



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA
*DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA
ELÉCTRICA Y ENERGÉTICA*



MÁQUINA ASÍNCRONA

DOBLEMENTE

ALIMENTADA

Miguel Angel Rodríguez Pozueta

Doctor Ingeniero Industrial

© 2016, Miguel Angel Rodríguez Pozueta

Universidad de Cantabria (España)

Departamento de Ingeniería Eléctrica y Energética

This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Unported License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/> or send a letter to Creative Commons, 444 Castro Street, Suite 900, Mountain View, California, 94041, USA.



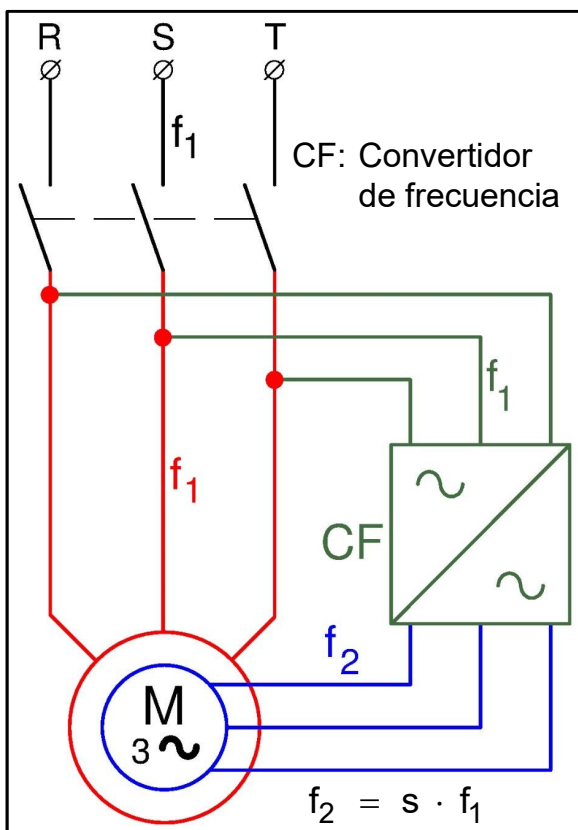
Está permitida la reproducción total o parcial de este documento bajo la licencia Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 3.0 Unported que incluye, entre otras, la condición inexcusable de citar su autoría (Miguel Angel Rodríguez Pozueta - Universidad de Cantabria) y su carácter gratuito.

Este documento puede descargarse gratuitamente desde esta Web:
<http://personales.unican.es/rodrigma/primer/publicaciones.htm>

MÁQUINA ASÍNCRONA DOBLEMENTE ALIMENTADA

Miguel Angel Rodríguez Pozueta

MÁQUINA ASÍNCRONA DE ANILLOS DOBLEMENTE ALIMENTADA (1)



- Esta forma de funcionamiento consiste en alimentar el rotor de una máquina asíncrona de anillos con una tensión de frecuencia f_2 mediante un convertidor de frecuencia (que normalmente está conectado a la red a través de un transformador, que no aparece en la figura). El estator se conecta directamente a la red de frecuencia f_1 .
- La potencia eléctrica P_2 que se extrae a través del colector de anillos del rotor se reinyecta a la red mediante el convertidor.

MÁQUINA ASÍNCRONA DE ANILLOS DOBLEMENTE ALIMENTADA (2)

- El campo magnético del rotor debe girar a una velocidad absoluta igual a la velocidad de sincronismo n_1 del estator. Esto obliga a que el campo giratorio del rotor gire con una velocidad relativa n_2 con respecto al rotor tal que

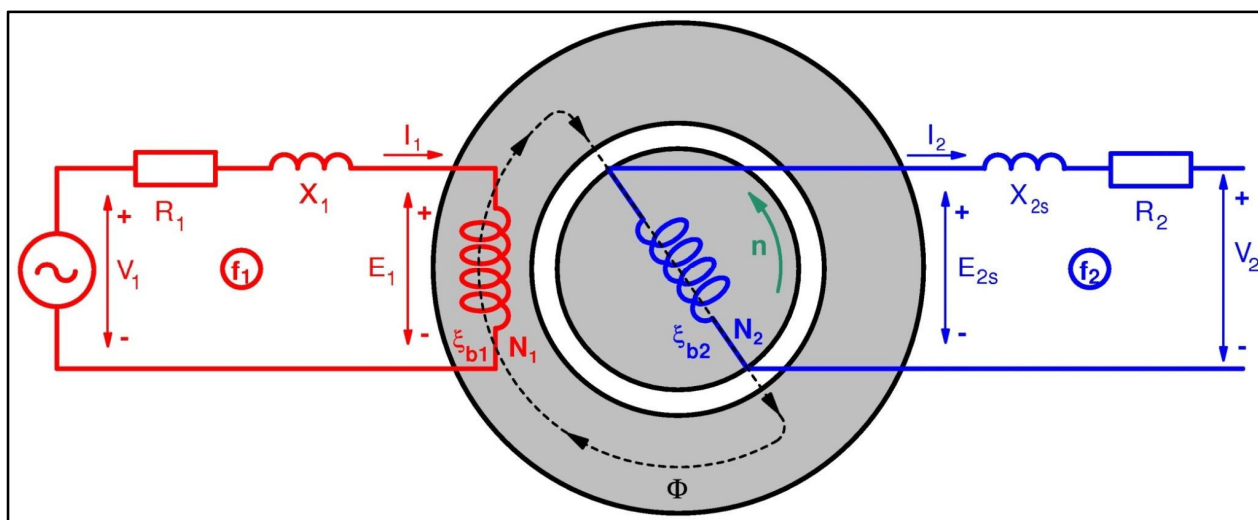
$$n_1 = n_2 + n \Rightarrow n_2 = n_1 - n = s \cdot n_1$$

- Esto exige que la frecuencia f_2 de la tensión que se conecta a los anillos del rotor sea igual a:

$$f_2 = s \cdot f_1$$

- Si la velocidad n de giro del rotor es inferior a la de sincronismo n_1 ($s > 0$) el campo giratorio del rotor debe girar con una velocidad n_2 del mismo sentido que n_1 .
- Si la velocidad n de giro del rotor es superior a la de sincronismo n_1 ($s < 0$) se debe invertir el orden de fases del rotor para que su campo giratorio gire con una velocidad n_2 de sentido contrario a n_1 .

CIRCUITO EQUIVALENTE DE UNA MÁQUINA ASÍNCRONA DOBLEMENTE ALIMENTADA (1)

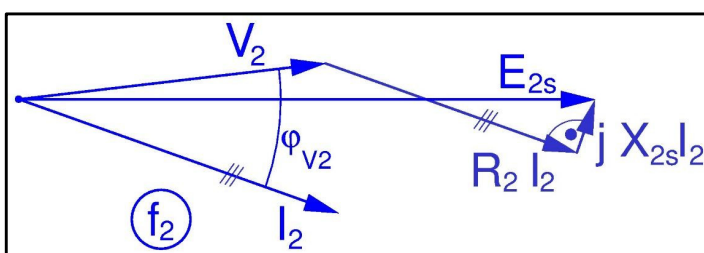


$$\bar{E}_{2s} = s \bar{E}_2 = \bar{V}_2 + \bar{I}_2 (R_2 + j X_{2s})$$

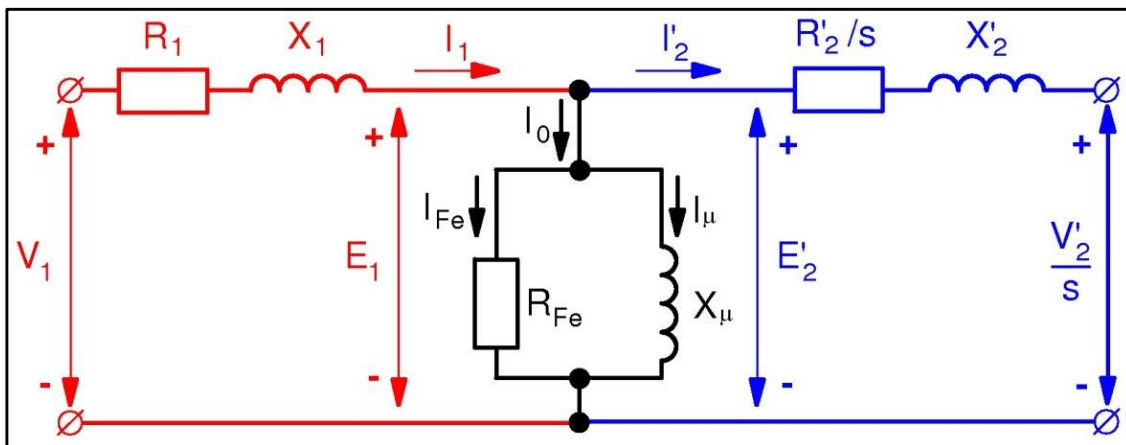
$$X_{2s} = s X_2$$

$$P_2 = m_2 V_2 I_2 \cos \varphi_{V2}$$

φ_{V2} : ángulo entre \bar{V}_2 e \bar{I}_2



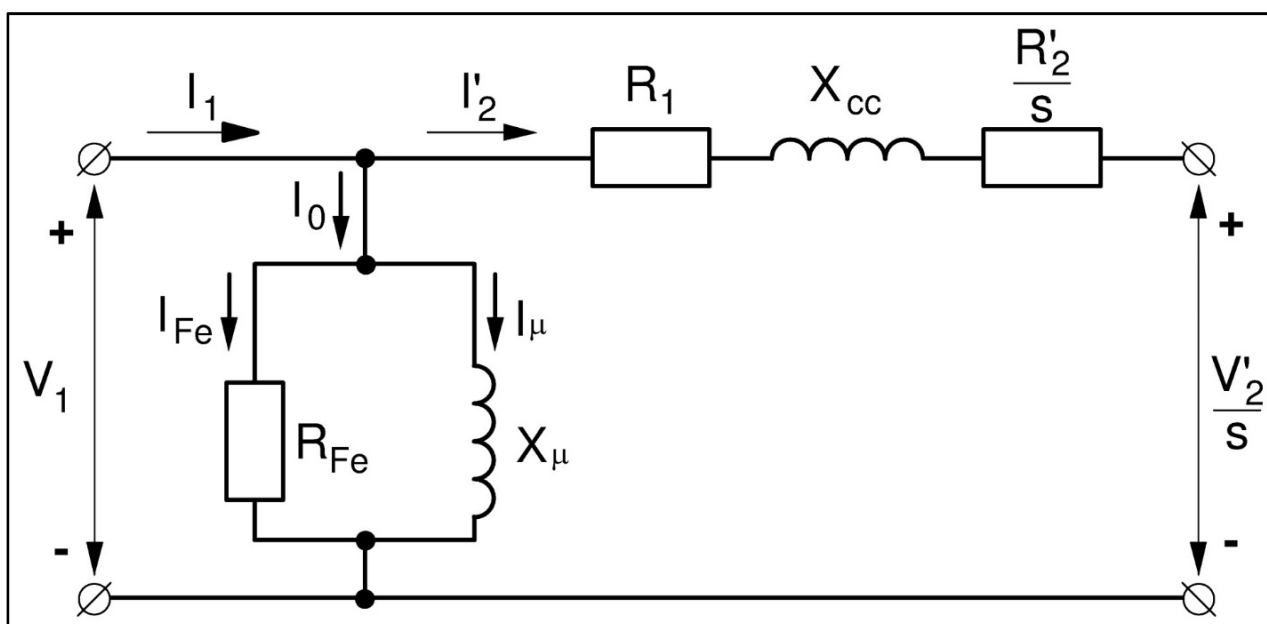
CIRCUITO EQUIVALENTE DE UNA MÁQUINA ASÍNCRONA DOBLEMENTE ALIMENTADA (2)



$$\begin{aligned} \bar{I}_1 &= \bar{I}_0 + \bar{I}'_2 \\ \bar{I}_0 &= \bar{I}_{Fe} + \bar{I}_\mu \\ \bar{V}_1 &= \bar{E}_1 + \bar{I}_1 (R_1 + jX_1) \end{aligned} \quad \left| \quad \begin{aligned} \bar{E}'_2 &= \bar{E}_1 = \frac{\bar{V}'_2}{s} + \bar{I}'_2 \left(\frac{R'_2}{s} + jX'_2 \right) \\ \bar{E}'_r &= \bar{E}'_2 - \frac{\bar{V}'_2}{s} = \bar{I}'_2 \left(\frac{R'_2}{s} + jX'_2 \right) \end{aligned} \right.$$

$$(P_2 = m_1 V'_2 I'_2 \cos \phi_{V2})$$

CIRCUITO EQUIVALENTE APROXIMADO DE UNA MÁQUINA ASÍNCRONA DOBLEMENTE ALIMENTADA



$$X_{cc} = X_1 + X'_2$$

DIAGRAMA FASORIAL DE UNA MÁQUINA ASÍNCRONA DOBLEMENTE ALIMENTADA CON EL ROTOR REDUCIDO AL ESTATOR

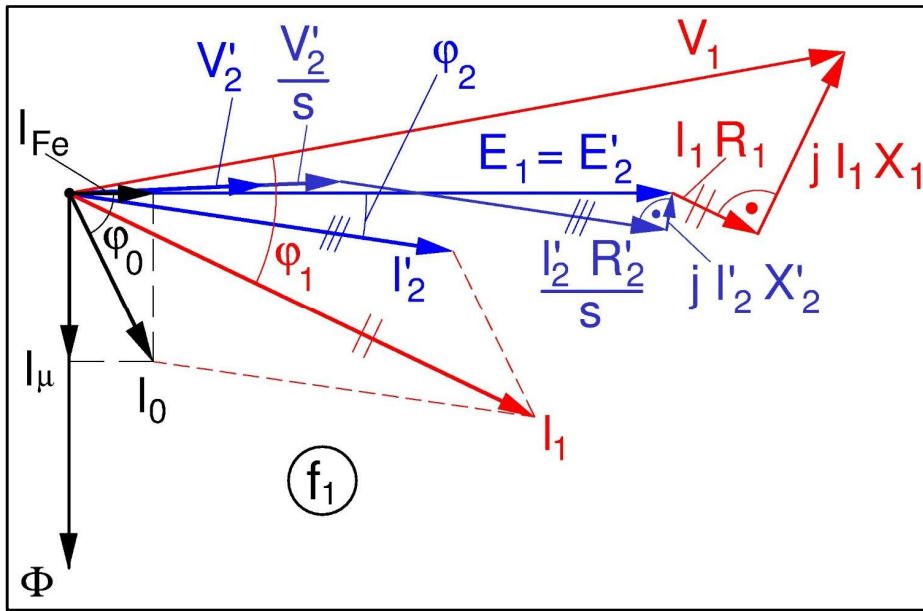


Diagrama fasorial de una máquina asíngrona doblemente alimentada con el rotor reducido al estator cuando funciona como motor y su deslizamiento s y potencia P_2 son positivos

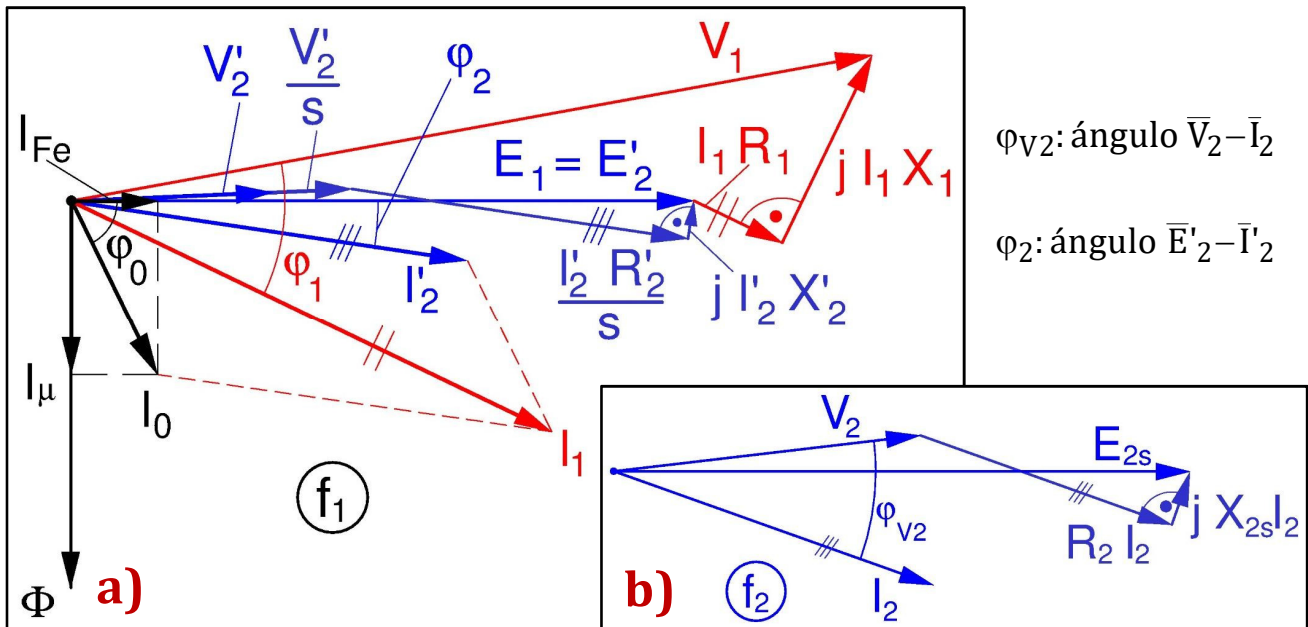
$$\bar{I}_1 = \bar{I}_0 + \bar{I}'_2$$

$$\bar{I}_0 = \bar{I}_{Fe} + \bar{I}_\mu$$

$$\bar{V}_1 = \bar{E}_1 + \bar{I}_1 (R_1 + jX_1)$$

$$\bar{E}'_2 = \bar{E}_1 = \frac{\bar{V}'_2}{s} + \bar{I}'_2 \left(\frac{R'_2}{s} + jX'_2 \right)$$

DIAGRAMAS FASORIALES DE UNA MÁQUINA ASÍNCRONA DOBLEMENTE ALIMENTADA



φ_{V2} : ángulo $\bar{V}_2 - \bar{I}_2$

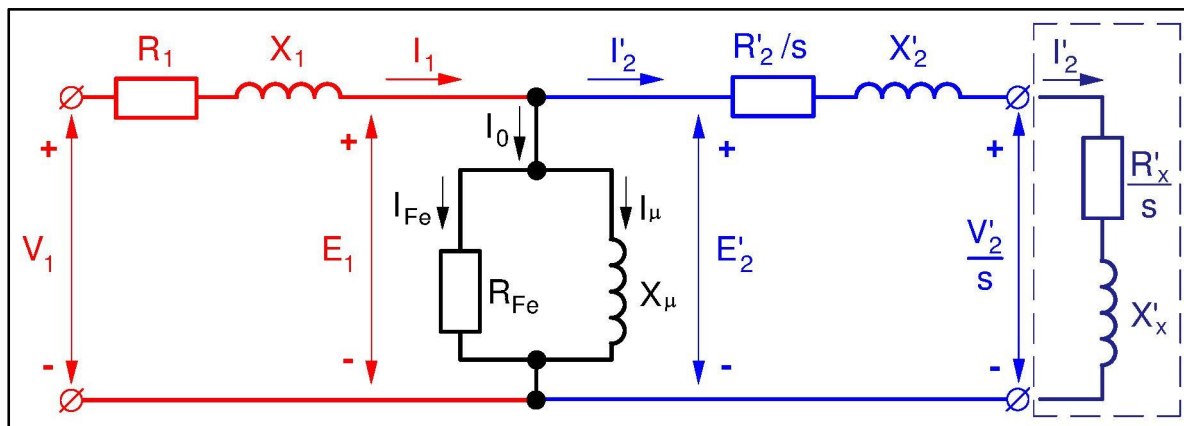
φ_2 : ángulo $\bar{E}'_2 - \bar{I}'_2$

Diagramas fasoriales de una máquina asíngrona doblemente alimentada cuando funciona como motor y su deslizamiento s y potencia P_2 son positivos.

a) Diagrama completo con el rotor reducido al estator (a frecuencia f_1)

b) Diagrama del rotor real (a frecuencia f_2)

IMPEDANCIA EXTERNA EQUIVALENTE A UNA MÁQUINA ASÍNCRONA DOBLEMENTE ALIMENTADA (1)

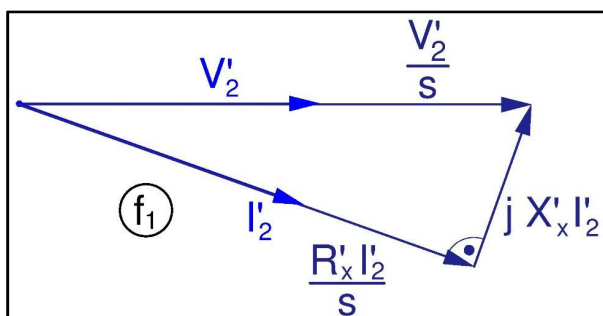


- Para un estado de funcionamiento concreto de una máquina asíncrona doblemente alimentada se puede considerar que el efecto de la tensión V_2 que se conecta a cada fase del rotor es el mismo que el de haberle conectado una impedancia externa equivalente cuyo valor reducido al estator es:

$$\bar{Z}'_x = R'_x + j X'_x = Z'_x \mid \varphi_x$$

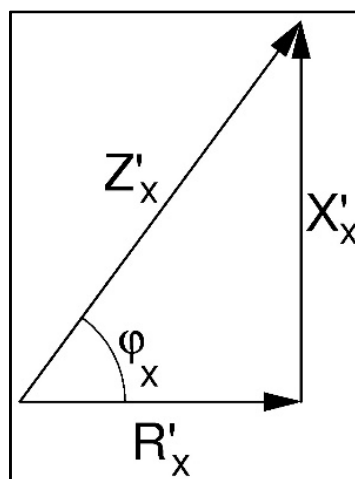
IMPEDANCIA EXTERNA EQUIVALENTE A UNA MÁQUINA ASÍNCRONA DOBLEMENTE ALIMENTADA (2)

- Esta impedancia externa equivalente sólo es válida para un estado de funcionamiento de la máquina. Para otro estado la impedancia externa equivalente tomará un valor distinto.
- Del circuito equivalente se deduce que:



$$\frac{\bar{V}'_2}{s} = \bar{I}'_2 \left(\frac{R'_x}{s} + j X'_x \right)$$

$$R'_x + j |s| \cdot X'_x = \frac{\bar{V}'_2}{\bar{I}'_2}$$



$$V'_2 = I'_2 \sqrt{R'^2_x + (s \cdot X'_x)^2}$$

IMPEDANCIA EXTERNA EQUIVALENTE A UNA MÁQUINA ASÍNCRONA DOBLEMENTE ALIMENTADA (3)

- Si la tensión \bar{V}_2 está desfasada con respecto a la corriente \bar{I}_2 , a través de los anillos del rotor se extrae una potencia reactiva Q_2 a frecuencia f_2 , la cual repercute sobre el estator como una potencia reactiva del mismo signo Q'_2 a frecuencia f_1 ($f_2 = s f_1$):

$$\left. \begin{aligned} Q_2 &= m_2 V_2 I_2 \sin \varphi_{v2} = m_1 I_2^2 (s |X'_x|) \\ Q'_2 &= m_1 \frac{V'_2}{|s|} I'_2 \sin \varphi_{v2} = m_1 I_2^2 X'_x \end{aligned} \right\} \boxed{Q_2 = |s| \cdot Q'_2}$$

Si \bar{I}_2 está retrasada con respecto a \bar{V}_2 , Q_2 y Q'_2 son positivas; pero si \bar{I}_2 está adelantada con respecto a \bar{V}_2 , Q_2 y Q'_2 son negativas. En este último caso X'_x es negativa y la máquina puede actuar como generador de potencia reactiva.

- El hecho de que Q_2 y Q'_2 tengan el mismo signo justifica el que se use el valor absoluto de s en la fórmula de R'_x y X'_x de la diapositiva anterior.
(Ver el anexo I).

IMPEDANCIA EXTERNA EQUIVALENTE A UNA MÁQUINA ASÍNCRONA DOBLEMENTE ALIMENTADA (4)

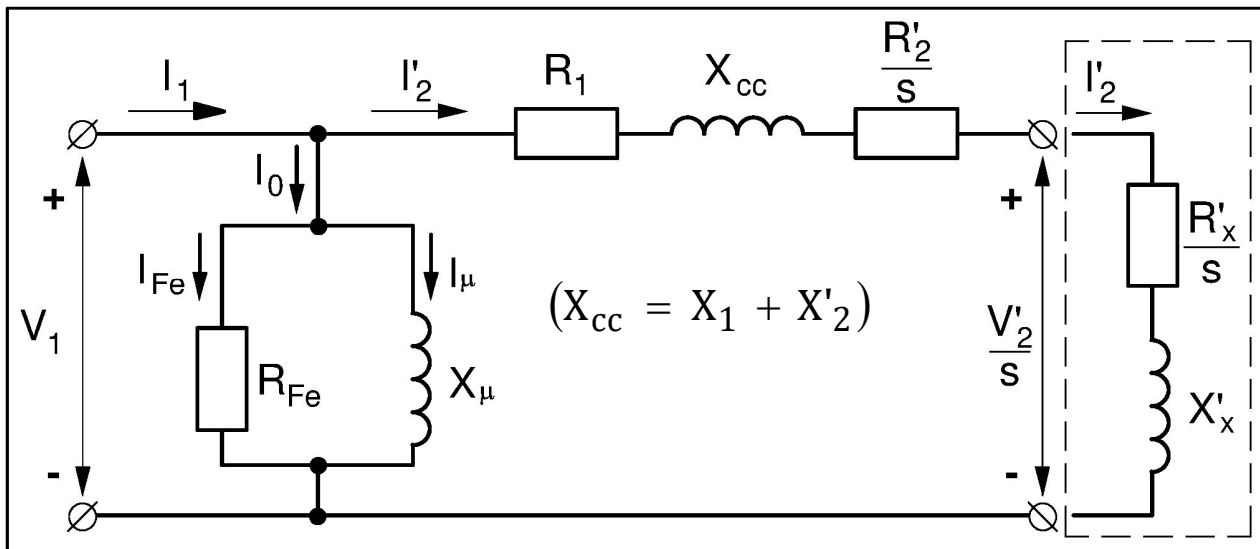
- La potencia activa P_2 que se extrae del rotor y se devuelve a la red a través del convertidor de frecuencia vale:

$$P_2 = m_2 V_2 I_2 \cos \varphi_{v2}$$

$$P_2 = m_1 V'_2 I'_2 \cos \varphi_{v2} = m_1 I_2^2 R'_x$$

Si esta potencia P_2 es negativa, significa que no se devuelve a la red sino que, al contrario, se absorbe de la red a través del convertidor de frecuencia y es enviada hacia el rotor. En este caso la resistencia adicional equivalente R'_x es negativa.

IMPEDANCIA EXTERNA EQUIVALENTE A UNA MÁQUINA ASÍNCRONA DOBLEMENTE ALIMENTADA (5)



Circuito equivalente aproximado de una máquina asíncrona doblemente alimentada con el rotor reducido al estator e incluyendo la impedancia externa equivalente.

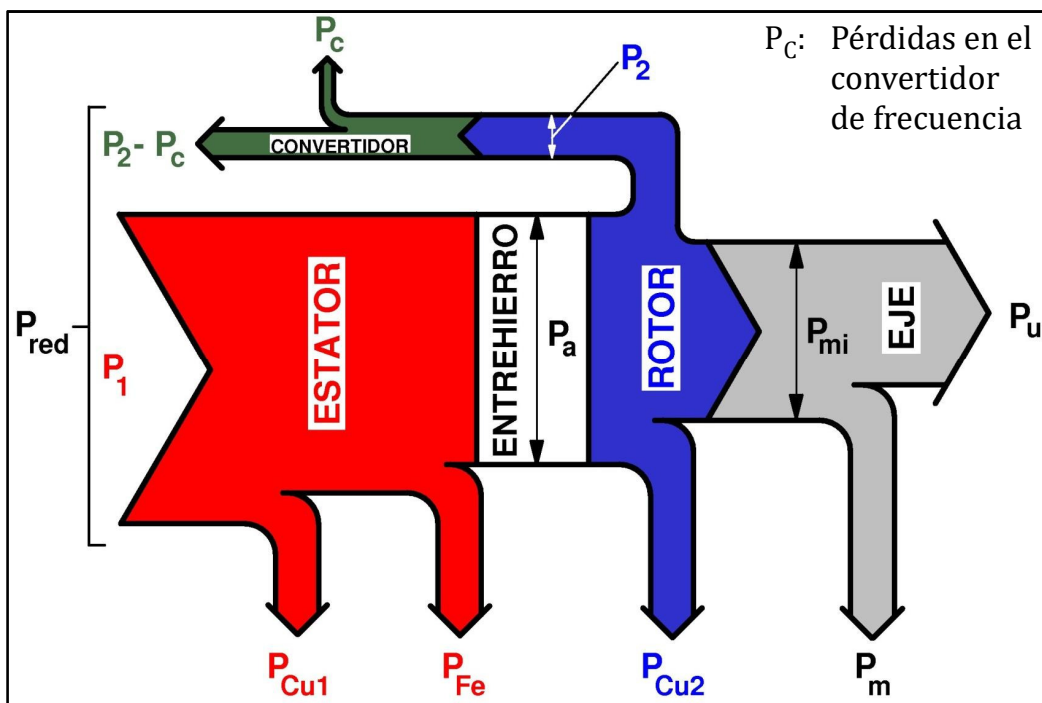
IMPEDANCIA EXTERNA EQUIVALENTE A UNA MÁQUINA ASÍNCRONA DOBLEMENTE ALIMENTADA (6)

- Se puede analizar un estado de funcionamiento de una máquina asíncrona doblemente alimentada utilizando las mismas fórmulas que para la máquina con el rotor en cortocircuito si se sustituyen sus parámetros del rotor R'_2 y X'_2 por $(R'_2 + R'_x)$ y $(X'_2 + X'_x)$, respectivamente :

$$I'_2 = \frac{V_1}{\sqrt{\left(R_1 + \frac{R'_2 + R'_x}{s}\right)^2 + (X_1 + X'_2 + X'_x)^2}}$$

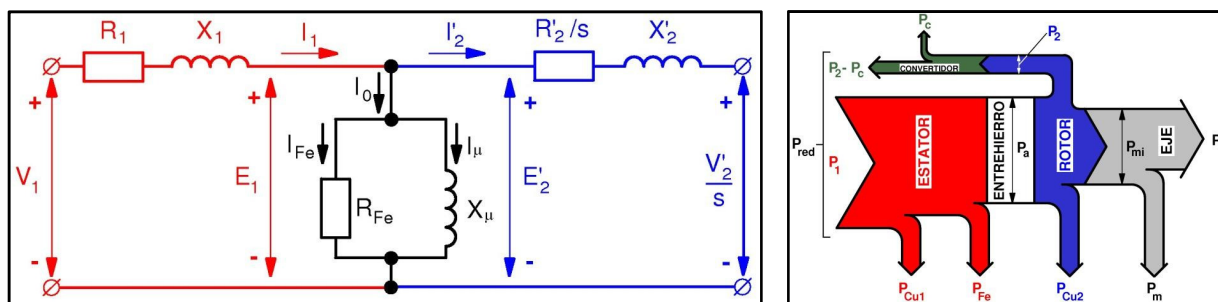
$$M = \frac{P_a}{\Omega_1} = \frac{m_1 V_1^2}{\frac{2\pi}{60} n_1} \frac{\frac{R'_2 + R'_x}{s}}{\left(R_1 + \frac{R'_2 + R'_x}{s}\right)^2 + (X_1 + X'_2 + X'_x)^2}$$

BALANCE DE POTENCIAS DE UN MOTOR ASÍNCRONO DOBLEMENTE ALIMENTADO CON DESLIZAMIENTO POSITIVO



En esta figura se ha adoptado el convenio de signos motor y se supone que el deslizamiento es positivo ($1 > s > 0$; $0 < n < n_1$)

RELACIONES ENTRE LAS POTENCIAS DE UN MOTOR ASÍNCRONO DOBLEMENTE ALIMENTADO



$$\varphi_2 = \text{Ángulo entre } \bar{E}'_2 \text{ e } \bar{I}'_2$$

$$\varphi_{V2} = \text{Ángulo entre } \bar{V}_2 \text{ e } \bar{I}_2$$

$$P_a = m_1 E'_2 I'_2 \cos \varphi_2$$

$$P_2 = m_1 V'_2 I'_2 \cos \varphi_{V2}$$

$$P_{Cu2} = m_1 R'_2 I'^2_2$$

$$P_a = P_{mi} + P_2 + P_{Cu2}$$

$$P_{mi} = (1 - s)P_a$$

$$(P_2 + P_{Cu2}) = s \cdot P_a$$

$$P_{mi} = \left(\frac{1 - s}{s} \right) (P_2 + P_{Cu2})$$

$$P_{mi} = \left(\frac{1 - s}{s} \right) (m_1 V'_2 I'_2 \cos \varphi_{V2} + m_1 R'_2 I'^2_2)$$

En el circuito equivalente se aprecia que la potencia activa total consumida en el rotor, P_a , es igual a la suma de la gastada en la resistencia R'_2/s más la debida a V'_2/s :

$$P_a = m_1 I_2^2 \frac{R'_2}{s} + m_1 \frac{V'_2}{s} I_2 \cos \varphi_{V2}$$

En consecuencia:

$$P_a = \frac{m_1 I_2^2 R'_2 + m_1 V'_2 I_2 \cos \varphi_{V2}}{s} \rightarrow \boxed{P_a = \frac{P_{Cu2} + P_2}{s}}$$

$$P_{mi} = P_a - (P_{Cu2} + P_2) = P_a - s \cdot P_a$$

$$\boxed{P_{mi} = (1 - s) P_a}$$

$$\boxed{P_{mi} = \left(\frac{1 - s}{s} \right) (P_2 + P_{Cu2})}$$

Luego, en el circuito equivalente la potencia mecánica interna P_{mi} es la suma de la gastada en la resistencia R'_c más la correspondiente a la tensión V'_c :

$$R'_c = R'_2 \left(\frac{1 - s}{s} \right) = R'_2 \left(\frac{1}{s} - 1 \right) \quad V'_c = V'_2 \left(\frac{1 - s}{s} \right) = V'_2 \left(\frac{1}{s} - 1 \right)$$

- En la práctica el valor absoluto de la potencia P_2 es siempre superior a P_{Cu2} . Por lo tanto, el signo de la suma $(P_2 + P_{Cu2})$ es el mismo que el de P_2 .

$$\boxed{P_a = \frac{P_{Cu2} + P_2}{s}}$$

$$\boxed{P_{mi} = \left(\frac{1 - s}{s} \right) (P_2 + P_{Cu2})}$$

- Si la potencia **P_2 es positiva** (P_2 es devuelta a la red a través del convertidor de frecuencia), sucede que $(P_{Cu2} + P_2) > 0$. Luego:
 - Si el deslizamiento **s es positivo ($s > 0$)**:
 $P_a > 0$; $P_{mi} > 0$: Funcionamiento como **motor**.
 - Si el deslizamiento **s es negativo ($s < 0$)**:
 $P_a < 0$; $P_{mi} < 0$: Funcionamiento como **generador**.
- Si la potencia **P_2 es negativa** (P_2 es inyectada al rotor mediante el convertidor de frecuencia), sucede que $(P_{Cu2} + P_2) < 0$. Luego:
 - Si el deslizamiento **s es positivo ($s > 0$)**:
 $P_a < 0$; $P_{mi} < 0$: Funcionamiento como **generador**.
 - Si el deslizamiento **s es negativo ($s < 0$)**:
 $P_a > 0$; $P_{mi} > 0$: Funcionamiento como **motor**.

CONTROL DE LA MÁQUINA ASÍNCRONA DOBLEMENTE ALIMENTADA

- La máquina asíncrona doblemente alimentada puede actuar de motor y de generador, tanto con deslizamientos positivos como negativos.
- Si el convertidor de frecuencia permite variar tanto el valor eficaz de V_2 como su ángulo de desfase, se pueden controlar (en valor y en signo) las potencias activa y reactiva absorbidas de la red y el par y el deslizamiento de la máquina. Todo esto con un convertidor que maneja la potencia P_2 que es sólo una fracción de la potencia P_1 del estator:
 - La componente de \bar{V}_2 paralela a \bar{E}_2 sobre todo afecta a la potencia activa P_1 absorbida por la máquina, al par M y al deslizamiento s .
 - La componente de \bar{V}_2 perpendicular a \bar{E}_2 básicamente influye sobre la potencia reactiva Q_1 absorbida por la máquina.

(ver el anexo II)

SIMPLIFICACIÓN DEL BALANCE DE POTENCIAS DE UN MOTOR ASÍNCRONO DOBLEMENTE ALIMENTADO

Si se desprecian todas las pérdidas: P_{Cu1} , P_{Cu2} , P_{Fe} , P_m y P_c (P_c son las pérdidas en el convertidor de frecuencia), el balance de potencias de la máquina asíncrona queda así:

$$P_{Cu1} \text{ y } P_{Fe} \approx 0 \Rightarrow P_1 \approx P_a = m_1 E'_2 I'_2 \cos \varphi_2 \quad \boxed{P_1 \approx P_a}$$

$$P_{Cu2} \approx 0 \Rightarrow P_2 = s \cdot P_a \approx s \cdot P_1 \quad \boxed{P_2 \approx s \cdot P_1}$$

$$P_m \approx 0 \Rightarrow P_u \approx P_{mi} = (1 - s) P_a \quad \boxed{P_u \approx (1 - s) P_1}$$

$$P_c \approx 0 \Rightarrow P_{red} = P_1 - P_2 + P_c \approx P_1 - P_2 \quad \boxed{P_{red} \approx P_1 - P_2 \approx P_u}$$

(P_{red} es la potencia total que el motor consume de la red)

BALANCE DE POTENCIAS SIMPLIFICADO DE UN MOTOR ASÍNCRONO DOBLEMENTE ALIMENTADO (1)

Máquina actuando como **motor**:

- $P_1 > 0$: P_1 se absorbe por el estator.
- $P_a > 0$: P_a va desde el estator hacia el rotor a través del entrehierro.
- $\cos \varphi_2 > 0$; $|\varphi_2| < 90^\circ$
- P_u y $P_{mi} > 0$: La máquina suministra potencia mecánica por su eje.

BALANCE DE POTENCIAS SIMPLIFICADO DE UN MOTOR ASÍNCRONO DOBLEMENTE ALIMENTADO (2)

- Máquina actuando como **motor**:
- DESLIZAMIENTO POSITIVO ($1 > s > 0$; $0 < n < n_1$):
 - $P_2 \approx s \cdot P_1 > 0$ La potencia P_2 sale del rotor hacia la red a través del convertidor de frecuencia y $|\varphi_{V2}| < 90^\circ$.
 - $P_{red} \approx P_1 - P_2 \approx P_u > 0$ Se consume potencia activa de la red.
- DESLIZAMIENTO NEGATIVO ($s < 0$; $n > n_1$):
 - $P_2 \approx s \cdot P_1 < 0$ La potencia P_2 entra al rotor desde la red a través del convertidor de frecuencia y $|\varphi_{V2}| > 90^\circ$.
 - $P_{red} \approx P_1 + |P_2| \approx P_u > 0$ Se consume potencia activa de la red.
 - En este caso se consume potencia activa de la red por el estator y por el rotor.

BALANCE DE POTENCIAS SIMPLIFICADO DE UN GENERADOR ASÍNCRONO DOBLEMENTE ALIMENTADO (1)

Máquina actuando como *generador*:

- $P_1 < 0$: P_1 se envía a la red desde el estator.
- $P_a < 0$: P_a va desde el rotor hacia el estator a través del entrehierro.
- $\cos \varphi_2 < 0$; $|\varphi_2| > 90^\circ$
- P_u y $P_{mi} < 0$: La máquina absorbe potencia mecánica por su eje.
- Haciendo que la tensión \bar{V}_2 tenga una componente perpendicular a \bar{E}_2 se puede conseguir que un generador asíncrono suministre potencia reactiva a la red (lo que es imposible cuando el rotor está en cortocircuito).

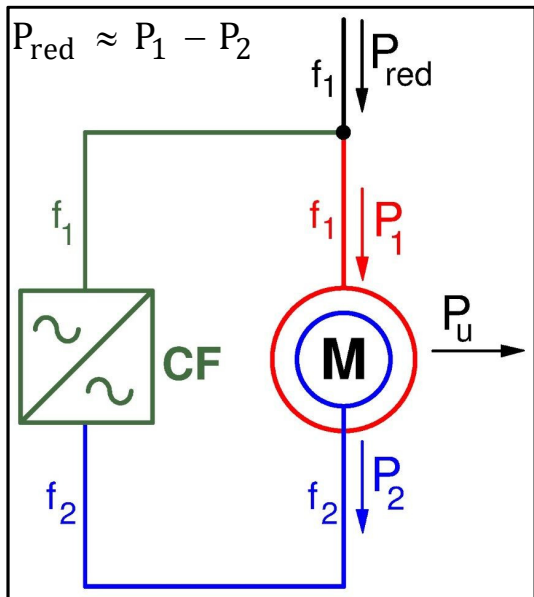
BALANCE DE POTENCIAS SIMPLIFICADO DE UN GENERADOR ASÍNCRONO DOBLEMENTE ALIMENTADO (2)

- Máquina actuando como *generador*:
- DESLIZAMIENTO POSITIVO ($1 > s > 0$; $0 < n < n_1$):
 - $P_2 \approx s \cdot P_1 < 0$ La potencia P_2 es absorbida de la red por el rotor a través del convertidor de frecuencia y $|\varphi_{V2}| > 90^\circ$.
 - $P_{red} \approx P_1 - P_2 \approx P_u < 0$ Se envía potencia activa a la red.
 $|P_{red}| \approx |P_1| - |P_2|$
- DESLIZAMIENTO NEGATIVO ($s < 0$; $n > n_1$):
 - $P_2 \approx s \cdot P_1 > 0$ La potencia P_2 sale del rotor hacia la red a través del convertidor de frecuencia y $|\varphi_{V2}| < 90^\circ$
 - $P_{red} \approx P_1 - P_2 \approx P_u < 0$ Se envía potencia activa a la red.
 - $|P_{red}| \approx |P_1| + |P_2|$ En este caso se genera potencia activa tanto en el estator como en el rotor y, por lo tanto, se puede producir más potencia que la asignada.

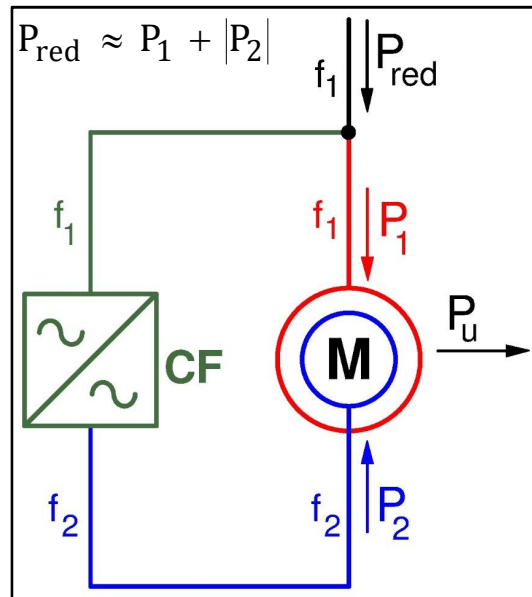
BALANCES DE POTENCIAS SIMPLIFICADOS DE UN MOTOR ASÍNCRONO DOBLEMENTE ALIMENTADO

Funcionamiento como motor: $P_{red} > 0$; $P_1 > 0$; $P_{mi} > 0$

$$(P_2 \approx s \cdot P_1 ; P_u \approx (1 - s)P_1)$$



$$P_2 > 0; 1 > s > 0; 0 < n < n_1$$

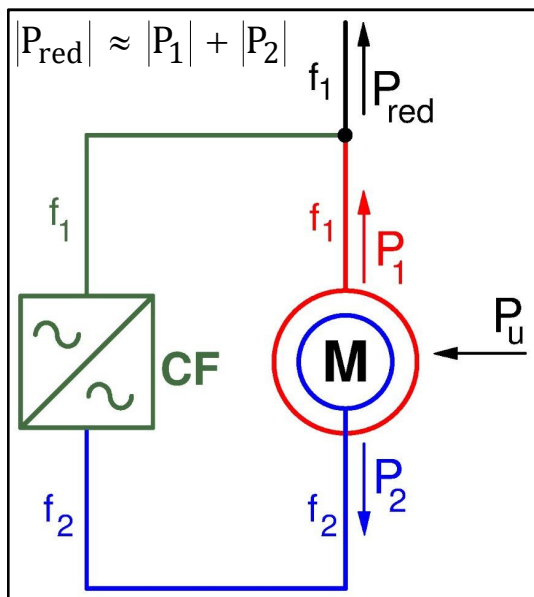


$$P_2 < 0; s < 0; n > n_1$$

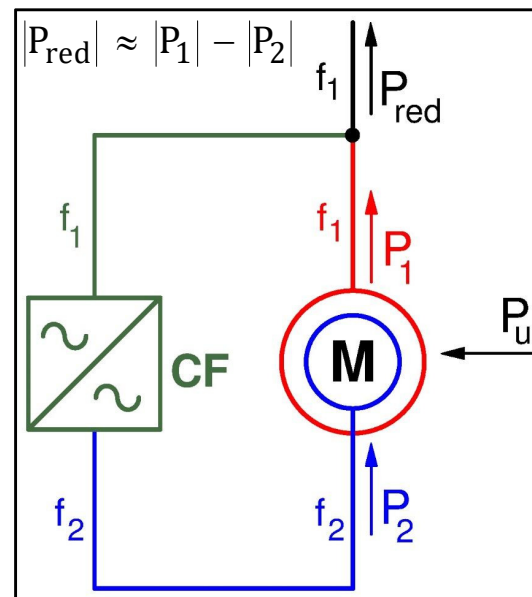
BALANCES DE POTENCIAS SIMPLIFICADOS DE UN GENERADOR ASÍNCRONO DOBLEMENTE ALIMENTADO

Funcionamiento como generador: $P_{red} < 0$; $P_1 < 0$; $P_{mi} < 0$

$$(P_2 \approx s \cdot P_1 ; P_u \approx (1 - s)P_1)$$



$$P_2 > 0; s < 0; n > n_1$$



$$P_2 < 0; 1 > s > 0; 0 < n < n_1$$

BIBLIOGRAFÍA

- [1] ALGER, P. L. 1970. *Induction machines. Their behavior and uses*. 2ª edición. New York: Gordon and Breach Science Publishers.
- [2] APARICIO MARZO, J. L. 1987. *Criterios de diseño de convertidores estáticos para accionamientos regulados en corriente alterna con motores de inducción*. Santiago de Compostela. Saber Hoy, S.A. de Ediciones.
- [3] BOLDEA, ION. 2006. *Variable speed generators*. Florida-U.S.A.: CRC Press, Taylor&Francis Group.
- [4] BOSE, B. K. 1986. *Power electronics and AC drives*. New Jersey - U.S.A. Prentice-Hall.
- [5] CHAPALLAZ, J.-M., DOS GHALL, J., EICHENBERGER, P. y FISCHER, F. 1992. *MHPG Series, Harnessing water power on small scale, vol. 10: Manual of induction motors used as generators*. Alemania: GTZ.
- [6] CHAPMAN. 2005. *Máquinas eléctricas*. Madrid: McGraw-Hill Interamericana.
- [7] CORTES CHERTA. 1994. *Curso moderno de máquinas eléctricas rotativas. 5 tomos*. Barcelona: Editores Técnicos Asociados.
- [8] FITZGERALD, KINGSLEY Y UMANS. 2004. *Máquinas eléctricas*. Madrid: McGraw-Hill Interamericana.
- [9] FAURE BENITO. 2000. *Máquinas y accionamientos eléctricos*. Madrid: Colegio oficial de ingenieros navales y oceánicos.
- [10] FRAILE MORA, J. 2015. *Máquinas eléctricas*. Madrid: Ibergarceta Publicaciones, S.L.
- [11] IVANOV-SMOLENSKI. 1984. *Máquinas eléctricas*. Moscú: Editorial Mir.
- [12] KOSTENKO y PIOTROVSKI. 1979. *Máquinas eléctricas*. Moscú: Editorial Mir.
- [13] LANGSDORF. 1968. *Teoría de las máquinas de corriente alterna*. Madrid. Editorial Castillo D.L.
- [14] LEONHARD, W. 1985. *Control of electrical drives*. Berlin. Springer-Verlag.
- [15] MURPHY, J. M. D. & TURNBULL, F. G. 1988. *Power electronic control of AC motors*. Oxford - Gran Bretaña. Pergamon Press.
- [16] PICHOR, J. 1969. *Curso de electrotecnia IV. Máquinas eléctricas: máquinas de inducción*. Barcelona: Marcombo Boixareu Editores.
- [17] RODRÍGUEZ AMENEDO, J.L.; ARNALTE, S.; BURGOS, J.C. 2003. *Sistemas eólicos de producción de energía eléctrica*. Madrid: Editorial Rueda, S.L.
- [18] SANZ FEITO, JAVIER. 2002. *Máquinas eléctricas*. Madrid: Pearson Education.
- [19] RODRÍGUEZ POZUETA, M.A. 2008. *Máquinas asíncronas*. Santander: Universidad de Cantabria. <http://personales.unican.es/rodrigma/PDFs/asincronas%20caminos.pdf>
- [20] SERRANO IRIBARNEGARAY, L. 1989. *Fundamentos de máquinas eléctricas rotativas*. Barcelona: Marcombo Boixareu Editores.
- [21] SUÁREZ CREO, J.M. y MIRANDA BLANCO, B.N. 2006. *Máquinas eléctricas. Funcionamiento en régimen permanente*. Santiago de Compostela: Tórculo Edicións, S.L.
- [22] WILDI, T. 2007. *Máquinas eléctricas y sistemas de potencia*. México: Pearson Educación.

ANEXOS

MÁQUINA ASÍNCRONA DOBLEMENTE ALIMENTADA. ANEXOS

Miguel Angel Rodríguez Pozueta

ANEXO I: POTENCIA REACTIVA

- Recordemos que la potencia reactiva no representa a una potencia realmente consumida. En un circuito de corriente alterna formado por un generador y un receptor con elementos capaces de almacenar energía (inductancias y condensadores), durante medio ciclo la energía fluye del generador hacia el receptor, donde queda almacenada en forma de campo magnético (inductancias) o de campo eléctrico (condensadores). Durante el medio ciclo restante, la energía previamente almacenada es devuelta al generador. Por lo tanto, la potencia reactiva proviene de una energía que va y viene del generador hacia el receptor y viceversa y cuyo valor medio es nulo.

El comportamiento frente a la potencia reactiva de las inductancias y de los condensadores es diferente. En el medio periodo en el que una inductancia está recibiendo energía desde el generador, un condensador está devolviendo al generador la energía que había almacenado previamente y viceversa.

Por convenio establecemos que una autoinducción *consume* energía reactiva y un condensador la *genera*. Realmente ambos consumen por término medio una potencia nula, pero de esta manera distinguimos las dos formas diferentes de actuar de bobinas y de condensadores.

Dado que se está analizando la máquina asíncrona partiendo de que funciona como motor (convenio de signos motor), lo anterior significa que la potencia reactiva para elementos con factor de potencia inductivo es positiva (consumida) y para elementos con factor de potencia capacitivo es negativa (generada):

- Factor de potencia inductivo: $Q > 0$
- Factor de potencia capacitivo: $Q < 0$

- En una máquina asíncrona, tanto con el rotor en cortocircuito como doblemente alimentada, el rotor es un circuito eléctrico a frecuencia f_2 mientras que el estator tiene una frecuencia f_1 . Ambas frecuencias están ligadas así:

$$f_2 = s \cdot f_1 \quad (I.1)$$

Es el hecho de que el rotor gire a una velocidad n el que hace que las frecuencias del estator y del rotor sean diferentes.

Esto provoca que un elemento del rotor que tiene una potencia reactiva Q a frecuencia f_2 repercute sobre el estator con una potencia reactiva Q' a frecuencia f_1 de esta manera:

$$Q = |s| \cdot Q' \quad Q' = \frac{Q}{|s|} \quad (I.2)$$

En las expresiones anteriores se usa el valor absoluto del deslizamiento s porque ambas potencias reactivas, Q y Q' , tienen siempre el mismo signo, independientemente del signo de s .

En resumen, una potencia reactiva Q en el rotor queda modificada por el movimiento de la máquina de forma que da lugar en el estator a una potencia reactiva Q' del mismo signo.

- En una máquina asíncrona doblemente alimentada la potencia reactiva Q_2 , correspondiente a la tensión aplicada al rotor V_2 y que se envía hacia el convertidor de frecuencia a través de los anillos del colector, tiene una frecuencia f_2 y vale:

$$Q_2 = m_2 V_2 I_2 \text{ sen } \varphi_{V_2} = m_1 V'_2 I'_2 \text{ sen } \varphi_{V_2} \quad (\text{I.3})$$

(a frecuencia f_2)

$$I'_2 = I_2/m_i \quad V'_2 = m_v V_2 \quad (\text{I.4})$$

En estas expresiones m_1 y m_2 son, respectivamente, los números de fases del estator y del rotor y, por otra parte, m_i y m_v son, respectivamente, las relaciones de transformación de corrientes y de tensiones. Además, el ángulo φ_{V_2} es el formado entre \bar{V}_2 e \bar{I}_2 .

Como se ha indicado en el párrafo anterior, esta potencia reactiva Q_2 repercute sobre el estator haciendo que aparezca en él una potencia Q'_2 a frecuencia f_1 . Aplicando la relación (I.2) a estas potencias y teniendo en cuenta la relación (I.3) se deduce que:

$$Q_2 = |s| \cdot Q'_2 \quad Q'_2 = \frac{Q_2}{|s|} \quad (\text{I.5})$$

$$Q'_2 = m_1 \frac{V'_2}{|s|} I'_2 \text{ sen } \varphi_{V_2} = m_1 X'_x I'^2_2 \quad (\text{I.6})$$

(a frecuencia f_1)

- La potencia activa P_2 que envía el rotor a través de sus anillos verifica que:

$$P_2 = m_2 V_2 I_2 \text{ cos } \varphi_{V_2} \quad (\text{I.7a})$$

$$P_2 = m_1 V'_2 I'_2 \text{ cos } \varphi_{V_2} = m_1 R'_x I'^2_2 \quad (\text{I.7b})$$

De lo que se deduce que el ángulo φ_{V_2} de desfase entre \bar{V}_2 e \bar{I}_2 y el ángulo φ_x de la impedancia externa equivalente \bar{Z}'_x están relacionados así:

$$\bar{Z}'_x = R'_x + j X'_x = Z'_x \angle \varphi_x$$

$$\frac{Q_2}{P_2} = \frac{\text{sen } \varphi_{V_2}}{\text{cos } \varphi_{V_2}} = \text{tg } \varphi_{V_2} \quad \frac{Q'_2}{P_2} = \frac{X'_x}{R'_x} = \text{tg } \varphi_x \quad \frac{\text{tg } \varphi_{V_2}}{\text{tg } \varphi_x} = \frac{Q_2}{Q'_2} = |s|$$

$$\text{tg } \varphi_{V_2} = |s| \cdot \text{tg } \varphi_x \quad (\text{I.8})$$

- En el rotor hay dos potencias reactivas: Q_2 , debida a V_2 , y $Q_{\sigma 2}$, debida a la inductancia de dispersión L_{d2} (que al reducir al estator da lugar a la reactancia de dispersión X'_2). Ambas potencias reactivas se producen en un circuito de frecuencia f_2 y suman la potencia reactiva Q_a (ver la Fig. I.1):

$$Q_a = Q_{\sigma 2} + Q_2 \quad (I.9)$$

(a frecuencia f_2)

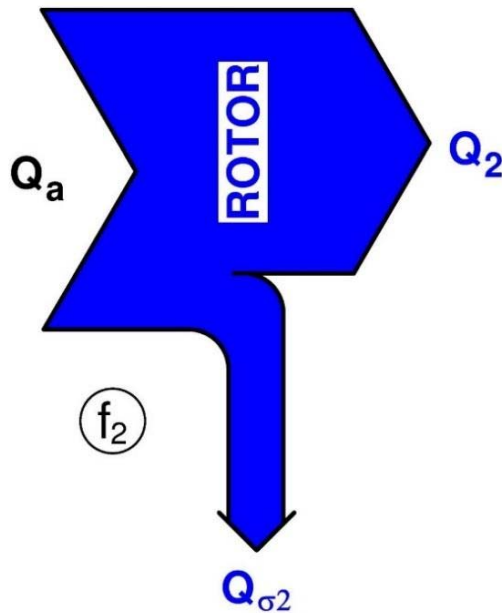


Fig. I.1: Flujo de potencia reactiva en el rotor, a frecuencia f_2 (se supone que $Q_2 > 0$)

- El flujo de potencia reactiva en el estator se muestra en la Fig. I.2.

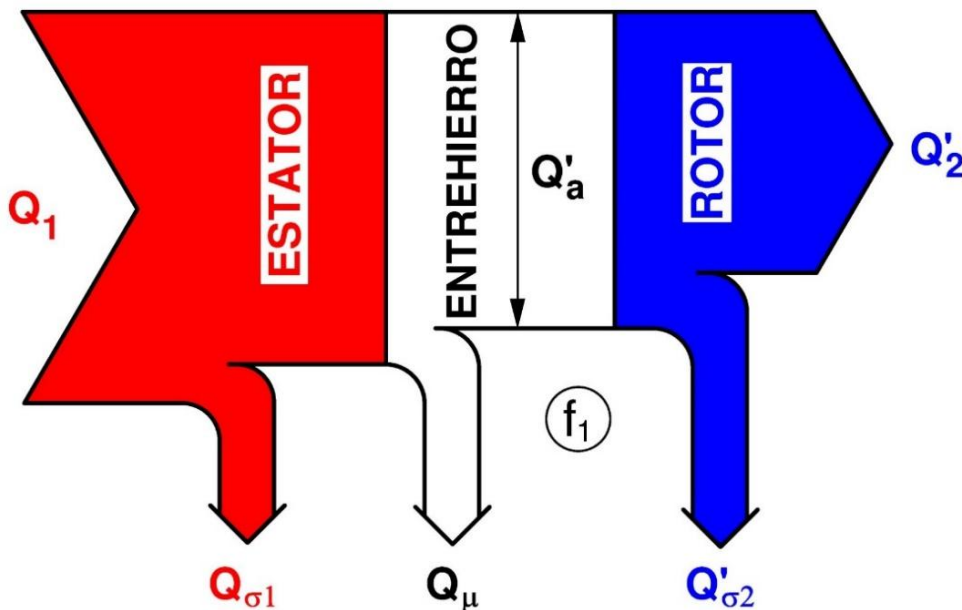


Fig. I.2: Flujo de potencia reactiva en el estator, a frecuencia f_1 (se supone que $Q'_2 > 0$)

Según esta figura, la potencia reactiva total del rotor Q'_a referida al estator verifica lo siguiente:

$$Q'_a = Q'_{\sigma 2} + Q'_2 = \frac{Q_a}{|s|} \quad (\text{I.10})$$

(a frecuencia f_1)

Del circuito equivalente (Fig. II.1) se deduce que Q'_a también cumple que:

$$Q'_a = m_1 E'_2 I'_2 \cos \varphi_2 \quad (\text{I.11})$$

$Q'_{\sigma 2}$ es la potencia reactiva de dispersión del rotor referida al estator:

$$Q'_{\sigma 2} = m_1 X'_2 I'^2_2 \quad (\text{I.12})$$

Q_1 es la potencia reactiva total que la máquina consume por el estator:

$$Q_1 = m_1 V_1 I_1 \cos \varphi_1 \quad (\text{I.13a})$$

$$Q_1 = Q_{\sigma 1} + Q_\mu + Q'_{\sigma 2} + Q'_2 = Q_{\sigma 1} + Q_\mu + Q'_a \quad (\text{I.13b})$$

$Q_{\sigma 1}$ es la potencia reactiva de dispersión del estator y Q_μ es la potencia reactiva magnetizante:

$$Q_{\sigma 1} = m_1 X_1 I^2_1 \quad Q_\mu = m_1 X_\mu I^2_0 \quad (\text{I.14})$$

- Las potencias reactivas $Q_{\sigma 1}$, Q_μ y $Q_{\sigma 2}$ son siempre positivas, mientras que la potencia Q_2 puede tener signo positivo o negativo, dependiendo del ángulo de desfase φ_{v2} .

Cuando la máquina tiene el rotor en cortocircuito no existe la tensión V_2 ni la potencia reactiva Q_2 . Por lo tanto, *una máquina asíncrona con el rotor cortocircuitado nunca podrá generar potencia reactiva* y Q_1 siempre será positiva.

Cuando la máquina asíncrona está doblemente alimentada y el convertidor del rotor permite modificar el ángulo φ_{v2} es posible conseguir que la potencia Q_1 sea negativa (si Q_2 es negativa y lo suficientemente grande en valor absoluto como para superar a la suma de las potencias positivas $Q_{\sigma 1}$, Q_μ y $Q_{\sigma 2}$). Es decir, *la máquina asíncrona doblemente alimentada puede funcionar como generador de potencia reactiva*.

Por otra parte, hay que considerar que, si se desea que el convertidor de frecuencia no solamente origine la potencia activa P_2 , sino también la potencia reactiva Q_2 ; el convertidor debe ser capaz de modificar el ángulo φ_{v2} y por él debe circular una corriente mayor, lo que exige que sea de mayor potencia. Todo esto hace que el convertidor sea más caro.

ANEXO II: CONTROL DE LA MÁQUINA ASÍNCRONA DOBLEMENTE ALIMENTADA

- En una máquina asíncrona, el par M se puede obtener así:

$$M = \frac{P_a}{\Omega_1} = \frac{P_a}{\frac{2\pi}{60} n_1} \quad (II.1)$$

Ω_1 es la velocidad de sincronismo expresada en radianes/segundo y n_1 también es la velocidad de sincronismo, pero expresada en r.p.m. P_a es la potencia del entrehierro, es decir, la potencia que va del estator al rotor atravesando el entrehierro. P_a se calcula así:

$$P_a = m_1 E'_2 I'_2 \cos \varphi_2 = m_1 E'_2 I'_{2a} \quad (II.2)$$

$$I'_{2a} = I'_2 \cos \varphi_2 \quad (II.3)$$

Por otra parte, la potencia reactiva total del rotor referida al estator Q'_a se calcula de esta manera:

$$Q'_a = m_1 E'_2 I'_2 \sin \varphi_2 = m_1 E'_2 I'_{2r} \quad (II.4)$$

$$I'_{2r} = I'_2 \sin \varphi_2 \quad (II.5)$$

En las expresiones anteriores φ_2 es el ángulo entre \bar{E}'_2 e \bar{I}'_2 . En las fórmulas (II.2) y (II.4) se aprecia que mediante la componente I'_{2a} de \bar{I}'_2 paralela a \bar{E}'_2 se puede controlar el par M; lo cual, a su vez, permite ajustar el valor del deslizamiento s (o la velocidad n del rotor) al valor deseado. I'_{2a} también permite regular el valor de la potencia activa del estator P_1 al modificar la potencia P_a . Por otra parte, la componente I'_{2r} de \bar{I}'_2 perpendicular a \bar{E}'_2 permite modificar la potencia reactiva del estator Q_1 al actuar sobre Q'_a .

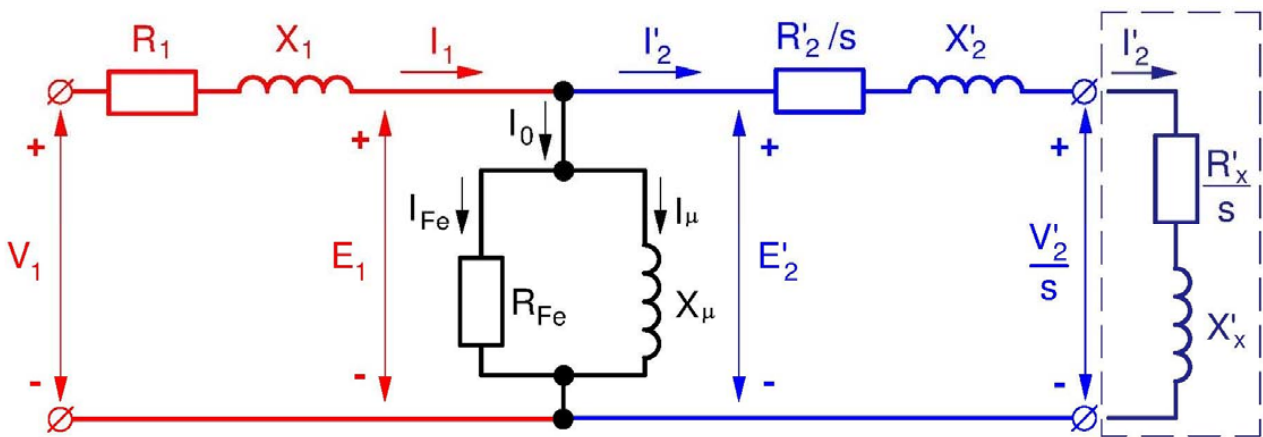


Fig. II.1: Circuito equivalente de una máquina asíncrona doblemente alimentada

Del circuito equivalente del motor asíncrono doblemente alimentado (Fig. II.1) se deduce que:

$$\bar{E}'_2 = \frac{\bar{V}'_2}{s} + \bar{I}'_2 \left(\frac{R'_2}{s} + jX'_2 \right) \quad (II.6)$$

- Si la máquina funciona con un deslizamiento s pequeño sucede que:

$$s \ll 1 \Rightarrow \frac{R'_2}{s} \gg X'_2 \Rightarrow \frac{R'_2}{s} + jX'_2 \approx \frac{R'_2}{s} \quad (II.7)$$

De las relaciones (II.6) y (II.7) se obtiene que:

$$s \ll 1 \Rightarrow \bar{E}'_2 \approx \frac{\bar{V}'_2}{s} + \bar{I}'_2 \frac{R'_2}{s} \Rightarrow \bar{I}'_2 \approx \frac{s \bar{E}'_2 - \bar{V}'_2}{R'_2} \quad (II.8)$$

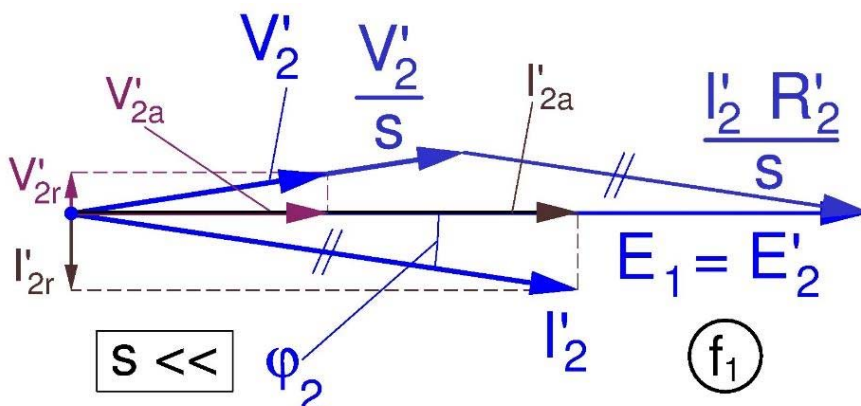


Fig. II.2: Componentes de \bar{V}'_2 e \bar{I}'_2 y diagrama fasorial cuando el deslizamiento s es pequeño.

En esta figura I'_{2a} e I'_{2r} son positivos, pues originan potencias P_2 y Q_2 positivas

La expresión (II.8) da lugar al diagrama de la figura II.2, donde se muestran los sentidos positivos de I'_{2a} e I'_{2r} (que son los que dan lugar a potencias P_2 y Q_2 positivas) y de la cual se deduce que:

$$s \ll 1 \Rightarrow I'_{2a} \approx \frac{s E'_2 - V'_{2a}}{R'_2}; \quad I'_{2r} \approx -\frac{V'_{2r}}{R'_2} \quad (II.9)$$

De estas relaciones se deduce que, con deslizamientos s pequeños, mediante la componente V'_{2a} de \bar{V}'_2 paralela a \bar{E}'_2 se controla I'_{2a} y mediante la componente V'_{2r} de \bar{V}'_2 perpendicular a \bar{E}'_2 se controla I'_{2r} .

Una máquina asíncrona doblemente alimentada puede alcanzar en régimen permanente deslizamientos s mayores que con el rotor en cortocircuito (típicamente en estas máquinas el convertidor permite que $|s|$ pueda llegar a valer 0,2 o, incluso, 0,25) donde ya no son válidas las aproximaciones (II.7), (II.8) y (II.9). Aun así, se puede afirmar que la componente V'_{2a} de \bar{V}'_2 paralela a \bar{E}'_2 básicamente modifica el par M , el deslizamiento s y la potencia P_1 ; mientras que la componente V'_{2r} de \bar{V}'_2 perpendicular a \bar{E}'_2 fundamentalmente regula la potencia reactiva del estator Q_1 .

ANEXO III:**EJEMPLO DE CÁLCULO DE UNA MÁQUINA ASÍNCRONA DOBLEMENTE ALIMENTADA**

Una máquina asíncrona trifásica de rotor devanado tiene estas características:

$$\begin{array}{lll}
 V_{1NL} = 400 \text{ V} & \text{Estator conectado en triángulo} & f_1 = 50 \text{ Hz} \\
 R_1 = 0,1 \Omega & R'_2 = 0,2 \Omega & X_{cc} = 1 \Omega \\
 m_i = m_v = \sqrt{2} & n_N = 1470 \text{ r.p.m.} & X'_2 / X_{cc} = 0,5 \\
 & & 2p = 4 \text{ polos}
 \end{array}$$

Responda a las siguientes cuestiones:

- a)** Calcule el par M_N , la corriente que circula por cada fase del rotor I_{2N} , la potencia activa en el entrehierro P_{aN} , las pérdidas en el cobre del rotor P_{Cu2N} y el ángulo φ_{2N} cuando la máquina funciona como motor en las condiciones asignadas.

Ahora la máquina va a funcionar doblemente alimentada, pues en el rotor se va a conectar un convertidor de frecuencia. Este convertidor no va a permitir modificar el ángulo φ_{V2} y la potencia reactiva Q_2 va a ser nula. Este convertidor permite que la potencia activa P_2 que sale a través de los anillos del rotor sea tanto positiva (se envía del rotor a la red) como negativa (se absorbe de la red). Funcionando con este convertidor, calcule la tensión de línea entre los anillos del rotor V_{2L} , la corriente que circula por cada fase del rotor I_2 , la potencia activa en los anillos del rotor P_2 , las pérdidas en el cobre del rotor P_{Cu2} , la potencia activa en el entrehierro P_a y el ángulo φ_2 en los siguientes casos:

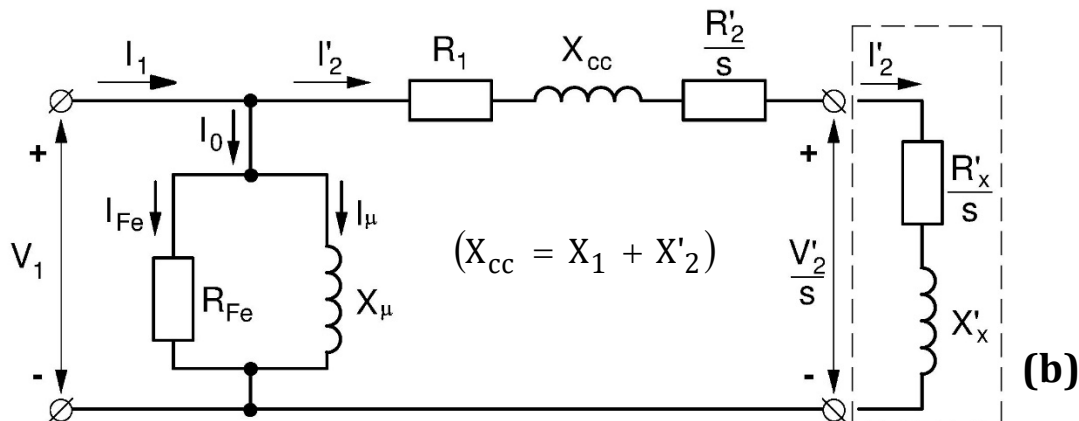
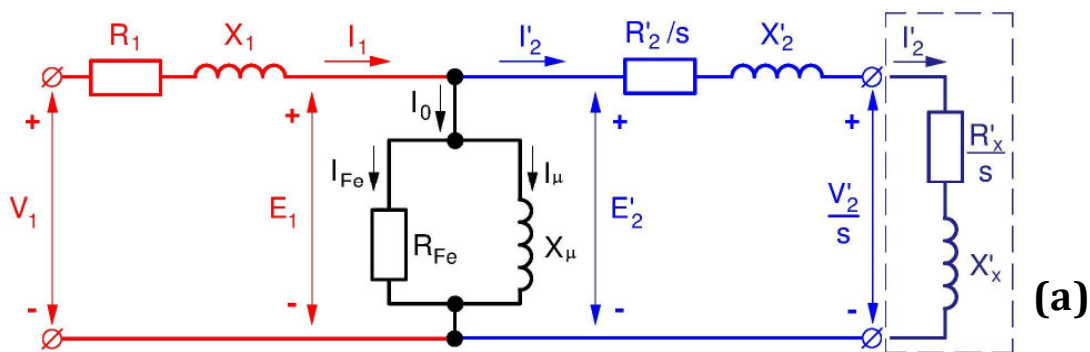
- b)** La máquina funciona como motor proporcionando un par M igual al asignado M_N y girando a una velocidad $n = 1350$ r.p.m.
- c)** La máquina funciona como motor proporcionando un par M igual al asignado M_N y girando a una velocidad $n = 1650$ r.p.m.
- d)** La máquina funciona como generador dando lugar a un par M negativo de valor absoluto igual al asignado M_N y girando a una velocidad $n = 1650$ r.p.m.
- e)** La máquina funciona como generador dando lugar a un par M negativo de valor absoluto igual al asignado M_N y girando a una velocidad $n = 1350$ r.p.m.

Ahora se cambia el convertidor de frecuencia del rotor por otro que sí permite modificar el ángulo φ_{V2} . Así, a través de los anillos del rotor se pueden tener las potencias activa P_2 y reactiva Q_2 del signo que se desee. Funcionando con este convertidor, calcule la tensión de línea entre los anillos del rotor V_{2L} , la corriente que circula por cada fase del rotor I_2 , las potencias activa P_2 y reactiva Q_2 en los anillos del rotor, la potencia reactiva Q'_2 , las pérdidas en el cobre del rotor P_{Cu2} , las potencias activa P_a y reactiva Q'_a en el entrehierro y los ángulos φ_2 y φ_{V2} en los siguientes casos:

- f)** La máquina funciona como generador dando lugar a un par M negativo de valor absoluto igual al asignado M_N y girando a una velocidad $n = 1650$ r.p.m. La potencia reactiva a través de los anillos del rotor Q_2 es negativa (capacitiva) y se cumple que $|Q'_2| = 4|P_2|$.
- g)** La máquina funciona como generador dando lugar a un par M negativo de valor absoluto igual al asignado M_N y girando a una velocidad $n = 1350$ r.p.m. La potencia reactiva a través de los anillos del rotor Q_2 es negativa (capacitiva) y se cumple que $\cos \varphi_2 = -0,8$ capacitivo (es de signo negativo por estar funcionando como generador).

NOTA: Recuerde que φ_{V2} es el ángulo entre \bar{V}_2 e \bar{I}_2 y que φ_2 es el ángulo entre \bar{E}'_2 e \bar{I}'_2 .

SOLUCIÓN:



Circuitos equivalentes exacto (a) y aproximado (b) de una máquina asíncrona doblemente alimentada incluyendo la impedancia externa equivalente

$V_{1N} = 400 \text{ V}; \quad n_1 = 1500 \text{ r.p.m.}; \quad \Omega_1 = 157,1 \text{ rad/s}; \quad X_1 = X'_2 = 0,5 \Omega; \quad m_1 = 3 \text{ fases}$

Casos a calcular:

	a	b	c	d	e	f	g
M (Nm)	296,6	296,6	296,6	-296,6	-296,6	-296,6	-296,6
n (r.p.m.)	1470	1350	1650	1650	1350	1650	1350
s	0,04	0,1	-0,1	-0,1	0,1	-0,1	0,1
R'x (Ω)	0	0,8	-1,2	0,841	-1,241	0,801	-0,918
X'x (Ω)	0	0	0	0	0	-3,204	-5,88
I'2 (A)	39,41	39,41	39,41	38,62	38,62	39,40	46,54
I2 (A)	55,73	55,73	55,73	54,61	54,61	55,72	65,82
V'2 (V)	0	31,53	47,29	32,48	47,93	34,00	50,73
V2L (V)	0	38,62	57,92	39,78	58,70	41,64	62,13
P2 (W)	0	3728	-5591	3763	-5553	3730	-5965
PCu2 (W)	932	932	932	895	895	931	1300
Pa (W)	46596	46596	46596	-46596	-46596	-46596	-46596
Q'2 (var)	0	0	0	0	0	-14921	-38208
Q2 (var)	0	0	0	0	0	-1492	-3821
Q'a (var)	2330	2330	2330	2237	2237	-12592	-34959
φ2 (°)	2,86	2,86	2,86	177,3	177,3	195,1	216,9
φv2 (°)	0	0	180	0	180	-21,80	212,7

SOLUCIÓN DETALLADA

La referencia a ecuaciones se indica entre paréntesis () y actúa como un hiperenlace a la ecuación

Cuestiones preliminares

- Tensión asignada de fase, V_{1N} :

$$\text{Estator con conexión triángulo} \Rightarrow V_{1NL} = V_{1N} \Rightarrow \underline{V_{1NL} = 400 \text{ V}}$$

- Velocidad de sincronismo:

$$n_1 = \frac{60 f_1}{p} = \frac{60 \cdot 50}{2} \Rightarrow \underline{n_1 = 1500 \text{ r.p.m.}}$$

$$\Omega_1 = \frac{2\pi}{60} n_1 = \frac{2\pi f_1}{p} = \frac{2\pi \cdot 50}{2} \Rightarrow \underline{\Omega_1 = 157,1 \text{ rad / s}}$$

- Deslizamientos, s :

$$s = \frac{n_1 - n}{n_1} \tag{1}$$

$$n_N = 1470 \text{ r.p.m.} \Rightarrow s_N = \frac{1500 - 1470}{1500} \Rightarrow \underline{s_N = 0,02}$$

$$n = 1350 \text{ r.p.m.} \Rightarrow s = \frac{1500 - 1350}{1500} \Rightarrow \underline{s = 0,1}$$

$$n = 1650 \text{ r.p.m.} \Rightarrow s = \frac{1500 - 1650}{1500} \Rightarrow \underline{s = -0,1}$$

- Reactancias de dispersión:

$$\begin{aligned} X'_2/X_{cc} = 0,5 & & X_{cc} = X_1 + X'_2 & & X_{cc} = 1 \Omega \\ \underline{X_1 = 0,5 \Omega} & & \underline{X'_2 = 0,5 \Omega} & & \end{aligned}$$

- Ecuaciones:

Usando el circuito equivalente aproximado con la impedancia externa equivalente \bar{Z}'_x se deducen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} I'_2 &= \frac{V_1}{\sqrt{\left(R_1 + \frac{R'_2 + R'_x}{s}\right)^2 + (X_1 + X'_2 + X'_x)^2}} \\ M = \frac{P_a}{\Omega_1} &= \frac{m_1 \frac{R'_2 + R'_x}{s}}{\frac{2\pi}{60} n_1} \frac{V_1^2}{\left(R_1 + \frac{R'_2 + R'_x}{s}\right)^2 + (X_1 + X'_2 + X'_x)^2} \\ \bar{Z}'_x &= R'_x + jX'_x = Z'_x \Big|_{\varphi_x} \end{aligned} \tag{2}$$

En esta máquina el número de fases del estator es tres, es decir: $m_1 = 3$ fases.

Por otra parte, se va a utilizar el siguiente cambio de variable que simplifica los cálculos:

$$x = \frac{R'_2 + R'_x}{s} \quad (3)$$

$$R'_x = s \cdot x - R'_2 \quad (4)$$

Con este cambio de variable las ecuaciones anteriores se convierten en:

$$I'_2 = \frac{V_1}{\sqrt{(R_1 + x)^2 + (X_1 + X'_2 + X'_x)^2}} \quad (5)$$

$$M = \frac{m_1 x}{\Omega_1} \frac{V_1^2}{(R_1 + x)^2 + (X_1 + X'_2 + X'_x)^2} \quad (6)$$

También se cumple que:

$$X_{cc} = X_1 + X'_2 \quad (7)$$

$$V'_2 = I'_2 \sqrt{R'^2_x + (s \cdot X'_x)^2} = I'_2 \cdot Z \quad \left(Z = \sqrt{R'^2_x + (s \cdot X'_x)^2} \right) \quad (8)$$

Cuando la reactancia X'_x es nula, esta última ecuación se convierte en:

$$X'_x = 0 \Rightarrow V'_2 = I'_2 \cdot R'_x \quad (9)$$

Las potencias activas en el rotor se calculan así:

$$P_2 = m_1 \cdot V'_2 \cdot I'_2 \cdot \cos \varphi_{V2} = m_1 \cdot I'^2_2 \cdot R'_x \quad (10)$$

$$P_{Cu2} = m_1 \cdot I'^2_2 \cdot R'_2 \quad (11)$$

$$P_a = m_1 \cdot E'_2 \cdot I'_2 \cdot \cos \varphi_2 = M \cdot \Omega_1 = \frac{P_2 + P_{Cu2}}{s} \quad (12)$$

Las potencias reactivas en el rotor se obtienen de esta manera:

$$Q_2 = m_1 \cdot V'_2 \cdot I'_2 \cdot \sen \varphi_{V2} \quad (13)$$

$$Q'_2 = \frac{Q_2}{|s|} = m_1 \cdot I'^2_2 \cdot X'_x \quad (14)$$

$$Q'_{\sigma 2} = m_1 \cdot I'^2_2 \cdot X'_2 \quad (15)$$

$$Q'_a = m_1 \cdot E'_2 \cdot I'_2 \cdot \sen \varphi_2 = Q'_2 + Q'_{\sigma 2} \quad (16)$$

Los ángulos del rotor se calculan así:

$$\varphi_x = \text{ángulo de la impedancia } \bar{Z}'_x \text{ (ver (2))}: \quad \text{tg } \varphi_x = \frac{Q'_2}{P_2} = \frac{X'_x}{R'_x} \quad (17)$$

$$\varphi_{V2} = \text{ángulo entre } \bar{V}_2 \text{ e } \bar{I}_2: \quad \text{tg } \varphi_{V2} = \frac{Q_2}{P_2} = |s| \cdot \text{tg } \varphi_x \quad (18)$$

$$\varphi_2 = \text{ángulo entre } \bar{E}'_2 \text{ e } \bar{I}'_2: \quad \text{tg } \varphi_2 = \frac{Q'_a}{P_a} = \frac{X'_2 + X'_x}{R'_2 + R'_x} = \frac{X'_2 + X'_x}{x} \quad (19)$$

s

Además, los valores reales de tensión y de corriente del rotor y sus correspondientes valores reducidos al estator se relacionan así:

$$V_2 = \frac{V'_2}{m_v} \quad I_2 = m_i \cdot I'_2 \quad (20)$$

Un rotor bobinado siempre se conecta estrella. Por consiguiente, la tensión entre anillos V_{2L} vale:

$$\text{Rotor con conexión estrella} \Rightarrow V_{2L} = \sqrt{3} V_2 \quad (21)$$

a) Condiciones asignadas

- En este caso la velocidad vale $n_N = 1470$ r.p.m. y el deslizamiento es $s_N = 0,02$ (ver (1)).
- En condiciones asignadas el rotor está en cortocircuito, luego sucede que (ver las relaciones (10) y (14)):

$$(10) \text{ y } (14): \quad \frac{R'_{xN} = 0 \Omega}{P_{2N} = 0 \text{ W}} \quad \frac{X'_{xN} = 0 \Omega}{Q_{2N} = 0 \text{ var}} \quad \frac{Q'_{2N} = 0 \text{ var}}{Q'_{2N} = 0 \text{ var}}$$

Además, en este caso, según (1) y (3), se tiene que:

$$(1) \text{ y } (3): \quad n_N = 1470 \text{ r.p.m.} \Rightarrow s_N = 0,02 \Rightarrow x_N = \frac{0,2 + 0}{0,02} \Rightarrow \underline{x_N = 10 \Omega}$$

- El par M_N y la corriente del rotor reducida al estator I'_{2N} se obtienen mediante las relaciones (7), (6) y (5), respectivamente:

$$(7) \text{ y } (6): \quad M_N = \frac{3 \cdot 10}{157,1} \frac{400^2}{(0,1 + 10)^2 + 1^2} \Rightarrow \boxed{M_N = 296,6 \text{ Nm}}$$

$$(7) \text{ y } (5): \quad I'_{2N} = \frac{400}{\sqrt{(0,1 + 10)^2 + 1^2}} \Rightarrow \underline{I'_{2N} = 39,41 \text{ A}}$$

Usando ahora la segunda de las relaciones (20) se obtiene finalmente la corriente I_{2N} que circula por cada fase del rotor en condiciones asignadas:

$$(20): \quad I_{2N} = \sqrt{2} \cdot 39,41 \Rightarrow \boxed{I_{2N} = 55,73 \text{ A}}$$

- Las potencias activas en el rotor se obtienen mediante las relaciones (11) y (12):

$$(11): \quad P_{Cu2N} = 3 \cdot 39,41^2 \cdot 0,2 \Rightarrow \boxed{P_{Cu2N} = 932 \text{ W}}$$

$$(12): \quad P_{aN} = M_N \cdot \Omega_1 = 296,6 \cdot 157,1 \Rightarrow \boxed{P_{aN} = 46596 \text{ W}}$$

A este último resultado también se podría llegar así:

$$(12): \quad P_{aN} = \frac{P_{2N} + P_{Cu2N}}{s_N} = \frac{0 + 932}{0,02} = 46600 \text{ W}$$

Existe una pequeña diferencia entre ambos resultados debida a errores de redondeo.

- Las potencias reactivas en el rotor se obtienen mediante las relaciones (15) y (16) y teniendo en cuenta que $Q'_2 = 0$:

$$(15) \text{ y } (16): \quad Q'_{aN} = Q'_{\sigma 2N} = 3 \cdot 39,41^2 \cdot 0,5 \Rightarrow \underline{Q'_{aN} = Q'_{\sigma 2N} = 2330 \text{ var}}$$

- Finalmente, el ángulo φ_{2N} entre \bar{E}'_{2N} e \bar{I}'_{2N} se calcula a partir de la relación (19):

$$(19): \quad \text{tg } \varphi_{2N} = \frac{Q'_{aN}}{P_{aN}} = \frac{2330}{46596} = 0,05 \Rightarrow \boxed{\varphi_{2N} = 2,86^\circ}$$

$$(\cos \varphi_{2N} = 0,999; \quad \text{sen } \varphi_{2N} = 0,0499)$$

b) Funcionamiento como motor; $M = M_N$; $s = 0,1 > 0$; $Q_2 = 0$

- En este caso la velocidad vale $n = 1350$ r.p.m. y el deslizamiento es $s = 0,1$ (ver la relación (1)).
- Tanto en este apartado como en los c), d) y e), la potencia reactiva a través de los anillos del rotor Q_2 es nula. Por consiguiente, partiendo de la expresión (14) se deduce lo siguiente:

$$(14): \quad \underline{Q_2 = 0 \text{ var}} \quad \underline{Q'_2 = 0 \text{ var}} \quad \underline{X'_x = 0 \Omega}$$

- En este caso la máquina funciona como motor con un deslizamiento s positivo, lo que exige que la potencia activa a través de los anillos P_2 sea positiva (potencia enviada desde el rotor hacia el convertidor de frecuencia). En consecuencia, de las relaciones (10) y (18) se deduce que:

$$(10) \text{ y } (18): \quad M > 0; \quad s > 0 \Rightarrow P_2 > 0 \Rightarrow \underline{R'_x > 0 \Omega}; \quad \underline{\varphi_{V2} = 0^\circ}$$

- En este tipo de funcionamiento la máquina tiene el mismo par M , la misma tensión en el estator V_1 y la misma reactancia externa equivalente X'_x que en condiciones asignadas. De todo lo anterior y mediante la relación (6) se deduce que la variable x ahora tiene el mismo valor x_N que en condiciones asignadas. Por lo tanto, teniendo en cuenta también la expresión (3) resulta que:

$$(6) \text{ y } (3): \quad x = x_N \Rightarrow 10 = \frac{0,2 + R'_x}{0,1} \Rightarrow \underline{R'_x = 0,8 \Omega}$$

- Como las magnitudes V_1 y x tienen los mismos valores que en condiciones asignadas, la expresión (5) indica que ahora se tendrá la misma corriente en el rotor I_2 que en condiciones asignadas:

$$(5) \text{ y } (20): \quad V_1 = V_{1N}; \quad x = x_N \Rightarrow I'_2 = I'_{2N} \Rightarrow I_2 = I_{2N}$$

$$\underline{I'_2 = 39,41 \text{ A}} \quad \boxed{I_2 = 55,73 \text{ A}}$$

- La tensión entre los anillos del rotor V_{2L} se obtiene aplicando sucesivamente las relaciones (9) (pues ahora $X'_x = 0$), (20) y (21):

$$(9): \quad V'_2 = 39,41 \cdot 0,8 = 31,53 \text{ V}$$

$$(20): \quad V_2 = \frac{31,53}{\sqrt{2}} = 22,30 \text{ V}$$

$$(21): \quad V_{2L} = \sqrt{3} \cdot 22,30 \Rightarrow \boxed{V_{2L} = 38,62 \text{ V}}$$

- La potencia activa que pasa a través de los anillos del rotor P_2 se calcula mediante (10):

$$(10): \quad P_2 = 3 \cdot 39,41^2 \cdot 0,8 \Rightarrow \boxed{P_2 = 3728 \text{ W}}$$

- La corriente I_2 es igual a la asignada I_{2N} , luego sucede que se tienen los mismos valores de P_{Cu2} , Q'_a y $Q'_{\sigma 2}$ que en condiciones asignadas (ver (11), (15) y (16)):

$$(11), (15) \text{ y } (16): \quad I'_2 = I'_{2N} \Rightarrow P_{Cu2} = P_{Cu2N}; \quad Q'_a = Q'_{\sigma 2} = Q'_{\sigma 2N}$$

$$\boxed{P_{Cu2} = 932 \text{ W}} \quad \underline{Q'_a = Q'_{\sigma 2} = 2330 \text{ var}}$$

- Al tener en este caso un par igual al asignado, la potencia activa en el entrehierro P_a será igual a la asignada P_{aN} (ver la relación (12)):

$$(12): \quad M = M_N \Rightarrow P_a = P_{aN} \Rightarrow \boxed{P_a = 46596 \text{ W}}$$

Como comprobación se va a calcular P_a de otra manera:

$$(12): \quad P_a = \frac{P_2 + P_{Cu2}}{s} = \frac{3728 + 932}{0,1} = 46600 \text{ W}$$

Existe una pequeña diferencia entre ambos resultados debida a errores de redondeo.

- Ahora se tienen los mismos valores de P_a y de Q'_a que en condiciones asignadas. Por consiguiente la relación (19) indica que el ángulo φ_2 es el mismo que en régimen asignado:

$$(19): \quad P_a = P_{aN}; \quad Q'_a = Q'_{aN} \Rightarrow \varphi_2 = \varphi_{2N} \Rightarrow \boxed{\varphi_2 = 2,86^\circ}$$

$$(\cos \varphi_2 = 0,999; \quad \text{sen } \varphi_2 = 0,0499)$$

c) Funcionamiento como motor; $M = M_N$; $s = -0,1 < 0$; $Q_2 = 0$

Este apartado se resuelve siguiendo el mismo procedimiento que en el anterior.

- La velocidad vale $n = 1650$ r.p.m. y el deslizamiento es $s = -0,1$ (ver la relación (1)).
- Ya se dedujo en el apartado b) que sucede lo siguiente:

$$(14): \quad \underline{Q_2 = 0 \text{ var}} \quad \underline{Q'_2 = 0 \text{ var}} \quad \underline{X'_x = 0 \Omega}$$

- En este caso la máquina funciona como motor con un deslizamiento s negativo, lo que exige que la potencia activa a través de los anillos P_2 sea negativa (potencia enviada desde el convertidor de frecuencia hacia el rotor). En consecuencia, de las relaciones (10) y (18) se deduce que:

$$(10) \text{ y } (18): \quad M > 0; \quad s < 0 \Rightarrow P_2 < 0 \Rightarrow \underline{R'_x < 0 \Omega}; \quad \underline{\varphi_{V2} = 180^\circ}$$

- Al igual que en el apartado anterior la máquina tiene el mismo par M , la misma tensión en el estator V_1 y la misma reactancia externa equivalente X'_x que en condiciones asignadas. Luego, de (6) se deduce que la variable x ahora tiene el mismo valor x_N que en condiciones asignadas. Por lo tanto, teniendo en cuenta también la expresión (3) resulta que:

$$(6) \text{ y } (3): \quad x = x_N \Rightarrow 10 = \frac{0,2 + R'_x}{-0,1} \Rightarrow \underline{R'_x = -1,2 \Omega}$$

- Como las magnitudes V_1 y x tienen los mismos valores que en condiciones asignadas, la expresión (5) indica que ahora se tendrá la misma corriente en el rotor que en condiciones asignadas:

$$(5) \text{ y } (20): \quad V_1 = V_{1N}; \quad x = x_N \Rightarrow I'_2 = I'_{2N} \Rightarrow I_2 = I_{2N}$$

$$\underline{I'_2 = 39,41 \text{ A}} \quad \boxed{I_2 = 55,73 \text{ A}}$$

- La tensión entre los anillos del rotor V_{2L} se obtiene aplicando sucesivamente las relaciones (9) (pues ahora $X'_x = 0$), (20) y (21):

$$(9): \quad V'_2 = 39,41 \cdot 1,2 = 47,29 \text{ V}$$

$$(20): \quad V_2 = \frac{47,29}{\sqrt{2}} = 33,44 \text{ V}$$

$$(21): \quad V_{2L} = \sqrt{3} \cdot 33,44 \Rightarrow \boxed{V_{2L} = 57,92 \text{ V}}$$

Como lo que se está calculando son los valores eficaces de tensiones se ha usado el valor absoluto de R'_x en las expresiones anteriores.

- La potencia activa que pasa a través de los anillos del rotor P_2 se calcula mediante (10):

$$(10): \quad P_2 = 3 \cdot 39,41^2 \cdot (-1,2) \Rightarrow \boxed{P_2 = -5591 \text{ W}}$$

- La corriente I_2 es igual a la asignada I_{2N} , luego sucede que se tienen los mismos valores de P_{Cu2} , Q'_a y $Q'_{\sigma 2}$ que en condiciones asignadas (ver (11), (15) y (16)):

$$(11), (15) \text{ y } (16): \quad I'_2 = I'_{2N} \Rightarrow P_{Cu2} = P_{Cu2N}; \quad Q'_a = Q'_{\sigma 2} = Q'_{\sigma 2N}$$

$$\boxed{P_{Cu2} = 932 \text{ W}}$$

$$\underline{Q'_a = Q'_{\sigma 2} = 2330 \text{ var}}$$

- Al tener en este caso un par igual al asignado, la potencia activa en el entrehierro P_a será igual a la asignada P_{aN} (ver la relación (12)):

$$(12): \quad M = M_N \Rightarrow P_a = P_{aN} \Rightarrow \boxed{P_a = 46596 \text{ W}}$$

Como comprobación se va a calcular P_a de otra manera:

$$(12): \quad P_a = \frac{P_2 + P_{Cu2}}{s} = \frac{-5591 + 932}{-0,1} = 46590 \text{ W}$$

Existe una pequeña diferencia entre ambos resultados debida a errores de redondeo.

- Ahora se tienen los mismos valores de P_a y de Q'_a que en condiciones asignadas. Por consiguiente la relación (19) indica que el ángulo φ_2 es el mismo que en régimen asignado:

$$(19): \quad P_a = P_{aN}; \quad Q'_a = Q'_{aN} \Rightarrow \varphi_2 = \varphi_{2N} \Rightarrow \boxed{\varphi_2 = 2,86^\circ}$$

$$(\cos \varphi_2 = 0,999; \quad \sin \varphi_2 = 0,0499)$$

d) Funcionamiento como generador; $M = -M_N$; $s = -0,1 < 0$; $Q_2 = 0$

- La velocidad vale $n = 1650$ r.p.m. y el deslizamiento es $s = -0,1$ (ver la relación (1)).
- Ya se dedujo en el apartado b) que sucede lo siguiente:

$$(14): \quad \underline{Q_2 = 0 \text{ var}} \quad \underline{Q'_2 = 0 \text{ var}} \quad \underline{X'_x = 0 \Omega}$$

- En este caso la máquina funciona como generador con un deslizamiento s negativo, lo que exige que la potencia activa a través de los anillos P_2 sea positiva (potencia enviada desde el rotor hacia el convertidor de frecuencia). En consecuencia, de las relaciones (10) y (18) se deduce que:

$$(10) \text{ y } (18): \quad M < 0; \quad s < 0 \Rightarrow P_2 > 0 \Rightarrow \underline{R'_x > 0 \Omega}; \quad \underline{\phi_{V2} = 0^\circ}$$

- En estas condiciones la máquina tiene un par negativo por actuar como generador. El valor absoluto de este par es igual al nominal, luego aplicando la relación (6) se obtiene que:

$$(7) \text{ y } (6): \quad -296,6 = \frac{3 \cdot x}{157,1} \frac{400^2}{(0,1 + x)^2 + 1^2}$$

Operando y simplificando se llega a la siguiente ecuación de segundo grado:

$$x^2 + 10,5x + 1 = 0$$

Al resolver esta ecuación se obtienen dos valores de x que, a su vez, se corresponden con dos valores de R'_x (ver la relación (4)):

$$(4): \quad x = \begin{cases} -0,0961 \Omega \rightarrow R'_x = -0,190 \Omega \\ -10,41 \Omega \rightarrow R'_x = +0,841 \Omega \end{cases}$$

Ya se dedujo antes que la resistencia R'_x debe ser positiva, luego la solución es:

$$\underline{x = -10,41 \Omega}; \quad \underline{R'_x = 0,841 \Omega}$$

- La corriente del rotor I_2 se obtiene mediante las relaciones (7), (5) y (20):

$$(7) \text{ y } (5): \quad I'_2 = \frac{400}{\sqrt{(0,1 + (-10,41))^2 + 1^2}} \Rightarrow \underline{I'_{2N} = 38,62 \text{ A}}$$

$$(20): \quad I_{2N} = \sqrt{2} \cdot 38,62 \Rightarrow \boxed{I_2 = 54,61 \text{ A}}$$

- La tensión entre los anillos del rotor V_{2L} se obtiene aplicando sucesivamente las relaciones (9) (pues ahora $X'_x = 0$), (20) y (21):

$$(9): \quad V'_2 = 38,62 \cdot 0,841 = 32,48 \text{ V}$$

$$(20): \quad V_2 = \frac{32,48}{\sqrt{2}} = 22,97 \text{ V}$$

$$(21): \quad V_{2L} = \sqrt{3} \cdot 22,97 \Rightarrow \boxed{V_{2L} = 39,78 \text{ V}}$$

- Las potencias activas en el rotor se obtienen mediante las relaciones (10), (11) y (12):

$$(10): \quad P_2 = 3 \cdot 38,62^2 \cdot 0,841 \Rightarrow \boxed{P_2 = 3763 \text{ W}}$$

$$(11): \quad P_{Cu2} = 3 \cdot 38,62^2 \cdot 0,2 \Rightarrow \boxed{P_{Cu2} = 895 \text{ W}}$$

$$(12): \quad P_a = (-M_N) \cdot \Omega_1 = -P_{aN} \Rightarrow \boxed{P_a = -46596 \text{ W}}$$

Nótese que, como el par es igual a $-M_N$, la potencia en el entrehierro vale $-P_{aN}$. Esta magnitud también se puede obtener así:

$$(12): \quad P_a = \frac{P_2 + P_{Cu2}}{s} = \frac{3763 + 895}{-0,1} = -46580 \text{ W}$$

Existe una pequeña diferencia entre ambos resultados debida a errores de redondeo.

- Las potencias reactivas en el rotor se obtienen mediante las relaciones (15) y (16) y teniendo en cuenta que $Q'_2 = 0$:

$$(15) \text{ y } (16): \quad Q'_a = Q'_{\sigma 2} = 3 \cdot 38,62^2 \cdot 0,5 \Rightarrow \underline{Q'_a = Q'_{\sigma 2} = 2237 \text{ var}}$$

- Finalmente, el ángulo φ_2 entre \bar{E}'_2 e \bar{I}'_2 se calcula a partir de (19), (12) y (16):

$$(19): \quad \text{tg } \varphi_2 = \frac{Q'_a}{P_a} = \frac{2237}{-46596} = -0,048$$

$$(12): \quad P_a < 0 \Rightarrow \cos \varphi_2 < 0$$

$$(16): \quad Q'_a > 0 \Rightarrow \text{sen } \varphi_2 > 0$$

$$\varphi_2 = 180^\circ - 2,7^\circ \Rightarrow \boxed{\varphi_2 = 177,3^\circ}$$

$$(\cos \varphi_2 = -0,999; \text{ sen } \varphi_2 = 0,0471)$$

e) Funcionamiento como generador; $M = -M_N$; $s = 0,1 > 0$; $Q_2 = 0$

- En este caso la velocidad vale $n = 1350$ r.p.m. y el deslizamiento es $s = 0,1$ (ver la relación (1)).
- Ya se dedujo en el apartado b) que sucede lo siguiente:

$$(14): \quad \underline{Q_2 = 0 \text{ var}} \quad \underline{Q'_2 = 0 \text{ var}} \quad \underline{X'_x = 0 \Omega}$$

- En este caso la máquina funciona como generador con un deslizamiento s positivo, lo que exige que la potencia activa a través de los anillos P_2 sea negativa (potencia enviada desde el convertidor de frecuencia hacia el rotor). En consecuencia, de las relaciones (10) y (18) se deduce que:

$$(10) \text{ y } (18): \quad M > 0; s < 0 \Rightarrow P_2 < 0 \Rightarrow \underline{R'_x < 0 \Omega}; \quad \underline{\varphi_{V2} = 180^\circ}$$

- La máquina tiene el mismo par M , la misma tensión en el estator V_1 y la misma reactancia externa equivalente X'_x que en el apartado anterior. Luego, de (6) se deduce que la variable x ahora tiene el mismo valor que en el apartado d). Por lo tanto, teniendo en cuenta también la expresión (4), resulta que:

$$(6) \text{ y } (4): x = -10,41 \Rightarrow R'_x = (-10,41) \cdot 0,1 - 0,2 \Rightarrow \underline{R'_x = -1,241 \Omega}$$

- Como las magnitudes V_1 y x tienen los mismos valores que en el caso d), la expresión (5) indica que ahora se tendrá la misma corriente en el rotor que antes:

$$(5) \text{ y } (20): \quad \underline{I'_2 = 38,62 \text{ A}} \quad \boxed{I_2 = 54,61 \text{ A}}$$

- La tensión entre los anillos del rotor V_{2L} se obtiene aplicando sucesivamente las relaciones (9) (pues ahora $X'_x = 0$), (20) y (21):

$$(9): \quad V'_2 = 38,62 \cdot 1,241 = 47,93 \text{ V}$$

$$(20): \quad V_2 = \frac{47,93}{\sqrt{2}} = 33,89 \text{ V}$$

$$(21): \quad V_{2L} = \sqrt{3} \cdot 33,89 \Rightarrow \boxed{V_{2L} = 58,70 \text{ V}}$$

Como lo que se está calculando son los valores eficaces de tensiones se ha usado el valor absoluto de R'_x en las expresiones anteriores.

- La potencia activa que pasa a través de los anillos del rotor P_2 se calcula mediante (10):

$$(10): \quad P_2 = 3 \cdot 38,62^2 \cdot (-1,241) \Rightarrow \boxed{P_2 = -5553 \text{ W}}$$

- La corriente I_2 es igual a la del caso anterior, luego sucede que se tienen los mismos valores de P_{Cu2} , Q'_a y $Q'_{\sigma 2}$ que en el apartado d) (ver (11), (15) y (16)):

$$(11), (15) \text{ y } (16): \quad \boxed{P_{Cu2} = 895 \text{ W}} \quad \underline{Q'_a = Q'_{\sigma 2} = 2237 \text{ var}}$$

- Al tener en este caso un par igual a $-M_N$, la potencia activa en el entrehierro será igual a $-P_{aN}$ (ver la relación (12)):

$$(12): \quad M = -M_N \Rightarrow P_a = -P_{aN} \Rightarrow \boxed{P_a = -46596 \text{ W}}$$

Como comprobación se va a calcular P_a de otra manera:

$$(12): \quad P_a = \frac{P_2 + P_{Cu2}}{s} = \frac{-5593 + 895}{0,1} = -46580 \text{ W}$$

Existe una pequeña diferencia entre ambos resultados debida a errores de redondeo.

- Ahora se tienen los mismos valores de P_a y de Q'_a que en el apartado anterior, por lo tanto, la relación (19) indica que el ángulo φ_2 es el mismo que en el apartado d):

$$(19): \quad \boxed{\varphi_2 = 177,3^\circ}$$

$$(\cos \varphi_2 = -0,999; \quad \text{sen } \varphi_2 = 0,0471)$$

f) Funcionamiento como generador; $M = -M_N$; $s = -0,1 < 0$; $Q_2 < 0$; $|Q'_2| = 4 |P_2|$

- Este apartado estudia un estado de funcionamiento de la máquina similar al del apartado d), pero con la diferencia de que ahora la potencia reactiva a través de los anillos del rotor Q_2 no va a ser nula y, además, va a tener signo negativo (capacitiva). Teniendo en cuenta también lo que se dedujo en el apartado d), ahora sucede que:

$$(14): \quad Q_2 < 0 \Rightarrow Q'_2 < 0 \Rightarrow \underline{X'_x < 0}$$

$$(10): \quad M < 0; \quad s < 0 \Rightarrow P_2 > 0 \Rightarrow \underline{R'_x > 0 \Omega}$$

- Partiendo de las relaciones (10) y (14) y teniendo en cuenta los signos de X'_x y de R'_x se deduce que:

$$(10) \text{ y } (14): \quad |Q'_2| = 4 |P_2|; \quad R'_x > 0; \quad X'_x < 0 \Rightarrow \underline{X'_x = -4 R'_x}$$

- De lo anterior y usando las relaciones (17) y (18) se obtiene que:

$$(17): \quad \text{tg } \varphi_x = \frac{Q'_2}{P_2} = \frac{X'_x}{R'_x} = -4 \Rightarrow \underline{\varphi_x = -75,96^\circ}$$

$$(\cos \varphi_x = 0,243; \quad \text{sen } \varphi_x = -0,970)$$

$$(18): \quad \text{tg } \varphi_{V2} = |s| \cdot \text{tg } \varphi_x = 0,1 \cdot (-4) = -0,4 \Rightarrow \boxed{\varphi_{V2} = -21,80^\circ}$$

$$(\cos \varphi_{V2} = 0,928; \quad \text{sen } \varphi_x = -0,371)$$

- Poniendo las magnitudes R'_x y X'_x en función de la variable x quedan así:

$$(4): \quad R'_x = s \cdot x - R'_2 \Rightarrow \underline{R'_x = -0,1 x - 0,2}$$

$$X'_x = -4 R'_x \Rightarrow \underline{X'_x = 0,4 x + 0,8}$$

Sustituyendo estos resultados en la fórmula del par (6) se llega a:

$$(7) \text{ y } (6): \quad -296,6 = \frac{3 x}{157,1} \frac{400^2}{(0,1 + x)^2 + (1 + (0,4 x + 0,8))^2}$$

Operando y simplificando se obtiene esta ecuación de segundo grado:

$$1,16 x^2 + 11,94 x + 3,25 = 0$$

Al resolver esta ecuación se obtienen dos valores de x que, a su vez, se corresponden con dos valores de R'_x (ver la relación (4)):

$$(4): \quad x = \begin{cases} -0,280 \Omega & \rightarrow R'_x = -0,172 \Omega \\ -10,01 \Omega & \rightarrow R'_x = +0,801 \Omega \end{cases}$$

Ya se dedujo antes que la resistencia R'_x debe ser positiva, luego la solución es:

$$\underline{x = -10,01 \Omega} ; \quad \underline{R'_x = 0,801 \Omega} ; \quad \underline{X'_x = -3,204 \Omega}$$

- La corriente del rotor I_2 se obtiene mediante las relaciones (7), (5) y (20):

$$(7) \text{ y } (5): \quad I'_2 = \frac{400}{\sqrt{(0,1 + 10,01)^2 + (1 + (-3,204))^2}} \Rightarrow \underline{I'_{2N} = 39,40 \text{ A}}$$

$$(20): \quad I_{2N} = \sqrt{2} \cdot 39,40 \Rightarrow \underline{I_2 = 55,72 \text{ A}}$$

- La tensión entre los anillos del rotor V_{2L} se obtiene aplicando sucesivamente las relaciones(8), (20) y (21):

$$(8): \quad Z = \sqrt{0,801^2 + (0,1 \cdot 3,204)^2} = 0,863 \Omega$$

$$(8): \quad V'_2 = 39,40 \cdot 0,863 = 34,00 \text{ V}$$

$$(20): \quad V_2 = \frac{34,00}{\sqrt{2}} = 24,04 \text{ V}$$

$$(21): \quad V_{2L} = \sqrt{3} \cdot 24,04 \Rightarrow \underline{V_{2L} = 41,64 \text{ V}}$$

- Las potencias activas en el rotor se obtienen mediante las relaciones (10), (11) y (12):

$$(10): \quad P_2 = 3 \cdot 39,40^2 \cdot 0,801 \Rightarrow \underline{P_2 = 3730 \text{ W}}$$

$$(11): \quad P_{Cu2} = 3 \cdot 39,40^2 \cdot 0,2 \Rightarrow \underline{P_{Cu2} = 931 \text{ W}}$$

$$(12): \quad P_a = (-M_N) \cdot \Omega_1 = -P_{aN} \Rightarrow \underline{P_a = -46596 \text{ W}}$$

Nótese que, como el par es igual a $-M_N$, la potencia en el entrehierro vale $-P_{aN}$. Esta magnitud también se puede obtener así:

$$(12): \quad P_a = \frac{P_2 + P_{Cu2}}{s} = \frac{3730 + 931}{-0,1} = -46610 \text{ W}$$

Existe una pequeña diferencia entre ambos resultados debida a errores de redondeo.

- Las potencias reactivas en el rotor se obtienen mediante (14), (15) y (16):

$$(14): \quad Q'_2 = 3 \cdot 39,40^2 \cdot (-3,204) \Rightarrow \boxed{Q'_2 = -14\,921 \text{ var}}$$

$$(14): \quad Q_2 = 0,1 \cdot (-14\,921) \Rightarrow \boxed{Q_2 = -1\,492 \text{ var}}$$

$$(15): \quad Q'_{\sigma 2} = 3 \cdot 39,40^2 \cdot 0,5 \Rightarrow \underline{Q'_{\sigma 2} = 2\,329 \text{ var}}$$

$$(16): \quad Q'_a = (-14\,921) + 2\,329 \Rightarrow \boxed{Q'_a = -12\,592 \text{ var}}$$

- El ángulo φ_2 entre \bar{E}'_2 e \bar{I}'_2 se calcula a partir de (19), (12) y (16):

$$(19): \quad \text{tg } \varphi_2 = \frac{Q'_a}{P_a} = \frac{-12\,592}{-46\,596} = 0,270$$

$$(12): \quad P_a < 0 \Rightarrow \cos \varphi_2 < 0$$

$$(16): \quad Q'_a < 0 \Rightarrow \text{sen } \varphi_2 < 0$$

$$\varphi_2 = 180^\circ + 15,1^\circ \Rightarrow \boxed{\varphi_2 = 195,1^\circ}$$

$$(\cos \varphi_2 = -0,965; \text{ sen } \varphi_2 = 0,261)$$

Seguidamente, a modo de comprobación, se va a volver a calcular el ángulo φ_{V2} a partir de las potencias activa y reactiva:

$$(18): \quad \text{tg } \varphi_{V2} = \frac{Q_2}{P_2} = \frac{-1\,492}{3\,730} = -0,4 \Rightarrow \varphi_{V2} = -21,80^\circ$$

Este resultado coincide con el calculado anteriormente.

- La potencia aparente S_2 que circula a través de los anillos del rotor y que debe soportar el convertidor de frecuencias vale:

$$S_2 = \sqrt{P_2^2 + Q_2^2} = \sqrt{3\,730^2 + 1\,492^2} \Rightarrow \underline{S_2 = 4\,017 \text{ VA}}$$

g) Funcionamiento como generador; $M = -M_N$; $s = 0,1 > 0$; $Q_2 < 0$; $\cos \varphi_2 = -0,8$

- Este apartado estudia un estado de funcionamiento de la máquina similar al del apartado e), pero con la diferencia de que ahora la potencia reactiva a través de los anillos del rotor Q_2 no va a ser nula y, además, va a tener signo negativo (capacitiva). Teniendo en cuenta también lo que se dedujo en el apartado e), ahora sucede que:

$$(14): \quad Q_2 < 0 \Rightarrow Q'_2 < 0 \Rightarrow \underline{X'_x < 0}$$

$$(10): \quad M < 0; s > 0 \Rightarrow P_2 < 0 \Rightarrow \underline{R'_x < 0 \Omega}$$

- El ángulo φ_2 entre \bar{E}'_2 e \bar{I}'_2 vale:

$$(12): \quad P_a < 0 \Rightarrow \cos \varphi_2 < 0$$

$$(16): \quad Q'_a < 0 \Rightarrow \text{sen } \varphi_2 < 0$$

$$\cos \varphi_2 = -0,8 \Rightarrow \varphi_2 = 180^\circ + 36,9^\circ \Rightarrow \boxed{\varphi_2 = 216,9^\circ}$$

$$(\cos \varphi_2 = -0,8; \text{ sen } \varphi_2 = -0,6; \text{ tg } \varphi_2 = 0,75)$$

- La relación (19) permite poner la suma de las reactancias del rotor reducido al estator en función de la variable x:

$$(19): \quad \text{tg } \varphi_2 = 0,75; \quad \text{tg } \varphi_2 = \frac{X'_2 + X'_x}{x} \Rightarrow \underline{X'_2 + X'_x = 0,75 x}$$

Sustituyendo estos resultados en la fórmula del par (6) se llega a:

$$(6): \quad -296,6 = \frac{3 x}{157,1} \frac{400^2}{(0,1 + x)^2 + (0,5 + 0,75 x)^2}$$

Operando y simplificando se obtiene esta ecuación de segundo grado:

$$1,563 x^2 + 11,25 x + 0,26 = 0$$

Al resolver esta ecuación se obtienen dos valores de x:

$$(4): \quad x = \begin{cases} -0,0232 \Omega \rightarrow R'_x = -0,20232 \Omega; X'_x = -0,5174 \Omega \\ -7,174 \Omega \rightarrow R'_x = -0,918 \Omega; X'_x = -5,88 \Omega \end{cases}$$

Ambas soluciones tienen los signos correctos, aunque los valores obtenidos en el apartado e) hacen sospechar que la segunda solución es la adecuada. Para comprobarlo se va a calcular la corriente del rotor reducida al estator I'_2 que sale con ambas soluciones: Para ello se emplea la relación (5):

$$(7) \text{ y } (5): \quad I'_2 = \frac{400}{\sqrt{(0,1 + (-0,0232))^2 + (1 + (-0,5174))^2}} = 818,5 \text{ A} \quad \text{a)}$$

$$(7) \text{ y } (5): \quad I'_2 = \frac{400}{\sqrt{(0,1 + (-7,174))^2 + (1 + (-5,88))^2}} = 46,54 \text{ A} \quad \text{b)}$$

La primera solución da lugar a unas corrientes en el rotor inaceptablemente elevadas. Por consiguiente, la solución correcta es la segunda y:

$$\underline{x = -7,174 \Omega}; \quad \underline{R'_x = -0,918 \Omega}; \quad \underline{X'_x = -5,88 \Omega}$$

$$(20): \quad \underline{I'_2 = 46,54 \text{ A}} \Rightarrow I_2 = \sqrt{2} \cdot 46,54 \text{ A} \Rightarrow \boxed{I_2 = 65,82 \text{ A}}$$

- De lo anterior y usando las relaciones (17) y (18) se obtiene que:

$$(17): \quad \operatorname{tg} \varphi_x = \frac{X'_x}{R'_x} = \frac{-5,88}{-0,918} = 6,41 \Rightarrow \varphi_x = 180^\circ + 81,1^\circ$$

$$\varphi_x = 261,4^\circ \quad (\cos \varphi_x = -0,150; \operatorname{sen} \varphi_x = -0,989)$$

$$(18): \quad \operatorname{tg} \varphi_{V_2} = |s| \cdot \operatorname{tg} \varphi_x = 0,1 \cdot 6,41 = 0,641 \Rightarrow \varphi_{V_2} = 180^\circ + 32,7^\circ$$

$$\varphi_{V_2} = 212,7^\circ \quad (\cos \varphi_{V_2} = -0,842; \operatorname{sen} \varphi_{V_2} = -0,540)$$

- La tensión entre los anillos del rotor V_{2L} se obtiene aplicando sucesivamente las relaciones (8), (20) y (21):

$$(8): \quad Z = \sqrt{0,918^2 + (0,1 \cdot 5,88)^2} = 1,09 \Omega$$

$$(8): \quad V'_2 = 46,54 \cdot 1,09 = 50,73 \text{ V}$$

$$(20): \quad V_2 = \frac{50,73}{\sqrt{2}} = 35,87 \text{ V}$$

$$(21): \quad V_{2L} = \sqrt{3} \cdot 35,87 \Rightarrow V_{2L} = 62,13 \text{ V}$$

- Las potencias activas en el rotor se obtienen mediante las relaciones (10), (11) y (12):

$$(10): \quad P_2 = 3 \cdot 46,54^2 \cdot (-0,918) \Rightarrow P_2 = -5965 \text{ W}$$

$$(11): \quad P_{Cu2} = 3 \cdot 46,54^2 \cdot 0,2 \Rightarrow P_{Cu2} = 1300 \text{ W}$$

$$(12): \quad P_a = (-M_N) \cdot \Omega_1 = -P_{aN} \Rightarrow P_a = -46596 \text{ W}$$

Nótese que, como el par es igual a $-M_N$, la potencia en el entrehierro vale $-P_{aN}$. Esta magnitud también se puede obtener así:

$$(12): \quad P_a = \frac{P_2 + P_{Cu2}}{s} = \frac{-5965 + 1300}{0,1} = -46650 \text{ W}$$

Existe una pequeña diferencia entre ambos resultados debida a errores de redondeo.

- Las potencias reactivas en el rotor se obtienen mediante (14), (15) y (16):

$$(14): \quad Q'_2 = 3 \cdot 46,54^2 \cdot (-5,88) \Rightarrow Q'_2 = -38208 \text{ var}$$

$$(14): \quad Q_2 = 0,1 \cdot (-38208) \Rightarrow Q_2 = -3821 \text{ var}$$

$$(15): \quad Q'_{\sigma 2} = 3 \cdot 46,54^2 \cdot 0,5 \Rightarrow Q'_{\sigma 2} = 3249 \text{ var}$$

$$(16): \quad Q'_a = (-38208) + 3249 \Rightarrow Q'_a = -34959 \text{ var}$$

- Seguidamente, a modo de comprobación, se van a volver a calcular los ángulos φ_2 y φ_{V2} a partir de las potencias activas y reactivas:

$$(19): \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{Q'_a}{P_a} = \frac{-349592}{-46596} = 0,75$$

$$\varphi_2 = 180^\circ + 36,9^\circ \Rightarrow \varphi_2 = 216,9^\circ$$

$$(18): \quad \operatorname{tg} \varphi_{V2} = \frac{Q_2}{P_2} = \frac{-3821}{-5965} = -0,641 \Rightarrow \varphi_{V2} = 212,7^\circ$$

Estos resultados coinciden con los calculados anteriormente.

- La potencia aparente S_2 que circula a través de los anillos del rotor y que debe soportar el convertidor de frecuencias vale:

$$S_2 = \sqrt{P_2^2 + Q_2^2} = \sqrt{5965^2 + 3821^2} \Rightarrow \underline{S_2 = 7083 \text{ VA}}$$