

**T2.- Conducción de Calor Unidireccional
en Régimen Estacionario**

Las transparencias son el material de apoyo del profesor para impartir la clase. No son apuntes de la asignatura. Al alumno le pueden servir como guía para recopilar información (libros, ...) y elaborar sus propios apuntes

Departamento: Ingeniería Eléctrica y Energética
Area: Máquinas y Motores Térmicos

CARLOS J RENEDO renedoc@unican.es

Despachos: ETSN 236 / ETSIIT S-3 28

<http://personales.unican.es/renedoc/index.htm>

Tfn: ETSN 942 20 13 44 / ETSIIT 942 20 13 82

**II.- CONDUCCIÓN DE CALOR UNIDIRECCIONAL
EN RÉGIMEN ESTACIONARIO**

Principio de la Conservación de la Energía

Balance Energético

Generación de E

Almacenamiento de E, [t]

**II.2.- ECUACIÓN FUNDAMENTAL DE LA TRANSMISIÓN
DE CALOR POR CONDUCCIÓN**

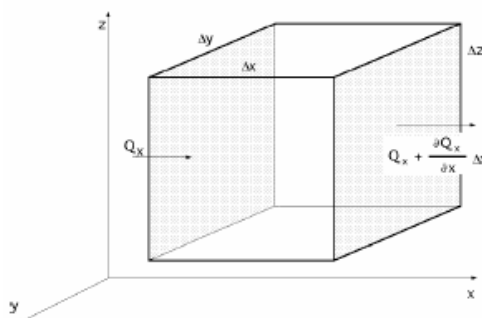


Fig II.1.- Paralelepípedo elemental de fluido

$$Q_x = -kA \frac{\partial T}{\partial x} \quad \text{ó} \quad q_x = \frac{Q_x}{A} = -k \frac{\partial T}{\partial x}$$

(Energía que atraviesa por conducción el elemento) +
+ (Energía generada en el elemento) =
= (Variación de la energía interna del elemento)

$$\nabla^2 T + \frac{E}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

II.2.- ECUACIÓN FUNDAMENTAL DE LA TRANSMISIÓN DE CALOR POR CONDUCCIÓN

E. entra (x)

$$Q_x = q_x \Delta y \Delta z$$

E. sale (x)

$$Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} \Delta x$$

Balance de E. (x) $Q_x - (Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} \Delta x) = - \frac{\partial Q_x}{\partial x} \Delta x = - \frac{\partial q_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$

Balance de E. (y) $Q_y - (Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \Delta y) = - \frac{\partial Q_y}{\partial y} \Delta y = - \frac{\partial q_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z$

Balance de E. (z) $Q_z - (Q_z + \frac{\partial Q_z}{\partial z} \Delta z) = - \frac{\partial Q_z}{\partial z} \Delta z = - \frac{\partial q_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$

E. almacenada $-(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}) \Delta x \Delta y \Delta z$

E. generada $E \Delta x \Delta y \Delta z$

Variación de U(t): $\delta U = m c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z$
 ($c_p = c_v$) ρ y c_p ctes

II.2.- ECUACIÓN FUNDAMENTAL DE LA TRANSMISIÓN DE CALOR POR CONDUCCIÓN

Balance de E. ⇒ E. Almacenada + E generada = Δ U

$$-(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}) + E = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

sustituyendo: $q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x}$; $q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y}$; $q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z}$

$$\frac{\partial}{\partial x} (k \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (k \frac{\partial T}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (k \frac{\partial T}{\partial z}) + E = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

$T = T(x, y, z, t)$ y $E = E(x, y, z, t)$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{E}{k} = \frac{\rho c_p}{k} \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial T}{\partial t} \quad \left| \alpha = \frac{k}{\rho c_p} \right|$$

α : difusividad térmica

$$\nabla^2 T + \frac{E}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{E}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \Phi^2} + \frac{E}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

II.3.- CONDUCCIÓN EN UN CILINDRO

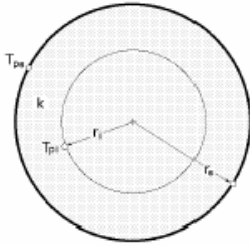


Fig II.2.- Cilindro

$E = 0$
Reg estacionario

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0$$

$$r \frac{\partial T}{\partial r} = C_1$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{C_1}{r}$$

$$T(r) = C_1 \ln r + C_2$$

Condiciones de contorno

$$\begin{cases} r = r_i ; T_i = C_1 \ln r_i + C_2 & (*) \\ r = r_e ; T_{pe} = C_1 \ln r_e + C_2 & (**) \end{cases}$$

$$(*)-(**) \Rightarrow C_1 = \frac{T_{pe} - T_i}{\ln \frac{r_e}{r_i}}$$

$$(*) \text{ y } C_1 \Rightarrow C_2 = T_i - \frac{T_{pe} - T_i}{\ln \frac{r_e}{r_i}} \ln r_i$$

$$T(r) = T_i + (T_{pe} - T_i) \frac{\ln (r/r_i)}{\ln (r_e/r_i)}$$

II.3.- CONDUCCIÓN EN UN CILINDRO

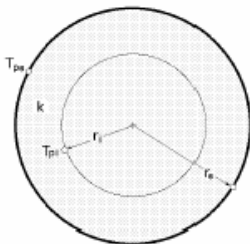


Fig II.2.- Cilindro

$$T(r) = T_i + (T_{pe} - T_i) \frac{\ln (r/r_i)}{\ln (r_e/r_i)}$$

$$Q_x = -kA \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$Q(r) = -2\pi r L k \frac{dT(r)}{dr} \Rightarrow$$

$$T(r) = C_1 \ln r + C_2$$

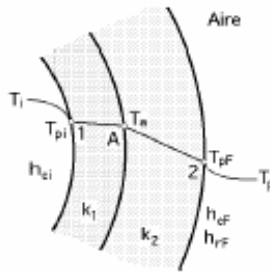
$$Q(r) = -2\pi r L k \frac{C_1}{r} = -2\pi k L \frac{T_{pe} - T_i}{\ln (r_e/r_i)} = \frac{T_i - T_{pe}}{2\pi k L \ln (r_e/r_i)}$$

$$C_1 = \frac{T_{pe} - T_i}{\ln \frac{r_e}{r_i}}$$

$$Q = 2\pi k L \frac{T_{pe} - T_{pi}}{\ln (r_e/r_i)}$$

II.3.- CONDUCCIÓN EN UN CILINDRO

$$Q = 2 \pi k L \frac{T_{PF} - T_{P0}}{\ln(r_e/r_i)}$$



Interior conv.
Exterior conv. y rad.

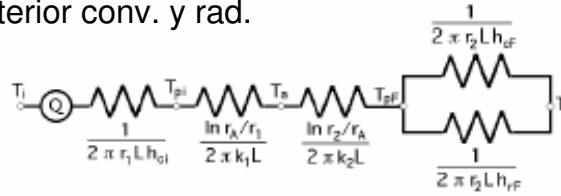


Fig II.3.- Tubería aislada, distribución de temperaturas y circuito térmico correspondiente

$$UA = \frac{1}{\sum R_T}$$

$$Q = UA(T_{PF} - T_{P0}) = \frac{T_{PF} - T_{P0}}{\frac{1}{UA}}$$

$$\frac{1}{UA} = \frac{1}{2 \pi r_1 L h_{ci}} + \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2 \pi k_1 L} + \frac{\ln \frac{r_2}{r_A}}{2 \pi k_2 L} + \frac{1}{2 \pi r_2 L (h_{cf} + h_{rf})}$$

II.4.- ESPESOR DE AISLAMIENTO CRÍTICO PARA UN CILINDRO

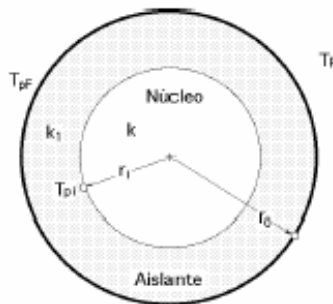


Fig II.4.- Aislamiento de un cilindro, radio crítico

El calor es el transmitido por conv. al ext.

$$Q = h_c A_0 (T_{PF} - T_F)$$

Si se añade una capa $A \uparrow$ y $T_{pf} \downarrow$

¿se \uparrow o \downarrow Q con la 2ª capa?

Estudiando la 2ª capa

$$Q = \frac{T_{pi} - T_F}{R_{k_1} + R_c} = \frac{T_{pi} - T_F}{\frac{\ln(r_0/r_1)}{2 \pi k_1 L} + \frac{1}{2 \pi r_0 L h_c}} = \frac{2 \pi L (T_{pi} - T_F)}{\frac{1}{k_1} \ln \frac{r_0}{r_1} + \frac{1}{r_0 h_c}} = \frac{T_{pi} - T_F}{R}$$

II.4.- ESPESOR DE AISLAMIENTO CRITICO PARA UN CILINDRO

Resolviendo por Q

$$\frac{dQ}{dr_0} = - 2 \pi L (T_{pi} - T_F) \frac{\frac{1}{k_1 r_0} - \frac{1}{r_0^2 h_c}}{\left(\frac{1}{k_1} \ln \frac{r_0}{r_i} + \frac{1}{r_0 h_c}\right)^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{h_c r_0}{k_1} = 1 \\ r_0 = \infty \end{cases}$$

$$Bi = \frac{h_c r_0}{k_1} \quad \text{radio crítico} \quad r_0 = \frac{k_1}{h_c}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d^2 Q}{dr_0^2} \\ r_0 = \frac{k_1}{h_c} \end{array} \right\} \frac{d^2 Q}{dr_0^2} = - 2 \pi L (T_{pi} - T_F) \frac{-\frac{r_0}{k_1^2} \ln \frac{r_0}{r_i} - 2 \frac{r_0}{k_1^2} + \frac{2}{h_c k_1} \ln \frac{r_0}{r_i} + \frac{3}{h_c k_1}}{\left(\frac{1}{h_c} + \frac{r_0}{k_1} \ln \frac{r_0}{r_i}\right)^3}$$

$$\frac{d^2 Q}{dr_0^2} = - 2 \pi L (T_{pi} - T_F) \frac{\frac{h_c^2}{k_1}}{\left(1 + \ln \frac{r_0}{r_i}\right)^2} < 0 \Rightarrow r_c Q_{\max}$$

II.4.- ESPESOR DE AISLAMIENTO CRITICO PARA UN CILINDRO

Resolviendo por R_T

$$R = \frac{1}{k_1} \ln \frac{r_0}{r_i} + \frac{1}{r_0 h_c} \quad \frac{dR}{dr_0} = \frac{1}{k_1} \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0^2 h_c} = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_0 = \infty \\ r_0 = \frac{k_1}{h_c} \end{cases}$$

$$\frac{d^2 R}{dr_0^2} = - \frac{1}{k_1} \frac{1}{r_0^2} + \frac{2}{r_0^3 h_c} = \frac{1}{r_0^2} \left(-\frac{1}{k_1} + \frac{2}{r_0 h_c}\right) = \frac{1}{r_0^2} \left(-\frac{1}{k_1} + \frac{2}{k_1}\right)$$

$$\frac{d^2 R}{dr_0^2} = \frac{1}{k_1 r_0^2} > 0 \Rightarrow R_{T \min} \Rightarrow Q_{\max}$$

Es posible ↑Q siempre que $r < r_c$ $r_c = h_c / k$

II.4.- ESPESOR DE AISLAMIENTO CRITICO PARA UN CILINDRO

Es posible $\uparrow Q$ siempre que $r < r_c$ $r_c = h_c / k$

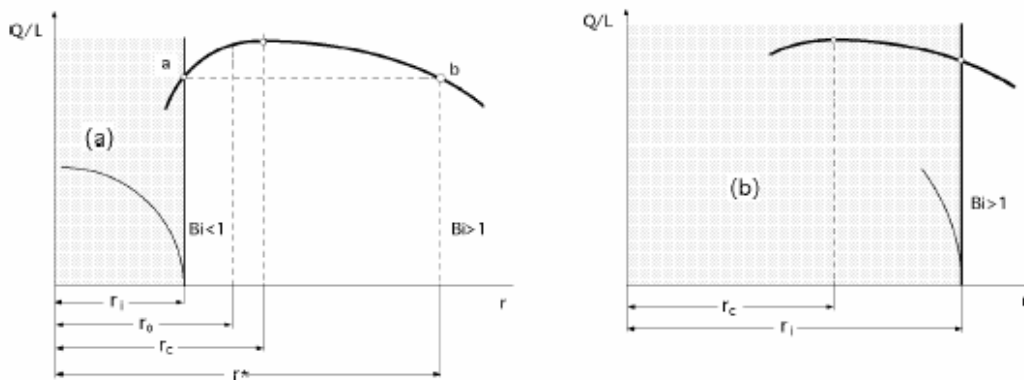


Fig II.5.a.b- Posiciones del radio crítico en tuberías de distinto diámetro

Para, $Bi < 1$, que implica que $(r_i < r_c)$

Para, $Bi > 1$, que implica que $(r_i > r_c)$

II.5.- PARED ESFÉRICA SIN GENERACIÓN DE ENERGÍA

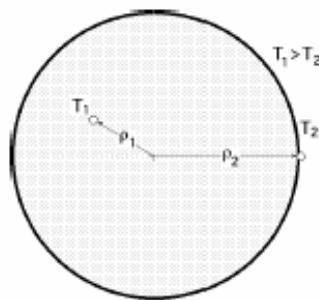


Fig II.6.- Esfera

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

$$T = T(\rho) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \left| \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\rho} \right| = \frac{x}{\rho} \frac{\partial T}{\partial \rho} \\ \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{x}{\rho} + \frac{\partial T}{\partial \rho} \frac{\rho - x \frac{\partial \rho}{\partial x}}{\rho^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2} \left(\frac{x}{\rho}\right)^2 + \frac{\partial T}{\partial \rho} \frac{\rho^2 - x^2}{\rho^3}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \rightarrow \nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2} \frac{x^2 + y^2 + z^2}{\rho^2} + \frac{\partial T}{\partial \rho} \left(\frac{3}{\rho} - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{\rho^3}\right)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \rho} = u \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2} + \frac{\partial T}{\partial \rho} \frac{2}{\rho} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{2u}{\rho} = 0 \quad ; \quad \frac{du}{u} + \frac{2d\rho}{\rho} = 0 \end{array} \right.$$

$$\int \ln u + 2 \ln \rho = \ln C$$

$$\frac{\partial T}{\partial \rho} = u = \frac{C}{\rho^2} \quad \int T = -\frac{C}{\rho} + B$$

II.5.- PARED ESFÉRICA SIN GENERACIÓN DE ENERGÍA

$$T = -\frac{C}{\rho} + B$$

$$T_1 = -\frac{C}{\rho_1} + B$$

$$T_2 = -\frac{C}{\rho_2} + B$$

$$T_1 - T_2 = -\frac{C(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1 \rho_2} = -\frac{C e}{\rho_1 \rho_2} \Rightarrow \begin{cases} C = -\frac{T_1 - T_2}{e} \rho_1 \rho_2 \\ B = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{e} \rho_2 \end{cases}$$

$$T = \frac{\rho_1 \rho_2}{e \rho} (T_1 - T_2) - \frac{\rho_2}{e} (T_1 - T_2) + T_1 = T_1 + \frac{T_1 - T_2}{e} \rho_2 \left(\frac{\rho_1}{\rho} - 1 \right)$$

$$\frac{T - T_1}{T_1 - T_2} = \frac{\rho_2}{e} \left(\frac{\rho_1}{\rho} - 1 \right)$$

$$Q = -k A \frac{\partial T}{\partial \rho} = -k 4 \pi \rho^2 \frac{\partial T}{\partial \rho} = -4 \pi k \rho^2 \frac{C}{\rho^2} = 4 \pi k \rho_1 \rho_2 \frac{T_1 - T_2}{e}$$

$$Q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{e}{4 \pi \rho_1 \rho_2 k}} = \frac{T_1 - T_2}{R_{\text{resf}}} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{\rho_2 - \rho_1}{4 \pi \rho_1 \rho_2 k}}$$

II.5.- PARED ESFÉRICA SIN GENERACIÓN DE ENERGÍA

el calor evacuado a través de una esfera hueca

$$Q = \frac{T_p - T_0}{\frac{1}{4 \pi r_1^2 h_{pF}} + \frac{e}{4 \pi r_1 r_2 k} + \frac{1}{4 \pi r_2^2 h_{p0}}}$$

una esfera recubierta con un aislante de conductividad térmica k^*

$$R = \frac{r_3 - r_2}{4 \pi r_2 r_3 k^*} + \frac{1}{4 \pi r_3^2 h_{oF}}$$

$$\frac{dR}{dr_3} = \frac{r_2^2 k^*}{(r_2 r_3 k^*)^2} - \frac{2 r_3 h_{oF}}{(r_3 h_{oF})^2} = 0 \Rightarrow r_3 = r_{\text{crit}} = \frac{2 k^*}{h_{oF}}$$

II.6.- CONDUCCIÓN MONODIMENSIONAL CON GENERACIÓN DE ENERGÍA

PARED PLANA

$$(e = 2L)$$

consideraremos la mitad de su espesor,
frontera aislada o adiabática

$$\nabla^2 T + \frac{E}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

$$\int \left. \begin{aligned} \frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{E}{k} &= 0 \\ \frac{dT}{dx} &= -\frac{E x}{k} + C_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow T = -\frac{E x^2}{2k} + C_1 x + C_2 \quad (*)$$

Condiciones de contorno

$$\begin{aligned} \text{frontera aislada o adiabática } x=0 &\Rightarrow \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \\ x=L &\Rightarrow T = T_1 = -\frac{E L^2}{2k} + C_2 \Rightarrow C_2 = T_1 + \frac{E L^2}{2k} \quad (**) \end{aligned}$$

$$T = -\frac{E x^2}{2k} + T_1 + \frac{E L^2}{2k}$$

Parabólico

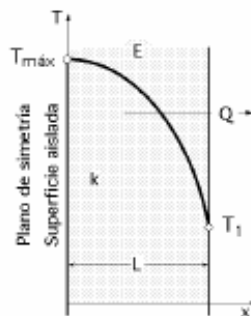


Fig II.7.- Pared plana

II.6.- CONDUCCIÓN MONODIMENSIONAL CON GENERACIÓN DE ENERGÍA

PARED PLANA

$$T = -\frac{E x^2}{2k} + T_1 + \frac{E L^2}{2k}$$

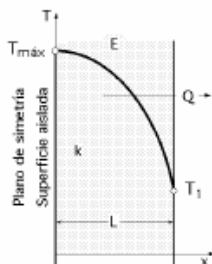


Fig II.7.- Pared plana

$T_{máx}$ en la superficie aislada ($x=0$)

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = -\frac{E x}{k} = 0$$

$$\left. \frac{d^2 T}{dx^2} \right|_{x=0} = -\frac{E}{k}$$

$$T_{máx} = T_1 + \frac{E L^2}{2k}$$

Toda la energía generada
se conduce hacia la superficie libre ($x=L$)

$$Q = -k A \frac{\partial T}{\partial x} = k A \frac{E x}{k} = A E x$$

La energía que llega a la superficie ($x=L$) es:

$$Q_{x=L} = A E L = V E$$

siendo V el volumen de media pared plana de espesor L.

II.6.- CONDUCCIÓN MONODIMENSIONAL CON GENERACIÓN DE ENERGÍA

PLACA PLANA RODEADA POR UN FLUIDO CONVECTOR

El calor generado atraviesa la placa por cond. y escapa al fluido por convección

$$(*) \quad T = -\frac{E x^2}{2k} + C_1 x + C_2$$

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{E x}{k} + C_1$$

Condiciones de contorno

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 ; \quad \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \quad T = T_{\text{máx}} = C_2 \\ x = L ; \quad -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = h_c (T_1 - T_F) ; \quad \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = -\frac{h_c (T_1 - T_F)}{k} = -\frac{E L}{k} \end{array} \right\}$$

$$(**) \quad C_2 = T_1 + \frac{E L^2}{2k} = T_{\text{máx}} \quad (a)$$

$$T_1 = T_F + \frac{E L}{h_c} \quad (b)$$

(a);(b) $\Rightarrow \quad T_1 = T_F + \frac{E L}{h_c} = -\frac{E L^2}{2k} + T_{\text{máx}} \quad T_{\text{máx}} = T_F + \frac{E L}{h_c} + \frac{E L^2}{2k}$

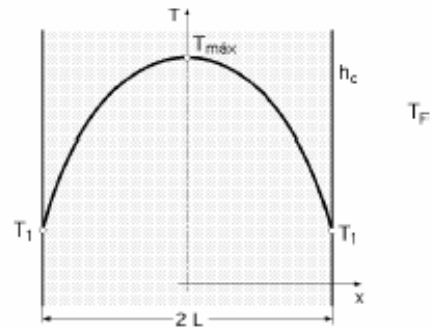


Fig II.8.- Placa plana rodeada por un fluido (Distribución de temperaturas)

II.6.- CONDUCCIÓN MONODIMENSIONAL CON GENERACIÓN DE ENERGÍA

PLACA PLANA RODEADA POR UN FLUIDO CONVECTOR

$$T = T_{\text{máx}} - \frac{E x^2}{2k} = T_1 + \frac{E L^2}{2k} - \frac{E x^2}{2k} =$$

$$= T_1 + \frac{E}{2k} (L^2 - x^2) = T_F + \frac{E L^2}{2k} - \frac{E x^2}{2k} + \frac{E L}{h_c}$$

$$T = T_F + \frac{E L}{k} \left(\frac{L}{2} - \frac{x^2}{2L} + \frac{k}{h_c} \right)$$

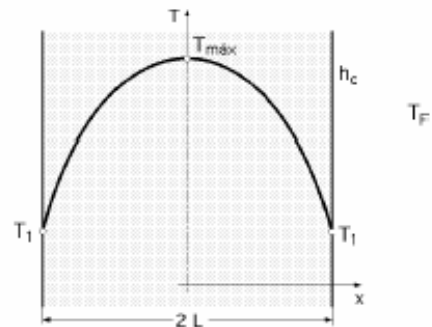


Fig II.8.- Placa plana rodeada por un fluido (Distribución de temperaturas)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Sólido isoterma: } Bi \rightarrow 0 ; k \rightarrow \infty ; T = T_1 = T_F + \frac{E L}{h_c} \\ \text{Fluido isoterma: } Bi \rightarrow \infty ; h_c \rightarrow \infty ; T = T_F + \frac{E L}{2k} \left(L - \frac{x^2}{L} \right) \end{array} \right.$$

$$Q = 2 A h_c (T_1 - T_F) = 2 A h_c \left(T_F + \frac{E L}{h_c} - T_F \right) = 2 A E L = E V$$

II.6.- CONDUCCIÓN MONODIMENSIONAL CON GENERACIÓN DE ENERGÍA

PARED CILÍNDRICA.



Fig II.9.- Pared cilíndrica

$$E = \frac{R^* I^2}{V}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{E}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{E}{k} = 0$$

$$\frac{dT}{dr} = - \frac{E r}{2 k} + \frac{C_1}{r}$$

$$T = - \frac{E r^2}{4 k} + C_1 \ln r + C_2$$

en el eje del cilindro $r = 0$

$$\ln r = \ln 0 = -\infty \Rightarrow C_1 = 0$$

$r = R$ y $T = T_0$.

$$T_0 = - \frac{E R^2}{4 k} + C_2 \Rightarrow C_2 = T_0 + \frac{E R^2}{4 k}$$

$$T = T_0 - \frac{E r^2}{4 k} + \frac{E R^2}{4 k} = T_0 - \frac{E R^2}{4 k} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right)$$

La temperatura máxima
del cilindro

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{r=0} = 0$$

$$r = 0 ; T = T_{\text{máx}} = T_0 + \frac{E R^2}{4 k}$$

a lo largo del eje

$$\left. \frac{d^2 T}{dr^2} \right|_{r=0} = - \frac{E}{k}$$

II.6.- CONDUCCIÓN MONODIMENSIONAL CON GENERACIÓN DE ENERGÍA

PARED CILÍNDRICA.



Fig II.9.- Pared cilíndrica

$$T = T_0 - \frac{E r^2}{4 k} + \frac{E R^2}{4 k} = T_0 - \frac{E R^2}{4 k} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right)$$

$$r = r_0 \quad Q_{\text{cond}} = Q_{\text{conv}} \quad h_c A (T_0 - T_F) = -k A \frac{\delta T}{\delta r}$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R} = - \frac{h_c}{k} (T_0 - T_F) = - \frac{E R}{2 k} \Rightarrow T_0 = T_F + \frac{E R}{2 h_c}$$

$$T - T_F = \frac{E R}{2 h_c} + \frac{E R^2}{4 k} - \frac{E r^2}{4 k} = \frac{E R}{2 h_c} \left(1 + \frac{R h_c}{2 k} - \frac{r^2 h_c}{2 k R} \right)$$

$$T_{\text{máx}} = T_F + \frac{E R}{2 h_c} \left(1 + \frac{R h_c}{2 k} \right) = T_F + \frac{E R}{2 h_c} \left(1 + \frac{Bi}{2} \right)$$

Si, $Bi \rightarrow 0 \Rightarrow k \rightarrow \infty$, (sólido isoterma)

Si, $Bi \rightarrow \infty \Rightarrow h_c \rightarrow 0$

$$T_0 = T_F + \frac{E R}{2 h_c}$$

$$(T_0 = T_F)$$

$$Q = -k A \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=R} = -k A \frac{E R}{2 k} = -E \pi R^2 L = -E V$$

II.6.- CONDUCCIÓN MONODIMENSIONAL CON GENERACIÓN DE ENERGÍA

PARED CILÍNDRICA RODEADA CON UNA VAINA EN CONTACTO CON UN FLUIDO CONVECTOR

Para el núcleo ($E \neq 0$) se tiene lo visto anteriormente:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{E}{k} = 0 \quad ; \quad \frac{dT}{dr} = - \frac{E r}{2 k} + \frac{C_1}{r}$$

$$T = - \frac{E r^2}{4 k} + C_1 \ln r + C_2$$

$$\text{Para: } r = 0, C_1 = 0 \Rightarrow T = - \frac{E r^2}{4 k} + C_2$$

Para el aislante, $E = 0$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad ; \quad r \frac{\partial T}{\partial r} = C_3 \quad ; \quad \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{C_3}{r} \Rightarrow T = C_3 \ln r + C_4$$

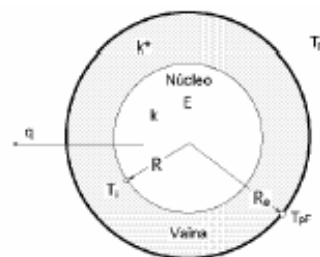


Fig II.10.- Núcleo generador de calor rodeado con un aislante

II.6.- CONDUCCIÓN MONODIMENSIONAL CON GENERACIÓN DE ENERGÍA

PARED CILÍNDRICA RODEADA CON UNA VAINA EN CONTACTO CON UN FLUIDO CONVECTOR

Condiciones de contorno:

a) Para: $r = R$ y $T = T_i$ común al núcleo y a la vaina

$$T_i = C_2 - \frac{E R^2}{4 k} = C_3 \ln r_i + C_4$$

$$C_2 = T_i + \frac{E R^2}{4 k} = \frac{E R^2}{4 k} + C_3 \ln r_i + C_4 (*)$$

b) El calor que abandona el núcleo, es absorbido por la vaina:

$$Q_{r=R}^{\text{vaina}} = Q_{r=R}^{\text{núcleo}} \quad ; \quad -k \frac{dT}{dr} \Big|_{r=R}^{\text{núcleo}} = -k^* \frac{dT}{dr} \Big|_{r=R}^{\text{vaina}}$$

$$-k \left(- \frac{E R}{2 k} \right) = -k^* \frac{C_3}{R} \quad ; \quad C_3 = - \frac{E R^2}{2 k^*} (**)$$

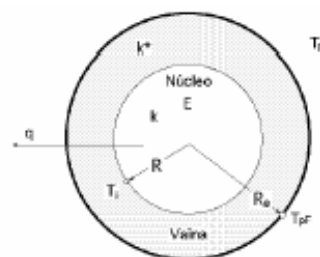


Fig II.10.- Núcleo generador de calor rodeado con un aislante

II.6.- CONDUCCIÓN MONODIMENSIONAL CON GENERACIÓN DE ENERGÍA

PARED CILÍNDRICA RODEADA CON UNA VAINA EN CONTACTO CON UN FLUIDO CONVECTOR

Condiciones de contorno:

c) En la superficie exterior de la vaina

$$q_{r=R_e}^{vaina} = q_{r=R_e}^{fluido} \left[\begin{array}{l} q_{r=R_e}^{vaina} = -k^* \frac{dT}{dr} \Big|_{r=R_e} = -k^* \frac{C_3}{R_e} \\ q_{r=R_e}^{fluido} = h_c (T_{pF} - T_F) \end{array} \right. \quad \text{Fig II.10.- Núcleo generador de calor rodeado con un aislante}$$

$$-k^* \frac{C_3}{R_e} = h_c (T_{pF} - T_F) \quad C_3 = \frac{-h_c (T_{pF} - T_F) R_e}{k^*} \quad (***)$$

$$(**)=(***) \quad C_3 = \frac{-h_c (T_{pF} - T_F) R_e}{k^*} = -\frac{E R^2}{2 k^*} \quad T_{pF} = T_F + \frac{E R^2}{2 h_c R_e}$$

$$T = C_3 \ln r + C_4 = \left. \begin{array}{l} \text{para: } r = R_e, \quad T = T_{pF} \\ T_F + \frac{E R^2}{2 h_c R_e} = \frac{-E R^2}{2 k^*} \ln R_e + C_4 \end{array} \right\}$$

$$C_4 = T_{pF} + \frac{E R^2}{2 k^*} \ln R_e = T_F + \frac{E R^2}{2} \left(\frac{1}{h_c R_e} + \frac{\ln R_e}{k^*} \right) \quad (****)$$

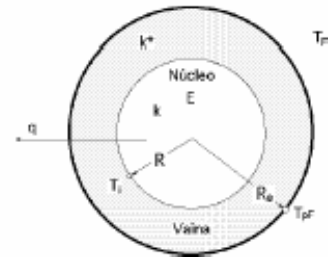


Fig II.10.- Núcleo generador de calor rodeado con un aislante

II.6.- CONDUCCIÓN MONODIMENSIONAL CON GENERACIÓN DE ENERGÍA

PARED CILÍNDRICA RODEADA CON UNA VAINA EN CONTACTO CON UN FLUIDO CONVECTOR

Condiciones de contorno:

Con los valores de C_3 y C_4 se calcula el valor de C_2

$$C_2 = \frac{E R^2}{4 k} + C_3 \ln R + C_4 = T_F + E R^2 \left(\frac{1}{2 h_c R_e} + \frac{1}{4 k} + \frac{1}{2 k^*} \ln \frac{R_e}{R} \right)$$

la temperatura en la superficie del cilindro:

$$T_i = C_2 - \frac{E R^2}{4 k} = T_F + \frac{E R^2}{2} \left(\frac{1}{h_c R_e} + \frac{1}{k^*} \ln \frac{R_e}{R} \right)$$

Los flujos térmicos por unidad de sección son

$$\text{NUCLEO: } \frac{dT}{dr} \Big|_{\text{núcleo}} = -\frac{E r}{2 k} \quad q = -k \frac{dT}{dr} = \frac{E r}{2} \quad (\text{aumenta con } r)$$

$$\text{VAINA: } \frac{dT}{dr} \Big|_{\text{vaina}} = -\frac{E R^2}{2 k^* r} \quad q = -k^* \frac{dT}{dr} = \frac{E R^2}{2 r} \quad (\text{disminuye cuando aumenta } r)$$

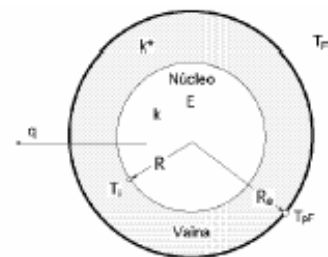


Fig II.10.- Núcleo generador de calor rodeado con un aislante

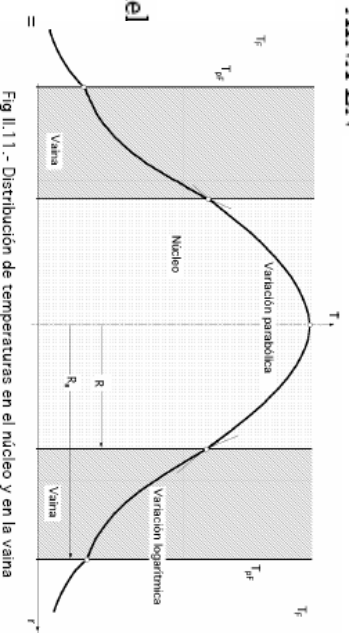
II.6. CONDUCCIÓN MONODIMENSIONAL CON GENERACIÓN DE ENERGÍA

PARED CILÍNDRICA RODEADA CON UNA VAINA EN CONTACTO CON UN FLUIDO CONVECTOR

El calor total que se disipa al exterior

$$\dot{Q} = q_{r=R_e} \cdot 2 \pi R_e L = \pi R_e^2 L E = VE$$

V el volumen del



La distribución de temperaturas en el núcleo es parabólica:

$$T_{\text{núcleo}} = T_1 + \frac{ER^2}{4k} - \frac{Er^2}{4k} = -\frac{Er^2}{4k} + T_F + \frac{ER^2}{2} \left(\frac{1}{h_c R_e} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{k^*} \ln \frac{R_e}{R} \right)$$

La distribución de temperaturas en la vaina es logarítmica

$$T_{\text{vaina}} = -\frac{ER^2}{2k^*} \ln r + T_F + \frac{ER^2}{2} \left(\frac{1}{h_c R_e} + \frac{1}{k^*} \ln \frac{R_e}{r} \right) = T_F + \frac{ER^2}{2} \left(\frac{1}{h_c R_e} + \frac{1}{k^*} \ln \frac{R_e}{r} \right)$$

En el entronque común para, $r = R$,

$$-k \left(\frac{dT}{dr} \right)_{\text{núcleo}} = -k^* \left(\frac{dT}{dr} \right)_{\text{vaina}} \quad \frac{\left(\frac{dT}{dr} \right)_{\text{núcleo}}}{\left(\frac{dT}{dr} \right)_{\text{vaina}}} = \frac{k^*}{k}$$