiene una frecuencia

$$\frac{(h \cdot p) \left( \frac{n_1}{h} \right)}{60} = \frac{p \cdot n_1}{60} = f_1$$

## CAMPOS MAGNÉTICOS DE DISPERSIÓN

Por consiguiente, vuelve a suceder que todos los armónicos espaciales inducen f.e.m.s de frecuencia  $f_1$  y en la inductancia armónica  $L_{\sigma a}$  deben incluirse todos los armónicos espaciales distintos del fundamental (véase el texto [17] de mi Web dedicado a las f.e.m.s).

Razonando de manera análoga con el devanado del rotor se puede deducir que todos los armónicos espaciales generados por corrientes rotóricas de frecuencia  $f_2$  inducen sobre el rotor f.e.m.s de frecuencia  $f_2$ .

En resumen, en la inductancia armónica  $L_{\sigma a}$  siempre hay que incluir los efectos de todos los armónicos espaciales del campo magnético del entrehierro, con excepción del armónico fundamental.

Para el cálculo de esta inductancia se pueden aplicar las siguientes expresiones, obtenidas de una forma similar a la inductancia magnetizante  $L_\mu$  en el apéndice C (ver la relación (8)):

$$L_{\sigma a} = \frac{m}{\pi} \frac{\mu_0}{k_{st}} d l_\delta \left( \frac{N}{p} \right)^2 \sum_{h \neq 1} \left( \frac{\xi_{dh} \cdot \xi_{ah}}{h} \right)^2 \quad (6)$$

$$L_{\sigma a} = \frac{L_\mu}{(\xi_b)^2} \frac{k_s}{k_{st}} \sum_{h \neq 1} \left( \frac{\xi_{dh} \cdot \xi_{ah}}{h} \right)^2$$

Donde,

- $\mu_0$  es la permeabilidad magnética del vacío ( $= 4\pi \cdot 10^{-7}$  H/m).
- $m$  es el número de fases del devanado.
- $\delta$  es el entrehierro efectivo (que es igual al entrehierro geométrico ( $\delta_g$ ) corregido por el factor de Carter ( $K_C$ ):  $\delta = K_C \cdot \delta_g$  (ver el apéndice A)).
- $K_C$  Factor de Carter (ver el apéndice A).
- $k_s$  es el factor de saturación (ver el apéndice C).
- $k_{st}$  es el factor de saturación de los dientes (ver el apéndice C).
- $d$  es el diámetro del entrehierro.
- $l_\delta$  es la longitud axial efectiva del entrehierro (ver el apéndice B).
- $N$  es el número de espiras efectivas en serie de cada fase del devanado (es decir, el número de espiras de una de las ramas en paralelo de una fase).
- $p$  es el número de pares de polos de la máquina.
- $h$  es el orden armónico.
- $\xi_{dh}$  es el factor de distribución del devanado para el armónico  $h$ .
- $\xi_{ah}$  es el factor de paso del devanado para el armónico  $h$ .
- $\xi_b$  es el factor de bobinado del devanado para el primer armónico o armónico fundamental. Es igual al producto de los factores de distribución ( $\xi_d$ ), de paso ( $\xi_a$ ) y de inclinación de ranura ( $\xi_i$ ) del primer armónico ( $\xi_b = \xi_d \cdot \xi_a \cdot \xi_i$ ).
- $L_\mu$  es la inductancia magnetizante del devanado (ver el apéndice C).

Nótese que, a diferencia de lo que sucede con la inductancia magnetizante  $L_\mu$  (relación (8)), en la expresión (6) aparecen los factores armónicos de distribución  $\xi_{bh}$  y de paso  $\xi_{ah}$ , pero no el factor de inclinación de ranura  $\xi_{ih}$ . Esto se justifica en el siguiente apartado dedicado a la dispersión por inclinación de ranura.

Los armónicos de orden superior del campo magnético tienen más polos que el armónico fundamental. Esto significa que su paso polar es más pequeño y justifica que su factor de saturación prácticamente se reduzca al de los dientes  $k_{st}$  (ver el apéndice C).

Las tablas II y III, extraídas del libro de Corrales [6], proporcionan el valor del término

$$\sum_{h \neq 1} \left( \frac{\xi_{dh} \cdot \xi_{ah}}{h} \right)^2 \text{ para bobinados trifásicos.}$$



*Tabla II: Valor del coeficiente  $\sum_{h \neq 1} \left( \frac{\xi_{dh} \cdot \xi_{ah}}{h} \right)^2$  en devanados trifásicos*

		Acortamiento de paso expresado en ranuras = $y_p - y_1$						
		0	1	2	3	4	5	6
Número de ranuras por polo y fase, q	2	0,0265	0,0205	0,0199	0,0133	0,0066		
	3	0,0129	0,0103	0,009	0,0097	0,0077	0,0052	0,0032
	4	0,0082	0,0066	0,0055	0,0054	0,0061	0,0053	0,0041
	5	0,0059	0,0050	0,0038	0,0034	0,0038	0,0044	0,0041

*Tabla III: Valor del coeficiente  $\sum_{h \neq 1} \left( \frac{\xi_{dh} \cdot \xi_{ah}}{h} \right)^2$  en devanados trifásicos*

		Acortamiento de paso relativo = $\frac{y_p - y_1}{y_p}$		
		0	≈ 0,2	≈ 0,4
Número de ranuras por polo y fase, q	6	0,0047	0,0025	0,0034
	7	0,004	0,0018	0,0030
	8	0,0035	0,0015	0,0026
	9	0,0032	0,0012	0,0023
	∞	0,0020	0,0002	0,0015

En las tablas II y III se han utilizado estas magnitudes:

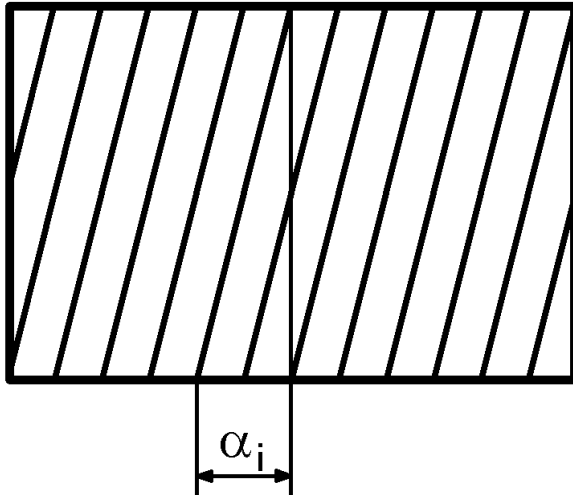
- q es el número de ranuras por polo y fase (Ver la ecuación (C17) del apéndice C).
- $y_p$  es el paso polar medido como número de ranuras.
- $y_1$  es el paso de bobina medido como número de ranuras.

Luego, la diferencia  $y_p - y_1$  es el acortamiento de paso de las bobinas medido como número de ranuras.

### **Dispersión por inclinación de ranura**

Para mejorar algunas características de las máquinas eléctricas, a veces se inclinan las ranuras del estator o del rotor con respecto a la dirección del eje de la máquina (Fig. 5).

Supóngase una máquina de corriente alterna de dos devanados, uno en el estator y otro en el rotor. Consideremos el campo magnético creado por las corrientes que circulan por uno sólo de estos devanados, el del rotor. Como ya se ha dicho antes, únicamente el primer armónico en el espacio de este campo magnético contribuye al campo magnético común.



*Fig. 5: Ranuras inclinadas un ángulo  $\alpha_i$  con respecto a la dirección del eje de giro de la máquina*

Inicialmente supondremos, además, que tanto las ranuras del estator como las del rotor son paralelas al eje de la máquina y carecen, por tanto, de inclinación. En este caso sendas espiras diametrales colocadas en el estator y en el rotor, una frente a la otra, tendrían el mismo flujo debido al primer armónico del campo magnético del entrehierro creado por el rotor.

Ahora suponga que se inclinan las ranuras del rotor un ángulo eléctrico  $\alpha_i$  (Fig. 5) respecto a la dirección del eje de la máquina, mientras que las ranuras del estator siguen careciendo de inclinación. Las espiras del rotor, que ahora están inclinadas, siguen teniendo el mismo flujo total pero las del estator sólo reciben una parte del flujo originado por el rotor. En este caso sendas espiras diametrales colocadas enfrentadas, una (recta) en el estator y otra (inclinada) en el rotor, tendrían distintos valores de flujo originado por el primer armónico del campo magnético.

Esto significa que sólo una parte del primer armónico del campo magnético originado por el rotor forma parte del campo magnético común y esta parte del campo afecta, por consiguiente, tanto al estator como al rotor. La parte restante ahora se ha convertido en un campo magnético de dispersión del rotor. Por lo tanto, en el rotor los enlaces de flujo de primer armónico ahora se dividen en dos partes: una, la más grande, forma parte de los enlaces de flujo del campo común y la otra, muy pequeña, constituyen unos enlaces de flujo de dispersión.

Se obtendría un resultado análogo si se hubiera hecho este razonamiento suponiendo que el órgano cuyo devanado crea el campo magnético y donde luego se van a inclinar las ranuras fuera el estator. En este caso aumentaría la dispersión en el estator.

Como consecuencia de lo explicado hasta ahora, cuando existe inclinación de las ranuras en uno de los órganos de la máquina, el campo magnético común ya no es igual a la totalidad del primer armónico del campo magnético del entrehierro porque una pequeña parte de éste pasa a ser campo magnético de dispersión.

El aumento de la dispersión de los devanados de un órgano (estator o rotor) de la máquina cuando se inclinan sus ranuras se cuantifica mediante la inductancia  $L_{\sigma i}$ . Esta inductancia es muy pequeña y se suele despreciar en la fórmula (5).

Sea  $\xi_i$  el factor de inclinación de ranura del devanado cuyas ranuras se inclinan, el cual es un parámetro adimensional con un valor menor o igual a 1. Se demuestra que de las dos partes en que se descomponen sus enlaces de flujo originados por el primer armónico del campo magnético originado por este devanado, la parte que es común es proporcional a  $\xi_i^2$  y la parte que es dispersión es proporcional  $(1 - \xi_i^2)$ .

En consecuencia, evidentemente la inductancia  $L_{\sigma i}$  es igual a la fracción  $(1 - \xi_i^2)$  de la inductancia magnetizante que tenía el devanado cuando las ranuras carecían de inclinación. De ahí se obtiene la siguiente relación (ver el apéndice C):

$$L_{\sigma i} = \left[ \frac{m}{\pi} \frac{\mu_0}{k_s \delta} d l_\delta \left( \frac{N}{p} \right)^2 (\xi_d \xi_a)^2 \right] (1 - \xi_i^2) \quad (7)$$

La inductancia magnetizante  $L_\mu$  cuando hay inclinación de ranuras queda así:

$$L_\mu = \left[ \frac{m}{\pi} \frac{\mu_0}{k_s \delta} d l_\delta \left( \frac{N}{p} \right)^2 (\xi_d \xi_a)^2 \right] (\xi_i^2) = \frac{m}{\pi} \frac{\mu_0}{\delta} d l_\delta \left( \frac{N}{p} \right)^2 \xi_b^2 \quad (8)$$

(  $\xi_b = \xi_d \cdot \xi_a \cdot \xi_i$  )

El significado de los símbolos que aparecen en la relación (8) ya se ha indicado al explicar las expresiones (6).

De (7) y (8) se deduce que:

$$L_{\sigma i} = \frac{L_\mu}{\xi_b^2} (1 - \xi_i^2) \quad (9)$$

El factor de inclinación de ranura viene dado por la siguiente expresión:

$$\xi_i = \frac{\text{sen } \frac{\alpha_i}{2}}{\frac{\alpha_i}{2}} \quad (10)$$

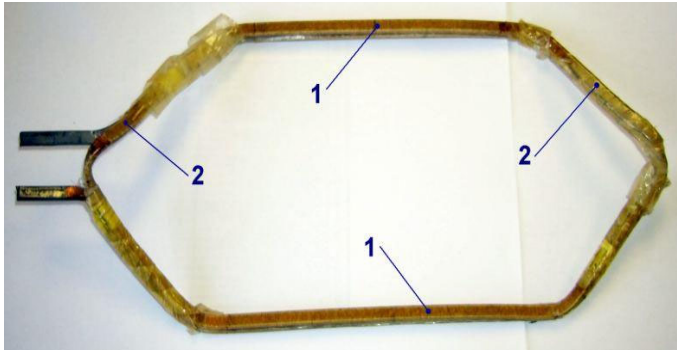
En la fórmula (10) el ángulo eléctrico de inclinación de las ranuras  $\alpha_i$  (Fig. 5) debe expresarse en radianes. Evidentemente, si las ranuras carecen de inclinación se obtiene que  $\xi_i$  vale 1.

Nótese que con respecto a los armónicos espaciales del campo magnético del entrehierro de órdenes  $h$  superiores al primero, en principio, se podría pensar en descomponer también los enlaces de flujo de un devanado debidos a cada uno de estos campos armónicos en dos partes proporcionales a  $\xi_{ih}^2$  y a  $(1 - \xi_{ih}^2)$ , respectivamente. Pero en este caso, ambas partes forman parte de los enlaces de flujo de dispersión y ambas se incluyen dentro de la dispersión armónica. Por lo tanto, no tiene sentido hacer dicha descomposición, ya que ambas componentes se vuelven a sumar dentro de la dispersión armónica.

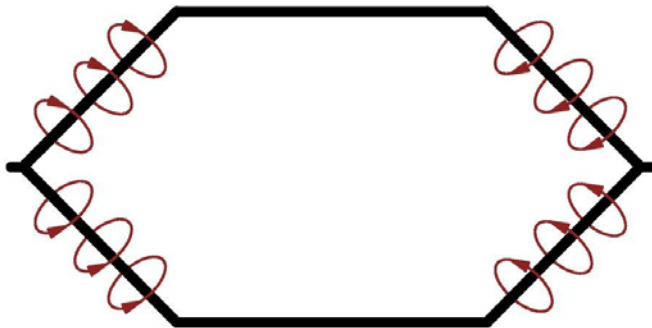
Por esta causa, en la dispersión por inclinación de ranura sólo se incluye el efecto del primer armónico espacial del campo magnético del entrehierro y en la expresión (6) de la inductancia de dispersión armónica  $L_{\sigma a}$  aparecen los factores de distribución,  $\xi_{dh}$ , y de paso,  $\xi_{ah}$ , para cada armónico  $h$ , pero no se incluyen sus respectivos factores de inclinación de ranura,  $\xi_{ih}$ .

### Dispersión de las cabezas de bobina

El devanado inducido de las máquinas eléctricas actuales es de tambor y está formado por bobinas con dos lados activos y dos cabezas (Fig. 6a).



*Fig. 6a:* Bobina de un devanado de tambor.  
1: Lados o haces activos  
2: Cabezas de bobina



*Fig. 6b:* Dispersión de las cabezas de bobina

Los lados activos de estas bobinas están colocados frente al entrehierro, alojados en ranuras de los núcleos magnéticos de la máquina. En consecuencia, la corriente que circula por ellos contribuye a la formación del campo magnético común.

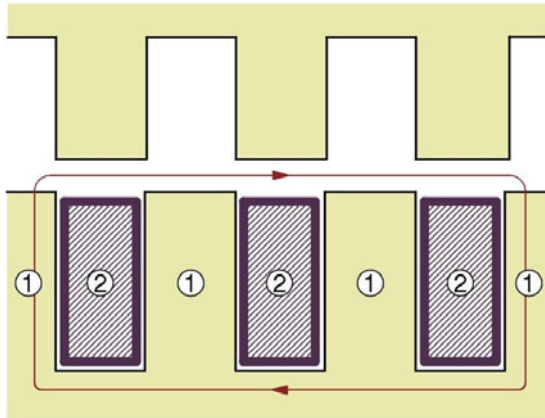
Sin embargo, las cabezas de bobina están situadas fuera del entrehierro y la corriente que circula por ellas crea un campo magnético que no puede atravesar el entrehierro, por lo que en su totalidad es de dispersión (Fig. 6b).

La dispersión de las cabezas de bobina se cuantifica mediante la inductancia  $L_{\sigma_{cb}}$ . Más adelante, en el apartado dedicado a las permeancias de dispersión, se presentan varias expresiones que permiten el cálculo de esta inductancia en distintos casos.

### Dispersión periférica

Esta dispersión es debida a líneas de inducción que circulan por el entrehierro pasando de un polo al contiguo siguiendo la dirección periférica o tangencial (Fig. 7). Estas líneas no llegan a atravesar el entrehierro y, por lo tanto, no entran en contacto con los dientes ni los conductores situados en el lado del entrehierro contrario al del devanado que las origina.

La dispersión periférica se cuantifica mediante la inductancia  $L_{\sigma_p}$ , la cual es despreciable en la mayoría de las máquinas, especialmente en las de entrehierro pequeño, como las asíncronas. Esta dispersión sólo es significativa para máquinas en las que el cociente entre el entrehierro y el paso polar es grande.



*Fig. 7: Dispersión periférica en un rotor:  
1: Diente  
2: Ranuras con conductores*

A modo de ejemplo, Alger [1] y Chalmers [5] dan esta expresión para el cálculo de  $L_{\sigma p}$  en un devanado trifásico de paso diametral:

$$L_{\sigma p} = \left( \frac{\pi^2}{9} \right) \left( \frac{2 p^2 \delta_g^2}{d^2} \right) k_s K_C L_\mu = 1,097 \left( \frac{2 p^2 \delta_g^2}{d^2} \right) k_s K_C L_\mu = 1,097 \left( \frac{\pi^2 \delta_g^2}{2 t_p^2} \right) k_s K_C L_\mu \quad (11)$$

El significado de los símbolos empleados en la fórmula (11) se ha explicado anteriormente para las expresiones (6).  $t_p$  es el paso polar medido sobre la circunferencia del entrehierro (relación (C15)).

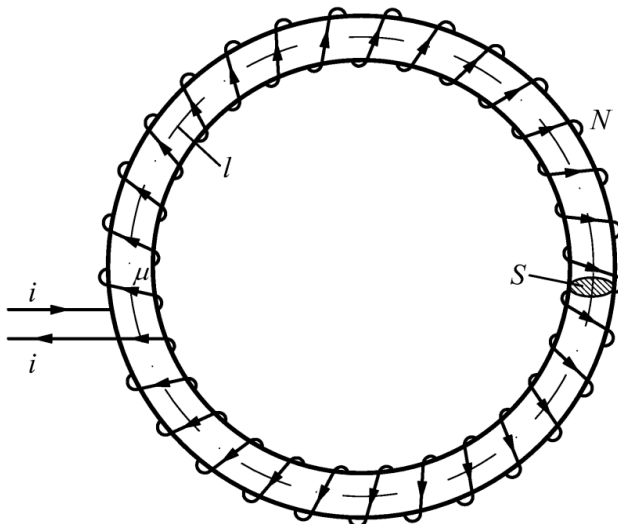
## PERMEANCIAS DE DISPERSIÓN

### Permeancia e inductancia

Un conjunto de líneas de campo magnético que delimitan una superficie cerrada por cuyas paredes laterales no pasa ningún flujo y que por su interior conduce un flujo  $\Phi$  constituyen un circuito magnético. Físicamente un circuito magnético se materializa en una canalización para las líneas de campo realizada íntegramente o en gran medida con material ferromagnético.

Es sabido que en los circuitos magnéticos se cumple la Ley de Hopkinson

$$\mathcal{F} = \mathcal{R} \cdot \Phi \quad (12)$$



*Fig. 8: Circuito magnético toroidal homogéneo y de sección uniforme*

Donde  $\mathcal{F}$  es la *fuerza magnetomotriz* (f.m.m.) y  $\mathcal{R}$  es la *reluctancia* del circuito magnético. Si el circuito magnético presenta una sección uniforme  $S$  y está construido por un material homogéneo de permeabilidad magnética absoluta  $\mu$  (por ejemplo, el circuito magnético toroidal de la Fig. 8) su reluctancia se calcula así

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu S} \quad (13)$$

La f.m.m.  $\mathcal{F}$  del circuito magnético de la Fig. 8 vale

$$\mathcal{F} = N \cdot i \quad (14)$$

En las expresiones (12) y (13)  $l$  es la longitud del circuito magnético,  $N$  es el número de espiras de la bobina e  $i$  es la corriente que circula por ella (ver la Fig. 8).

Se denomina *permeancia*  $\Lambda$  a la inversa de la reluctancia. Luego, de las expresiones (12) y (13) se deduce que

$$\Lambda = \frac{1}{\mathcal{R}} = \mu \frac{S}{l} \quad (15)$$

$$\mathcal{F} = \frac{\Phi}{\Lambda} \rightarrow \Phi = \mathcal{F} \cdot \Lambda$$

Si en su recorrido las líneas de campo de un circuito magnético se encuentran con zonas de diferentes propiedades magnéticas y/o geometría, la reluctancia total del circuito magnético se puede descomponer en las reluctancias parciales de estas zonas, de forma que la reluctancia total es igual a la suma de las reluctancias parciales (circuito magnético *serie*).

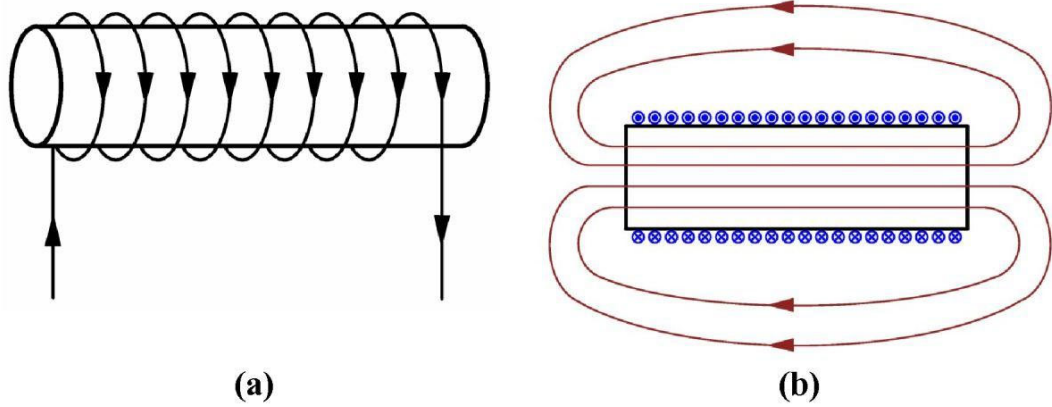
Muchas veces las líneas de inducción cerradas que definen un circuito magnético, el cual encierra un flujo total  $\Phi$ , se pueden agrupar formando circuitos magnéticos parciales. Cada uno de estos circuitos parciales tiene un recorrido cerrado, utiliza una parte de las líneas de campo totales y conduce sólo una parte del flujo total, de forma que la suma de los flujos de todos los circuitos magnéticos parciales es igual al flujo total  $\Phi$ . En este caso los circuitos parciales están en *paralelo* y la permeancia total es igual a la suma de las permeancias de los circuitos magnéticos parciales.

Se denomina *autoinductancia*, *coeficiente de autoinducción* o, simplemente, *inductancia*  $L$  de una bobina al cociente entre los enlaces de flujo  $\Psi$  que la atraviesan originados por la corriente  $i$  que circula por ella y dicha corriente:

$$L = \frac{\Psi}{i} \quad (16)$$

Los *enlaces de flujo o flujo total concatenado*  $\Psi$  de una bobina es igual a la suma de los flujos de todas sus espiras.

En el Sistema Internacional  $\mathcal{F}$  se mide en Amperios (A) o Amperios-vuelta (Av),  $\Psi$  y  $\Phi$  en Webers (Wb),  $L$  y  $\Lambda$  en Henrios (H) y  $\mathcal{R}$  en Henrios<sup>-1</sup> (H<sup>-1</sup>).



*Fig. 9: Bobina de concatenación concentrada (o concatenación íntegra), pues su arrollamiento es de sección despreciable*

Considérese una bobina tipo solenoide como la representada en la Fig. 9 en la que se supone que su bobinado de N espiras tiene una sección despreciable. Si se hace pasar una corriente  $i$  por el solenoide se crea un campo magnético en el que todas las líneas de inducción abrazan completamente a las N espiras y, además, todas ellas tienen el mismo flujo magnético  $\Phi$  (bobina de concatenación concentrada o de concatenación íntegra). En este caso sucede que:

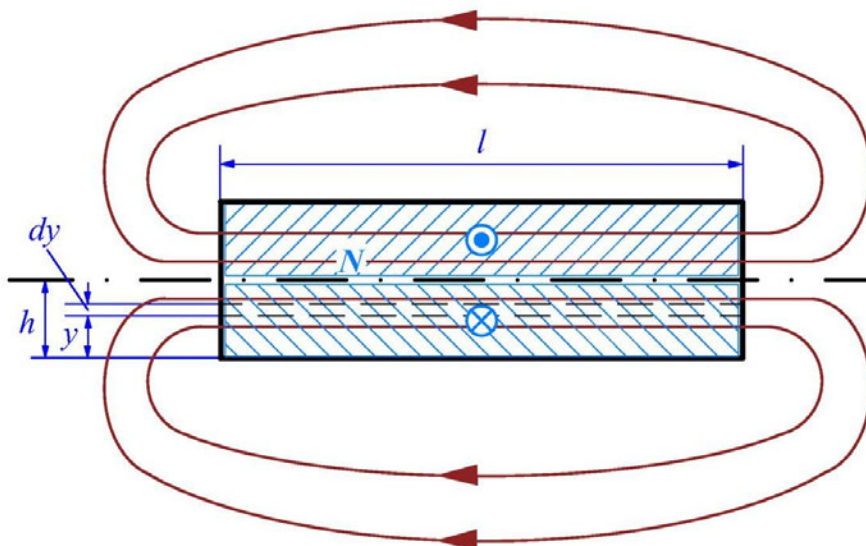
$$\psi = N \cdot \Phi \quad (17)$$

Luego, se puede establecer esta relación entre la inductancia L de esta bobina y la permeancia  $\Lambda$  del circuito magnético definido por sus líneas de inducción:

$$\Phi = \mathcal{F} \cdot \Lambda = (N i) \cdot \Lambda \rightarrow \psi = N \cdot \Phi = N^2 \cdot i \cdot \Lambda$$

$$L = \frac{\Psi}{i} = N^2 \cdot \Lambda \rightarrow \boxed{L = N^2 \cdot \Lambda} \quad (18)$$

Así pues, en circuitos magnéticos en los que todas sus espiras concatenen íntegramente el mismo flujo  $\Phi$  la inductancia se relaciona con la permeancia de la manera indicada en la expresión (18).



*Fig. 10: Bobina con concatenación progresiva ya que su arrollamiento tiene un espesor no despreciable*

En el caso de que el arrollamiento tenga una sección apreciable (por ejemplo, la bobina de la figura 10) y, por lo tanto, las líneas de inducción abrazan a diferente número de espiras (*bobina con concatenación progresiva*) es posible generalizar la expresión (18) y encontrar una **permeancia equivalente**  $\Lambda_L$  tal que

$$\boxed{L = N^2 \cdot \Lambda_L} \quad (19)$$

Por ejemplo, supóngase la bobina de N espiras de la Fig. 10 en la cual el bobinado tiene un espesor h tal que llega hasta el eje central de la bobina y, por lo tanto, no deja ningún espacio libre alrededor de dicho eje. Aceptaremos que no se produce ningún efecto piel, por lo que la corriente se reparte uniformemente dentro de la sección de cada conductor del bobinado.

Considérese el circuito magnético cerrado elemental formado por las líneas de campo que pasan por el corona cilíndrica de espesor diferencial dy, radio (h-y) y longitud l y que luego se cierran por el exterior de la bobina (Fig. 10). Este circuito magnético no abraza a la totalidad de las espiras del bobinado sino sólo a las comprendidas dentro de la zona de altura y. Este circuito magnético elemental tiene una permeancia infinitesimal  $d\Lambda_y$  y abraza  $N_y$  espiras (si las espiras se distribuyen uniformemente, sucederá que  $N_y = N \frac{y}{h}$ ). Evidentemente, estas dos magnitudes ( $d\Lambda_y$  y  $N_y$ ) son funciones de la coordenada y.

La autoinducción total L de la bobina se obtendrá integrando las aportaciones de todos los circuitos magnéticos elementales, cada uno de los cuáles puede ser considerado como de concatenación concentrada. Luego, partiendo de la relación (18) se llega a:

$$L = \int_{y=0}^{y=h} N_y^2 d\Lambda_y \quad (20)$$

Comparando las relaciones (19) y (20) se llega finalmente a esta expresión:

$$\Lambda_L = \frac{\int_{y=0}^{y=h} N_y^2 d\Lambda_y}{N^2} \quad (21)$$

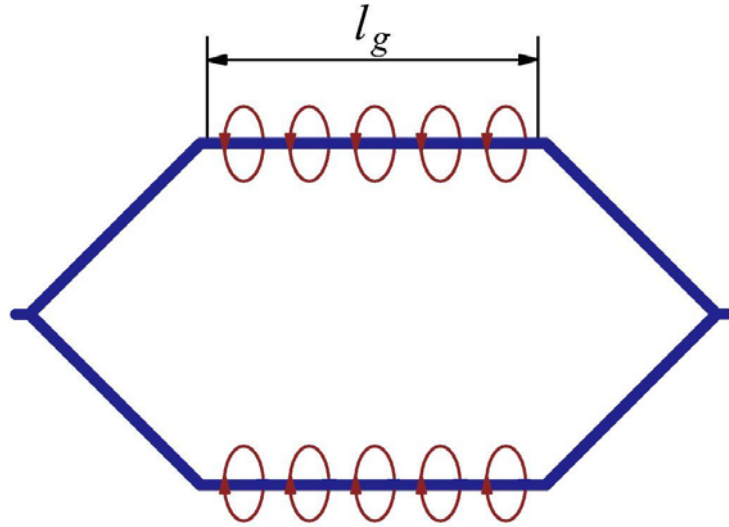
### **Permeancia combinada de dispersión de un devanado**

Se puede estudiar la dispersión magnética de un devanado suponiendo que toda ella es de ranura (Fig. 3); lo que significa que el resto de las dispersiones se van a suponer equivalentes a un aumento de la dispersión de ranura. Esta dispersión de ranura equivalente al conjunto de todas las dispersiones se la va a denominar dispersión combinada de ranura. De esta manera, como se va a comprobar seguidamente, se va a poder definir una **permeancia combinada de dispersión**  $\Lambda_\sigma$  concentrada por ranura que engloba a todas las dispersiones de la máquina.

Consideremos inicialmente un devanado de una sola capa, de forma que en cada ranura sólo hay un lado de bobina. Si una bobina tiene  $N_r$  espiras, de acuerdo con la expresión (19) la inductancia de esta bobina debida a la dispersión combinada de ranura viene dada por la relación siguiente (ver la Fig. 11):

$$L_{\sigma \text{ bob}} = N_r^2 \cdot \Lambda_{\sigma \text{ bob}} \quad (22)$$





*Fig. 11: Flujo de dispersión en una bobina debido a la dispersión de ranura*

Es evidente que la permeancia de dispersión de la bobina  $\Lambda_{\sigma\text{bob}}$  es la suma de las permeancias de las dos ranuras donde se aloja dicha bobina. En efecto, las líneas de campo totales de la Fig. 11 se pueden dividir en las de las dos ranuras, lo cual significa que el circuito magnético total es igual a la unión en paralelo de los circuitos magnéticos de cada ranura. Si ambas ranuras son iguales, ambas tienen la misma permeancia de dispersión combinada  $\Lambda_{\sigma}$ . Además, al tratarse de un devanado de una capa sucede que el número de espiras de una bobina,  $N_r$ , es igual al número de conductores,  $Z_n$ , alojados en una ranura. Luego, se llega a lo siguiente:

$$\begin{aligned}\Lambda_{\sigma\text{bob}} &= 2 \cdot \Lambda_{\sigma} \\ \text{Una capa: } N_r &= Z_n \\ L_{\sigma\text{bob}} &= 2 \cdot Z_n^2 \cdot \Lambda_{\sigma}\end{aligned}\tag{23}$$

Como se deduce las Figs. 3 y 11, la sección a través de la cual pasan las líneas de campo de la dispersión combinada de ranura es proporcional a la longitud axial del entrehierro  $l_g$  (se supone, de momento, que no existen los canales radiales de ventilación de los que se tratará en el apéndice B). Se denomina **permeancia específica combinada de dispersión**  $\lambda_{\sigma}$  a este parámetro adimensional:

$$\lambda_{\sigma} = \frac{\Lambda_{\sigma}}{\mu_0 l_g} \rightarrow \Lambda_{\sigma} = \mu_0 \cdot \lambda_{\sigma} \cdot l_g\tag{24}$$

En un bobinado de una capa, el número de bobinas de una fase por par de polos  $b$  es igual al número de ranuras por polo y fase  $q$ :

$$b = q$$

Luego, si  $p$  es el número de pares de polos de la máquina y  $a'$  es el número de ramas en paralelo de una fase, cada una de las ramas en paralelo en que se divide una fase consta del siguiente número de bobinas en serie

$$\frac{p b}{a'} = \frac{p q}{a'}$$

La inductancia de dispersión de una rama en paralelo vale entonces

$$L_{\sigma \text{ rama}} = \frac{p q}{a'} L_{\sigma \text{ bob}}$$

La fase está compuesta por  $a'$  ramas conectadas en paralelo, todas ellas con el mismo valor de inductancia de dispersión,  $L_{\sigma \text{ rama}}$ . Así pues, la inductancia de dispersión de la fase  $L_{\sigma}$  se obtendrá dividiendo la inductancia de una rama entre el número de ramas:

$$L_{\sigma} = \frac{L_{\sigma \text{ rama}}}{a'} = \frac{p q}{a'^2} L_{\sigma \text{ bob}}$$

Lo que, teniendo en cuenta las relaciones (23) y (24), da lugar a

$$L_{\sigma} = 2 \frac{p q}{(a')^2} Z_n^2 \Lambda_{\sigma} = 2 \frac{p q}{(a')^2} Z_n^2 (\mu_0 \cdot \lambda_{\sigma} \cdot l_g) \quad (25)$$

Dado que la permeancia combinada de dispersión  $\Lambda_{\sigma}$  incluye el efecto de todos los tipos de dispersión del devanado, esta permeancia se puede obtener como la suma de las permeancias parciales que representan los efectos de cada tipo de dispersión. Por lo tanto, se obtienen unas expresiones equivalentes a la (5):

$$\begin{aligned} \Lambda_{\sigma} &= \Lambda_{\sigma r} + \Lambda_{\sigma t} + \Lambda_{\sigma a} + \Lambda_{\sigma i} + \Lambda_{\sigma cb} + \Lambda_{\sigma p} \\ \lambda_{\sigma} &= \lambda_{\sigma r} + \lambda_{\sigma t} + \lambda_{\sigma a} + \lambda_{\sigma i} + \lambda_{\sigma cb} + \lambda_{\sigma p} \end{aligned} \quad (26)$$

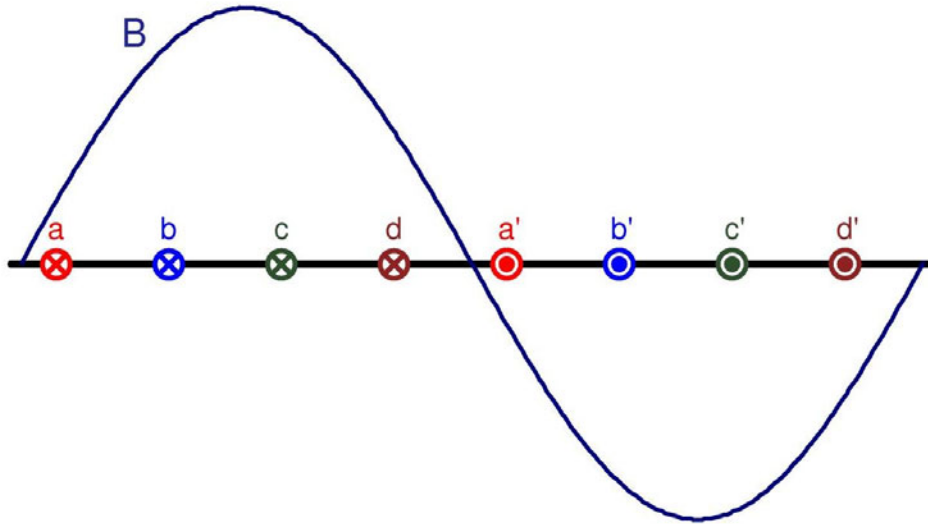
En la bibliografía especializada es posible encontrar las fórmulas que permiten obtener todos los sumandos de las expresiones (26) para cada tipo de devanado. En las fórmulas de las permeancias específicas  $\lambda_{\sigma}$ , al ser estas adimensionales, todas las longitudes deben medirse con la misma unidad, pero esta unidad puede ser tanto metros como centímetros o milímetros.

Hasta ahora se ha supuesto que el devanado es de una capa, pero si el devanado es de doble capa es posible encontrar un devanado equivalente de simple capa y la expresión (25) sigue siendo válida. Como se indicará más adelante, para obtener la permeancia de dispersión del devanado de una capa equivalente a uno de doble capa hay que introducir unos coeficientes de corrección en algunas de las fórmulas que calculan los sumandos de las expresiones (26).

De todos modos, el cálculo de la inductancia de dispersión de un devanado mediante fórmulas analíticas da unos resultados con un cierto margen de inexactitud. Se obtienen resultados más precisos mediante métodos numéricos. En cualquier caso habrá que validar experimentalmente los valores obtenidos por cálculo.

**Permeancia combinada de dispersión de una jaula de ardilla**

La expresión (25) también se puede aplicar a un devanado de jaula de ardilla si se dan los valores adecuados a las magnitudes que definen el bobinado; tales como, el número de fases ( $m$ ), el número de ramas en paralelo ( $a'$ ), etc.



*Fig. 12: Representación esquemática de un par de polos en una jaula de ardilla con 4 barras por polo*

Para ello se va a considerar el ejemplo de la Fig. 12. En esta figura se representan, de forma esquemática, dos polos de una jaula que tiene 4 barras en cada polo y el primer armónico de la inducción magnética en el entrehierro,  $B$ , (campo magnético principal) en un momento dado.

En régimen permanente el campo magnético principal gira a una velocidad constante con respecto a las barras e igual a la diferencia de la velocidad de sincronismo menos la velocidad de giro del rotor. Esto hace que en cada barra se induzca una f.e.m. proporcional al valor de la inducción magnética a la que se ve sometida en cada momento.

Dada la simetría de la onda de inducción y la geometría de la jaula de ardilla, es evidente que las 8 barras que se tienen en un par de polos se pueden agrupar en las parejas a-a', b-b', c-c' y d-d'. En efecto, las dos barras de cada pareja están sometidas a inducciones magnéticas  $B$  exactamente de igual valor absoluto, pero de signos opuestos. Esto significa que las f.e.m.s inducidas en las dos barras de la misma pareja también son de iguales valores absolutos y signos opuestos y, en consecuencia, lo mismo sucede con las corrientes que circulan por estas barras. De todo esto se deduce que cada una de estas parejas de barras más los trozos de los dos aros de cortocircuito que las unen se pueden considerar como una bobina de una sola espira, en la que, evidentemente, sus dos lados están recorridos por la misma corriente.

En general, las parejas de conductores tendrán corrientes diferentes unas de las otras, lo cual permite interpretarlas como fases diferentes. Es decir, en un par de polos de esta jaula hay 4 fases diferentes de una sola espira cada una.

Por otra parte, dadas las simetrías de la máquina, se obtiene el mismo resultado en cada par de polos y, consecuentemente, las corrientes que aparecen en las 4 parejas de barras de un par de polos se repiten en los demás pares de polos. Si nos fijamos, por ejemplo, en la pareja de barras a-a' habrá otras tantas parejas de barras equivalentes en cada uno de los  $p$  pares de polos de la máquina, todas ellas con las mismas corrientes y, por lo tanto, pertenecientes a la misma fase. Todas estas parejas de barras de la misma fase están conectadas en paralelo entre sí a través de los dos anillos de cortocircuito de la jaula. Luego, cada fase de la jaula consta de  $p$  ramas en paralelo de una espira cada una. Además, el hecho de que el reparto de corrientes inducidas en las barras se repita cada par de polos hace que una jaula de ardilla se comporte como un devanado que siempre tiene el mismo número de polos que los del campo magnético que la afecta.

## CAMPOS MAGNÉTICOS DE DISPERSIÓN

De todo lo anterior se deduce que, de modo general, una jaula de ardilla se la puede considerar como un devanado con estas características:

- Número de conductores por ranura  $Z_n$  igual a 1. Una jaula de ardilla sólo tiene una barra en cada ranura:

$$Z_n = 1$$

- Número de fases  $m$  igual al número de barras por polo o, lo que es equivalente, el número de ranuras por polo, puesto que una jaula sólo tiene una barra en cada ranura:

$$m = \frac{K}{2p}$$

Donde,

$K$  es el número total de ranuras y, por lo tanto, también es el número total de barras de la jaula de ardilla.

$p$  es el número de pares de polos.

- Número de ranuras por fase y polo  $q$  igual a 1. Bajo cada polo cada barra es una fase diferente y, consecuentemente, una fase sólo utiliza una ranura de cada polo:

$$q = 1$$

- Número de ramas en paralelo  $a'$  igual al número de pares de polos  $p$ :

$$a' = p$$

- Valor eficaz de la corriente de una fase  $I$  igual al producto de la corriente de una rama en paralelo por el número de ramas que constituyen una fase. Cada rama en paralelo sólo tiene una espira, luego el valor eficaz de su corriente es igual al de la corriente en una barra  $I_b$ . En consecuencia

$$I = a' I_b = p I_b \quad (27)$$

( $I_b$  = Corriente de barra)

Sustituyendo estos resultados en la expresión (25) se obtiene la siguiente fórmula para calcular la inductancia de dispersión de una jaula de ardilla:

$$L_\sigma = 2 \cdot \frac{p \cdot q}{(a')^2} \cdot Z_n^2 \cdot \Lambda_\sigma = 2 \cdot \frac{p \cdot 1}{p^2} \cdot 1^2 \cdot \Lambda_\sigma$$

$$\boxed{L_\sigma = \frac{2}{p} \Lambda_\sigma = \frac{2}{p} (\mu_0 \cdot \lambda_\sigma \cdot l_g)} \quad (28)$$

Según la relación (1), la reactancia de dispersión  $X_\sigma$  de una jaula viene dada por

$$X_\sigma = 2 \pi f L_\sigma = \frac{4 \pi}{p} f \Lambda_\sigma = \frac{4 \pi}{p} f (\mu_0 \cdot \lambda_\sigma \cdot l_g)$$

Finalmente y teniendo en cuenta la relación (27), se deduce que en una jaula de ardilla la caída de tensión  $E_\sigma$  debida a la reactancia de dispersión vale:

$$E_\sigma = X_\sigma \cdot I = \left( \frac{4 \pi}{p} f \Lambda_\sigma \right) \cdot I = \left( \frac{4 \pi}{p} f \Lambda_\sigma \right) \cdot (p \cdot I_b)$$

$$\boxed{E_\sigma = 4 \pi f \Lambda_\sigma I_b = 4 \pi f (\mu_0 \cdot \lambda_\sigma \cdot l_g) I_b} \quad (29)$$

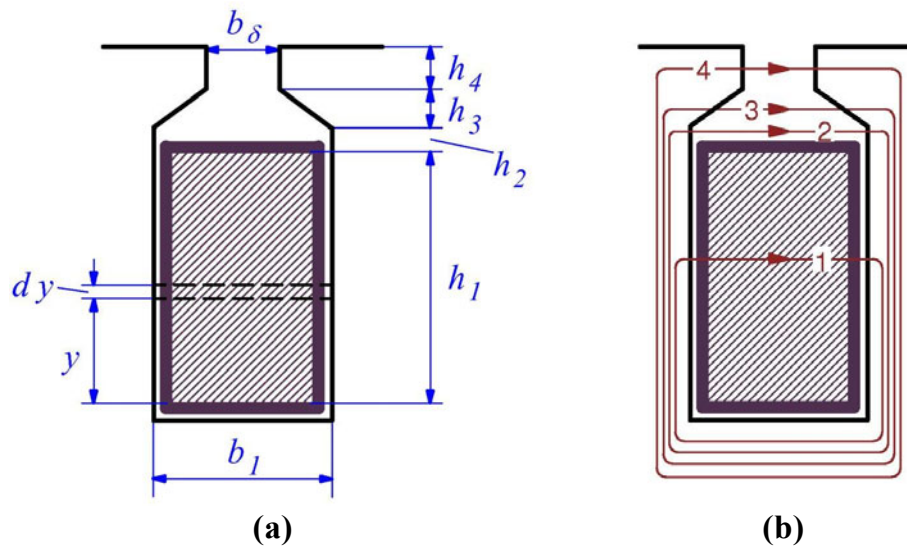
( $I_b$  = Corriente de barra)

### Permeancia de dispersión específica de ranura

En la bibliografía especializada se pueden encontrar expresiones que, en función de la geometría de las ranuras y, en su caso, del paso de bobina, permiten calcular el valor de la permeancia específica de dispersión de ranura  $\lambda_{\sigma r}$  que aparece en la suma (26).

### **Permeancia de dispersión específica de ranura en devanados de una capa**

A modo de ejemplo se va a determinar el valor de  $\lambda_{\sigma r}$  para un devanado de una capa con ranuras rectangulares semicerradas cuya geometría y dimensiones están representadas en la Fig. 13a. De momento aceptaremos que las líneas de campo de dispersión de ranura sólo rodean a una ranura (Fig. 13b).



*Fig. 13: Forma y dimensiones de una ranura rectangular semicerrada en un devanado rotórico de una capa (a) y sus líneas de campo de dispersión de ranura (b)*

Tal como se aprecia en la Fig. 13b la ranura se puede dividir en 4 zonas de acuerdo con el recorrido de las líneas de campo de dispersión:

- Zona 1: Sus líneas de campo pasan por la zona de los conductores y los concatenan parcialmente. Se trata pues de una concatenación progresiva. El recorrido de estas líneas de campo dentro de la ranura tiene una longitud uniforme  $b_1$ .
- Zona 2: Sus líneas de campo pasan por encima de los conductores, los abrazan a todos y su recorrido dentro de la ranura tiene una longitud uniforme  $b_1$ .
- Zona 3: Sus líneas de campo pasan por encima de los conductores, los abrazan a todos y su recorrido dentro de la ranura tiene una longitud variable linealmente desde  $b_1$  a  $b_\delta$ .
- Zona 4: Sus líneas de campo se cierran a través de la abertura  $b_\delta$  de la ranura, abrazan a todos los conductores y su recorrido dentro de la ranura tiene una longitud uniforme  $b_\delta$ .

Las líneas de campo de una de estas zonas definen un circuito magnético parcial de dispersión y los cuatro circuitos magnéticos parciales en paralelo constituyen el circuito total de dispersión de ranura. Por consiguiente, la permeancia de dispersión de ranura es la suma de las permeancias de estos cuatro circuitos parciales.

Para calcular la permeancia de dispersión en cada una de estas cuatro zonas se tendrá presente que las líneas de campo tienen una parte importante de su recorrido a través del interior de la ranura, es decir, en una zona sin material ferromagnético. Esta zona tiene una permeabilidad magnética prácticamente igual a la del vacío,  $\mu_0$ , y, consiguientemente, mucho menor que la del hierro. Se va a suponer, entonces, que el hierro tiene una permeabilidad magnética prácticamente infinita y sólo hay que tener en cuenta la permeancia de las zonas fuera del hierro.

## CAMPOS MAGNÉTICOS DE DISPERSIÓN

Por otra parte, tal como se indica en el apéndice B, en el caso de que existan canales radiales de ventilación en el órgano en el que se ubican las ranuras que se están analizando, la longitud axial equivalente a efectos del campo de dispersión de ranura, no es la longitud geométrica  $l_g$  sino la longitud equivalente  $l_n$ . Esta longitud depende del ancho de la ranura y como ésta tiene zonas de diferente anchura (desde  $b_1$  a  $b_8$ ) se van a obtener diferentes longitudes efectivas en las cuatro zonas de la ranura.

Recordemos que, como ya se ha indicado anteriormente (ver la segunda de las expresiones (23)), el número de espiras del bobinado que son abrazadas por una línea de inducción es igual al número de conductores en una ranura abrazados por dicha línea de campo magnético.

### Permeancia específica de dispersión en la zona 1:

Se supondrá, de momento, que no existe efecto piel, por lo que la corriente se reparte uniformemente dentro de la sección de cada uno de los conductores alojados en la ranura. Además, los  $Z_n$  conductores de la ranura se reparten uniformemente dentro de la altura  $h_1$ . (Nótese que en  $h_1$  no se incluye el espesor del aislamiento externo que rodea a los conductores). Esto hace que las líneas de inducción que pasan a la altura  $y$  (Figs. 13a y b) abracen a un número de conductores que se calcula así:

$$N_y = Z_n \frac{y}{h_1} \quad (30)$$

Las líneas de campo contenidas dentro de la zona de altura diferencial  $dy$  definen un circuito magnético elemental que se puede considerar de concatenación concentrada y cuyas dimensiones son:

- Longitud de las líneas de campo dentro de la ranura en la zona 1 =  $b_1$ . (La longitud en las zonas de hierro no se consideran al tomar como infinita la permeabilidad magnética del hierro)
- Sección del circuito magnético elemental dentro de la ranura =  $l_{nb1} \cdot dy$  ( $l_{nb1}$  es la longitud axial efectiva para dispersión cuando el ancho de la ranura es  $b_1$ . Se calcula como se indica en el apéndice B)

Luego, teniendo en cuenta que la permeabilidad magnética en las zonas no ferromagnéticas se puede considerar igual a la del vacío  $\mu_0$ , de acuerdo con la primera de las relaciones (15) la permeancia de este circuito magnético elemental vale

$$d\Lambda_y = \mu_0 \frac{l_{nb1}}{b_1} dy$$

Por lo tanto, de acuerdo con la expresión (21), la permeancia de dispersión de esta zona de la ranura se obtiene así:

$$\Lambda_{\sigma r1} = \frac{\int_0^{h_1} \left( \frac{Z_n}{h_1} y \right)^2 \mu_0 \frac{l_{nb1}}{b_1} dy}{Z_n^2}$$

$$\Lambda_{\sigma r1} = \mu_0 \cdot \frac{h_1}{3 b_1} \cdot l_{nb1} \quad (31)$$

Cuando el bobinado alojado en la ranura está construido con conductores de gran altura se produce el *efecto piel* o *efecto superficial*. En este caso la corriente no se reparte uniformemente a través de la sección de cada conductor y esto afecta a la permeancia  $\Lambda_{\sigma r1}$ . Este efecto se tiene en cuenta incorporando un coeficiente de corrección  $k_\lambda$  en la expresión (31).

El coeficiente  $k_\lambda$  vale 1 cuando no hay efecto piel y en la bibliografía especializada (por ejemplo, en el libro de Corrales [6]) se pueden encontrar las expresiones que permiten calcularlo.

## CAMPOS MAGNÉTICOS DE DISPERSIÓN

Teniendo en cuenta el coeficiente de corrección por efecto piel  $k_\lambda$  y la fórmula (24), las expresiones finales para obtener la permeancia de dispersión  $\Lambda_{\sigma r1}$  y la permeancia específica de dispersión  $\lambda_{\sigma r1}$  son:

$$\Lambda_{\sigma r1} = \mu_0 \cdot \frac{h_1}{3 b_1} \cdot I_{nb1} \cdot k_\lambda$$

$$\lambda_{\sigma r1} = \frac{h_1}{3 b_1} \cdot \frac{I_{nb1}}{I_g} \cdot k_\lambda \quad (32)$$

### Permeancia específica de dispersión en la zona 2:

En esta zona todas las líneas de inducción abrazan a la totalidad de los conductores de la ranura. Luego estas líneas de campo delimitan un circuito magnético de concatenación concentrada de las siguientes dimensiones:

- Longitud de las líneas de campo dentro de la ranura en la zona 2 =  $b_1$ .
- Sección del circuito magnético total de la zona 2 =  $I_{nb1} \cdot h_2$  (como el ancho  $b_1$  de la ranura en esta zona es igual a la de la zona 1, sucede que la longitud axial efectiva  $I_{nb1}$  es la misma que en la zona 1. Ver el apéndice B).

Mediante la primera de las expresiones (15) y la relación (24) se obtiene lo siguiente:

$$\Lambda_{\sigma r2} = \mu_0 \cdot \frac{h_2}{b_1} \cdot I_{nb1}$$

$$\lambda_{\sigma r2} = \frac{h_2}{b_1} \cdot \frac{I_{nb1}}{I_g} \quad (33)$$

### Permeancia específica de dispersión en la zona 3:

En esta zona, al igual que en la anterior, todas las líneas de inducción abrazan a la totalidad de los conductores de la ranura y delimitan un circuito magnético de concatenación concentrada.

El problema es que la longitud de las líneas de campo dentro de la ranura ya no es constante, sino que varía linealmente entre  $b_1$  y  $b_\delta$ . Esto, a su vez hace que la longitud axial efectiva de las ranuras en esta zona tampoco sea constante y varíe entre  $I_{nb1}$  y  $I_{nb\delta}$  ( $I_{nb\delta}$  es la longitud axial efectiva para dispersión cuando el ancho de la ranura es  $b_\delta$ . Ver el apéndice B).

El cálculo exacto de la permeancia en esta zona exige realizar una integral teniendo en cuenta las variaciones del ancho de la ranura y de su longitud efectiva con la coordenada  $y$ . Sin embargo, se consiguen resultados suficientemente exactos si se trabaja con los valores medios de la anchura y de la longitud axial efectiva de la ranura. Así se obtiene lo siguiente:

$$\Lambda_{\sigma r3} = \mu_0 \cdot \frac{h_3}{\frac{b_1 + b_\delta}{2}} \cdot \frac{I_{nb1} + I_{nb\delta}}{2}$$

$$\Lambda_{\sigma r3} = \mu_0 \cdot \frac{h_3}{b_1 + b_\delta} \cdot (I_{nb1} + I_{nb\delta})$$

$$\lambda_{\sigma r3} = \frac{h_3}{b_1 + b_\delta} \cdot \frac{(I_{nb1} + I_{nb\delta})}{I_g} \quad (34)$$

Permeancia específica de dispersión en la zona 4:

En esta zona, al igual que en la zona 2, todas las líneas de inducción abrazan a la totalidad de los conductores de la ranura y delimitan un circuito magnético de concatenación concentrada. Además, todas las líneas de inducción tienen la misma longitud  $b_\delta$  dentro de la ranura. Por otra parte, en esta zona la longitud axial efectiva (ver el apéndice B) es  $l_{nb\delta}$ , ya que el ancho de la ranura es  $b_\delta$ .

Mediante la primera de las expresiones (15) y la relación (24) se obtiene lo siguiente:

$$\Lambda_{\sigma r4} = \mu_0 \cdot \frac{h_4}{b_\delta} \cdot l_{nb\delta}$$

$$\lambda_{\sigma r4} = \frac{h_4}{b_\delta} \cdot \frac{l_{nb\delta}}{l_g} \quad (35)$$

Permeancia específica de dispersión de ranura:

La permeancia específica total de dispersión de ranura se obtiene sumando las permeancias específicas parciales dadas por las expresiones (32), (33), (34) y (35). Se obtiene pues esta fórmula:

$$\lambda_{\sigma r} = \frac{h_1}{3} \frac{l_{nb1}}{b_1} \frac{k_\lambda}{l_g} + \frac{h_2}{b_1} \frac{l_{nb1}}{l_g} + \frac{h_3}{b_1 + b_\delta} \frac{l_{nb1} + l_{nb\delta}}{l_g} + \frac{h_4}{b_\delta} \frac{l_{nb\delta}}{l_g} \quad (36)$$

Como se puede apreciar en el ejemplo anterior, el cálculo de la permeancia de ranura en un devanado de una capa consiste en sumar las permeancias parciales de cada zona de la ranura, cada una de las cuáles se puede calcular partiendo de la expresión (15), si es de concatenación concentrada, o de la expresión (21), si es de concatenación progresiva.

El método descrito en el ejemplo anterior no puede utilizarse en ranuras cerradas. En efecto, en este caso la suposición de que la permeancia del hierro es infinita daría lugar a una permeancia de ranura infinita, puesto que saldría de valor infinito la permeancia parcial del puente de material ferromagnético que cierra la ranura.

Lo que sucede es que en las ranuras cerradas la permeancia de dispersión de ranura depende en gran medida del grado de saturación del puente que cierra la ranura, lo que significa que esta permeancia depende de la corriente. En [2] se muestra una expresión empírica que permite calcular aproximadamente la permeancia parcial del puente que cierra la ranura. En [13] recomienda utilizar métodos numéricos para obtener esta permeancia.

Lo habitual es que las líneas de campo de dispersión de ranura rodeen a más de una ranura (Fig. 4b). Si estas líneas de inducción rodean a  $n$  ranuras contiguas, los flujos sobre las espiras de una bobina debidos a estas líneas de campo son originados ahora por unas corrientes  $n$  veces superiores a las de una ranura, pero se encuentran con una reluctancia  $n$  veces mayor (pues estas líneas de campo tienen un camino en el aire  $n$  veces mayor que en una ranura). Es decir, habrá los mismos flujos que cuando las líneas de campo sólo rodean a una ranura, que es lo que se ha supuesto en la Fig. 13. En consecuencia las expresiones para  $\lambda_{\sigma r}$  obtenidas suponiendo que las líneas de inducción de dispersión sólo rodean a una ranura siguen siendo válidas aunque rodeen a varias. Se puede demostrar que esto mismo sucede con devanados de dos capas, incluso aunque sus bobinas no sean de paso diametral.

**Permeancia de dispersión específica de ranura en devanados de dos capas**

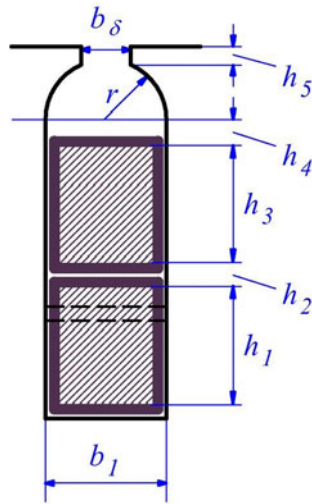
En los devanados de corriente alterna de dos capas en cada ranura hay dos capas de conductores, una sobre la otra. Cada una de estas capas de conductores de una ranura es un lado de una bobina.



En los devanados de *dobles capa con bobinas de paso diametral* sucede que en todas las ranuras las dos capas de conductores pertenecen a la misma fase. Esto significa que la totalidad de los conductores de una ranura están recorridos por la misma corriente. Además, si dos bobinas tienen dos de sus lados en una misma ranura sucede que sus otros lados también están en una misma ranura. Por lo tanto, a cada par de bobinas que están alojadas en las mismas dos ranuras se lo puede considerar equivalente a una sola bobina de un devanado de una capa.

En consecuencia es posible analizar la dispersión en estas ranuras siguiendo el mismo procedimiento que cuando el devanado es de una capa. Para ello hay que tener en cuenta que los  $Z_n$  conductores de una ranura se reparten a partes iguales entre las dos capas.

A modo de ejemplo se va indicar el valor de  $\lambda_{\sigma r}$  para un devanado de dos capas, con bobinas de paso diametral y con ranuras cuya geometría y dimensiones están representadas en la Fig. 14. Se trata de ranuras rectangulares semicerradas con cuñas semicilíndricas.



*Fig. 14: Forma y dimensiones de una ranura rectangular semicerrada con cuña semicilíndrica en un devanado de dos capas situado en el rotor*

En este caso la parte superior de la ranura tiene forma semicircular de radio  $r$  y, por otra parte, la separación entre las dos capas de conductores es  $h_2$ . Observando la Fig. 14 es evidente que se cumple la siguiente relación geométrica:

$$b_1 = 2 r$$

Trabajando de la misma manera que con el ejemplo de la Fig. 13, en [6] se llega a la siguiente expresión (compárese con la relación (36)):

$$\lambda_{\sigma r} = \frac{h_1 + h_3}{3 b_1} \frac{l_n b_1}{l_g} k_\lambda + \frac{h_2}{4 b_1} \frac{l_n b_1}{l_g} + \frac{h_4}{b_1} \frac{l_n b_1}{l_g} + 0,785 \frac{l_{nr}}{l_g} + \frac{h_5}{b_\delta} \frac{l_n b_\delta}{l_g} \quad (37)$$

Donde  $l_{nr}$  es la longitud efectiva para la dispersión correspondiente al ancho medio de la ranura en la zona semicircular. Es decir, la longitud equivalente para la dispersión correspondiente a una anchura igual a  $r$  (véase el apéndice B).

En la expresión (37) el primer término representa a la suma de las permeancias específicas parciales de las dos capas de conductores, cuyas alturas son  $h_1$  y  $h_3$ , respectivamente.

Por otra parte, el término que representa la permeancia específica parcial de la zona de altura  $h_2$ , la cual separa las dos capas de conductores, está dividida por 4 porque sólo concatena íntegramente la mitad de los conductores de la ranura.

## CAMPOS MAGNÉTICOS DE DISPERSIÓN

El penúltimo sumando de la expresión (37) representa la permeancia específica de la zona redondeada de radio  $r$  donde se coloca la cuña semicilíndrica que cierra la ranura. Luego, la permeancia específica parcial de esta zona es:

$$\lambda_{\sigma r r} = 0,785 \frac{l_{nr}}{l_g} \quad (38)$$

Lo habitual es que los devanados de **dobles capa sean de paso no diametral**, bien de *paso acortado* (más frecuente) o bien de *paso alargado*. En este caso no hay dos bobinas en las que ambos lados compartan las mismas ranuras. Si el devanado es trifásico, sucederá que en algunas ranuras las dos capas de conductores pertenecen a la misma fase, pero en otras ranuras cada capa es de una fase diferente [16]. En estos devanados hay que incorporar unos coeficientes a las fórmulas de las permeancias parciales en cada zona de la ranura. Añadiendo estos coeficientes sigue siendo posible analizar a estos devanados como uno equivalente de una capa.

Los coeficientes que tienen en cuenta que el paso no es diametral son dos:  $k_1$ , que multiplica a las permeancias parciales correspondientes a las líneas de inducción que no concatenan íntegramente las dos capas de conductores de una ranura, y  $k_2$ , que multiplica a las permeancias parciales en las cuáles las líneas de campo concatenan íntegramente ambas capas de conductores de una ranura. Estos coeficientes son menores que 1 cuando las bobinas no son de paso diametral e iguales a 1 si las bobinas son diametrales.

En el libro de Boldea y Nasar [2] se pueden encontrar estas expresiones para calcular los coeficientes  $k_1$  y  $k_2$  de un devanado trifásico:

$$\begin{aligned} k_2 &= \frac{1 + 3\beta_y}{4} & \text{si } \frac{2}{3} \leq \beta_y = \frac{y_1}{y_p} \leq 1 \\ k_2 &= \frac{6\beta_y - 1}{4} & \text{si } \frac{1}{3} \leq \beta_y \leq \frac{2}{3} \\ k_2 &= \frac{7 - 3\beta_y}{4} & \text{si } 1 \leq \beta_y \leq 2 \\ k_1 &= \frac{1 + 3k_2}{4} \end{aligned} \quad (39)$$

Donde,

- $y_1$  es el paso de bobina medido como número de ranuras.
- $y_p$  es el paso polar medido como número de ranuras.
- $\beta_y$  es el paso de bobina relativo; es decir, el cociente  $y_1/y_p$  (cuando  $\beta_y$  vale 1 la bobina es de *paso diametral*; si  $\beta_y$  es inferior a 1, la bobina es de *paso acortado* y si  $\beta_y$  es superior a 1, la bobina es de *paso alargado*).

Por lo tanto, si el bobinado de doble capa con ranuras rectangulares semicerradas con cuñas semicilíndricas de la Fig. 14 no es de paso diametral, su permeancia específica de ranura pasa a calcularse mediante la siguiente expresión (compárese con la relación (37)):

$$\lambda_{\sigma r} = \frac{h_1 + h_3}{3 b_1} \frac{l_{nb1}}{l_g} k_\lambda k_1 + \frac{h_2}{4 b_1} \frac{l_{nb1}}{l_g} k_1 + \frac{h_4}{b_1} \frac{l_{nb1}}{l_g} k_2 + 0,785 \frac{l_{nr}}{l_g} k_2 + \frac{h_5}{b_\delta} \frac{l_{nb\delta}}{l_g} k_2 \quad (40)$$

En el apéndice D se muestra el cálculo de  $\lambda_{\sigma r}$  para un devanado de dos capas con otro tipo de ranura (párrafo D70).

La aplicación de estas fórmulas es laboriosa y, además, no dejan de proporcionar sólo resultados aproximados, lo que exige adoptar un amplio margen de seguridad. Por esta causa, en muchas ocasiones se simplifican las fórmulas obtenidas para  $\lambda_{\sigma r}$  prescindiendo de algunas de las correcciones que se introducen en el cálculo de las permeancias parciales, salvo que tengan una importancia evidente.

Así, la expresión (40) muchas veces se reduce a

$$\lambda_{\sigma r} = \frac{h_1 + h_2 + h_3 + h_4}{3 b_1} + 0,785 + \frac{h_5}{b_\delta} \quad (41)$$

### Otras permeancias específicas de dispersión

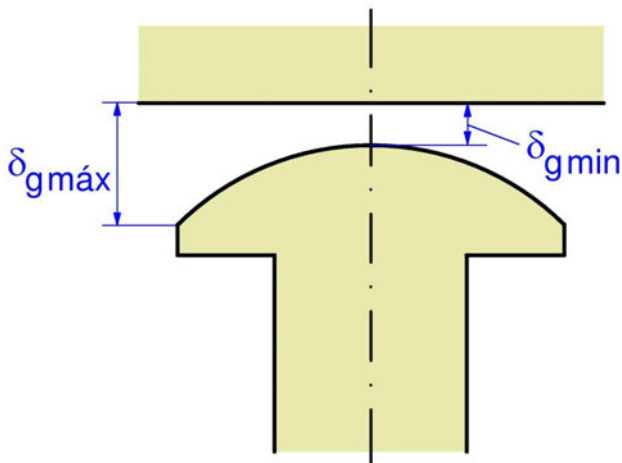
En este apartado se muestran algunas expresiones para el cálculo de las permeancias específicas parciales de la ecuación (26) que se han extraído de la bibliografía especializada.

La *permeancia específica del conjunto de las dispersiones de las cabezas de diente y zig-zag*,  $\lambda_{\sigma t}$ , depende de los valores del entrehierro geométrico  $\delta_g$  y de la abertura de la ranura  $b_\delta$  (Fig. 4a) del órgano de la máquina, estator o rotor, donde se ubica el devanado cuya dispersión se calcula.

Para ver cómo se calcula  $\lambda_{\sigma t}$ , se puede citar la siguiente expresión, dada por Corrales [6]:

$$\lambda_{\sigma t} = \frac{5 \frac{\delta_g}{b_\delta} \frac{l_\delta}{l_g} \psi k_2}{5 + 4 \frac{\delta_g}{b_\delta}} \quad (42)$$

En esta expresión  $l_g$  es la longitud axial real del entrehierro (longitud geométrica) y  $l_\delta$  es la longitud axial efectiva del entrehierro (ver el apéndice B).  $k_2$  es uno de los coeficientes que aparecieron al estudiar la permeancia de dispersión de ranura en devanados de doble capa y que se puede obtener mediante las relaciones (39). Evidentemente, en devanados de una capa  $k_2$  vale 1.



*Fig. 15: Entrehierros geométricos mínimo y máximo en una máquina síncrona de polos salientes*

## CAMPOS MAGNÉTICOS DE DISPERSIÓN

Cuando se trata de máquinas de entrehierro uniforme el recubrimiento polar  $\psi$  vale 1. En máquinas de polos salientes  $\psi$  es el cociente entre el ancho de un polo saliente y el ancho del paso polar. Evidentemente, en el caso de polos salientes el recubrimiento polar  $\psi$  tiene un valor inferior a 1.

Además, en máquinas de polos salientes el entrehierro geométrico  $\delta_g$  que aparece en la fórmula anterior es igual a la media aritmética de los entrehierros geométricos en el centro del polo y en el extremo; es decir, la media de los valores mínimo y máximo del entrehierro bajo un polo (ver la Fig. 15).

$$\delta_g = \frac{\delta_{g \text{ máx}} + \delta_{g \text{ mín}}}{2} \quad (43)$$

La **permeancia específica de las cabezas de bobina**,  $\lambda_{\sigma cb}$ , depende de la forma y de las dimensiones de la bobina.

Como ejemplos se pueden mencionar las expresiones que se citan a continuación, la cuales han sido extraídas de los libros [4], [6] y [12] y cuyos símbolos se explican en las páginas siguientes.

Para bobinados de máquinas asíncronas de una sola capa por polos consecuentes:

$$\lambda_{\sigma cb} = 0,67 \frac{q}{l_g} (l_{cb} - 0,64 y_1 t_m) \quad (44)$$

Para bobinados de máquinas asíncronas de una sola capa por polos y bobinados de doble capa con bobinas de hilo:

$$\lambda_{\sigma cb} = 0,47 \frac{q}{l_g} (l_{cb} - 0,64 y_1 t_m) \quad (45)$$

Para bobinados de máquinas asíncronas de doble capa con cabezas en horquilla:

$$\lambda_{\sigma cb} = 1,13 \frac{q}{l_g} \xi_a^2 (e + 0,5 w) \quad (46)$$

El valor de  $w$  en la fórmula (46) se puede obtener mediante esta relación:

$$w = \frac{y_1 t_m (b_m + j)}{2 \sqrt{t_m^2 - (b_m + j)^2}} \quad (47)$$

Seguidamente, extraídas del libro de Corrales [6], se dan unas expresiones para el cálculo de la longitud  $l_{cb}$  según las diferentes formas que pueden tener las cabezas de bobina: de cadena, de corona o de horquilla. Los devanados de cadena son concéntricos. Los devanados de corona pueden ser imbricados u ondulados. Los devanados de horquilla son imbricados u ondulados y casi siempre de doble capa. En los libros de Königsłow [10] y de Ramírez [14] el lector puede encontrar una descripción detallada de estas formas de las cabezas de bobina.

En devanados de corona:

$$l_{cb} \approx \frac{4 d_m}{2 p} \quad (48)$$

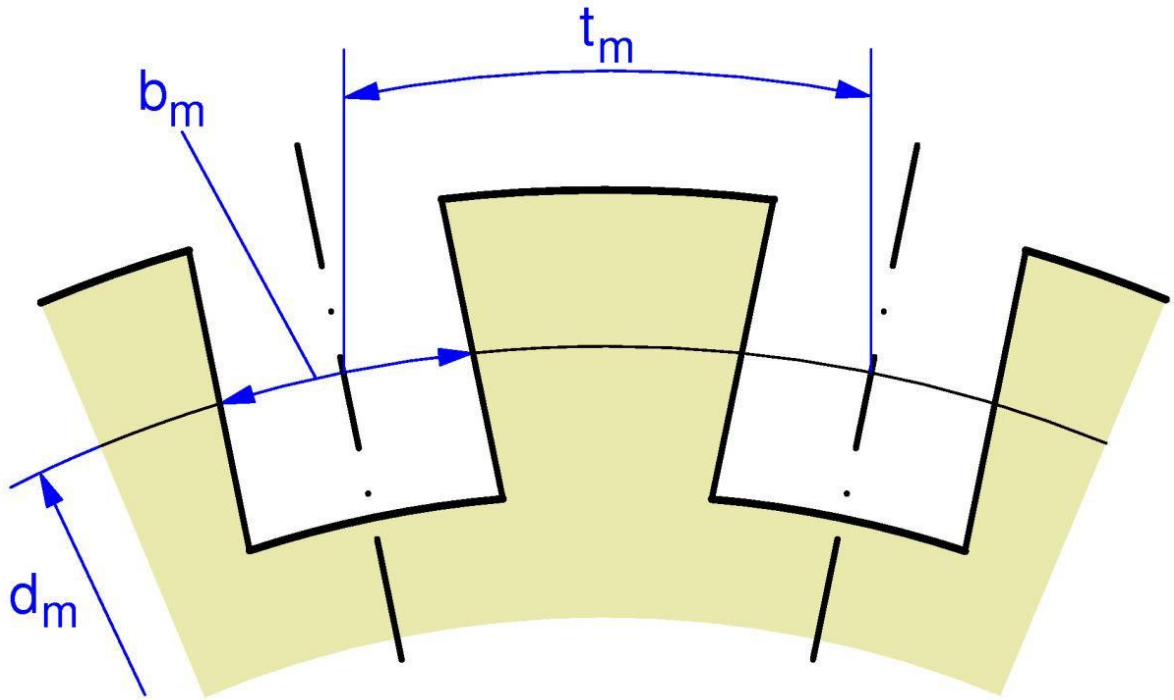


Fig. 16: Diámetro medio  $d_m$ , ancho de ranura medio  $b_m$  y paso de ranura medio  $t_m$  en un rotor

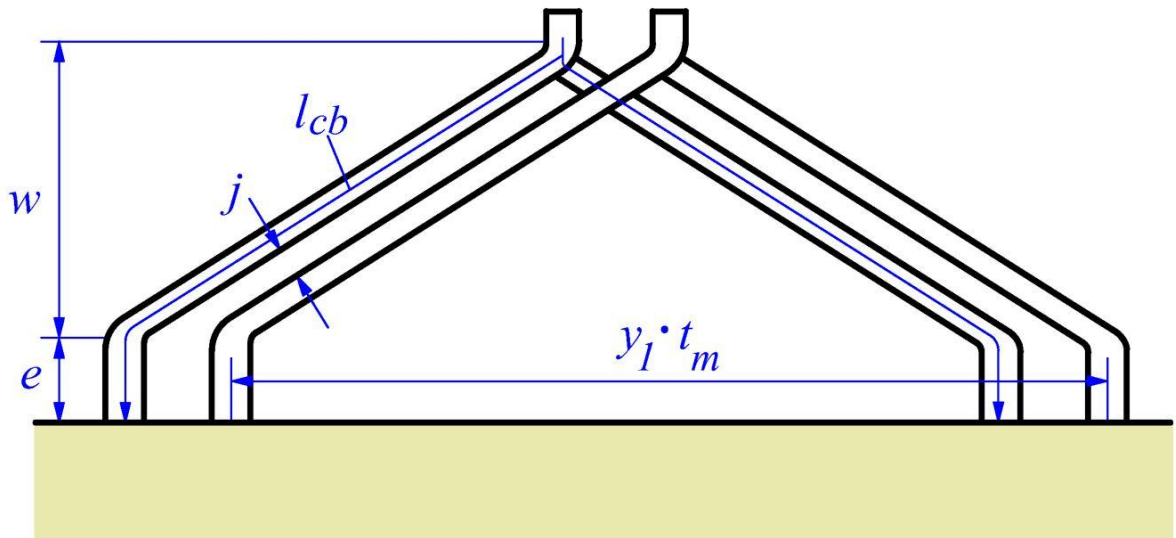


Fig. 17: Dimensiones de las cabezas de bobina de un devanados de dos capas

En devanados de cadena:

$$l_{cb} \approx \frac{4,5 d_m}{2 p} \quad (49)$$

En devanados de horquilla y doble capa:

$$l_{cb} \approx \frac{5 d_m}{2 p} \quad (50)$$

En las expresiones anteriores los símbolos utilizados son:

## CAMPOS MAGNÉTICOS DE DISPERSIÓN

$\xi_a$	es el factor de acortamiento del devanado para el primer armónico.
$p$	es el número de pares de polos.
$q$	es el número de ranuras por polo y fase del devanado analizado.
$l_g$	es la longitud geométrica del entrehierro.
$l_{cb}$	es la longitud media de una cabeza de bobina. Se calcula mediante las relaciones (48), (49) o (50). (Ver la Fig. 17).
$y_1$	es el paso de bobina medido como número de ranuras.
$t_m$	es el paso medio de ranura. Es decir, es la distancia entre dos ranuras consecutivas medida como longitud de arco de la circunferencia de diámetro medio $d_m$ (Fig. 16).
$d_m$	es el diámetro medio en los dientes, es decir el que corresponde a la circunferencia que pasa a mitad de altura de los dientes (Fig. 16). Como en el estator los dientes y ranuras están por encima del entrehierro, el diámetro medio del estator es mayor que su diámetro en el entrehierro (el cual es el diámetro interior del estator). En el rotor sucede lo contrario, pues los dientes y ranuras están por debajo del entrehierro y el diámetro medio del rotor es menor que su diámetro en el entrehierro (que es el diámetro exterior del rotor).
$b_m$	es el ancho medio de las ranuras; es decir, la anchura de las ranuras a la mitad de la altura de los dientes (Fig. 16). Se mide como longitud de arco de la circunferencia de diámetro medio $d_m$ .
$w$	es la longitud axial del vuelo de la parte inclinada de las cabezas de bobina. Es, pues, la distancia axial desde el saliente recto de la bobina hasta el extremo de la cabeza de bobina correspondiente. Se calcula mediante la expresión (47). (Ver la Fig. 17).
$e$	es el saliente recto de las bobinas a un lado del entrehierro (Fig. 17).
$j$	es la separación entre las cabezas de bobina (Fig. 17).

En consecuencia, el producto ( $y_1 t_m$ ) que aparece en las relaciones (44) y (45) es el paso de bobina medido como arco de la circunferencia de diámetro  $d_m$ , la cual pasa a mitad de altura de los dientes (Figs. 16 y 17).

Las inductancias armónica  $L_{\sigma a}$ , de inclinación de ranura  $L_{\sigma i}$  y periférica  $L_{\sigma p}$  se pueden poner en función de la inductancia magnetizante  $L_\mu$ , como ya se indicó en las ecuaciones (6), (9) y (11). Utilizando la permeancia específica magnetizante  $\lambda_\mu$ , introducida en la ecuación (C20) del apéndice C, resulta fácil obtener de dichas fórmulas las correspondientes a las **permeancias específicas de dispersión armónica  $\lambda_{\sigma a}$ , de inclinación de ranura  $\lambda_{\sigma i}$  y periférica  $\lambda_{\sigma p}$** . Estas permeancias específicas dependen de las dimensiones de la máquina y de las características del devanado.

La permeancia específica magnetizante  $\lambda_\mu$  viene dada por la ecuación (C20) que se repite a continuación:

$$\lambda_\mu = \frac{1}{\pi^2} m q \frac{t_p}{k_s} \frac{l_\delta}{\delta} \frac{\xi_b^2}{l_g} = \frac{1}{\pi^2} Q \frac{t_p}{k_s} \frac{l_\delta}{\delta} \frac{\xi_b^2}{l_g} \quad (51)$$

De las relaciones (6) y (9) se obtienen estas fórmulas:

$$\lambda_{\sigma a} = \frac{\lambda_\mu}{(\xi_b)^2} \frac{k_s}{k_{st}} \sum_{h \neq 1} \left( \frac{\xi_{dh} \cdot \xi_{ah}}{h} \right)^2 = \frac{1}{\pi^2} Q \frac{t_p}{k_{st}} \frac{l_\delta}{\delta} \frac{1}{l_g} \sum_{h \neq 1} \left( \frac{\xi_{dh} \cdot \xi_{ah}}{h} \right)^2 \quad (52)$$

$$\lambda_{\sigma i} = \frac{\lambda_\mu}{\xi_b^2} \left( 1 - \xi_i^2 \right) = \frac{1}{\pi^2} Q \frac{t_p}{k_s} \frac{l_\delta}{\delta} \frac{1}{l_g} \left( 1 - \xi_i^2 \right) \quad (53)$$

## CAMPOS MAGNÉTICOS DE DISPERSIÓN

Recuérdese que para devanados trifásicos las tablas II y III proporcionan el valor de término  $\sum_{h \neq 1} \left( \frac{\xi_{dh} \cdot \xi_{ah}}{h} \right)^2$  que aparece en la fórmula (52).

En devanados trifásicos de paso diametral se puede emplear la relación (11), de la cual se puede deducir la siguiente fórmula:

$$\lambda_{\sigma p} = 1,097 \left( \frac{\pi^2 \delta_g^2}{2 t_p^2} \right) k_s K_C \lambda_{\mu} = 0,549 Q \frac{\delta_g}{t_p} \frac{l_{\delta}}{l_g} \xi_b^2 \quad (54)$$

El significado de los símbolos empleados en las fórmulas anteriores es el siguiente:

- $K_C$  es el factor de Carter (ver el apéndice A).
- $k_s$  es el factor de saturación (ver el apéndice C).
- $k_{st}$  es el factor de saturación de los dientes, que es el factor de saturación que corresponde a los armónicos espaciales del campo magnético de orden superior a 1 (ver el apéndice C).
- $\delta_g$  es el entrehierro geométrico.
- $\delta$  es el entrehierro efectivo (que es igual al entrehierro geométrico ( $\delta_g$ ) corregido por el factor de Carter ( $K_C$ ):  $\delta = K_C \cdot \delta_g$  (ver el apéndice A)).
- $d$  es el diámetro del entrehierro.
- $t_p$  es el paso polar medido como longitud de un arco de la circunferencia del entrehierro (ver la relación (C15) del apéndice C).
- $l_{\delta}$  es la longitud axial efectiva del entrehierro (ver el apéndice B).
- $l_g$  es la longitud axial geométrica del entrehierro (ver el apéndice B).
- $m$  es el número de fases del devanado.
- $p$  es el número de pares de polos de la máquina.
- $Q$  es el número de ranuras por polo (ver las ecuaciones (C18) del apéndice C).
- $q$  es el número de ranuras por polo y fase (ver las ecuaciones (C18) del apéndice C).
- $h$  es el orden armónico.
- $\xi_{dh}$  es el factor de distribución del devanado para el armónico  $h$ .
- $\xi_{ah}$  es el factor de paso del devanado para el armónico  $h$ .
- $\xi_b$  es el factor de bobinado del devanado para el primer armónico o armónico fundamental. Es igual al producto de los factores de distribución ( $\xi_d$ ), de paso ( $\xi_a$ ) y de inclinación de ranura ( $\xi_i$ ) del primer armónico ( $\xi_b = \xi_d \cdot \xi_a \cdot \xi_i$ ).
- $\xi_i$  es el factor de inclinación de ranura del devanado para el primer armónico o armónico fundamental.

De todos modos, todas estas fórmulas sólo permiten obtener un valor aproximado de la permeancia específica de dispersión que habrá que confirmar mediante ensayos o por métodos numéricos.

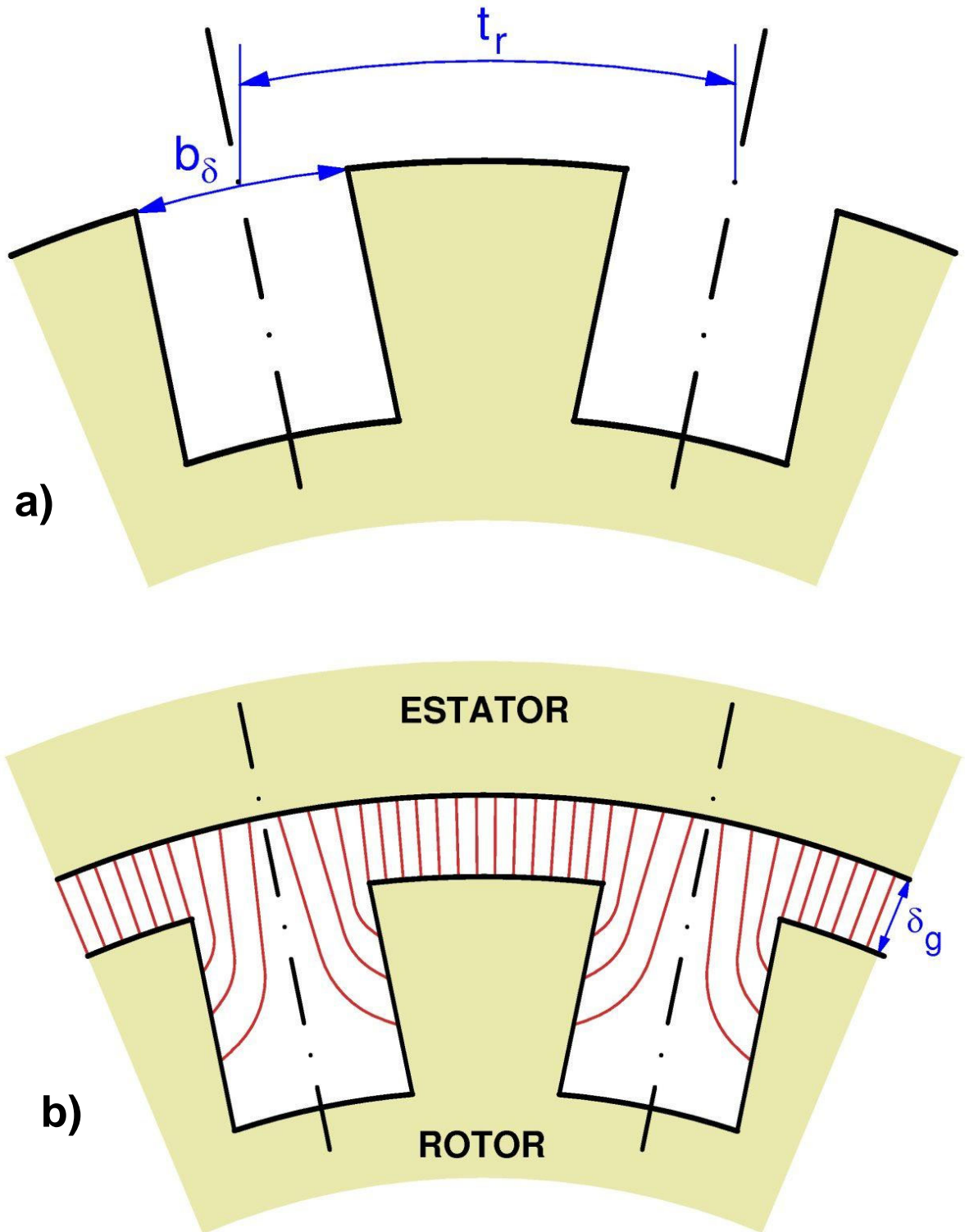
## BIBLIOGRAFÍA

- [1] ALGER, P. L. 1970. *Induction machines. Their behavior and uses*. 2ª edición. New York: Gordon and Breach Science Publishers.
- [2] BOLDEA, I. y NASAR, S. A. 2002. *The Induction Machine Handbook*. New York: CRC Press. (Ver el siguiente libro).
- [3] BOLDEA, I. y NASAR, S. A. 2010. *The Induction Machine Design Handbook*. New York: CRC Press. Es una versión actualizada del libro anterior [2].
- [4] BOLDEA, I. y TUTELEA, L. 2010. *Electric Machines: Steady State, Transients, and Design with MATLAB®*. New York: CRC Press.
- [5] CHALMERS, B. y WILLIAMSON, A. 1991. *A. C. Machines: Electromagnetics and Design*. West Sussex (Inglaterra): John Wiley & Sons Ltd.
- [6] CORRALES MARTÍN, J. 1982. *Cálculo industrial de máquinas eléctricas. Tomo I: Fundamentos de cálculo*. Barcelona: Marcombo Boixareu Editores.
- [7] CORTES CERTA. 1994. *Curso moderno de máquinas eléctricas rotativas. 5 tomos*. Barcelona: Editores Técnicos Asociados.
- [8] HELLER, B. y HAMATA, V. 1977. *Harmonic field effects in induction machines*. Traducido al inglés por Rudolph Major. Praga: Academia, Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences.
- [9] IVANOV-SMOLENSKI. 1984. *Máquinas eléctricas. Tomo I*. Moscú: Editorial Mir.
- [10] KÖNIGSLÖW, A. V. 1957. *La escuela del técnico electricista. Tomo V: Teoría, cálculo y construcción de máquinas de corriente alterna sincrónicas*. Traducido por Juan Corrales Martín. Barcelona. Editorial Labor, S. A.
- [11] KOSTENKO y PIOTROVSKI. 1979. *Máquinas eléctricas. Tomo II*. Moscú: Editorial Mir.
- [12] MOELLER-WERR, F. y otros. 1972. *Electrotecnia general y aplicada. Tomo II, 1ª parte: Máquinas de c.c. Máquinas de c.a. (incluso transformadores)*. Traducido por Juan Corrales Martín. 2ª edición. Barcelona: Editorial Labor, S.A.
- [13] PYRHÖNEN, JUHA y otros. 2010. *Design of rotating electrical machines*. West Sussex (Inglaterra): John Wiley & Sons Ltd.
- [14] RAMÍREZ VÁZQUEZ, J. 1986. *Enciclopedia CEAC de la electricidad: Talleres electromecánicos. Bobinados*. Barcelona. Ediciones CEAC.
- [15] RODRÍGUEZ POZUETA, M.A. 2009. *Campo magnético en el entrehierro de las máquinas eléctricas*. Universidad de Cantabria (España). <http://personales.unican.es/rodrigma/PDFs/campo%20magn%20entrehierro%20Web.pdf>
- [16] RODRÍGUEZ POZUETA, M.A. 2010. *Constitución de las máquinas eléctricas. Bobinados*. Universidad de Cantabria (España). <http://personales.unican.es/rodrigma/PDFs/constitucion%20maq%20elec.pdf>
- [17] RODRÍGUEZ POZUETA, M.A. 2010. *F.e.m.s inducidas en los bobinados de las máquinas eléctricas*. Universidad de Cantabria (España). <http://personales.unican.es/rodrigma/PDFs/f.e.m.%20inducida%20Calculo.pdf>



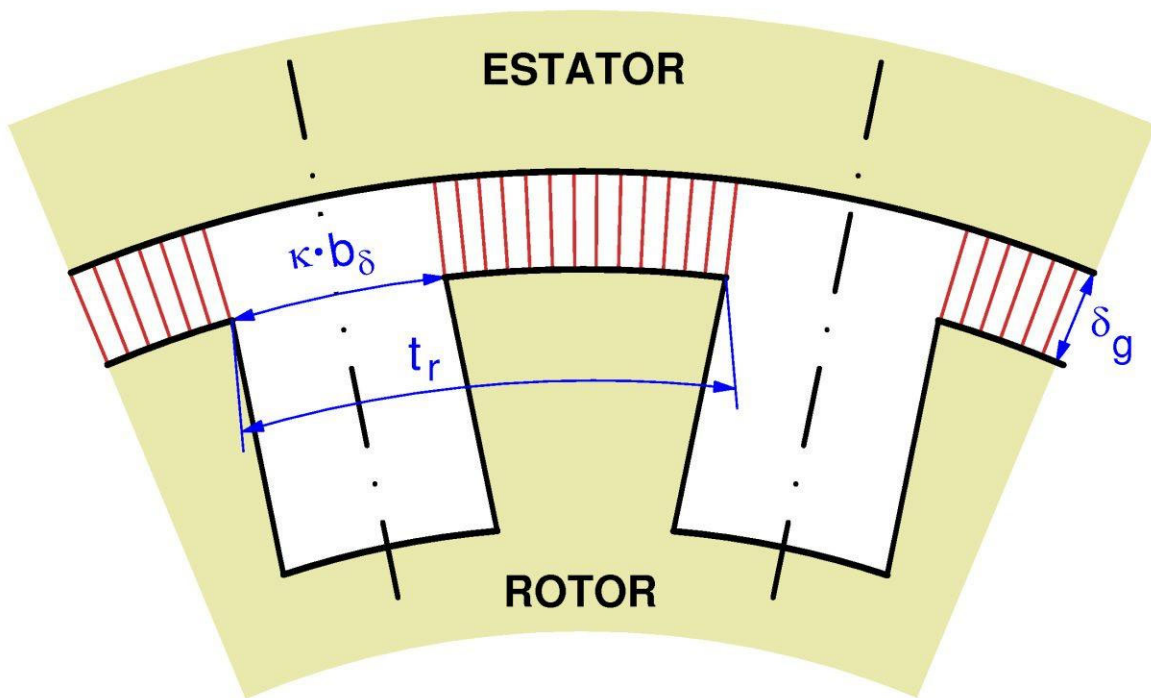
- [18] ROLAND DAVID. 1971. *Cálculo de máquinas eléctricas rotativas. Tomo I.* Madrid: Sección de publicaciones de la E.T.S.I. Industriales de Madrid.
- [19] SACCHI, J. y RIFALDI, A. 1995. *Cálculo y diseño de máquinas eléctricas.* La Plata (Argentina): Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional de La Plata.  
<http://davinci.ing.unlp.edu.ar/sispot/1-LyP-Intro.html>.
- [20] SANZ FEITO. 2002. *Máquinas eléctricas.* Madrid: Pearson Educación.
- [21] SERRANO IRIBARNEGARAY. 1989. *Fundamentos de máquinas eléctricas rotativas.* Barcelona: Marcombo Boixareu Editores.
- [22] UPADHYAY, K. G. 2008. *Design of electrical machines.* New Delhi (India): New Age International Publishers.
- [23] VEINOTT, C. G. 1959. *Theory and design of small induction motors.* New York: McGraw-Hill.

**APÉNDICE A:**  
**ENTREHIERRO EQUIVALENTE. FACTOR DE CARTER**



*Fig. A1:* Dimensiones de una ranura y líneas de inducción magnética en el entrehierro de una máquina con ranuras en el rotor

En la Fig. A1 se muestra, en un corte perpendicular al eje de giro, una porción del entrehierro de una máquina que tiene ranurado sólo el rotor. En esta figura se han dibujado también las líneas del campo magnético principal. Evidentemente estas líneas de inducción continúan su recorrido por dentro del estator y del rotor, pero por claridad de la figura sólo se ha dibujado su trayecto en el entrehierro. Además, para simplificar el dibujo se han omitido los conductores que están ubicados dentro de las ranuras. Se puede observar como las líneas de inducción se concentran sobre todo en la zona de los dientes, donde el circuito magnético presenta una menor reluctancia; pero aún así sigue habiendo algunas líneas de campo que circulan a través de las ranuras. Es decir, la expansión de las líneas de campo fuera de los dientes hace que el campo magnético no se anule totalmente en las ranuras.



*Fig. A2: Máquina equivalente a la de la Fig. A1 en la que no hay campo magnético en las ranuras y se ha sustituido el ancho real de estas por otro menor para que el flujo no varíe*

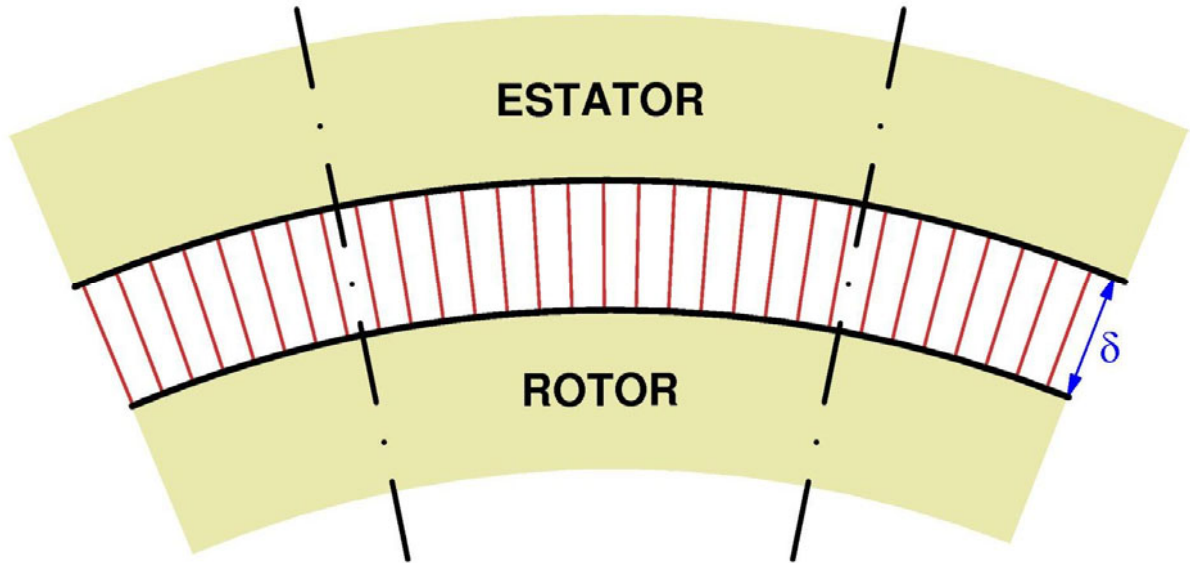
Para simplificar el análisis del campo magnético de esta máquina ranurada se la va a sustituir en primer lugar por otra equivalente en la que se acepta que las líneas de inducción se concentran en los dientes y no llegan a las ranuras (Fig. A2). Es decir, en la Fig. A2 se supone que no existe expansión de las líneas de campo dentro de las ranuras y, consecuentemente, el campo magnético se anula en ellas.

Para que ambas máquinas -las de las Figs. A1 y A2- den lugar al mismo flujo a lo largo de un paso de ranura,  $t_r$ , hay que aumentar un poco el ancho del diente a costa de reducir la abertura de la ranura. De esta manera el aumento de flujo en un diente, que ahora es más ancho y con el mismo entrehierro  $\delta_g$  que en la Fig. A1, compensa la eliminación del campo magnético en la ranura. En esta máquina equivalente existe el mismo paso de ranura  $t_r$  que en la Fig. A1, pero la abertura de las ranuras es más pequeña y su valor ahora es:

$$\kappa \cdot b_{\delta} \tag{A1}$$

El coeficiente adimensional  $\kappa$  es menor que la unidad. Hay distintas fórmulas para calcular  $\kappa$  aunque todas dan resultados coincidentes en la práctica. Una de las más utilizadas es esta:

$$\kappa = \frac{\frac{b_\delta}{\delta_g}}{5 + \frac{b_\delta}{\delta_g}} = \frac{b_\delta}{5 \delta_g + b_\delta} \quad (A2)$$



*Fig. A3: Máquina equivalente a las de las Figs. A1 y A2 en la que no hay ranurado y el entrehierro ha aumentado hasta el valor  $\delta$  para que el flujo no varíe*

En la máquina equivalente de la Fig. A2 sucede que en un paso de ranura  $t_r$  todo el campo magnético se concentra en el diente, cuya anchura es  $t_r - \kappa b_\delta$  y que enfrente tiene un entrehierro  $\delta_g$ , y es nulo en la ranura, de ancho  $\kappa b_\delta$ . Lo que se intenta al final es trabajar con una máquina equivalente sin ranurado; es decir, con un entrehierro uniforme (Fig. A3). En la máquina de la Fig. A3 el campo magnético se reparte a lo largo de todo el paso de ranura  $t_r$  y el entrehierro tiene un valor constante e igual a un entrehierro equivalente  $\delta$  mayor que el entrehierro geométrico  $\delta_g$ . Teniendo presente que la inducción magnética  $B$  es inversamente proporcional al entrehierro, para que esta máquina dé lugar al mismo flujo a lo largo de un paso de ranura  $t_r$  que la de la Fig. A2 y, en consecuencia, también que la máquina real (Fig. A1), el entrehierro equivalente  $\delta$  debe verificar lo siguiente:

$$\frac{1}{\delta} t_r = \frac{1}{\delta_g} (t_r - \kappa b_\delta) \rightarrow \frac{\delta}{\delta_g} = \frac{t_r}{t_r - \kappa b_\delta}$$

Luego, el entrehierro equivalente  $\delta$  se calcula así:

$$\delta = K_C \cdot \delta_g \quad (A3)$$

$$K_C = \frac{t_r}{t_r - \kappa b_\delta} = \frac{t_r}{t_r - \frac{b_\delta^2}{5 \delta_g + b_\delta}} \quad (A4)$$

$K_C$  es un coeficiente adimensional mayor que 1 denominado *factor de Carter*. Sólo en el caso de que no hubiera ranurado este coeficiente alcanzaría un valor igual a 1.

Las dimensiones que aparecen en las fórmulas anteriores están representadas en la Fig. A1 y son las siguientes:

$t_r$  es el paso de ranura (distancia de una ranura a la siguiente).

$b_\delta$  es la abertura de la ranura (ancho de la ranura a la altura del entrehierro).

$\delta_g$  es el espesor geométrico del entrehierro frente a un diente.

Tanto el paso  $t_r$  como la abertura de ranura  $b_\delta$  se miden como longitudes de arco de la circunferencia cuyo diámetro es el exterior del rotor (la circunferencia del rotor que mira al entrehierro).

Evidentemente, si el ranurado estuviera en el estator y no en el rotor se operaría de igual manera y el entrehierro equivalente  $\delta$  se seguiría calculando mediante la relación (A3). Sólo que ahora en las relaciones (A2) y (A4)  $t_r$  y  $b_\delta$  serían, respectivamente, el paso de ranura y la abertura de las ranuras del estator y ambas se medirían como arcos de la circunferencia interior del estator, que es la que limita con el entrehierro.

En las fórmulas (A2) y (A4), al ser  $\kappa$  y  $K_C$  coeficientes adimensionales, todas las longitudes deben medirse con la misma unidad, pero esta unidad puede ser tanto metros como centímetros o milímetros.

Hasta ahora se ha supuesto que sólo estaba ranurado uno de los órganos, estator o rotor, de la máquina. En el caso de que estén ranurados tanto el estator como el rotor, el factor de Carter se obtiene así:

$$K_C = K_{C1} \cdot K_{C2} \quad (A5)$$

En la relación (A5)  $K_{C1}$  y  $K_{C2}$  son los factores de Carter del estator y del rotor, respectivamente, obtenidos mediante las fórmulas (A2) y (A4) suponiendo que el otro órgano es liso.

Por lo tanto, a la hora de analizar el campo magnético principal de la máquina, esta se la supondrá sin ranurar y con un entrehierro uniforme e igual a  $\delta$ , el cual se calcula mediante la relación (A3).

**APÉNDICE B:**  
**LONGITUDES AXIALES EFECTIVAS**

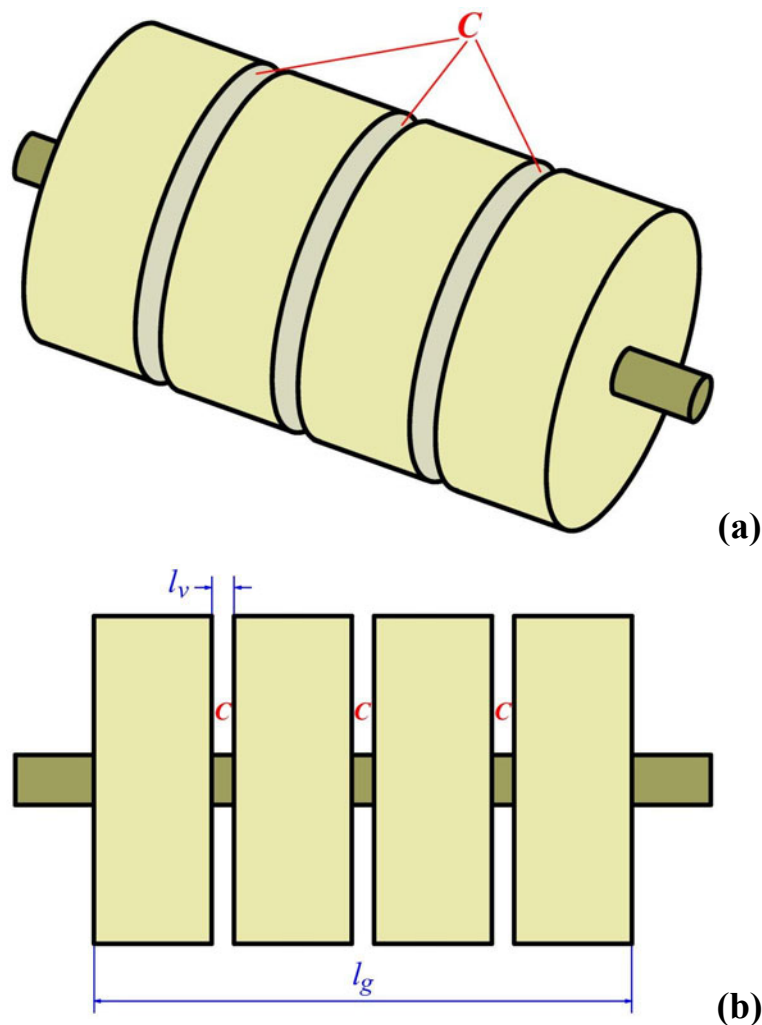
**Longitud geométrica del entrehierro**

Denominaremos longitud axial geométrica del entrehierro  $l_g$  a la longitud axial desde los extremos laterales del mismo medida directamente sobre la máquina.

A veces el núcleo magnético de uno de los órganos (usualmente el rotor) es ligeramente mayor que el del otro para evitar la aparición fuerzas axiales en caso de desplazamiento axial entre estator y rotor. En este caso, el entrehierro tiene una longitud geométrica  $l_g$  igual a la del núcleo magnético del órgano más corto.

Esta longitud  $l_g$  es la total que se mide directamente desde los extremos laterales del entrehierro, sin restar los espacios vacíos intermedios que pueda haber por la existencia de canales radiales de ventilación (Fig. B1b).

**Canales radiales de ventilación**



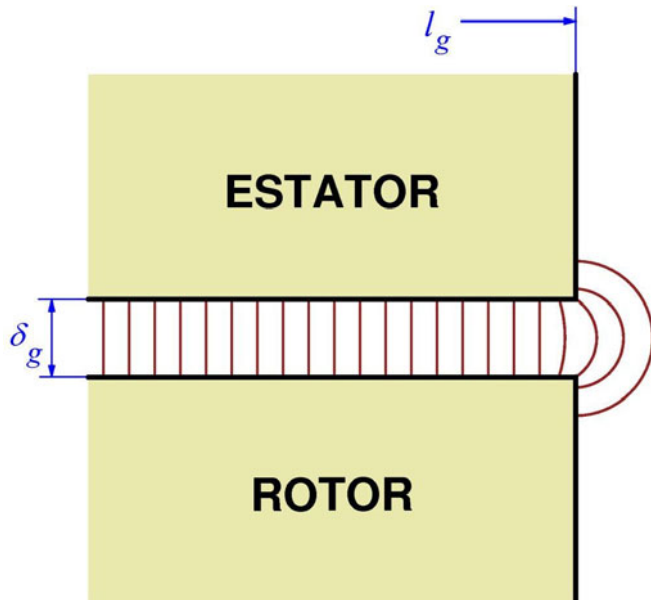
*Fig. B1: Vista esquemática del rotor de una máquina asíncrona con tres canales radiales de ventilación de longitud  $l_v$  cada uno (C: Canal radial de ventilación)*

En máquinas grandes es frecuente que los paquetes de chapas del estator y/o del rotor no formen un bloque único continuo, sino que estén divididos en varios bloques separados por unos espacios por donde puede circular el aire (o el fluido que se utilice como refrigerante) para facilitar la evacuación de calor de la máquina. Estos espacios entre los bloques de chapas por donde puede circular el fluido refrigerante son los canales radiales de ventilación (Fig. B1), los cuales suelen tener una longitud axial  $l_v$  de 10 o 15 milímetros.

Puede haber canales en uno de los órganos, estator o rotor, de la máquina o en ambos. En este último caso los canales del estator y del rotor pueden estar enfrentados o desplazados entre sí y no necesariamente ambos órganos tienen el mismo número de canales.

### Longitud efectiva del entrehierro

En este apartado se va a obtener la longitud axial efectiva  $l_\delta$  que utiliza el campo magnético del entrehierro y que es la que permite calcular, entre otros, el flujo por polo de la máquina.

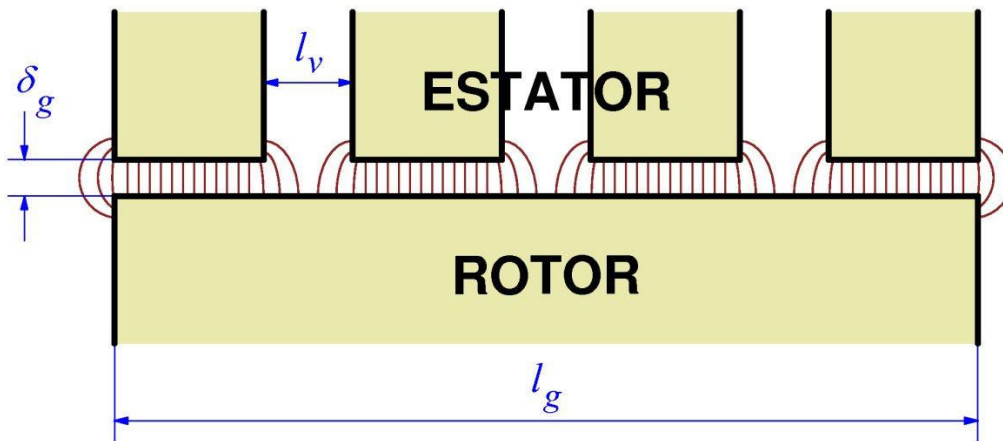


*Fig. B2: Corte longitudinal de un extremo del entrehierro mostrando la expansión de las líneas de campo magnético en dicho extremo*

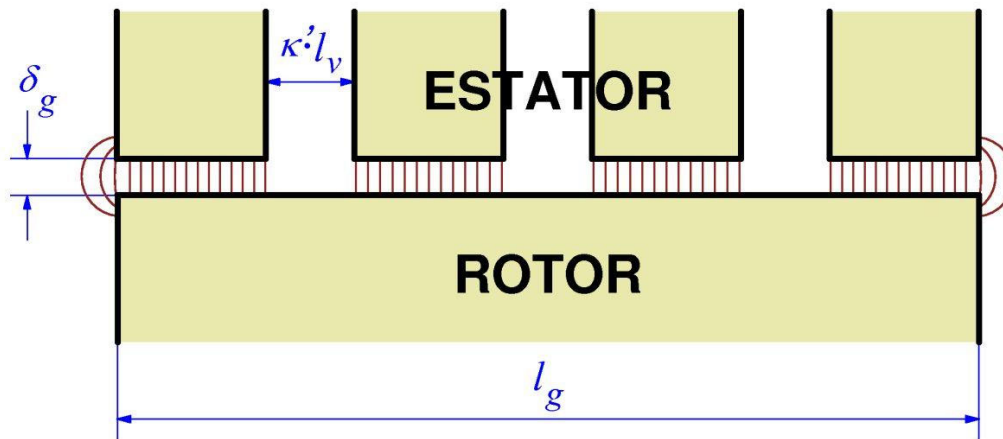
Supóngase de momento que la máquina carece de canales radiales de ventilación. En la Fig. B2 se muestra -mediante un corte paralelo al eje de giro de la máquina- uno de los extremos del entrehierro. En esta figura se han dibujado las líneas del campo magnético común. Evidentemente estas líneas de inducción continúan su recorrido por dentro del estator y del rotor, pero por claridad de la figura sólo se ha dibujado su trayecto en el entrehierro. Se puede observar como no sólo hay líneas de campo en el entrehierro, sino que también hay cierta expansión de dichas líneas en los extremos de la máquina. Esta expansión se puede tener en cuenta utilizando como valor efectivo del entrehierro este valor:

$$l_\delta = l_g + 2 \delta_g \quad (B1)$$

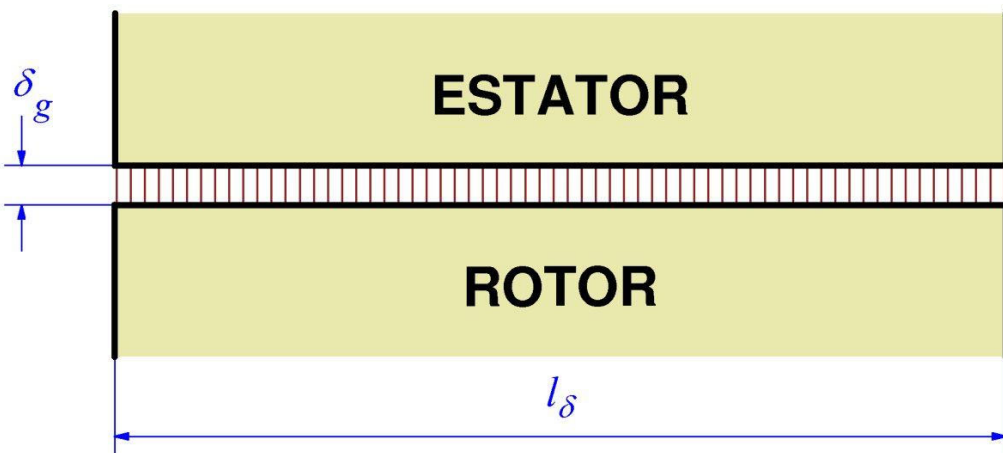
De todos modos, en máquinas sin canales radiales de ventilación, esta corrección de la longitud axial es poco significativa y usualmente no se tiene en cuenta, por lo que se toma la longitud efectiva  $l_\delta$  igual a la longitud geométrica  $l_g$  del entrehierro.



*Fig. B3:* Corte longitudinal del entrehierro de una máquina con sólo canales radiales de ventilación en el estator (3 canales de longitud  $l_v$ )



*Fig. B4:* Máquina equivalente a la de la Fig. B3 en la que no hay campo magnético en los canales radiales y se ha sustituido el largo real de estos por otro menor para que el flujo no varíe



*Fig. B5:* Máquina equivalente a la de las Figs. B3 y B4 en la que no hay canales radiales y no hay líneas de campo fuera del entrehierro. Para que el flujo sea el mismo que en las máquinas de las Figs. B3 y B4 esta máquina tiene una longitud efectiva  $l_\delta$



En la Fig. B3 se ha mostrado una sección axial del entrehierro de una máquina que tiene canales radiales de ventilación sólo en uno de sus órganos, en esta ocasión en el estator. En esta figura se aprecia como las líneas de inducción se expanden en el entrehierro fuera de los bloques chapas, por lo que el campo magnético no se anula frente a los canales radiales, aunque se reduce mucho en ellos.

Haciendo un razonamiento similar al efectuado en el apéndice A para estudiar el efecto del ranurado, podemos suponer que la máquina de la Fig. B3 es equivalente –esto es, tiene el mismo flujo a través del entrehierro– a la de la Fig. B4. En la máquina de la Fig. B4 se supone que el campo magnético se anula completamente frente a los canales radiales; lo que conlleva que, para que el flujo sea el mismo que el de la Fig. B3, los paquetes de chapas sean un poco más largos; es decir, los canales radiales serán ahora un poco más cortos. Razonando como en las relaciones (A1) y (A2), los canales en la Fig. B4 tienen una longitud que se calcula mediante estas expresiones:

$$\text{Longitud efectiva de una canal radial} = \kappa' \cdot l_v \quad (\text{B2})$$

$$\kappa' = \frac{\frac{l_v}{\delta_g}}{5 + \frac{l_v}{\delta_g}} = \frac{l_v}{5 \delta_g + l_v} \quad (\text{B3})$$

Luego se puede sustituir la máquina original (Fig. B3) por otra con el mismo flujo magnético a través del entrehierro, pero sin canales radiales ni expansión de las líneas de campo en los extremos (Fig. B2). Esta es la máquina representada en la Fig. B5 y su longitud axial es la longitud efectiva del entrehierro  $l_\delta$ , la cual se obtiene mediante esta expresión:

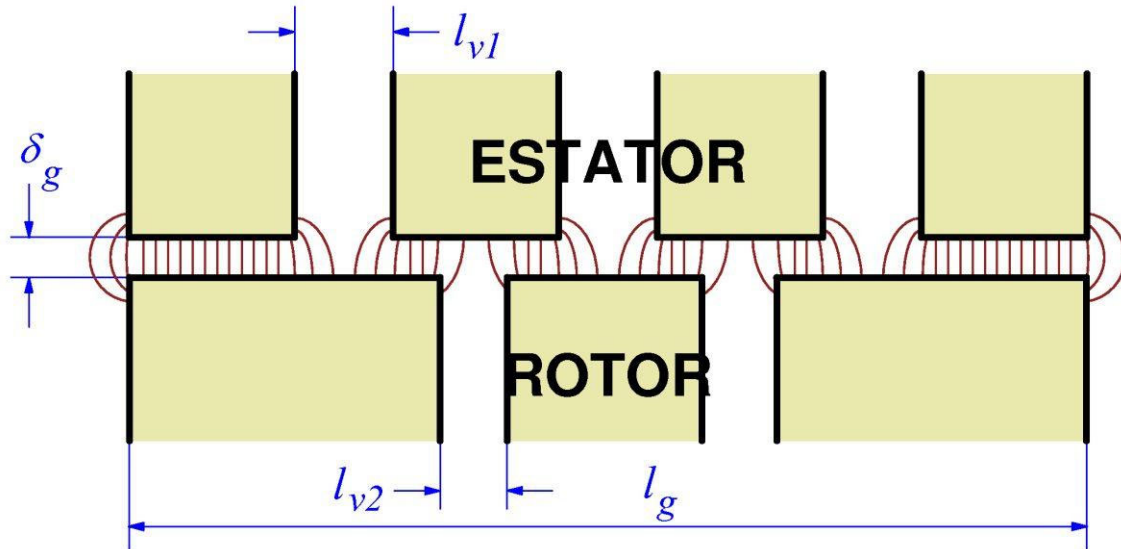
$$l_\delta = l_g + 2 \delta_g - (n_v l_v \kappa') \quad (\text{B4})$$

Las fórmulas (B2), (B3) y (B4) son válidas cuando hay canales sólo en uno de los órganos de la máquina, tanto si el órgano con canales es el estator como si es el rotor. En ellas,  $l_v$  es la longitud de un canal radial y  $n_v$  es el número de canales radiales.

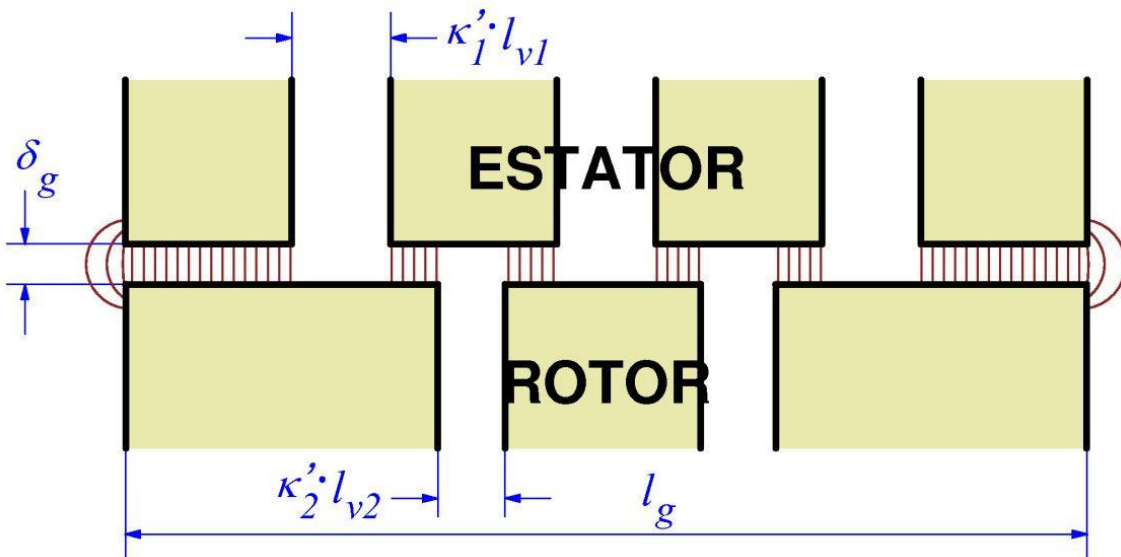
En el caso de que la máquina tenga canales radiales tanto en el estator como en el rotor habrá que introducir los subíndices 1, para el estator, y 2, para el rotor. La situación es diferente si los canales radiales del estator y del rotor están enfrentados o si están desplazados entre sí.

En la Fig. B6 se muestra una máquina en la que los canales radiales del estator y del rotor no están enfrentados. En la Fig. B7 se representa la máquina equivalente a la de la Fig. B6 -con el mismo flujo magnético a través del entrehierro- en la que no hay expansión de las líneas de campo en el entrehierro frente a los canales radiales. En esta ocasión hay que reducir la longitud tanto de los canales radiales del estator como de los del rotor. Es evidente que en este caso la longitud efectiva del entrehierro  $l_\delta$  pasa a calcularse así:

$$l_\delta = l_g + 2 \delta_g - (n_{v1} l_{v1} \kappa'_1) - (n_{v2} l_{v2} \kappa'_2) \quad (\text{B5})$$



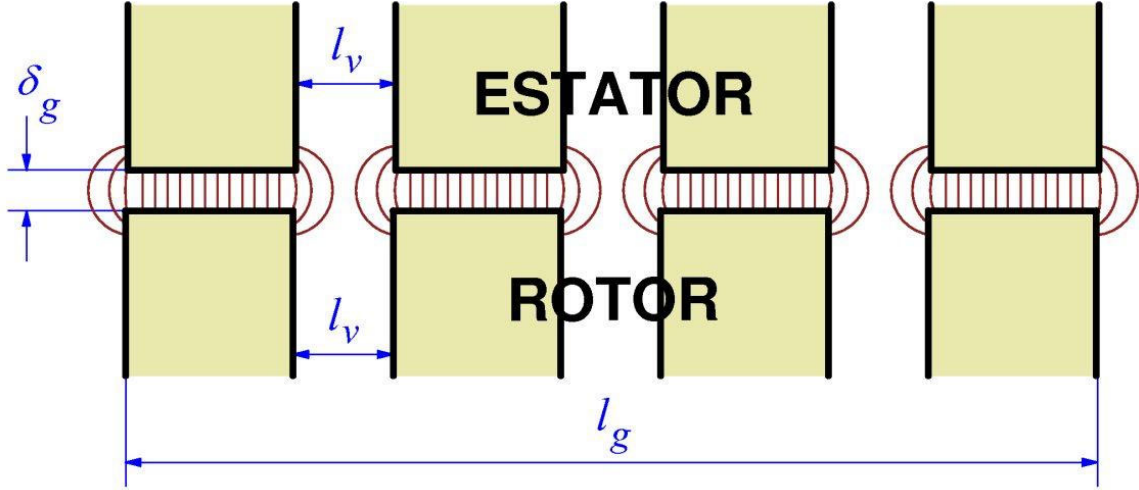
*Fig. B6:* Corte longitudinal del entrehierro de una máquina con 3 canales radiales de ventilación en el estator (de longitud  $l_{v1}$ ) y 2 canales radiales de ventilación en el rotor (de longitud  $l_{v2}$ ) no enfrentados



*Fig. B7:* Máquina equivalente a la de la Fig. B6 en la que no hay campo magnético en los canales radiales (tanto del estator como del rotor) y se ha sustituido el largo real de estos por otro menor para que el flujo no varíe

Los coeficientes adimensionales  $\kappa'_1$  y  $\kappa'_2$  que aparecen en la fórmula (B5) se obtienen mediante la expresión (B3) cuando se utilizan en ella la longitud de los canales del estator  $l_{v1}$  y del rotor  $l_{v2}$ , respectivamente.

Finalmente, en la Fig. B8 se muestran las líneas de inducción en el entrehierro cuando los canales radiales del estator y del rotor están enfrentados directamente y son de igual longitud  $l_v$  ( $l_{v1} = l_{v2} = l_v$ ). En este caso, dos canales enfrentados, uno del estator y otro del rotor, equivalen a un solo canal sin expansión de las líneas de campo y cuya longitud viene dada por las siguientes relaciones:



*Fig. B8:* Corte longitudinal del entrehierro de una máquina con 3 canales radiales de ventilación en el estator enfrentados a 3 canales radiales de ventilación en el rotor. Los canales radiales del estator y del rotor tienen la misma longitud  $l_v$

$$\text{Longitud efectiva de una canal radial} = \kappa'_{1,2} \cdot l_v \quad (\text{B6})$$

$$\kappa'_{1,2} = \frac{\frac{l_{v1} + l_{v2}}{\delta_g}}{5 + \frac{l_{v1} + l_{v2}}{\delta_g}} = \frac{\frac{2 l_v}{\delta_g}}{5 + \frac{2 l_v}{\delta_g}} = \frac{2 l_v}{5 \delta_g + 2 l_v} \quad (\text{B7})$$

Y la longitud efectiva del entrehierro vale, entonces:

$$l_\delta = l_g + 2 \delta_g - (n_{v1,2} l_v \kappa'_{1,2}) \quad (\text{B8})$$

Todas las expresiones obtenidas hasta ahora se pueden resumir así:

$$l_\delta = l_g + 2 \delta_g - [(n_{v1} - n_{v1,2}) l_{v1} \kappa'_1] - [(n_{v2} - n_{v1,2}) l_{v2} \kappa'_2] - [n_{v1,2} l_v \kappa'_{1,2}]$$

$$\kappa'_1 = \frac{\frac{l_{v1}}{\delta_g}}{5 + \frac{l_{v1}}{\delta_g}} = \frac{l_{v1}}{5 \delta_g + l_{v1}} ; \quad \kappa'_2 = \frac{\frac{l_{v2}}{\delta_g}}{5 + \frac{l_{v2}}{\delta_g}} = \frac{l_{v2}}{5 \delta_g + l_{v2}} \quad (\text{B9})$$

$$\kappa'_{1,2} = \frac{\frac{2 l_v}{\delta_g}}{5 + \frac{2 l_v}{\delta_g}} = \frac{2 l_v}{5 \delta_g + 2 l_v}$$

El significado de los símbolos empleados en las expresiones (B9) es:

$l_g$	longitud geométrica del entrehierro.
$\delta_g$	entrehierro geométrico.
$l_{v1}$	longitud de los canales radiales del estator.
$l_{v2}$	longitud de los canales radiales del rotor.
$l_v$	longitud común de los canales radiales del estator y del rotor que están enfrentados.
$n_{v1}$	número total de canales radiales del estator.
$n_{v2}$	número total de canales radiales del rotor.
$n_{v1,2}$	número de canales radiales del estator enfrentados directamente a otros tantos canales radiales del rotor.

### Ejemplo:

Una máquina de inducción tiene en el estator un núcleo magnético de longitud 50 cm con 5 canales radiales de ventilación de 10 mm de longitud cada uno. El entrehierro (geométrico) de esta máquina es de 0,5 mm. Calcule la longitud axial efectiva del entrehierro en los siguientes casos:

- El rotor carece de canales radiales de ventilación.
- El rotor tiene 5 canales de 10 mm de longitud enfrentados a los del estator.
- El rotor tiene 6 canales de 10 mm de longitud no enfrentados a los del estator.

### Resolución:

- En este caso se tienen los siguientes datos:

$$l_g = 500 \text{ mm}; \delta_g = 0,5 \text{ mm}; l_{v1} = 10 \text{ mm}; n_{v1} = 5 \text{ canales}; n_{v2} = n_{v1,2} = 0$$

Por lo tanto, la aplicación de las fórmulas (B9) da los siguientes resultados:

$$\kappa'_1 = \frac{l_{v1}}{5 \delta_g + l_{v1}} = \frac{10}{5 \cdot 0,5 + 10} = 0,80$$

$$l_\delta = l_g + 2 \delta_g - [(n_{v1} - n_{1,2}) l_{v1} \kappa'_1] - [(n_{v2} - n_{1,2}) l_{v2} \kappa'_2] - [n_{v1,2} l_v \kappa'_{1,2}] = \\ = 500 + 2 \cdot 0,5 - (5 \cdot 10 \cdot 0,80) = 461 \text{ mm}$$

En este caso la longitud efectiva del entrehierro vale  $l_\delta = 461 \text{ mm}$ .

- Ahora se tienen los siguientes datos:

$$l_g = 500 \text{ mm}; \delta_g = 0,5 \text{ mm}; l_{v1} = l_{v2} = l_v = 10 \text{ mm}; n_{v1,2} = 5 \text{ canales}; n_{v1} = n_{v2} = 0$$

Por lo tanto, la aplicación de las fórmulas (B9) da los siguientes resultados:

$$\kappa'_{1,2} = \frac{2 l_v}{5 \delta_g + 2 l_v} = \frac{2 \cdot 10}{5 \cdot 0,5 + 2 \cdot 10} = 0,89$$

$$l_{\delta} = l_g + 2 \delta_g - \left[ (n_{v1} - n_{1v,2}) l_{v1} \kappa'_1 \right] - \left[ (n_{v2} - n_{v1,2}) l_{v2} \kappa'_2 \right] - \left[ n_{v1,2} l_v \kappa'_{1,2} \right] =$$

$$= 500 + 2 \cdot 0,5 - (5 \cdot 10 \cdot 0,89) = 457 \text{ mm}$$

En este caso la longitud efectiva del entrehierro vale  $l_{\delta} = 457 \text{ mm}$ .

c) Ahora los datos son:

$$l_g = 500 \text{ mm}; \quad \delta_g = 0,5 \text{ mm}; \quad l_{v1} = l_{v2} = 10 \text{ mm};$$

$$n_{v1} = 5 \text{ canales}; \quad n_{v2} = 6 \text{ canales}; \quad n_{v1,2} = 0$$

Por lo tanto, la aplicación de las fórmulas (B9) da los siguientes resultados:

$$\kappa'_1 = \frac{l_{v1}}{5 \delta_g + l_{v1}} = \frac{10}{5 \cdot 0,5 + 10} = 0,80$$

$$\kappa'_2 = \frac{l_{v2}}{5 \delta_g + l_{v2}} = \frac{10}{5 \cdot 0,5 + 10} = 0,80$$

$$l_{\delta} = l_g + 2 \delta_g - \left[ (n_{v1} - n_{1,2}) l_{v1} \kappa'_1 \right] - \left[ (n_{v2} - n_{1,2}) l_{v2} \kappa'_2 \right] - \left[ n_{v1,2} l_v \kappa'_{1,2} \right] =$$

$$= 500 + 2 \cdot 0,5 - (5 \cdot 10 \cdot 0,80) - (6 \cdot 10 \cdot 0,80) = 413 \text{ mm}$$

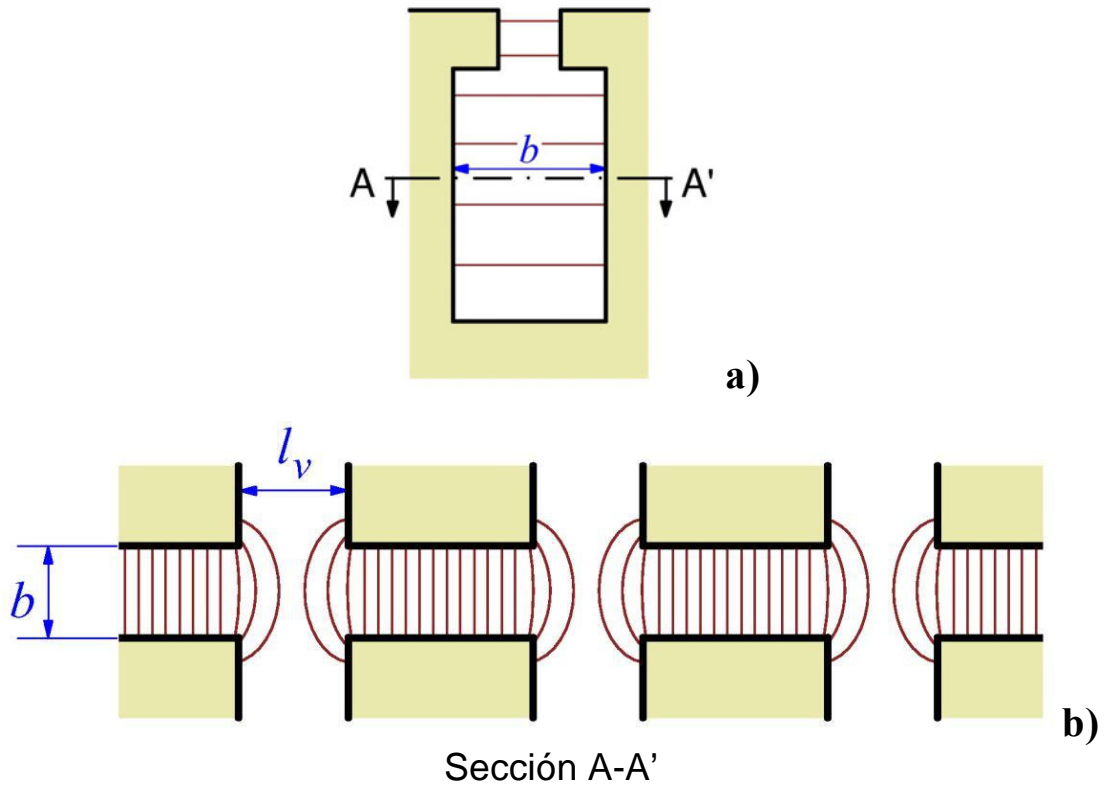
En este caso la longitud efectiva del entrehierro vale  $l_{\delta} = 413 \text{ mm}$ .

### **Longitud efectiva del circuito magnético de dispersión de ranura**

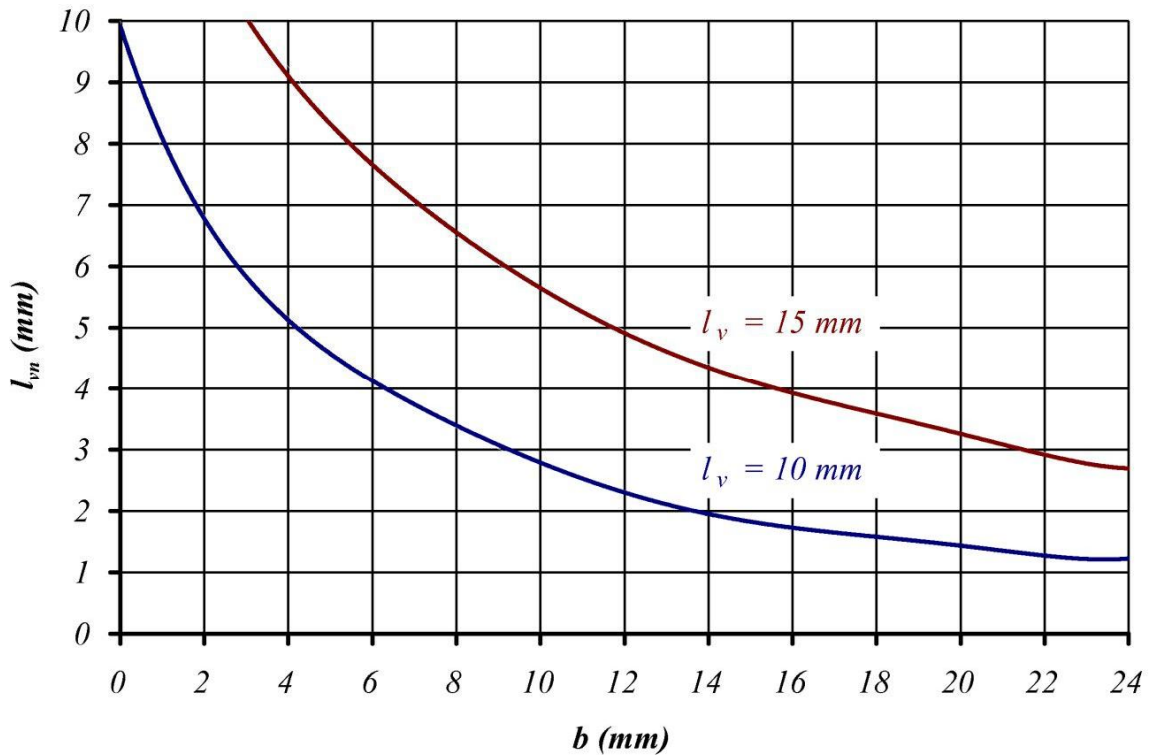
La Fig. B9a muestra una ranura y sus líneas de campo de dispersión de ranura en un corte perpendicular al eje de giro de la máquina. En esta figura no se han incluido los conductores y de las líneas de campo sólo se han dibujado sus trayectos dentro de la ranura. En la Fig. B9a también se indica una sección A-A', paralela al eje de giro de la máquina, la cual se muestra en la Fig. B9b. El ancho de la ranura a la altura de la sección A-A' es b.

La Fig. B9b muestra que existe una expansión de las líneas de campo de dispersión de ranura en el interior de los canales radiales de ventilación. Esta expansión de las líneas de campo es muy parecida a lo que sucede en el entrehierro cuando los canales radiales están enfrentados; es decir, la situación que se muestra en la Fig. B8 y que fue estudiada en el apartado anterior. Mediante un razonamiento análogo al realizado antes, se deduce que la longitud efectiva  $l_n$  por la que circula el campo magnético de dispersión de ranura se obtiene así:

$$l_n = l_g - (n_v l_{vn}) \tag{B10}$$



*Fig. B9: Líneas de campo magnético debidas a la dispersión de una ranura del rotor:  
 a) Corte de una ranura perpendicular al eje de giro de la máquina  
 b) Sección A-A' de la ranura (sección paralela al eje de giro de la máquina)*



*Fig. B10: Ábaco para el cálculo de  $l_v$*

La longitud efectiva de los canales radiales para la dispersión  $l_{vn}$  depende de la anchura de la ranura  $b$  en la zona analizada. Es decir, para una ranura puede haber diferentes valores de  $l_n$  si la ranura presenta zonas de diferente ancho.

El valor de la longitud efectiva  $l_{vn}$  se puede obtener mediante el ábaco de la Fig. B10. En él los datos de entrada son el ancho  $b$  de la ranura en la zona cuya longitud efectiva se calcula y la longitud  $l_v$  de los canales radiales de ventilación en el órgano, estator o rotor, donde se ubica la ranura.

Otra opción para calcular  $l_{vn}$  es utilizar un método similar al empleado en el apartado anterior para el cálculo de  $l_\delta$  y manejar un coeficiente adimensional  $\kappa''$  así:

$$l_{vn} = l_v \kappa''$$

$$l_n = l_g - (n_v l_v \kappa'') \quad (B11)$$

El coeficiente  $\kappa''$  puede obtenerse mediante una cualquiera de estas dos relaciones:

$$\kappa'' = \frac{\frac{2 l_v}{b}}{5 + \frac{2 l_v}{b}} = \frac{2 l_v}{5 b + 2 l_v} \quad (\text{si } b \leq l_v) \quad (B12a)$$

$$\kappa'' = \frac{2}{\pi} \left[ \arctan \left( \frac{l_v}{b} \right) - \frac{\sqrt{1 + \left( \frac{l_v}{b} \right)^2}}{\frac{l_v}{b}} \right] \quad (B12b)$$

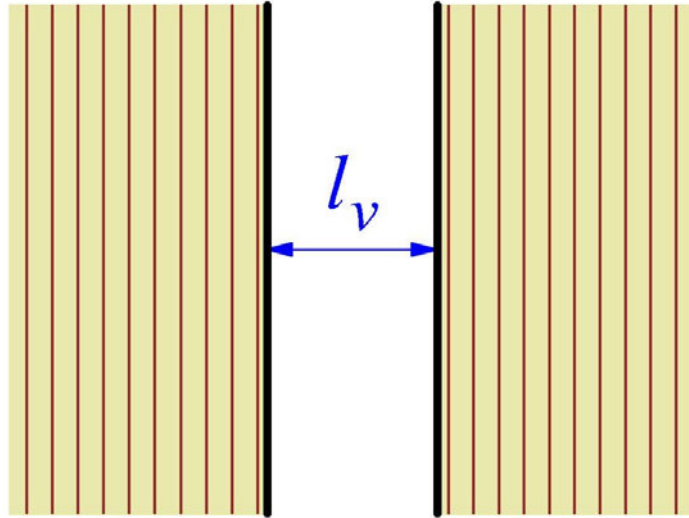
Se debe emplear la expresión (B12b) en lugar de la expresión (B12a) cuando el ancho  $b$  de la ranura es mayor que la longitud  $l_v$  de los canales radiales del órgano donde está ubicada la ranura.

### **Longitud útil del hierro. Factor de empilado**

Cuando se estudia el campo magnético en el interior de uno de los núcleos magnéticos, del estator o del rotor, de una máquina hay que utilizar una longitud útil del hierro  $l_{Fe}$ . Habrá dos de estas longitudes útiles, una para el estator y otra para el rotor, aunque en algunas máquinas ambas longitudes tienen el mismo valor.

En la Fig. B11 se muestra -mediante un corte paralelo al eje de giro de la máquina- una porción de un canal radial de ventilación situado en uno de los órganos de la máquina, estator o rotor. Se aprecia que las líneas de campo circulan paralelas a las paredes del canal sin atravesarlas ni expandirse hacia él. Luego la longitud efectiva del canal para este campo magnético es la propia longitud geométrica  $l_v$  del canal, sin afectarle de ninguna corrección. Parecería, pues, que la longitud útil del hierro fuera

$$l_g - (n_v l_v) \quad (B13)$$



*Fig. B11:* Corte longitudinal de uno de los núcleos magnéticos (del estator o del rotor) de una máquina alrededor de un canal radial de ventilación. Las líneas de campo en las zonas de hierro no se expanden hacia los canales radiales de ventilación

Sin embargo, hay que tener en cuenta que estamos tratando de núcleos magnéticos que no son de hierro macizo sino que están formados por paquetes de chapas apiladas. Estas chapas de acero al silicio tienen una pequeña capa aislante que separa una chapa de la siguiente. Por lo tanto, la longitud obtenida mediante la fórmula (B13) daría la longitud bruta de los paquetes de chapas, pero hay que descontar la pequeña parte de la longitud de cada paquete de chapas que no es material ferromagnético, sino el material aislante que separa las chapas. Para ello se utiliza el **factor de empilado** o **factor de apilado**  $k_{Fe}$ , lo que permite escribir la siguiente expresión para calcular la longitud útil del hierro  $l_{Fe}$ :

$$l_{Fe} = k_{Fe} [l_g - (n_v l_v)] \quad (B14)$$

El factor de empilado  $k_{Fe}$  tiene un valor ligeramente inferior a la unidad siendo sus valores típicos los siguientes:

- $k_{Fe} = 0,96 \div 0,98$  para chapas de 0,5 mm de espesor
- $k_{Fe} = 0,90 \div 0,92$  para chapas de 0,3 y de 0,35 mm de espesor

El factor de empilado  $k_{Fe}$  no se utiliza en el cálculo de la longitud efectiva del entrehierro ni en las de dispersión de ranura, ya que estas longitudes efectivas se refieren a zonas por donde las líneas de campo no circulan a través de materiales ferromagnéticos.

### **Resumen de longitudes efectivas**

Por lo que se ha ido viendo en los apartados de este apéndice, la longitud axial efectiva que presenta la máquina para la circulación de las líneas de inducción depende del campo magnético de que se trate y de la zona por donde pase.

Así pues habrá las siguientes longitudes efectivas:

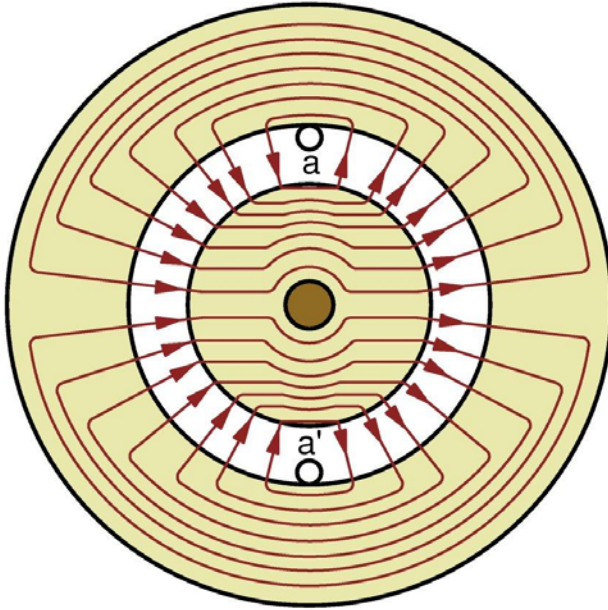


## CAMPOS MAGNÉTICOS DE DISPERSIÓN

- Una longitud efectiva del entrehierro  $l_{\delta}$  para las líneas de inducción que cruzan radialmente el entrehierro
- Varias longitudes efectivas  $l_n$  para la dispersión de ranura. Habrá longitudes de dispersión de ranura diferentes para el estator y para el rotor. Además, como las ranuras suelen tener zonas de diferente ancho, normalmente habrá más de una longitud efectiva de dispersión en el estator y lo mismo sucede en el rotor.
- Dos longitudes útiles del hierro  $l_{Fe}$  para las líneas de inducción que circulan por el interior de los núcleos ferromagnéticos. Una,  $l_{Fe1}$ , para el núcleo magnético del estator y otra,  $l_{Fe2}$ , para el núcleo magnético del rotor.

**APÉNDICE C:**  
**INDUCTANCIA MAGNETIZANTE DE UN DEVANADO**

**Flujo por polo**



*Fig. C1: La espira diametral a-a' está atravesada por el flujo por polo del campo magnético cuyas líneas de inducción se muestran en la figura*

Se denomina **flujo por polo**  $\Phi_M$  al flujo debido al campo magnético común que atraviesa a una espira diametral colocada en la posición adecuada para que dicho flujo sea máximo (Fig. C1).

La expresión que permite calcular el flujo por polo es la siguiente:

$$\Phi_M = \frac{d l_\delta}{p} B_M \quad (C1)$$

Donde:

- d es el diámetro del entrehierro.
- $l_\delta$  es la longitud efectiva del entrehierro (ver el apéndice B).
- p es el número de pares de polos.
- $B_M$  es el valor máximo del primer armónico de la inducción magnética en el entrehierro.

**Factor de saturación**

Consideremos una máquina sin polos salientes, lo que permite suponerla de entrehierro uniforme si se utiliza el entrehierro equivalente  $\delta$ , el cual se obtuvo en el apéndice A mediante la aplicación del Factor de Carter (relación (A3)).

Recordemos del texto [15] que la **tensión magnética en el entrehierro**  $F_\delta$  es así:

$$F_\delta = \int_{\delta} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{\delta}{\mu_0} B \quad (C2)$$

(• = Producto escalar de vectores)

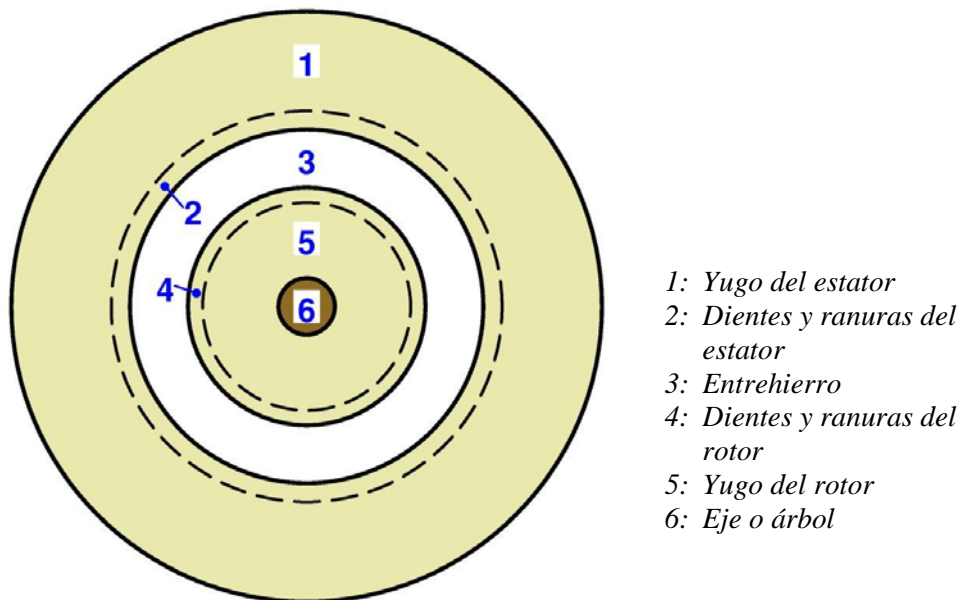
Luego, como el entrehierro  $\delta$  es constante, sucede que las distribuciones espaciales en el entrehierro de la tensión magnética  $F_\delta$  y de la inducción magnética  $B$  siempre van a ser de la misma forma.

Si se desprecia la reluctancia de los núcleos ferromagnéticos, sucede que la f.m.m. en el entrehierro  $\mathcal{F}$  tiene el mismo valor que la tensión magnética en el entrehierro  $F_\delta$  (C3a). Luego, en este caso de entrehierro constante sucede que la f.m.m.  $\mathcal{F}$ , la tensión magnética  $F_\delta$  y la inducción magnética  $B$  tienen distribuciones espaciales en el entrehierro de la misma forma. Por consiguiente, teniendo en cuenta la relación (C2), los valores máximos de los primeros armónicos de estas magnitudes están ligados así:

$$\text{Si la reluctancia del hierro es nula: } \mathcal{F} = F_\delta \rightarrow \quad (C3a)$$

$$\rightarrow \mathcal{F}_M = F_{\delta M} \rightarrow \quad (C3b)$$

$$\rightarrow \mathcal{F}_M = \frac{\delta}{\mu_0} B_M \quad (C3c)$$



*Fig. C2: Corte esquemático de una máquina con entrehierro uniforme. Se puede apreciar que cada uno de los dos núcleos magnéticos (del estator y del rotor) consta de la zona de los dientes y las ranuras más el **yugo, culata o corona***

Si se tiene en cuenta que realmente la reluctancia de las piezas ferromagnéticas no es nula o, lo que es equivalente, la permeabilidad magnética del hierro no es infinita; no se puede aceptar que la f.m.m. sea igual sólo a la tensión magnética del entrehierro, sino que también intervienen las tensiones magnéticas<sup>4</sup> en las zonas de material ferromagnético, especialmente las que están más saturadas. En este caso, la aplicación del Teorema de Ampère a lo largo de una línea de campo (que, como muestran las Figs. C1 y C2, corta dos veces el entrehierro, atraviesa dos veces los ranurados del estator y del rotor, pasa por los

<sup>4</sup> Recuérdese que la *tensión magnética* de una línea de campo en una zona de la máquina es igual a la integral  $\int \vec{H} \cdot d\vec{l}$  a lo largo de la parte de la línea de campo que se encuentra en la zona considerada.

yugos del estator y del rotor y encierra una corriente total igual a dos veces la f.m.m. del entrehierro correspondiente) da lugar a que no se cumpla la relación (C3a) sino lo siguiente:

$$2 \mathcal{F} = 2 F_{\delta} + 2 F_{t1} + 2 F_{t2} + F_{y1} + F_{y2} \quad (C4)$$

$$\mathcal{F} = F_{\delta} + F_{t1} + F_{t2} + 0,5 (F_{y1} + F_{y2})$$

Donde,

- $F_{\delta}$  es la tensión magnética en el entrehierro
- $F_{t1}$  es la tensión magnética en un diente del estator
- $F_{t2}$  es la tensión magnética en un diente del rotor
- $F_{y1}$  es la tensión magnética en el yugo del estator (Fig. C2)
- $F_{y2}$  es la tensión magnética en el yugo del rotor (Fig. C2)

Se define el **factor de saturación** de una máquina como este cociente:

$$k_s = \frac{\mathcal{F}_M}{F_{\delta M}} \quad (C5)$$

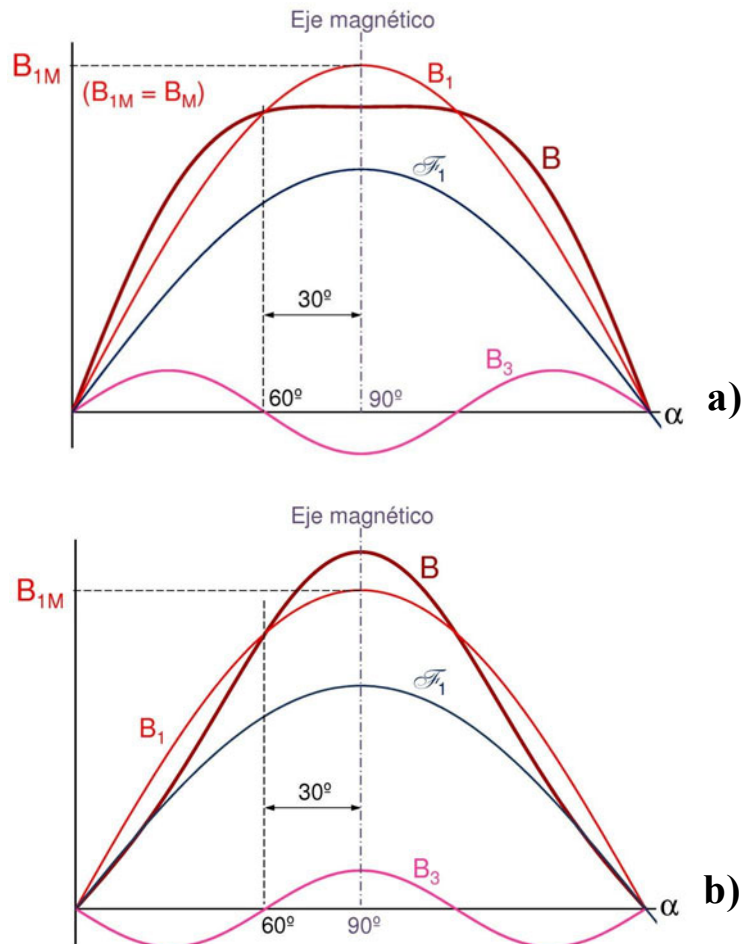
En la fórmula (C5)  $\mathcal{F}_M$  y  $F_{\delta M}$  son, respectivamente, los valores máximos de los primeros armónicos de la f.m.m. y de la tensión magnética en el entrehierro.

El factor de saturación depende de la geometría de la máquina, de las características magnéticas de los materiales con que está construida y de la saturación de sus elementos ferromagnéticos. En máquinas con saturación media  $k_s$  toma valores del orden de 1,3-1,6; aunque en máquinas con fuerte saturación este coeficiente puede ser superior a 2.

Evidentemente, para una máquina dada, cuya geometría y materiales permanecen inmutables, el factor de saturación  $k_s$  sólo varía con la saturación de sus partes ferromagnéticas. Por lo tanto,  $k_s$  no es un parámetro constante y depende del valor de  $B_M$  o de  $\mathcal{F}_M$ , ya que estos influyen en la saturación que se alcanza en diferentes partes de la máquina. Para que los cálculos sean correctos en las fórmulas donde aparezca el factor de saturación  $k_s$ , este parámetro se debe obtener teniendo en cuenta la saturación que va a tener la máquina cuando actúa no sólo la parte del campo magnético que se estudie, sino el campo magnético debido a las corrientes que hay en todos los devanados de la máquina en el momento que se la está analizando.

Cuando se pretende aplicar la relación (C4) a una línea de campo se obtiene que las tensiones magnéticas en las zonas por donde pasa la línea dependen de la geometría, de la permeabilidad y de la inducción magnética en estas zonas. Ahora bien, la permeabilidad de las zonas de material ferromagnético está influida por el grado de saturación en dichas zonas y la saturación en una zona de hierro es función del valor de la inducción magnética en ella. Como la inducción varía de un punto a otro, sucede que en diferentes puntos de la máquina habrá diferentes valores de permeabilidad magnética. Por otra parte, una línea de campo magnético tiene un recorrido diferente y de distinta longitud que las otras. Todo esto hace que cada línea de campo se encuentre en su recorrido con una reluctancia que es diferente a la de las otras líneas, por lo que la proporción entre la f.m.m.  $\mathcal{F}$  y la tensión magnética en el entrehierro  $F_{\delta}$  es distinta para cada línea de campo. Esto provoca una deformación de las ondas de tensión  $F_{\delta}$  e inducción magnética en el entrehierro  $B$  con respecto a la

onda de f.m.m.  $\mathcal{F}$ . En resumen, si bien las distribuciones espaciales de la tensión magnética  $F_\delta$  y de la inducción  $B$  en el entrehierro siguen siendo de igual forma, pues están relacionadas mediante la fórmula (C2), ahora ya no tienen la misma forma que la f.m.m. en el entrehierro  $\mathcal{F}$ . Así el primer armónico de la f.m.m. no da lugar sólo al primer armónico de  $B$ , sino que aparecen unos armónicos adicionales de  $B$  (y de  $F_\delta$ ) debidos a la saturación, sobre todo un tercer armónico (Fig. C3). Estos armónicos adicionales no pertenecen al campo magnético común de la máquina.



*Fig. C3: Forma de la onda espacial de la inducción magnética  $B$  originada por el primer armónico de la f.m.m. del entrehierro  $\mathcal{F}_1$  cuando se tiene en cuenta la reluctancia de las piezas de hierro. La onda de  $B$  se deforma y aparece, sobre todo, un tercer armónico:*

- a) Caso de que haya más saturación en los dientes que en los yugos.*
- b) Caso de que haya más saturación en los yugos que en los dientes.*

Como se indica en el libro de Boldea y Nasar [2], la línea de campo que pasa en el entrehierro por la posición que se encuentra a  $30^\circ$  eléctricos del centro de un polo magnético (es decir, a  $30^\circ$  del eje magnético) tiene un valor de la inducción magnética en el entrehierro que no incluye los armónicos adicionales debidos a la saturación (Ver la Fig. C3). Efectivamente, en esa posición el tercer armónico de la inducción magnética del entrehierro es nulo (pues  $\cos 3 \times 30^\circ = 0$ ) y, como el resto de los armónicos espaciales debidos a la saturación son despreciables, se puede aceptar que el valor de la inducción magnética en ese punto debida al primer armónico de la f.m.m. en el entrehierro es igual a únicamente al valor del primer armónico de la inducción  $B$  en dicho punto. Es decir, en ese punto del entrehierro el primer armónico de la f.m.m. sólo origina el primer armónico de la inducción  $B$ , sin armónicos adicionales.

En la expresión (C5) para el cálculo de  $k_s$  sólo intervienen los primeros armónicos de f.m.m. y de tensión magnética. Para no incluir los armónicos adicionales de saturación, lo que se hace en la práctica para obtener este parámetro es utilizar la línea de campo a  $30^\circ$  del centro del polo y aplicar esta relación:

$$k_s = \frac{\mathcal{F}_{30^\circ}}{F_{\delta 30^\circ}} \quad (C6)$$

Luego, teniendo en cuenta la fórmula (C4) se llega a:

$$k_s = \frac{F_{\delta 30^\circ} + F_{t1 30^\circ} + F_{t2 30^\circ} + 0,5 (F_{y1 30^\circ} + F_{y2 30^\circ})}{F_{\delta 30^\circ}} \quad (C7)$$

En la relaciones (C6) y (C7),  $\mathcal{F}_{30^\circ}$ ,  $F_{\delta 30^\circ}$ ,  $F_{t1 30^\circ}$ ,  $F_{t2 30^\circ}$ ,  $F_{y1 30^\circ}$  y  $F_{y2 30^\circ}$  son, respectivamente, los valores de  $\mathcal{F}$ ,  $F_\delta$ ,  $F_{t1}$ ,  $F_{t2}$ ,  $F_{y1}$  y  $F_{y2}$  para la línea de inducción de la máquina que pasa en el entrehierro por la posición que se encuentra a  $30^\circ$  eléctricos del centro de un polo magnético. En la bibliografía especializada se indica cómo se pueden ir calculando las diferentes tensiones magnéticas que figuran en la expresión (C7).

Los armónicos del campo magnético de orden superior al primero tienen más polos (el armónico de orden  $h$  tiene  $h \cdot p$  pares de polos) que el armónico fundamental (que tiene  $p$  pares de polos). Estos polos deben repartirse a lo largo de la misma circunferencia del entrehierro, lo que conlleva que los armónicos de orden superior tienen un paso polar más pequeño. De ahí se deduce que el trayecto que las líneas de campo de estos armónico tienen dentro de los núcleos magnéticos es más pequeño y se pueden despreciar las caídas de tensión magnética en los yugos ( $F_{y1}$  y  $F_{y2}$ ).

Por lo tanto, para el cálculo de la dispersión armónica (ecuación (6)) se ha supuesto que el factor de saturación para los armónicos espaciales del campo magnético distinto al fundamental es igual al factor de saturación de los dientes  $k_{st}$  en el que no se incluyen las tensiones magnéticas de los yugos del estator y del rotor:

$$k_{st} = \frac{F_{\delta 30^\circ} + F_{t1 30^\circ} + F_{t2 30^\circ}}{F_{\delta 30^\circ}} \quad (C8)$$

De las relaciones (C2) y (C5) se deduce que:

$$\mathcal{F}_M = k_s F_{\delta M} = k_s \frac{\delta}{\mu_0} B_M \quad (C9)$$

Al comprarla con la fórmula (C3b) la expresión (C9) muestra que el hecho de tener presente el valor no nulo de la reluctancia de las piezas ferromagnéticas equivale, en lo que al campo magnético común se refiere, a seguir suponiendo que la reluctancia de estas piezas es nula, pero que el entrehierro ha aumentado y pasa a ser  $k_s \cdot \delta$ .

En el caso de máquinas con polos salientes lo que se hace es descomponer su campo magnético en el entrehierro según los ejes  $d$  y  $q$ , lo que permite definir dos factores de saturación, uno para cada una de estas dos componentes del campo magnético. Esta cuestión se analiza con más detalle en el último apartado de este apéndice.

### **Inductancia magnetizante de una fase**

Considérese una fase de un devanado de una máquina con entrehierro uniforme. Se va a calcular el coeficiente de autoinducción de esta fase debido sólo al campo magnético común que origina dicha fase cuando es recorrida por corriente. Al tratarse del campo

magnético común, sólo hay que tener en cuenta el armónico fundamental del campo magnético en el entrehierro.

El valor máximo del primer armónico de la fuerza magnetomotriz (f.m.m.) en el entrehierro creada por esta fase cuando la recorre la corriente  $i$  vale (ver [15]):

$$\mathcal{F}_M = \frac{4}{\pi} \xi_b \frac{N i}{2 p}$$

Luego, la relación (C9) permite deducir que una fase genera en el entrehierro una inducción magnética cuyo primer armónico tiene este valor máximo:

$$B_M = \frac{\mu_0}{k_s \delta} \mathcal{F}_M = \frac{\mu_0}{k_s \delta} \left( \frac{4}{\pi} \xi_b \frac{N i}{2 p} \right) \quad (C10)$$

En las expresiones anteriores se han empleado estos símbolos:

- $i$  valor instantáneo de la corriente que recorre la fase considerada.
- $k_s$  es el factor de saturación.
- $N$  es el número de espiras en serie de la fase; es decir, el número de espiras de una de sus ramas en paralelo.
- $p$  es el número de pares de polos de la máquina.
- $\delta$  es el entrehierro equivalente ( $\delta = K_C \cdot \delta_g$  (ver el apéndice A)).
- $\mu_0$  es la permeabilidad magnética del vacío.
- $\xi_b$  es el factor de bobinado para el primer armónico ( $\xi_b = \xi_d \cdot \xi_a \cdot \xi_i$ ).

Por lo tanto, el flujo por polo del campo magnético originado por esta fase se obtiene sustituyendo la expresión (C10) en la (C1):

$$\begin{aligned} \Phi_M &= \frac{d l_\delta}{p} B_M = \frac{d l_\delta}{p} \left( \frac{\mu_0}{k_s \delta} \frac{4}{\pi} \xi_b \frac{N i}{2 p} \right) \\ \Phi_M &= \frac{2}{\pi} \frac{\mu_0}{k_s \delta} \frac{d l_\delta}{p^2} \xi_b N i \end{aligned} \quad (C11)$$

La espira central de la fase está colocada en la posición donde recibe el máximo de flujo originado por ella misma. Es decir, la espira diametral colocada de manera que sus ejes de simetría coincidan con los de la fase va a estar atravesada por el flujo por polo (ecuación (C11)). Esto hace que los enlaces de flujo que tiene esta fase en estas condiciones valgan:

$$\begin{aligned} \psi &= N \xi_b \Phi_M \\ \psi &= \frac{2}{\pi} \frac{\mu_0}{k_s \delta} d l_\delta \left( \frac{N \xi_b}{p} \right)^2 i \end{aligned} \quad (C12)$$

Y la *inductancia magnetizante*  $L_H$  de la fase es

$$L_H = \frac{\Psi}{i} = \frac{2}{\pi} \frac{\mu_0}{k_s \delta} d l_\delta \left( \frac{N \xi_b}{p} \right)^2$$

$$\boxed{L_H = \frac{2}{\pi} \frac{\mu_0}{k_s \delta} d l_\delta \left( \frac{N \xi_b}{p} \right)^2} \quad (C13)$$

### **Inductancia magnetizante de un devanado polifásico**

En el apartado anterior se obtuvo el coeficiente de autoinducción que refleja el efecto del campo magnético común originado por la corriente de una fase actuando sobre ella misma. Ahora definiremos un coeficiente similar para el efecto conjunto de todas las fases de un devanado polifásico.

Supondremos que el devanado polifásico es equilibrado y, consecuentemente, está formado por  $m$  fases de igual geometría y separadas entre sí un ángulo de  $2\pi/m$  radianes eléctricos.

La máquina la seguiremos suponiendo de entrehierro uniforme, de tal forma, que las fases de este devanado tienen una inductancia magnetizante de fase  $L_H$  que se calcula mediante la fórmula (C13).

Llamamos *inductancia magnetizante* de este devanado a este coeficiente:

$$L_\mu = \frac{m}{2} L_H$$

$$\boxed{L_\mu = \frac{m}{\pi} \frac{\mu_0}{k_s \delta} d l_\delta \left( \frac{N \xi_b}{p} \right)^2} \quad (C14)$$

En régimen permanente, cuando todas las fases del devanado están alimentadas por corrientes sinusoidales y equilibradas de valor eficaz  $I$ , la inductancia magnetizante  $L_\mu$  es el cociente entre el valor eficaz de los enlaces de flujo en una de las fases debidos al campo magnético principal originado por la acción conjunta de todas las fases del devanado entre el valor eficaz de la corriente  $I$ .

Seguidamente se van a presentar otras formas alternativas a la expresión (C14).

El *paso polar*  $t_p$  medido como arco de circunferencia en el entrehierro vale:

$$t_p = \frac{\pi d}{2 p} \quad (C15)$$

Luego, despejando el diámetro  $d$  de (C15) y sustituyendo en (C14) se llega a

$$\boxed{L_\mu = \frac{2}{\pi^2} m \frac{\mu_0}{k_s \delta} \frac{t_p l_\delta}{p} (N \xi_b)^2} \quad (C16)$$



El devanado tiene estos parámetros (ver [16]):

- $Z_n$  conductores en una ranura.
- $K$  ranuras utilizadas por el conjunto de todas las fases del devanado.
- $Q$  ranuras por polo.
- $q$  ranuras por polo y fase.
- $a'$  ramas en paralelo en que se subdivide una fase.

Luego, es evidente que:

$$q = \frac{K}{2 p m} \rightarrow K = 2 p m q \quad (C17)$$

$$Q = \frac{K}{2 p} = m q$$

Una espira del bobinado consta de dos conductores alojados en dos ranuras diferentes. Así pues, el número de espiras de una fase vale:

$$N_f = \frac{K Z_n}{2 m} = \frac{(2 p m q) Z_n}{2 m} = p q Z_n \quad (C18')$$

Luego, el número de espiras en serie en una de las  $a'$  ramas en paralelo de una fase es:

$$N = \frac{N_f}{a'} = \frac{p q Z_n}{a'} \quad (C18)$$

Combinando las expresiones (C16) y (C18) se obtiene que:

$$L_\mu = \frac{2}{\pi^2} m \frac{\mu_0}{k_s \delta} p t_p l_\delta \left( \frac{q Z_n \xi_b}{a'} \right)^2 \quad (C19)$$

Por analogía con la expresión (25) para la inductancia de dispersión, podemos definir la permeancia específica magnetizante  $\lambda_\mu$  tal que verifique esta relación:

$$L_\mu = 2 \frac{p q}{(a')^2} Z_n^2 (\mu_0 \cdot \lambda_\mu \cdot l_g)$$

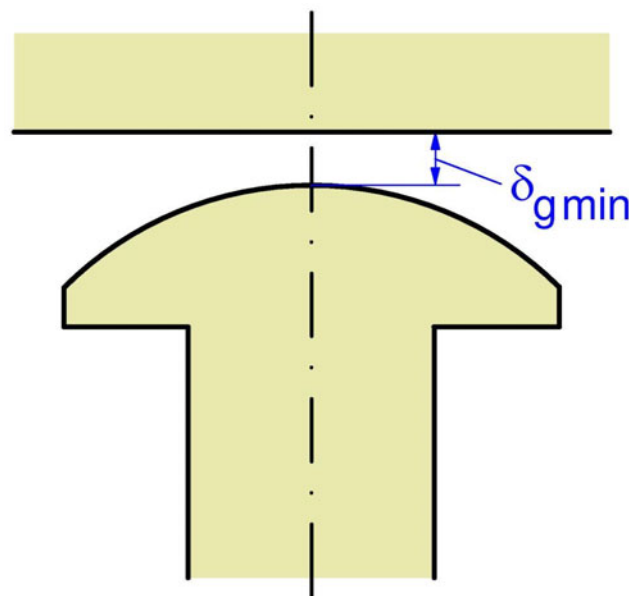
Por consiguiente, de la relación anterior y de la (C19) se deduce que esta permeancia se puede calcular así:

$$\lambda_\mu = \frac{1}{\pi^2} m q \frac{t_p}{k_s \delta} \frac{l_\delta}{l_g} \xi_b^2 = \frac{1}{\pi^2} Q \frac{t_p}{k_s \delta} \frac{l_\delta}{l_g} \xi_b^2 \quad (C20)$$

### Inductancias magnetizantes de un devanado polifásico en una máquina de polos salientes

Las máquinas que presentan un devanado polifásico de tambor y polos salientes son las máquinas síncronas lentas. El devanado polifásico es el inducido, situado generalmente en el estator, y el órgano de polos salientes, que suele ser el rotor, es el que aloja al devanado inductor de corriente continua.

En estas máquinas el entrehierro bajo cada polo no es constante sino que varía de una forma aproximadamente igual a la inversa de una función coseno (ver el texto [15] y la Fig. C3). Esto se hace para conseguir que el devanado inductor dé lugar a una inducción magnética que se distribuya de una forma prácticamente sinusoidal a lo largo del entrehierro.



*Fig. C3: En un polo saliente de una máquina síncrona el entrehierro es variable. El entrehierro geométrico mínimo  $\delta_{gmin}$  es el entrehierro geométrico en el centro de un polo*

El hecho de que el entrehierro sea variable provoca que las distribuciones espaciales de la tensión magnética  $F_\delta$  y de la inducción  $B$  en el entrehierro ya no tengan igual forma. En consecuencia, incluso cuando se desprecia la reluctancia del hierro, el primer armónico de la f.m.m. del inducido da lugar a un campo magnético no sinusoidal; es decir, con armónicos adicionales.

Para el estudio de estas máquinas lo que se hace es descomponer el campo magnético según dos ejes que forman  $90^\circ$  eléctricos. Estos son el *eje directo o eje d* (que pasa por el centro de los polos) y el *eje en cuadratura o eje q* (que pasa por el centro de la zona interpolar). Por lo tanto, habrá dos inductancias magnetizantes,  $L_{\mu d}$  para el campo magnético del eje d y  $L_{\mu q}$  para el campo magnético del eje q. Estas inductancias se obtienen mediante expresiones similares a las (C14), (C16) y (C19), en las que se deben introducir los valores adecuados para el factor de saturación y para el entrehierro. Así pues, se cumplirá que:

$$L_{\mu d} = \frac{m}{\pi} \frac{\mu_0}{k_{sd} \delta_d} d l_{\delta} \left( \frac{N \xi_b}{p} \right)^2 \quad (C21)$$

$$L_{\mu q} = \frac{m}{\pi} \frac{\mu_0}{k_{sq} \delta_q} d l_{\delta} \left( \frac{N \xi_b}{p} \right)^2$$

En el eje directo (eje d) el factor de saturación  $k_{sd}$  y el entrehierro equivalente  $\delta_d$  verifican las siguientes relaciones:

$$k_{sd} = \frac{\mathcal{F}_{Md}}{F_{\delta Md}} \quad (C22)$$

$$\delta_d = \frac{4}{\pi} \delta_{\min} = \frac{4}{\pi} K_C \delta_{g \min} \quad (C23)$$

En las expresiones anteriores se han introducido estas magnitudes:

- $\mathcal{F}_{Md}$  es el valor máximo del primer armónico de la componente de la f.m.m. en el entrehierro según el eje d.
- $F_{\delta Md}$  es el valor máximo del primer armónico de la componente de la tensión magnética en el entrehierro según el eje d.
- $\delta_{g \min}$  es el entrehierro geométrico mínimo. Por lo tanto, es la distancia radial desde el centro de un polo saliente del rotor hasta un diente del estator (Fig. C3).
- $\delta_{\min}$  es el entrehierro equivalente mínimo ( $\delta_{\min} = K_C \cdot \delta_{g \min}$ ).

El cálculo del factor de saturación  $k_{sd}$  se realiza mediante un procedimiento similar al explicado para  $k_s$  en la máquina de entrehierro uniforme; pero teniendo en cuenta que ahora las líneas del campo según el eje d incluyen, además, tensiones magnéticas en los polos salientes y que la deformación del campo magnético en el entrehierro debida a la saturación es mucho más pequeña.

En el eje en cuadratura (eje q) las líneas de campo tienen un recorrido mucho mayor en el entrehierro que en el eje directo y esto da lugar a que la tensión magnética en el entrehierro sea mucho mayor que en el resto de las zonas por donde pasan las líneas del campo magnético del eje q. Por otra parte, el recorrido de las líneas de campo según el eje q es difícil de determinar a no ser que se utilicen métodos numéricos. Por este motivo se suele adoptar esta aproximación:

$$k_{sq} = \frac{\mathcal{F}_{Mq}}{F_{\delta Mq}} \approx 1 \quad (C24)$$

El entrehierro equivalente según el eje q es más difícil de obtener que según el eje d, ya que requiere el uso de métodos numéricos. Según el libro de Pyrhönen [13] el entrehierro equivalente en el eje q,  $\delta_q$ , varía entre 1,5 y 3 veces el entrehierro equivalente en el eje d,  $\delta_d$ . Un valor típico que se puede introducir en un cálculo preliminar es el siguiente

$$\delta_q \approx 2,4 \delta_d \quad (C25)$$

En las expresiones anteriores aparecen estas magnitudes:

- $\mathcal{F}_{Mq}$  es el valor máximo del primer armónico de la componente de la f.m.m. en el entrehierro según el eje q.
- $F_{\delta Mq}$  es el valor máximo del primer armónico de la componente de la tensión magnética en el entrehierro según el eje q.
- $k_{sq}$  es el factor de saturación para la componente según el eje q del campo magnético común.
- $\delta_d$  es el entrehierro equivalente según el eje d.
- $\delta_q$  es el entrehierro equivalente según el eje q.

*CAMPOS MAGNÉTICOS DE DISPERSIÓN*

**APÉNDICE D:**  
**EJEMPLO DE CÁLCULO DE LA REACTANCIA**  
**DE DISPERSIÓN DE UN DEVANADO DE TAMBOR**

**DATOS**

Se tiene una máquina asíncrona de la cual se quieren conocer las siguientes magnitudes del estator: la longitud útil del hierro y las reactancias magnetizante y de dispersión. Las características de esta máquina son las siguientes:

- D1) Número de fases:  $m = 3$  fases
- D2) Número de polos:  $2p = 4$  polos
- D3) Frecuencia de alimentación:  $f_1 = 50$  Hz
- D4) Diámetro interior del estator:  $d_1 = 26$  cm
- D5) Entrehierro geométrico:  $\delta_g = 0,8$  mm
- D6) Longitud axial geométrica del entrehierro:  $l_g = 31$  cm
- D7) Número de ranuras del estator:  $K_1 = 48$  ranuras
- D8) Número de ranuras del rotor:  $K_2 = 40$  ranuras
- D9) Abertura de las ranuras del estator:  $b_{\delta 1} = 9$  mm
- D10) Abertura de las ranuras del rotor:  $b_{\delta 2} = 2,5$  mm
- D11) Longitud de los canales radiales de ventilación del estator:  $l_{v1} = 10$  mm
- D12) Longitud de los canales radiales de ventilación del rotor:  $l_{v2} = 10$  mm
- D13) Número de canales radiales de ventilación del estator:  $n_{v1} = 5$  canales
- D14) Número de canales radiales de ventilación del rotor:  $n_{v2} = 5$  canales
- D15) Disposición de los canales radiales del estator y del rotor: No enfrentados
- D16) Factor de empilado del estator:  $k_{Fe1} = 0,90$
- D17) Número de conductores por ranura del estator:  $Z_n = 30$  conductores
- D18) Número de ramas en paralelo de una fase del estator:  $a' = 4$  ramas en paralelo
- D19) Número de capas del bobinado del estator: 2 capas
- D20) Acortamiento de las bobinas del estator:  $y_p - y_1 = 2$  ranuras
- D21) Inclinación de las ranuras del estator: No hay inclinación de las ranuras
- D22) Las bobinas del estator son de hilo
- D23) El bobinado del estator es *imbricado* y de *corona*
- D24) Los conductores del estator no presentan efecto piel ( $k_\lambda = 1$ )
- D25) Factor de saturación:  $k_s = 1,5$
- D26) Factor de saturación de los dientes:  $k_{st} = 1,35$
- D27) Las ranuras del estator son abiertas, tienen la forma mostrada en la Fig. D1 y sus dimensiones son las siguientes:
- D28)  $b_1 = b_\delta = 9$  mm
- D29)  $b_4 = 11$  mm
- D30)  $h_1 = h_3 = 17$  mm

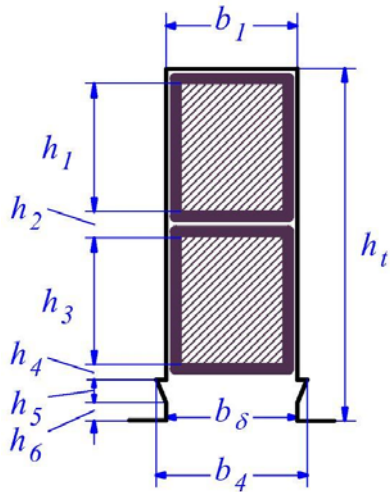


Fig. D1: Forma de las ranuras del estator (ranuras abiertas)

- D31)  $h_2 = 2,5 \text{ mm}$   
 D32)  $h_4 = 1 \text{ mm}$   
 D33)  $h_5 = 2 \text{ mm}$   
 D34)  $h_6 = 0,5 \text{ mm}$   
 D35)  $h_t = 40,5 \text{ mm}$

## RESOLUCIÓN

### Cálculo de otras dimensiones de la máquina

- D36) Diámetro exterior del rotor,  $d_2$ :

De la Fig. D2 se deduce que:  $d_2 = d_1 - 2 \delta_g$

$$d_2 = 260 - 2 \times 0,8 = 258,4 \text{ mm}$$

- D37) Paso de ranura del estator,  $t_{r1}$ :

$$t_{r1} = \frac{\pi d_1}{K_1} = \frac{\pi 260}{48} = 17 \text{ mm}$$

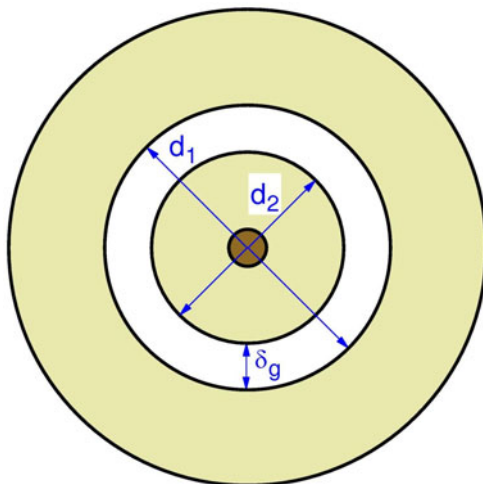


Fig. D2: Diámetros interior del estator ( $d_1$ ) y exterior del rotor ( $d_2$ ) y entrehierro geométrico ( $\delta_g$ ) en una máquina asincrónica

D38) Paso de ranura del rotor,  $t_{r2}$ :

$$t_{r2} = \frac{\pi d_2}{K_2} = \frac{\pi 258,4}{40} = 20,3 \text{ mm}$$

D39) Paso polar,  $t_p$ :

Según la expresión (C15):  $t_p = \frac{\pi d}{2 p} = \frac{\pi 260}{4} = 204,2 \text{ mm}$

D40) Diámetro medio de los dientes del estator,  $d_{m1}$ :

$$d_{m1} = d_1 + 2 \frac{h_{t1}}{2} = d_1 + h_{t1} = 260 + 40,5 = 300,5 \text{ mm}$$

D41) Paso medio de ranura del estator,  $t_{m1}$ :

$$t_{m1} = \frac{\pi d_{m1}}{K_1} = \frac{\pi 300,5}{48} = 19,7 \text{ mm}$$

D42) Longitud media de las cabezas de bobina del estator del estator,  $l_{cb1}$ :

Se trata de un devanado de corona. Luego, según la fórmula (48):

$$l_{cb1} = \frac{4 d_m}{2 p} = \frac{4 \times 300,5}{4} = 300,5 \text{ mm}$$

### **Dimensiones efectivas**

D43) Factor de Carter del estator,  $K_{C1}$ :

Según la relación (A4): 
$$K_{C1} = \frac{t_{r1}}{t_{r1} - \frac{b_{\delta 1}^2}{5 \delta_g + b_{\delta 1}}}$$

Como se trata de una magnitud adimensional en la fórmula anterior se puede utilizar la unidad que se desee, pero la misma para todas las longitudes. Usando milímetros se obtiene que:

$$K_{C1} = \frac{17}{17 - \frac{9^2}{5 \times 0,8 + 9}} = 1,58$$

D44) Factor de Carter del rotor,  $K_{C2}$ :

Según la relación (A4): 
$$K_{C2} = \frac{t_{r2}}{t_{r2} - \frac{b_{\delta 2}^2}{5 \delta_g + b_{\delta 2}}}$$

$$K_{C2} = \frac{20,3}{20,3 - \frac{2,5^2}{5 \times 0,8 + 2,5}} = 1,05$$

D45) Factor de Carter,  $K_C$ :

Según la relación (A5):  $K_C = K_{C1} \cdot K_{C2} = 1,58 \times 1,05 = 1,66$



D46) Entrehierro equivalente,  $\delta$ :

Según la relación (A3):  $\delta = K_C \cdot \delta_g = 1,66 \times 0,8 = 1,33 \text{ mm}$

D47) Parámetro para la expansión de las líneas del campo magnético del entrehierro en los canales radiales del estator,  $\kappa'_1$ :

Según la relación (B9):  $\kappa'_1 = \frac{l_{v1}}{5 \delta_g + l_{v1}} = \frac{10}{5 \cdot 0,8 + 10} = 0,71$

D48) Parámetro para la expansión de las líneas del campo magnético del entrehierro en los canales radiales del rotor,  $\kappa'_2$ :

Según la relación (B9):  $\kappa'_2 = \frac{l_{v2}}{5 \delta_g + l_{v2}} = \frac{10}{5 \cdot 0,8 + 10} = 0,71$

D49) Longitud efectiva del entrehierro,  $l_\delta$ :

Al tratarse de canales radiales de estator y de rotor no enfrentados, según la expresión (B5):  $l_\delta = l_g + 2 \delta_g - (n_{v1} l_{v1} \kappa'_1) - (n_{v2} l_{v2} \kappa'_2)$

$$l_\delta = 310 + (2 \times 0,8) - (5 \times 10 \times 0,71) - (4 \times 10 \times 0,71) = 248 \text{ mm}$$

D50) Longitud útil del hierro en el estator,  $l_{Fe1}$ :

Según la expresión (B14):  $l_{Fe1} = k_{Fe1} [l_g - (n_{v1} l_{v1})]$

$$l_{Fe1} = 0,9 \times [310 - (5 \times 10)] = 234 \text{ mm}$$

La longitud útil del hierro en el estator vale  $l_{Fe1} = 234 \text{ mm}$ .

*A partir de ahora todas las magnitudes van a ser del estator y, para simplificar la nomenclatura, en todos los símbolos se va a omitir el subíndice "1" correspondiente al estator.*

D51) Longitudes efectivas de dispersión de ranura en el estator,  $l_{nb\delta}$ ,  $l_{nb1}$ ,  $l_{nb4}$  (Ver la Fig. D1):

De la expresión (B11) y del ábaco de la Fig. B10 se deduce que:

$$l_{nb\delta} = l_{nb1} = 310 - (5 \times 3,1) = 295 \text{ mm}$$

$$l_{nb4} = 310 - (5 \times 2,5) = 297 \text{ mm}$$

### **Magnitudes del devanado del estator**

D52) Número de ranuras por polo,  $Q =$  paso polar medido con número de ranuras,  $y_p$ :

Según la fórmula (C17):  $Q = y_p = \frac{K}{2 p} = \frac{48}{4} = 12$  ranuras por polo

D53) Número de anuras por polo y fase,  $q$ :

Según la fórmula (C17):  $q = \frac{K}{2 p m} = \frac{Q}{m} = \frac{12}{3} = 4$  ranuras por polo y fase

D54) Número de espiras de una fase,  $N_f$ :

Según la fórmula (C18'):  $N_f = p q Z_n = 2 \times 4 \times 30 = 240$  espiras/fase

D55) Número de espiras de una rama en paralelo,  $N$ :

Según la fórmula (C18):  $N = \frac{p q Z_n}{a'} = \frac{N_f}{a'} = \frac{240}{4} = 60$  espiras en serie

D56) Paso de bobina medido como número de ranuras,  $y_1$ :

$$y_1 = y_p - \text{acortamiento} = 12 - 2 = 10 \text{ ranuras}$$

D57) Paso de bobina relativo,  $\beta_y$ :

$$\beta_y = \frac{y_1}{y_p} = \frac{10}{12} = 0,833$$

D58) Ángulo eléctrico de separación entre dos ranuras,  $\gamma$ :

En devanados trifásicos se ranura todo el entrehierro con ranuras uniformemente distribuidas, luego la distancia entre dos ranuras consecutivas (paso de ranura) medido como ángulo eléctrico vale:

$$\gamma = p \gamma_g = p \frac{360^\circ}{K} = 2 \frac{360^\circ}{48} = 15^\circ \text{ eléctricos}$$

D59) Ángulo eléctrico de acortamiento,  $\beta$ :

$$\beta = \text{acortamiento en n}^\circ \text{ de ranuras} \times \gamma$$

$$\beta = 2 \times 15^\circ = 30^\circ \text{ eléctricos}$$

D60) Factor de distribución para el primer armónico,  $\xi_d$ :

$$\xi_d = \frac{\text{sen } \frac{q \gamma}{2}}{q \text{ sen } \frac{\gamma}{2}} = \frac{\text{sen } \frac{4 \times 15^\circ}{2}}{4 \text{ sen } \frac{15^\circ}{2}} = 0,958$$

D61) Factor de paso para el primer armónico,  $\xi_a$ :

$$\xi_a = \cos \frac{\beta}{2} = \cos \frac{30^\circ}{2} = 0,966$$

D62) Factor de inclinación de ranura para el primer armónico,  $\xi_i$ :

No hay inclinación de ranura, luego:  $\xi_i = 1$

D63) Factor de bobinado para el primer armónico,  $\xi_b$ :

$$\xi_b = \xi_d \cdot \xi_a \cdot \xi_i = 0,958 \times 0,966 \times 1 = 0,925$$

D64) Parámetro adimensional  $\sum_{h \neq 1} \left( \frac{\xi_{dh} \cdot \xi_{ah}}{h} \right)^2$ :

Según la tabla II:  $\sum_{h \neq 1} \left( \frac{\xi_{dh} \cdot \xi_{ah}}{h} \right)^2 = 0,0055$

D65) Parámetro adimensional  $k_2$ :

Según la ecuación (39):  $k_2 = \frac{1 + 3 \beta_y}{4} = \frac{1 + (3 \times 0,833)}{4} = 0,875$

D66) Parámetro adimensional  $k_1$ :

$$\text{Según la ecuación (39): } k_1 = \frac{1 + 3 k_2}{4} = \frac{1 + (3 \times 0,875)}{4} = 0,906$$

D67) Parámetro adimensional  $k_\lambda$ :

$$\text{No hay efecto piel, luego: } k_\lambda = 1$$

### **Reactancia magnetizante del estator**

D68) Inductancia magnetizante del estator,  $L_\mu$ :

$$\text{Según la ecuación (C19): } L_\mu = \frac{2}{\pi^2} m \frac{\mu_0}{k_s \delta} p t_p l_\delta \left( \frac{q Z_n \xi_b}{a'} \right)^2$$

Hay que trabajar con el Sistema Internacional, luego las longitudes se deben expresar en metros:

$$L_\mu = \frac{2}{\pi^2} \times 3 \times \frac{4 \pi 10^{-7}}{1,5 \times 1,33 \cdot 10^{-3}} \times 2 \times 0,204 \times 0,248 \times \left( \frac{4 \times 30 \times 0,925}{4} \right)^2$$

$$L_\mu = 0,0597 \text{ H} = 59,7 \text{ mH}$$

D69) Reactancia magnetizante del estator,  $X_\mu$ :

$$X_\mu = 2 \pi f L_\mu = 2 \pi \times 50 \times 0,0597 = 18,8 \Omega$$

La reactancia magnetizante del estator vale  $X_\mu = 18,8 \Omega$ .

### **Permeancias específicas de dispersión del estator**

Las permeancias específicas de dispersión son parámetros adimensionales. Esto permite el utilizar la unidad de medida que se desee para las longitudes que aparecen en sus fórmulas, pero teniendo cuidado de usar siempre la misma unidad para todas las longitudes. Aquí se van a emplear milímetros.

D70) Permeancia específica de dispersión de ranura,  $\lambda_{\sigma r}$ :

Comparando la forma de la ranura de la Fig. D1 con las estudiadas en las Figs. 13 y 14, cuyas permeancias específicas de dispersión vienen dadas por las fórmulas (36) y (40), respectivamente, se deduce que para la ranura de la Fig. D1 se cumple que:

$$\lambda_{\sigma r} = \frac{h_1 + h_3}{3 b_1} \frac{l_{nb1}}{l_g} k_\lambda k_1 + \frac{h_2}{4 b_1} \frac{l_{nb1}}{l_g} k_1 + \frac{h_4}{b_1} \frac{l_{nb1}}{l_g} k_2 +$$

$$+ \frac{h_5}{b_4 + b_\delta} \frac{l_{nb4} + l_{nb\delta}}{l_g} k_2 + \frac{h_6}{b_\delta} \frac{l_{nb\delta}}{l_g} k_2$$

$$\lambda_{\sigma r} = \left( \frac{17 + 17}{3 \times 9} \times \frac{295}{310} \times 1 \times 0,906 \right) + \left( \frac{2,5}{4 \times 9} \times \frac{295}{310} \times 0,906 \right) + \left( \frac{1}{9} \times \frac{295}{310} \times 0,875 \right) + \left( \frac{2}{11 + 9} \times \frac{295 + 297}{310} \times 0,875 \right) + \left( \frac{0,5}{9} \times \frac{295}{310} \times 0,875 \right) = 1,451$$

$$\lambda_{\sigma r} = 1,451$$

D71) Permeancia específica de dispersión de cabezas de diente y zig-zag,  $\lambda_{\sigma t}$ :

$$\text{Según la fórmula (42): } \lambda_{\sigma t} = \frac{5 \frac{\delta_g}{b_\delta}}{5 + 4 \frac{\delta_g}{b_\delta}} \frac{l_\delta}{l_g} \psi k_2$$

En este caso no hay polos salientes. Luego el recubrimiento polar  $\psi$  vale 1.

$$\lambda_{\sigma t} = \frac{5 \times \frac{0,8}{9}}{5 + \left( 4 \times \frac{0,8}{9} \right)} \times \frac{248}{310} \times 1 \times 0,875 = 0,058$$

$$\lambda_{\sigma t} = 0,058$$

D72) Permeancia específica de dispersión armónica,  $\lambda_{\sigma a}$ :

$$\text{Según la fórmula (52): } \lambda_{\sigma a} = \frac{1}{\pi^2} Q \frac{t_p}{k_{st} \delta} \frac{l_\delta}{l_g} \sum_{h \neq 1} \left( \frac{\xi_{dh} \cdot \xi_{ah}}{h} \right)^2$$

$$\lambda_{\sigma a} = \frac{1}{\pi^2} \times 12 \times \frac{204}{1,35 \times 1,33} \times \frac{248}{310} \times 0,0055 = 0,608$$

$$\lambda_{\sigma a} = 0,608$$

D73) Permeancia específica de dispersión por inclinación de ranura,  $\lambda_{\sigma i}$ :

Las ranuras del estator no están inclinadas, luego esta permeancia específica es nula. En cualquier caso esta permeancia suele ser despreciable.

$$\lambda_{\sigma i} = 0$$

D74) Permeancia específica de dispersión de las cabezas de bobina,  $\lambda_{\sigma cb}$ :

Se trata de un devanado de hilo de dos capas. Se puede aplicar la relación (45):

$$\lambda_{\sigma cb} = 0,47 \frac{q}{l_g} (l_{cb} - 0,64 y_1 t_m)$$

$$\lambda_{\sigma cb} = 0,47 \times \frac{4}{310} \times [300,5 - (0,64 \times 10 \times 19,7)] = 1,058$$

$$\lambda_{\sigma cb} = 1,058$$

- D75) Permeancia específica de dispersión periférica,  $\lambda_{\sigma p}$ :  
Esta dispersión es despreciable en máquinas de entrehierro pequeño, como son las máquinas asíncronas:

$$\lambda_{\sigma p} \approx 0$$

- D76) Permeancia específica combinada de dispersión,  $\lambda_{\sigma}$ :  
Según la expresión (26):  $\lambda_{\sigma} = \lambda_{\sigma r} + \lambda_{\sigma t} + \lambda_{\sigma a} + \lambda_{\sigma i} + \lambda_{\sigma cb} + \lambda_{\sigma p}$

$$\lambda_{\sigma} = 1,451 + 0,058 + 0,608 + 0 + 1,058 + 0 = 3,175$$

$$\lambda_{\sigma} = 3,175$$

### **Reactancia de dispersión del estator**

- D77) Permeancia combinada de dispersión del estator,  $\Lambda_{\sigma}$ :  
Según la ecuación (24):  $\Lambda_{\sigma} = \mu_0 \cdot \lambda_{\sigma} \cdot l_g$   
Hay que trabajar con el Sistema Internacional, luego las longitudes se deben expresar en metros:

$$\Lambda_{\sigma} = 4 \pi \times 10^{-7} \times 3,175 \times 0,310 = 0,000001237 \text{ H} = 1,237 \cdot 10^{-6} \text{ H}$$

$$\Lambda_{\sigma} = 1,237 \mu\text{H}$$

- D78) Inductancia de dispersión del estator,  $L_{\sigma}$ :  
Según la relación (25):  $L_{\sigma} = 2 \frac{p q}{(a')^2} Z_n^2 \Lambda_{\sigma}$

$$L_{\sigma} = 2 \times \frac{2 \times 4}{4^2} \times 30^2 \times 1,237 \cdot 10^{-6} = 0,00111 \text{ H}$$

$$L_{\sigma} = 1,11 \cdot 10^{-3} \text{ H} = 1,11 \text{ mH}$$

- D79) Reactancia de dispersión del estator,  $X_{\sigma}$ :  
Según la relación (1):  $X_{\sigma} = 2 \pi f L_{\sigma}$

$$X_{\sigma} = 2 \pi \times 50 \times 0,00111 = 0,35 \Omega$$

La reactancia de dispersión del estator vale  $X_{\sigma} = 0,35 \Omega$ .