Ingeniería Térmica y de Fluidos (II)

T9.- Superficies Ampliadas de Sección Transversal Cte

Las trasparencias son el material de apoyo del profesor para impartir la clase. No son apuntes de la asignatura. Al alumno le pueden servir como guía para recopilar información (libros, …) y elaborar sus propios apuntes

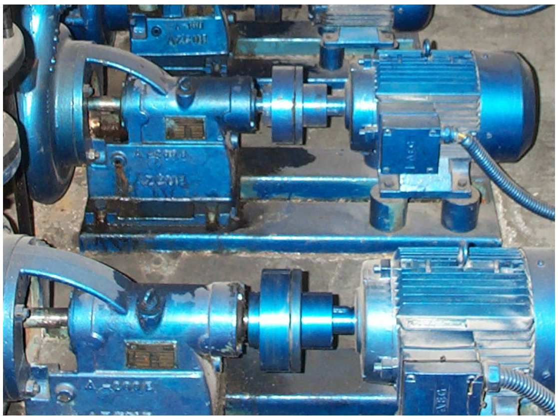
Departamento: **Ingeniería Eléctrica y Energética**
Area: **Máquinas y Motores Térmicos**

CARLOS J RENEDO **renedoc@unican.es**
Despachos: ETSN 236 / ETSIIT S-3 28
http://personales.unican.es/renedoc/index.htm
Tlfn: ETSN 942 20 13 44 / ETSIIT 942 20 13 82

IX.- SUPERFICIES AMPLIADAS DE SECCIÓN TRANSVERSAL CONSTANTE

IX.1.- INTRODUCCIÓN

Gran aplicación, aumentar el área de disipación de calor



Espesores de 0,5 a 10 mm

Relación long/esp de 1/5 a 1/ 50

Perfiles fáciles de fabricar

Sin resistencia de contacto

No perjudicar el flujo del fluido (longitudinal, transversal)

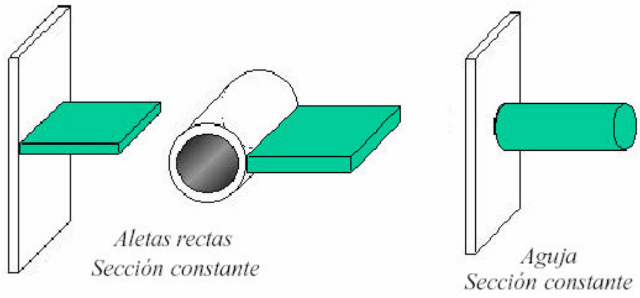
Protuberancias:

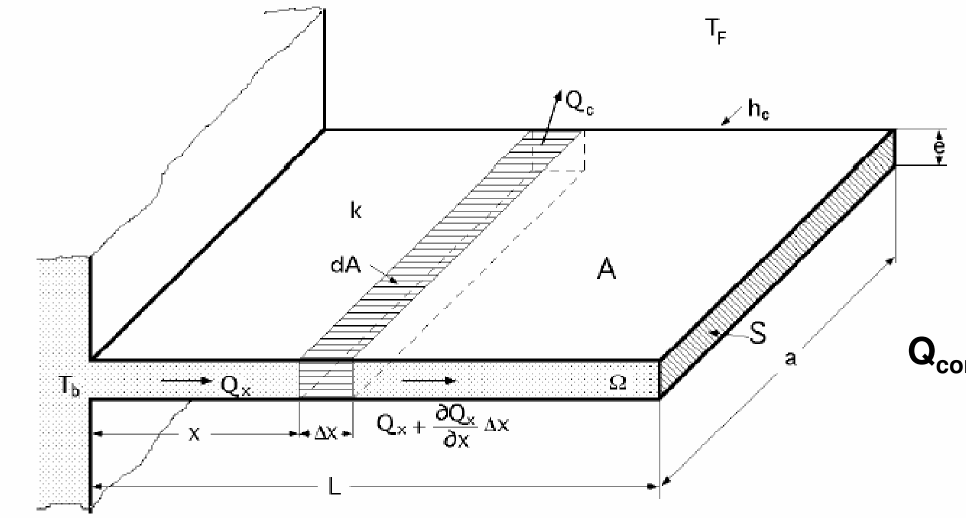
sólidos de revolución

Conducción monodimensional

IX.2.- TRANSFERENCIA DE CALOR EN ALETAS DE SECCIÓN TRANSVERSAL CONSTANTE (I)

Sobre superficies planas o curvas de gran radio de curvatura





$Q_{cond\ base} = Q_{convec}$

IX.2.- TRANSFERENCIA DE CALOR EN ALETAS DE SECCIÓN TRANSVERSAL CONSTANTE (II)

Volumen elemental

$Q_{cond\ base} = Q_{convec}$

e = espesor

L = longitud aleta

A = "área disipación"

S = área base

P = perímetro (S)

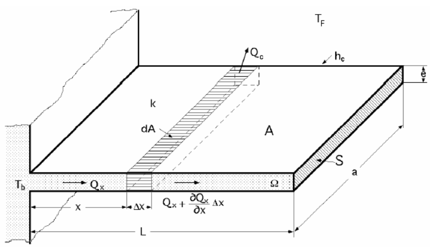
$$Q_x = \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x}\Delta x\right) + Q_C$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x}\Delta x + Q_C = 0$$

$$Q_x = -\,k\,S\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_x \quad ; \quad \frac{\partial Q_x}{\partial x} = -\,k\,S\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_x$$

$$Q_C = h_C\,dA\,(T_x - T_F) = h_C\,(p\,\Delta x)\,(T_x - T_F)$$

$$k\,S\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_x \Delta x + h_C\,p\,\Delta x\,(T_x - T_F) = 0 \Longrightarrow$$



IX.2.- TRANSFERENCIA DE CALOR EN ALETAS DE SECCIÓN TRANSVERSAL CONSTANTE (III)

$$\Rightarrow \quad \boxed{- k\, S \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_x \Delta x + h_C\, p\, \Delta x\, (T_x - T_F) = 0}$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_x - \frac{h_C\, p}{k\, S} (T_x - T_F) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Phi(\xi) = \frac{T_x - T_F}{T_b - T_F} \quad \Big| \quad \xi = \frac{x}{L}$$

$$T_x = T_F + \Phi(\xi)\,(T_b - T_F)$$

$$\frac{dT}{dx} = (T_b - T_F)\,\frac{d\Phi(\xi)}{d\xi}\,\frac{d\xi}{dx} = \left| \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{L} \right| = \frac{T_b - T_F}{L}\,\frac{d\Phi(\xi)}{d\xi} \quad (*)$$

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{T_b - T_F}{L}\,\frac{d^2\Phi(\xi)}{d\xi^2}\,\frac{d\xi}{dx} = \frac{T_b - T_F}{L^2}\,\frac{d^2\Phi(\xi)}{d\xi^2} \quad \Rightarrow$$

IX.2.- TRANSFERENCIA DE CALOR EN ALETAS DE SECCIÓN TRANSVERSAL CONSTANTE (IV)

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{c} \left(\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_x - \dfrac{h_C\, p}{k\, S} (T_x - T_F) = 0 \\ \dfrac{d^2 T}{dx^2} = \dfrac{T_b - T_F}{L^2}\,\dfrac{d^2\Phi(\xi)}{d\xi^2} \end{array}}$$

$$\frac{T_b - T_F}{L^2}\,\frac{d^2\Phi(\xi)}{d\xi^2} - \frac{h_C\, p}{k\, S}\,\Phi(\xi)\,(T_b - T_F) = 0$$

$$\frac{d^2\Phi(\xi)}{d\xi^2} - \frac{h_C\, p\, L^2}{k\, S}\,\Phi(\xi) = 0$$

$$Bi = \frac{h_C\, p\, L^2}{k\, S} = \frac{h_C\, L^*}{k} \quad ; \quad L^* = \frac{p\, L^2}{S} = \frac{A\, L}{S}$$

$$\rightarrow \quad \frac{d^2\Phi}{d\xi^2} - Bi\,\Phi = 0$$

$$\boxed{\Phi(\xi) = C_1\, e^{-\sqrt{Bi}\,\xi} + C_2\, e^{\sqrt{Bi}\,\xi}} \quad (**)$$

IX.2.- TRANSFERENCIA DE CALOR EN ALETAS DE SECCIÓN TRANSVERSAL CONSTANTE (V)

(**) $\Phi(\xi) = C_1\, e^{-\sqrt{Bi}\,\xi} + C_2\, e^{\sqrt{Bi}\,\xi}$

Condiciones de contorno

1.- Base de la aleta: $T_{X=0} = T_b$

$$x = 0 ;\quad \xi = \frac{x}{L} = 0 \;\rightarrow\; \Phi(0) = \frac{T_b - T_F}{T_b - T_F} = 1 \quad ; \quad \boxed{C_1 + C_2 = 1} \quad \text{(Ec1)}$$

2.- Tipo de la aleta

2.a.- Aleta muy larga: $T_{X=L=\infty} = T_F$

$$x = L = \infty ;\quad \xi = \frac{x}{L} = 1 ;\quad Bi = \frac{h_C\, p\, L^2}{k\, S} = \infty \;\rightarrow\; \Phi(1) = \frac{T_x - T_F}{T_b - T_F} = \frac{T_F - T_F}{T_b - T_F} = 0 + C_2\, e^{\sqrt{Bi}} = 0$$

$$\text{(Ec2a)} \quad \boxed{C_2 = 0} \xrightarrow{(+\text{ Ec1})} \boxed{C_1 = 1} \Longrightarrow$$

IX.- SUPERFICIES AMPLIADAS DE SECCIÓN TRANSVERSAL CONSTANTE

IX.2.- TRANSFERENCIA DE CALOR EN ALETAS DE SECCIÓN TRANSVERSAL CONSTANTE (VI)

2.a.- Aleta muy larga (II):

(**) $\Phi(\xi) = C_1\, e^{-\sqrt{Bi}\,\xi} + C_2\, e^{\sqrt{Bi}\,\xi}$

$\Longrightarrow$ $C_1 = 1$ $\quad C_2 = 0$

$$\Phi(\xi) = \frac{T_\xi - T_F}{T_b - T_F} = e^{-\sqrt{Bi}\,\xi} \quad ; \quad \boxed{T_\xi = T_F + (T_b - T_F)\, e^{-\sqrt{Bi}\,\xi}}$$

$$Q = -\,k\,S \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} = \xrightarrow{(*)} = -\,\frac{k\,S}{L}\,(T_b - T_F)\left(\frac{\partial \Phi(\xi)}{\partial \xi}\right)_{\xi=0} =$$

$$\left(\frac{\partial \Phi(\xi)}{\partial \xi}\right)_{\xi=0} = -\sqrt{Bi}\; e^{-\sqrt{Bi}\,\xi}\Big|_{\xi=0} = -\sqrt{Bi}$$

$$= \frac{k\,S}{L}\,(T_b - T_F)\,\sqrt{Bi}$$

$$\boxed{Q = \frac{k\,S}{L}\,(T_b - T_F)\,\sqrt{Bi}}$$

IX.2.- TRANSFERENCIA DE CALOR EN ALETAS DE SECCIÓN TRANSVERSAL CONSTANTE (VII)

2.b.- Aleta extremo aislado: (evitar quemaduras) $Q_{X=L}= 0$

$$Q\big|_{x=L} = \frac{dT}{dx}\Big|_{x=L} = 0 \qquad (**)\ \Phi(\xi) = C_1\, e^{-\sqrt{Bi}\,\xi} + C_2\, e^{\sqrt{Bi}\,\xi}$$

$$(*)\ \frac{dT}{dx}\Big|_{x=L} = \frac{T_b - T_F}{L}\,\frac{d\Phi(\xi)}{d\xi}\Big|_{\xi=1} = 0$$

$$\frac{d\Phi}{d\xi}\Big|_{\xi=1} = 0 \;\Rightarrow\; -\sqrt{Bi}\,C_1\, e^{-\sqrt{Bi}} + \sqrt{Bi}\,C_2\, e^{\sqrt{Bi}} = 0$$

$$\boxed{C_1 = C_2\,\frac{e^{\sqrt{Bi}}}{e^{-\sqrt{Bi}}}}\ \text{(Ec2b)} \longrightarrow C_2\,\frac{e^{\sqrt{Bi}}}{e^{-\sqrt{Bi}}} + C_2 = 1 \qquad \mathrm{Ch}\,\alpha = \frac{e^{\sqrt{\alpha}} + e^{-\sqrt{\alpha}}}{2}$$

$$\text{(Ec1)}\ \boxed{C_1 + C_2 = 1}$$

$$C_2 = \frac{e^{-\sqrt{Bi}}}{e^{\sqrt{Bi}} + e^{-\sqrt{Bi}}} = \frac{e^{-\sqrt{Bi}}}{2\,\mathrm{Ch}\sqrt{Bi}}$$

IX.2.- TRANSFERENCIA DE CALOR EN ALETAS DE SECCIÓN TRANSVERSAL CONSTANTE (VIII)

2.b.- Aleta extremo aislado: (II)

$$C_2 = \frac{e^{-\sqrt{Bi}}}{e^{\sqrt{Bi}} + e^{-\sqrt{Bi}}} = \frac{e^{-\sqrt{Bi}}}{2\,\mathrm{Ch}\sqrt{Bi}} \longrightarrow C_1 = \frac{e^{\sqrt{Bi}}}{e^{\sqrt{Bi}} + e^{-\sqrt{Bi}}} = \frac{e^{\sqrt{Bi}}}{2\,\mathrm{Ch}\sqrt{Bi}}$$

$$(**)\ \Phi(\xi) = C_1\, e^{-\sqrt{Bi}\,\xi} + C_2\, e^{\sqrt{Bi}\,\xi}$$

$$\Phi(\xi) = \frac{T(\xi) - T_F}{T_b - T_F} = \frac{e^{\sqrt{Bi}}\, e^{-\sqrt{Bi}\,\xi} + e^{-\sqrt{Bi}}\, e^{\sqrt{Bi}\,\xi}}{e^{\sqrt{Bi}} + e^{-\sqrt{Bi}}} =$$

$$= \frac{e^{\sqrt{Bi}(1-\xi)} + e^{-\sqrt{Bi}(1-\xi)}}{e^{\sqrt{Bi}} + e^{-\sqrt{Bi}}} = \frac{\mathrm{Ch}\{\sqrt{Bi}\,(1-\xi)\}}{\mathrm{Ch}\sqrt{Bi}}$$

$$\boxed{\Phi(\xi) = \frac{\mathrm{Ch}\{\sqrt{Bi}\,(1-\xi)\}}{\mathrm{Ch}\sqrt{Bi}}} \Longrightarrow$$

IX.2.- TRANSFERENCIA DE CALOR EN ALETAS DE SECCIÓN TRANSVERSAL CONSTANTE (IX)

2.b.- Aleta extremo aislado: (III)

$T_{X=L} \Rightarrow \xi = 1$ $\Longrightarrow$

$$\boxed{\Phi(\xi) = \frac{Ch\{\sqrt{Bi}\ (1-\xi)\}}{Ch\sqrt{Bi}}} \qquad T_L = T_F + \frac{T_b - T_F}{Ch\sqrt{Bi}}$$

$$Q = -k\,S\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=0} = \xrightarrow{(*)} = -\frac{k\,S}{L}\,(T_b - T_F)\,\frac{d\Phi(\xi)}{d\xi}\Big|_{\xi=0} =$$

$$= k\,S\,\frac{T_b - T_F}{L}\,\sqrt{Bi}\,\frac{Sh(\sqrt{Bi}(1-\xi))}{Ch\sqrt{Bi}}\Big|_{\xi=0} = k\,S\,\frac{T_b - T_F}{L}\,\sqrt{Bi}\ Th\sqrt{Bi}$$

$$\boxed{Q = k\,S\,\frac{T_b - T_F}{L}\,\sqrt{Bi}\ Th\sqrt{Bi}}$$

IX.2.- TRANSFERENCIA DE CALOR EN ALETAS DE SECCIÓN TRANSVERSAL CONSTANTE (X)

2.c.- Aleta con convección desde el extremo :

$X = L \Rightarrow Q_K = Q_C$

$\xi = 1$

$$-k\,\frac{dT}{dx}\Big|_{x=L} = h_C\,(T - T_F)_{x=L} = h_C\,\Phi(1)\,(T_b - T_F)$$

$$-k\,\frac{dT}{dx}\Big|_{x=L} = \xrightarrow{(*)} = -k\,\frac{T_b - T_F}{L}\,\frac{d\Phi}{d\xi}\Big\rangle_{\xi=1}$$

$$-k\,\frac{T_b - T_F}{L}\,\frac{d\Phi}{d\xi}\Big\rangle_{\xi=1} = h_C\,\Phi(1)\,(T_b - T_F)$$

$$\frac{d\Phi}{d\xi}\Big|_{\xi=1} = -\frac{h_C\,L}{k}\,\Phi(1) = -\frac{h_C\,L}{k}\,[C_1\,e^{-\sqrt{Bi}} + C_2\,e^{\sqrt{Bi}}] \Longrightarrow$$

(**) $$\Phi(\xi) = C_1\,e^{-\sqrt{Bi}\,\xi} + C_2\,e^{\sqrt{Bi}\,\xi}$$

$$\frac{d\Phi}{d\xi}\Big|_{\xi=1} = -\sqrt{Bi}\,C_1\,e^{-\sqrt{Bi}} + \sqrt{Bi}\,C_2\,e^{\sqrt{Bi}} \Longrightarrow$$

IX.2.- TRANSFERENCIA DE CALOR EN ALETAS DE SECCIÓN TRANSVERSAL CONSTANTE (XI)

2.c.- Aleta con convección desde el extremo (II):

$$\Longrightarrow \quad -\frac{h_C\ L}{k}\left[C_1\ e^{-\sqrt{Bi}} + C_2\ e^{\sqrt{Bi}}\right] = -\sqrt{Bi}\ C_1\ e^{-\sqrt{Bi}} + \sqrt{Bi}\ C_2\ e^{\sqrt{Bi}}$$

$$C_1 = C_2\ \frac{e^{\sqrt{Bi}}\left[\sqrt{Bi} + \frac{h_C\ L}{k}\right]}{e^{-\sqrt{Bi}}\left[\sqrt{Bi} - \frac{h_C\ L}{k}\right]}$$

(Ec1) $\boxed{C_1 + C_2 = 1}$

$$\text{Sh}\ \alpha = \frac{e^{\sqrt{\alpha}} - e^{-\sqrt{\alpha}}}{2}$$

$$C_1 = \frac{1}{2}\ \frac{e^{\sqrt{Bi}}\left[\sqrt{Bi} + \frac{h_C\ L}{k}\right]}{\sqrt{Bi}\ \text{Ch}\sqrt{Bi} + \frac{h_C\ L}{k}\ \text{Sh}\sqrt{Bi}} \quad \Longrightarrow$$

$$C_2 = \frac{1}{2}\ \frac{e^{-\sqrt{Bi}}\left[\sqrt{Bi} - \frac{h_C\ L}{k}\right]}{\sqrt{Bi}\ \text{Ch}\sqrt{Bi} + \frac{h_C\ L}{k}\ \text{Sh}\sqrt{Bi}}$$

IX.2.- TRANSFERENCIA DE CALOR EN ALETAS DE SECCIÓN TRANSVERSAL CONSTANTE (XII)

2.c.- Aleta con convección desde el extremo (III):

(**) $\Phi(\xi) = C_1\ e^{-\sqrt{Bi}\ \xi} + C_2\ e^{\sqrt{Bi}\ \xi}$

$$\Longrightarrow \quad \Phi(\xi) = \frac{\sqrt{Bi}\ \text{Ch}[(1-\xi)\sqrt{Bi}] + \frac{h_C\ L}{k}\ \text{Sh}[(1-\xi)\sqrt{Bi}]}{\sqrt{Bi}\ \text{Ch}\sqrt{Bi} + \frac{h_C\ L}{k}\ \text{Sh}\sqrt{Bi}} = $$

$$= \frac{\text{Ch}[(1-\xi)\sqrt{Bi}] + \frac{S\ \sqrt{Bi}}{p\ L}\ \text{Sh}[(1-\xi)\sqrt{Bi}]}{\text{Ch}\sqrt{Bi} + \frac{S\ \sqrt{Bi}}{p\ L}\ \text{Sh}\sqrt{Bi}}$$

$$\boxed{T(\xi) = T_F + (T_b - T_F) = \frac{\text{Ch}[(1-\xi)\sqrt{Bi}] + \frac{S\ \sqrt{Bi}}{p\ L}\ \text{Sh}[(1-\xi)\sqrt{Bi}]}{\text{Ch}\sqrt{Bi} + \frac{S\ \sqrt{Bi}}{p\ L}\ \text{Sh}\sqrt{Bi}}}$$

IX.2.- TRANSFERENCIA DE CALOR EN ALETAS DE SECCIÓN TRANSVERSAL CONSTANTE (XIII)

2.c.- Aleta con convección desde el extremo (IV):

$$Q = -k\,S\,\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=0} = \xrightarrow{(*)} = \frac{k\,S}{L}\,(T_b - T_F)\,\sqrt{Bi}\,(C_1 - C_2) =$$

$$= \frac{k\,S}{2\,L}\,(T_b - T_F)\,\sqrt{Bi}\;\frac{e^{\sqrt{Bi}}\left(\sqrt{Bi} + \frac{h_C\,L}{k}\right) - e^{-\sqrt{Bi}}\left(\sqrt{Bi} - \frac{h_C\,L}{k}\right)}{\sqrt{Bi}\,Ch\sqrt{Bi} + \frac{h_C\,L}{k}\,Sh\sqrt{Bi}} =$$

$$= \frac{k\,S\,(T_b - T_F)\sqrt{Bi}}{L}\;\frac{\sqrt{Bi}\,Sh\sqrt{Bi} + \frac{h_C\,L}{k}\,Ch\sqrt{Bi}}{\sqrt{Bi}\,Ch\sqrt{Bi} + \frac{h_C\,L}{k}\,Sh\sqrt{Bi}} =$$

$$= \frac{k\,S\,(T_b - T_F)\sqrt{Bi}}{L}\;\frac{Th\sqrt{Bi} + \frac{h_C\,L}{k\sqrt{Bi}}}{1 + \frac{h_C\,L}{k\sqrt{Bi}}\,Th\sqrt{Bi}} = \Longrightarrow$$

IX.- SUPERFICIES AMPLIADAS DE SECCIÓN TRANSVERSAL CONSTANTE

IX.2.- TRANSFERENCIA DE CALOR EN ALETAS DE SECCIÓN TRANSVERSAL CONSTANTE (XIV)

2.c.- Aleta con convección desde el extremo (V):

$$\Longrightarrow = \frac{k\,S\,(T_b - T_F)\sqrt{Bi}}{L}\;\frac{Th\sqrt{Bi} + \frac{h_C\,L}{k\sqrt{Bi}}}{1 + \frac{h_C\,L}{k\sqrt{Bi}}\,Th\sqrt{Bi}}$$

$$Bi = \frac{h_C\,p\,L^2}{k\,S} = \frac{h_C\,2\,a\,L^2}{k\,a\,e} = \frac{2\,h_C\,L^2}{k\,e} = m^2\,L^2\;;\; \sqrt{Bi} = m\,L\;;\; m = \sqrt{\frac{2\,h_C}{k\,e}}$$

$$\boxed{Q = \frac{k\,S\,(T_b - T_F)\sqrt{Bi}}{L}\;\frac{Th\sqrt{Bi} + \frac{S\sqrt{Bi}}{p\,L}}{1 + \frac{S\sqrt{Bi}}{p\,L}\,Th\sqrt{Bi}}}$$

Longitud corregida: $L_C = L + \frac{e}{2}$ **Aleta con convección extremo = = aleta con extremo aislado**

IX.2.- TRANSFERENCIA DE CALOR EN ALETAS DE SECCIÓN TRANSVERSAL CONSTANTE (XV)

2.d.- Aleta con entre dos paredes a T_b y T_L :

(**) $\Phi(\xi) = C_1\, e^{-\sqrt{Bi}\,\xi} + C_2\, e^{\sqrt{Bi}\,\xi}$

X = L; T = T_L ⇒ $$\Phi(1) = \frac{T_L - T_F}{T_b - T_F} = C_1\, e^{-\sqrt{Bi}} + C_2\, e^{\sqrt{Bi}} =$$

(Ec1) $\boxed{C_1 + C_2 = 1}$ $$= (1 - C_2)\, e^{-\sqrt{Bi}} + C_2\, e^{\sqrt{Bi}} =$$

$$= e^{-\sqrt{Bi}} + C_2\,(e^{\sqrt{Bi}} - e^{-\sqrt{Bi}}) = e^{-\sqrt{Bi}} + 2\, C_2\, Sh\sqrt{Bi}$$

$$C_2 = \frac{\Phi(1) - e^{-\sqrt{Bi}}}{2\, Sh\sqrt{Bi}}$$

$$C_1 = 1 - \frac{\Phi(1) - e^{-\sqrt{Bi}}}{2\, Sh\sqrt{Bi}} = \frac{e^{\sqrt{Bi}} - \Phi(1)}{2\, Sh\sqrt{Bi}}$$

IX.2.- TRANSFERENCIA DE CALOR EN ALETAS DE SECCIÓN TRANSVERSAL CONSTANTE (XVI)

2.d.- Aleta con entre dos paredes a T_b y T_L (II) :

(**) $\Phi(\xi) = C_1\, e^{-\sqrt{Bi}\,\xi} + C_2\, e^{\sqrt{Bi}\,\xi}$

$$\Phi(\xi) = \frac{e^{\sqrt{Bi}} - \Phi(1)}{2\, Sh\sqrt{Bi}}\, e^{-\sqrt{Bi}\,\xi} + \frac{\Phi(1) - e^{-\sqrt{Bi}}}{2\, Sh\sqrt{Bi}}\, e^{\sqrt{Bi}\,\xi} =$$

$$= \frac{e^{\sqrt{Bi}\,(1-\xi)} - \Phi(1)\, e^{-\sqrt{Bi}\,\xi} + \Phi(1)\, e^{\sqrt{Bi}\,\xi} - e^{-\sqrt{Bi}\,(1-\xi)}}{2\, Sh\sqrt{Bi}}$$

$$\boxed{\Phi(\xi) = \frac{Sh\{\sqrt{Bi}\,(1-\xi)\} + \Phi(1)\, Sh\,(\sqrt{Bi}\,\xi)}{Sh\,\sqrt{Bi}}}$$

IX.2.- TRANSFERENCIA DE CALOR EN ALETAS DE SECCIÓN TRANSVERSAL CONSTANTE (XVII)

2.d.- Aleta con entre dos paredes a T_b y T_L (III) :

$$Q = -k\,S\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=0} = \xrightarrow{(*)} = -\frac{k\,S}{L}(T_b - T_F)\frac{d\Phi(\xi)}{d\xi}$$

$$\boxed{Q = -\frac{k\,S}{L}(T_b - T_F)\sqrt{Bi}\,\frac{-\,Ch\{\sqrt{Bi}\,(1-\xi)\} + \Phi(1)\,Ch(\sqrt{Bi}\,\xi)}{Sh\sqrt{Bi}}}$$

Calor disipado por la aleta :

$$\boxed{Q = Q_{\xi=0} - Q_{\xi=1}} = -\frac{k\,S}{L}(T_b - T_F)\sqrt{Bi}\,\frac{\Phi(1) - Ch\sqrt{Bi} - \Phi(1)Ch\sqrt{Bi} + 1}{Sh\sqrt{Bi}}$$

$$\boxed{Q = -\frac{k\,S}{L}(T_b - T_F)\sqrt{Bi}\,\frac{(1 - Ch\sqrt{Bi})\{\Phi(1) + 1\}}{Sh\sqrt{Bi}}}$$

IX.2.- TRANSFERENCIA DE CALOR EN ALETAS DE SECCIÓN TRANSVERSAL CONSTANTE (XVIII)

2.a.- Aleta muy larga:

$$\boxed{T_\xi = T_F + (T_b - T_F)\,e^{-\sqrt{Bi}\,\xi}}$$

2.b.- Aleta extremo aislado:

$$\boxed{\Phi(\xi) = \frac{Ch\{\sqrt{Bi}\,(1-\xi)\}}{Ch\sqrt{Bi}}}$$

2.c.- Aleta con convección desde el extremo:

$$\boxed{T(\xi) = T_F + (T_b - T_F) = \frac{Ch[(1-\xi)\sqrt{Bi}] + \frac{S\,\sqrt{Bi}}{p\,L}\,Sh[(1-\xi)\sqrt{Bi}]}{Ch\sqrt{Bi} + \frac{S\,\sqrt{Bi}}{p\,L}\,Sh\sqrt{Bi}}}$$

2.d.- Aleta con entre dos paredes a T_b y T_L:

$$\boxed{\Phi(\xi) = \frac{Sh\{\sqrt{Bi}\,(1-\xi)\} + \Phi(1)\,Sh(\sqrt{Bi}\,\xi)}{Sh\sqrt{Bi}}}$$

IX.2.- TRANSFERENCIA DE CALOR EN ALETAS DE SECCIÓN TRANSVERSAL CONSTANTE (XIX)

2.a.- Aleta muy larga:

$$\boxed{Q = \frac{k\,S}{L}\,(T_b - T_F)\,\sqrt{Bi}}$$

2.b.- Aleta extremo aislado:

$$\boxed{Q = k\,S\,\frac{T_b - T_F}{L}\,\sqrt{Bi}\ \ Th\sqrt{Bi}}$$

2.c.- Aleta con convección desde el extremo:

$$\boxed{Q = \frac{k\,S\,(T_b - T_F)\,\sqrt{Bi}}{L}\ \frac{Th\sqrt{Bi} + \dfrac{S\sqrt{Bi}}{p\,L}}{1 + \dfrac{S\sqrt{Bi}}{p\,L}\ Th\sqrt{Bi}}}$$

2.d.- Aleta con entre dos paredes a T_b y T_L:

$$\boxed{Q = -\,\frac{k\,S}{L}\,(T_b - T_F)\,\sqrt{Bi}\ \frac{(1 - Ch\sqrt{Bi}\,)\,\{\Phi(1) + 1\}}{Sh\sqrt{Bi}}}$$

IX.3.- CAMPO DE APLICACIÓN PARA LAS ALETAS DE SECCIÓN TRANSVERSAL CONSTANTE (I)

$$\frac{dQ}{dL} = 0 \longrightarrow Q = k\,S\,(T_b - T_F)\,m\ \frac{Th(m\,L) + \dfrac{h_C}{k\,m}}{1 + \dfrac{h_C}{k\,m}\ Th(m\,L)}$$

$$\frac{dQ}{dL} = k\,S\,(T_b - T_F)\,m\ \frac{\dfrac{m}{Ch^2(m\,L)}\,\{1 + \dfrac{h_C}{k\,m}\ Th\,(m\,L)\} - \{Th\,(m\,L) + \dfrac{h_C}{k\,m}\}\,\dfrac{h_C}{k\,m}\ \dfrac{m}{Ch^2(m\,L)}}{\{1 + \dfrac{h_C}{k\,m}\ Th\,(m\,L)\}^2} = 0$$

$$1 + \frac{h_C}{k\,m}\ Th\,(m\,L) = \{Th\,(m\,L) + \frac{h_C}{k\,m}\}\,\frac{h_C}{k\,m}$$

$$1 = \left(\frac{h_C}{k\,m}\right)^2 = \frac{h_C\,e}{2\,k}$$

Efecto		
Aislante	**Nulo**	**Aumenta Q**
$\dfrac{h_C\,e}{2\,k} > 1$	$\dfrac{h_C\,e}{2\,k} = 1$	$\dfrac{h_C\,e}{2\,k} < 1$

IX.3.- CAMPO DE APLICACIÓN PARA LAS ALETAS DE SECCIÓN TRANSVERSAL CONSTANTE (II)

Por razones económicas, sólo si: $\dfrac{h_C\ e}{2\ k} \ll 1$

En aletas cortas:

$$\frac{h_C\, e}{2\, k} \leq \frac{1}{5} \quad ; \quad \frac{p}{S} = \frac{2\,(a + e)}{a\, e} \cong \frac{2}{e} \quad ; \quad \frac{h_C\, S}{p\, k} \leq \frac{1}{5}$$

***e* pequeños y *k* elevadas:**

IX.4.- PERFIL OPTIMO (I)

Condición: $\dfrac{dQ}{de} = 0$

Aleta con convección:

$$Q = k\, S\, \frac{T_b - T_F}{L}\, \sqrt{Bi}\ \mathrm{Th}\sqrt{Bi} = k\, S\, (T_b - T_F)\, m\, \mathrm{Th}\,(m\, L) =$$

$$= \left| m = \sqrt{\frac{2\, h_C}{k\, e}} \right| = k\, S\, (T_b - T_F) \sqrt{\frac{2\, h_C}{k\, e}}\ \mathrm{Th}\,\left(\sqrt{\frac{2 h_C}{k e}}\, L\right) =$$

$$= \left| \begin{matrix} S = a\, e\ ;\ a = 1 \\ S = e\ ;\ \Omega = L\, e \end{matrix} \right| = (T_b - T_F) \sqrt{2 h_C k e}\ \mathrm{Th}\,\left(\sqrt{\frac{2 h_C}{k e^3}}\, \Omega\right)$$

$$\frac{dQ}{de} = (T_b - T_F) \left\{ \frac{2\, h_C k}{2 \sqrt{2\, h_C e\, k}}\, \mathrm{Th}\left(\sqrt{\frac{2\, h_C}{k\, e^3}}\ \Omega\right) - \frac{\sqrt{2\, h_C\, e\, k}}{\mathrm{Ch}^2 \left(\sqrt{\frac{2\, h_C}{k\, e^3}}\ \Omega\right)}\ \frac{\Omega}{2 \sqrt{\frac{2\, h_C}{k\, e^3}}}\ \frac{6\, h_C}{k\, e^4} \right\} = 0$$

IX.4.- PERFIL OPTIMO (II)

$$\frac{dQ}{de} = (T_b - T_F)\left\{\frac{2\,h_C\,k}{2\sqrt{2\,h_C\,e\,k}}\,Th\left(\sqrt{\frac{2\,h_C}{k\,e^3}}\,\Omega\right) - \frac{\sqrt{2\,h_C\,e\,k}}{Ch^2\left(\sqrt{\frac{2\,h_C}{k\,e^3}}\,\Omega\right)}\,\frac{\Omega}{2\sqrt{\frac{2\,h_C}{k\,e^3}}}\,\frac{6\,h_C}{k\,e^4}\right\} = 0$$

$$Th\left(\sqrt{\frac{2\,h_C}{k\,e^3}}\,\Omega\right) = 3\left(\sqrt{\frac{2\,h_C}{k\,e^3}}\,\Omega\right)\,Sech^2\left(\sqrt{\frac{2\,h_C}{k\,e^3}}\,\Omega\right)$$

$$Th\sqrt{Bi} = 3\sqrt{Bi}\,Sech^2\sqrt{Bi}$$

$$\boxed{B_{i\acute{o}pt} = 2{,}0141945}$$

$$\left.\begin{array}{l} m^2 = \dfrac{2\,h_C}{k\,e} \\ m^2 = \dfrac{Bi}{L^2} = \dfrac{Bi\,e^2}{\Omega^2} \end{array}\right\} \Rightarrow e_{\acute{o}pt} = \sqrt[3]{\frac{2\,h_C\,\Omega^2}{k\,Bi_{\acute{o}pt}}} = 0{,}997\,\sqrt[3]{\frac{h_C\,\Omega^2}{k}}$$

$$L_{\acute{o}pt} = \frac{\Omega}{e_{\acute{o}pt}} = \frac{\Omega}{0{,}997\sqrt[3]{\frac{\Omega^2\,h_C}{k}}} = 1{,}007\,\sqrt[3]{\frac{\Omega\,k}{h_C}}$$

IX.4.- PERFIL OPTIMO (III)

$$\boxed{B_{i\acute{o}pt} = 2{,}0141945}$$

Son conocidos: h_c, k, Q y (T_b-T_F)

$$Q = (T_b - T_F)\,\sqrt{2\,h_C\,e\,k}\;Th\sqrt{Bi_{\acute{o}pt}}$$

$$e_{\acute{o}pt} = \left(\frac{Q}{T_b - T_F}\right)^2 \frac{1}{2\,h_C\,k\,Th^2\sqrt{Bi_{\acute{o}pt}}} = \frac{0{,}6321}{h_C\,k}\left(\frac{Q}{T_b - T_F}\right)^2$$

$$e_{\acute{o}pt} = \frac{0{,}6321}{h_C\,k}\left(\frac{Q}{T_b - T_F}\right)^2 = 0{,}997\,\sqrt[3]{\frac{\Omega^2\,h_C}{k}}$$

$$\Omega_{\acute{o}pt} = \frac{0{,}5048}{h_C^2\,k}\left(\frac{Q}{T_b - T_F}\right)^3 \Rightarrow L_{\acute{o}pt} = \frac{0{,}7979}{h_C}\,\frac{Q}{T_b - T_F}$$

Aplicación de aletas resulta interesante con h_c de 20 a 150 W/m²ºC

IX.5.- CASOS ESPECIALES

Situaciones en las que la variación de temperatura se produce en una única dirección

- **Superficies conductoras (hilos, placas, …) recubiertas de aislante**
- **Los hilos de un termopar midiendo Tª en flujo de gases calientes**
- **Ciertos intercambiadores de calor**
- **Conductores de un circuito impreso y la placa**
- **etc**