GRADO EN FISICA

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

APUNTES DE MATEMATICAS III CALCULO INTEGRAL Curso 2020-21

Beatriz Porras

Índice general

| 1. | Inte | gral de Riemann para funciones de una variable | 1 | | | | |
|----|---|--|----|--|--|--|--|
| | 1.1. | Integral de Riemann para funciones de una variable real | 2 | | | | |
| | 1.2. | Teoremas fundamentales del cálculo integral | 9 | | | | |
| | | 1.2.1. Cambio de variable o fórmula de sustitución | 10 | | | | |
| | | 1.2.2. Cálculo de áreas | 12 | | | | |
| | | 1.2.3. Valor medio | 12 | | | | |
| | | 1.2.4. Derivación de integrales | 13 | | | | |
| | 1.3. | Cálculo de Primitivas | 14 | | | | |
| | 1.4. | Primitivas inmediatas | 15 | | | | |
| | 1.5. | Métodos de Integración | 19 | | | | |
| | 1.6. | Integrales impropias | 19 | | | | |
| | | 1.6.1. La función Gamma | 21 | | | | |
| 2 | Into | gral de Riemann para funciones de n variables | 1 | | | | |
| ۷. | | Integral de Riemann en \mathbb{R}^n . Concepto y Propiedades Fundamentales. Construcción | | | | | |
| | 2.1. | de la Integral | 1 | | | | |
| | | 2.1.1. Criterio de Riemann | 6 | | | | |
| | 2.2. | Propiedades | 7 | | | | |
| | | Integrales reiteradas: Teorema de Fubini | 8 | | | | |
| | | Funciones definidas sobre otros conjuntos acotados | 14 | | | | |
| | | 2.4.1. Áreas y volúmenes de regiones simples | 17 | | | | |
| | | 2.4.2. Conjuntos de volumen cero | 19 | | | | |
| | | 2.4.3. Ejemplos | 20 | | | | |
| | 2.5. | Cambios de variable en el plano | 21 | | | | |
| | | 2.5.1. Ejemplos | 23 | | | | |
| | | 2.5.2. Coordenadas polares | 25 | | | | |
| 3 | Cálculo vectorial: curvas e integrales de linea | | | | | | |
| ٥. | | Curvas Regulares y Simples | 1 | | | | |
| | | Curvas regulares a trozos. Curvas cerradas | 6 | | | | |
| | | Longitud de una curva | 9 | | | | |
| | | Integral de linea de un campo escalar | 11 | | | | |
| | | Integral de linea de un campo vectorial | 15 | | | | |
| | | Teorema de Green | 20 | | | | |
| | | Teorema Fundamental del Cálculo | 0 | | | | |
| | J | Vectorial | 26 | | | | |

| 4. | Calculo Vectorial: Integrales de Superficie. | | | | |
|----|--|------------------------------------|----|--|--|
| | 4.1. | Superficies Regulares y Simples | 1 | | |
| | 4.2. | Superficies regulares a trozos | 7 | | |
| | 4.3. | Área de una Superficie | 8 | | |
| | 4.4. | Integrales de Superficie de Campos | | | |
| | | Escalares | 11 | | |
| | 4.5. | Integrales de Superficie de Campos | | | |
| | | Vectoriales | 13 | | |
| | 4.6. | Teorema de Stokes | 17 | | |
| | 4.7. | Teorema de Gauss | 18 | | |

Capítulo 1

Integral de Riemann para funciones de una variable

En la enseñanza secundaria se ha presentado el cálculo integral como "la operación inversa" de la derivada. Realmente este no es el significado del concepto de integral, sino una consecuencia.

Vamos a tratar de comprender el significado de la integral utilizando como modelo la Integral de Riemann, y veremos como consecuencia el Teorema Fundamental del Cálculo en el que se establece la relación entre el cálculo integral y el cálculo de derivadas.

Después trataremos algunos métodos de cálculo.

Y por fin estudiaremos una generalización de la integral, la integral impropia.

El concepto de derivada está asociado al estudio de la "variación" de una función respecto a su variable. El concepto de integral se asocia a la suma de los valores de la función.

Por ejemplo, para calcular la longitud de una curva, la dividimos en trozos y sumamos las longitudes de cada parte. Para calcular el trabajo realizado por una fuerza al recorrer una trayectoria, dividimos la trayectoria en trozos pequeños, calculamos el trabajo realizado en cada parte, y sumamos los resultados. Para calcular el área de una región, la dividimos en trozos "casi rectangulares" y sumamos las áreas de cada trozo.

Este proceso de dividir y sumar las partes no tendría de por sí demasiado interés, salvo por que en el medio se utiliza un proceso de aproximación: las partes se hacen cada vez más pequeñas, y más numerosas, y la suma por tanto tiene cada vez más sumandos. Las medidas en trozos pequeños se aproximan fácilmente con valores constantes o lineales, y la precisión es mejor cuanto más pequeño es el trozo. Por ejemplo, la longitud de un trozo de curva la calculamos como si fuera la de un segmento recto. Pero para tener una mejor aproximación, al hacer los trozos más pequeños, el número de datos que tenemos que sumar es cada vez mayor.

Matemáticamente, la dificultad aparece en la necesidad de hacer sumas infinitas. Recordemos las dificultades que se vieron en el estudio de series. Aquí las dificultades son aun mayores, porque la cantidad de sumandos no es ni siquiera numerable.

Hay distintas formas de abordar técnicamente estos cálculos, que dan lugar a distintas "teorías" o "métodos" de integración, y la Integral de Riemann es una de ellas. Las distintas teorías son más o menos complejas cuando tratan de abordar algoritmos válidos de forma general para problemas a su vez más complejos, en los que aparecen implicadas funciones también más complejas, y objetos a medir más sofisticados (matemáticamente hablando).

1.1. Integral de Riemann para funciones de una variable real

Como modelo para entender el método de cálculo planteamos el problema de calcular el área encerrada entre la gráfica de una función f definida en un intervalo cerrado [a,b] y con valores en \mathbb{R} , acotada y tal que $f(x) \geq 0$ para todo x, las rectas x=a, x=b e y=0.

El método propuesto por Riemann (realmente no es el original de Riemann, sino una modificación posterior) para resolver este problema es el siguiente:

- 1- Dividimos el intervalo [a,b] en n partes iguales de longitud (b-a)/n. Llamamos $x_0=a$ $x_i=a+i\frac{(b-a)}{n}$ para i=1,...,n
- 2- En cada sub-intervalo escogemos un punto arbitrario, $z_i \in [x_{i-1}, x_i]$
- 3- Y calculamos la suma de las áreas de los rectángulos de base el segmento $[x_{i-1},x_i]$ y altura $f(z_i)$

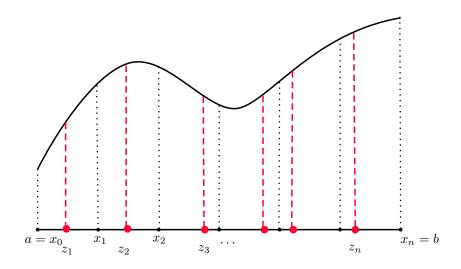
$$S_n = \sum_{i=1}^n f(z_i) \frac{(b-a)}{n}$$

Este número S_n no es exactamente el resultado que buscamos, pero parece bastante intuitivo que si hacemos n cada vez más grande, los intervalos cada vez más pequeños, los valores S_n estarán cada vez más cerca del resultado buscado.

4- Podríamos definir el área como el límite cuando n tiende a infinito de S_n .

Problema: Los puntos z_i no están claramente definidos. ¿Podría pasar que según qué puntos escojamos, el resultado del límite sea distinto? Por desgracia, la respuesta es que sí, que pueden ser distintos, y que por tanto con este método diferentes personas podrían obtener resultados distintos para el valor del área.

(De todas formas, en la mayoría de los casos de funciones sencillas, el método funciona bien. De hecho funciona bien siempre que f es continua, o cuando tiene solo un número finito de discontinuidades,... y algunas veces más.)



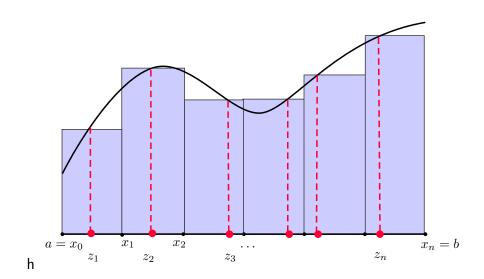


Figura 1.1: Aproximación del área por sumas

El método se mejoró después, como sigue:

1. El intervalo [a,b] se divide en una cantidad finita de intervalos mediante una selección de una familia finita de puntos, que ordenamos de menor a mayor de modo que

$$a = x_0 \le x_1 \le \dots \le x_n = b$$

La familia de puntos $P = \{x_0, ..., x_n\}$ se llama una "partición" de [a, b]

2. En cada sub-intervalo calculamos el ínfimo y el supremo de f, y llamamos

$$m_i = \inf\{f(x), x_{i-1} \le x \le x_i\}$$
 y $M_i = \sup\{f(x), x_{i-1} \le x \le x_i\}.$

3. Calculamos la suma de las áreas de los rectángulos de base el segmento $[x_{i-1},x_i]$ y altura m_i . A esta suma la llamamos "Suma inferior de Riemann", y la denotamos por L(f,P)

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$$

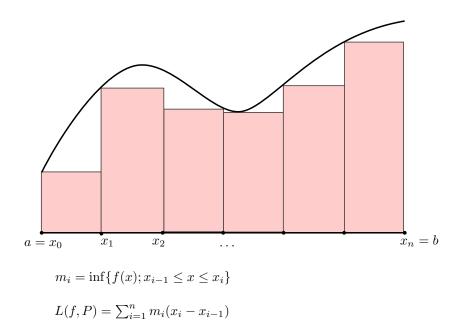


Figura 1.2: Suma Inferior

4. Calculamos la suma de las áreas de los rectángulos de base el segmento $[x_{i-1}, x_i]$ y altura M_i . A esta suma la llamamos "Suma superior de Riemann", y la denotamos por U(f, P)

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

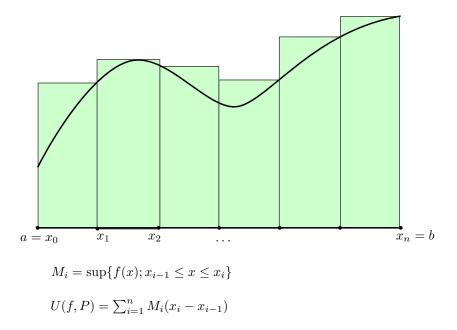


Figura 1.3: Suma Superior

En las figuras 1.2 y 1.3 , observamos que las sumas inferiores representan el área de un polígono contenido en la región que queremos calcular, y las sumas superiores la de un polígono que recubre la región. Por tanto, el resultado que buscamos debería estar en medio.

 $L(f,P) \leq$ area de la región limitada por la gráfica de la función y el eje horizontal $\leq U(f,P)$

para cualquier partición P del intervalo.

De hecho, la cadena de desigualdades se cumple aunque utilicemos particiones distintas para calcular la suma inferior y la superior

 $L(f, P) \leq$ area de la región entre la gráfica de la función y el eje horizontal $\leq U(f, Q)$

para cualquier par de particiones P y Q del intervalo.

Si hay realmente un valor para el área buscada, debería coincidir con el supremo de las sumas inferiores, y con el ínfimo de las sumas superiores.

Desgraciadamente, hay funciones para las que estos dos números no coinciden. Y la única solución, en ese momento, fue descartar ese tipo de funciones "raras", y mantener el procedimiento para las funciones "buenas".

De ahí queda la siguiente definición:

Definición 1.1 (Función Integrable e Integral de Riemann). Una función f acotada en un intervalo [a,b] es integrable si

$$\sup\{L(f,P),P \text{ es partición de } [a,b]\}=\inf\{U(f,Q):Q \text{ es partición de } [a,b]\}$$

En este caso, este valor común se denomina integral de f en $\left[a,b\right]$ y se denota por

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

La expresión dx en la integral nos sirve para identificar la variable que corresponde al intervalo. Por ejemplo, las dos integrales siguientes no son iguales:

$$\int_{a}^{b} x^{2} + y^{3} dx \qquad \int_{a}^{b} x^{2} + y^{3} dy$$

Si $f(x) \geq 0$ para todo x, el resultado de la integral mide el área de la región encerrada entre la gráfica de f y el eje x en el intervalo [a,b]. Si quitamos la condición de que f sea positiva (no negativa), la integral representa el área encerrada entre la gráfica de f y el eje x, pero considerando como áreas negativas las regiones que están por debajo del eje, y positivas las que están por encima.

Algunos de los problemas típicos para los que se usan integrales es para calcular áreas de distintas regiones del plano. Por ejemplo, si a<0< b, para calcular el área encerrada entre la gráfica de la función $f(x)=x^3$, el eje horizontal y las rectas $x=a,\ x=b$, tendremos que tener en cuenta los intervalos donde f es negativa, de modo que el área que buscamos es

$$-\int_{a}^{0} x^{3} dx + \int_{0}^{b} x^{3} dx$$

La definición anterior resulta muy complicada de utilizar en la práctica (ya sabemos algo de las dificultades en el cálculo de supremos e ínfimos) por lo que resulta muy interesante el siguiente teorema, (que tiene un cierto parecido a la definición de límite de sucesiones o de funciones)

Teorema 1.1 (Criterio de Riemann). Si f es una función acotada en [a,b], entonces es integrable si y solo si para todo $\epsilon>0$ existe una partición P_{ϵ} de [a,b] tal que

$$U(f, P_{\epsilon}) - L(f, P_{\epsilon}) \le \epsilon$$

Es bueno para saber que la función es integrable, aunque no nos dice cuánto vale la integral. En los siguientes ejercicios veremos como tomar ventaja de este resultado para conocer el valor de la integral.

Ejercicio 1.1.1. Estudiar la integrabilidad y calcular la integral de las funciones que se indican en un intervalo [a, b], utilizando la definición anterior:

- 1. f(x) = c (funciónconstante)
- 2. f(x) = 0 si $x \neq (a+b)/2$ y f((a+b)/2) = 1
- 3. f(x) = x siendo 0 < a < b
- 4. $f(x) = x^2 \text{ en } [0, 1]$

Ejercicio 1.1.2. Estudiar la integrabilidad de la función definida en [0,1] por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

A la vista de estos ejemplos, es interesante saber, a priori, si la función va a ser integrable o no. La respuesta general a este problema requiere muchos más conocimientos de matemáticas de los que corresponden a este curso, y tiene que ver con una nueva rama de la matemática (teoría de la medida). Nos quedaremos sólo con un resultado parcial, suficiente para nuestros problemas:

Teorema 1.2. 1. Cualquier función continua $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable.

- 2. Incluso cualquier función acotada que tenga sólo un número finito de puntos de discontinuidad en [a,b] es integrable.
- 3. Toda función monótona en un intervalo [a, b] es integrable.

Gracias a la primera propiedad es fácil poner infinidad de ejemplos de funciones integrables.

Utilizando la segunda propiedad, podemos poner ejemplos de funciones escalonadas, o funciones definidas con diferentes fórmulas en diferentes sub-intervalos.

El interés de la tercera propiedad es menos evidente, si sólo se nos ocurren funciones monótonas que sean continuas. Sin embargo vamos a utilizar esta propiedad para mostrar que puede haber funciones integrables con una cantidad infinita numerable de puntos de discontinuidad, construyendo un ejemplo (ejercicio).

En el ejemplo anterior, los puntos de discontinuidad están muy separados unos de otros, y dispersos en el intervalo. Sin embargo hay ejemplos más sofisticados que de funciones integrables con puntos de discontinuidad por todas partes: en el lenguaje matemático, se diría que el conjunto de puntos de discontinuidad es denso en el intervalo de integración. (Sin demostrar)

Una vez que tenemos la definición de una familia de funciones, y un procedimiento de cálculo, el siguiente paso es conocer las propiedades básicas de tipo algebraico: qué pasa con la suma, el producto de funciones, ...

Las propiedades básicas de las funciones y de la integral se recogen en el siguiente teorema. Si tenemos presente la idea de la integral como área, será fácil reconocerlas y recordarlas.

Teorema 1.3 (Propiedades de la Integral).

1. La integral conserva las desigualdades. Es decir, si tenemos dos funciones f y g integrables en un intervalo [a,b], y $f(x) \leq g(x)$ en cada punto x del intervalo, entonces

$$\int_{a}^{b} f(x) \, dx \le \int_{a}^{b} g(x) \, dx$$

En particular, como f es una función acotada, si m y M verifican $m \leq f(x) \leq M$ para todo x, entonces

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x) dx \le M(b-a)$$

2. La integral es aditiva respecto del intervalo. Es decir si f es una funciónacotada en un intervalo [a,b], y c es un punto entre a y b, entonces f es integrable en [a,b] si y sólo si lo es en cada uno de los en los intervalos [a,c] y [c,b]; y además

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

A partir de esta propiedad se acuerda la siguiente convención, que resulta coherente con las operaciones:

$$\int_{a}^{a} f(x) dx = 0$$

$$\int_{b}^{a} f(x) dx = -\int_{a}^{b} f(x) dx$$

Con esta convención, la ecuación anterior es cierta para cualesquiera a, b y c aunque no se cumpla a < c < b.

3. La integral de la suma es la suma de las integrales. Es decir, si f y g son dos funciones integrables definidas en el intervalo [a,b], entonces f+g es integrable en [a,b] y

$$\int_{a}^{b} [f(x) + g(x)] dx = \int_{a}^{b} f(x) dx + \int_{a}^{b} g(x) dx$$

4. La integral de un número por una función es el producto del número por la integral de la función. Es decir, si f es una función integrable en un intervalo [a,b], y α es un número real, entonces αf es integrable en [a,b] y

$$\int_{a}^{b} \alpha f(x) \, dx = \alpha \int_{a}^{b} f(x) \, dx$$

1.2. Teoremas fundamentales del cálculo integral

A pesar de ser "fundamental", no todo el mundo está de acuerdo en cuál es realmente el teorema fundamental del cálculo. Enunciaremos tres teoremas que son la base de todo el cálculo de integrales:

Teorema 1.4. Si f es una función integrable en un intervalo [a,b], entonces la función

$$F(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt$$

es continua.

Teorema 1.5 (Primer Teorema fundamental del cálculo). Sea f una función integrable en un intervalo [a,b], y definamos la función

$$F(x) = \int_{a}^{x} f(t) dt$$

para $x \in [a, b]$.

Si f es continua en un punto $c \in [a,b]$, entonces F es derivable en c y además F'(c) = f(c)

Corolario 1.6 (Regla de Barrow). Si la función f es integrable en [a,b], y es la derivada de alguna función f=F', entonces

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$$

El último, la Regla de Barrow, quizá sea el más conocido, ya que es el que se utiliza en la enseñanza secundaria para resolver los problemas de integrales: Dada la función f, si somos capaces de conocer o encontrar una función F cuya derivada sea f, entonces calcular la integral de f es trivial. Así que el problema se transforma en encontrar esa función F. Esto es lo que se conoce como el cálculo de primitivas. La función F que cumple F'=f se llama una **primitiva** de f.

El teorema fundamental del cálculo nos dice que cualquier función f continua tiene seguro una primitiva, la función

$$F(x) = \int_{a}^{x} f(t) dt$$

Esto parece poco útil si no somos capaces de encontrar una "fórmula" para F.

igoplus Ejemplo 1.2.1. Si $f(x)=x^n$, la función $F(x)=rac{x^{n+1}}{n+1}$ cumple F'(x)=f(x), luego

$$\int_{a}^{b} x^{n} dx = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

\Delta Ejemplo 1.2.2. Si $f(x) = x^{-n}$, para $n \neq 1$, y a, b son ambos positivos o ambos negativos,

$$\int_{a}^{b} x^{-n} dx = \frac{b^{-n+1}}{-n+1} - \frac{a^{-n+1}}{-n+1}$$

¿Por qué la condición de que a, b sean ambos positivos o ambos negativos?

1.2.1. Cambio de variable o fórmula de sustitución

Supongamos que f y g' (la derivada de g son funciones continuas, y que F es una primitiva de f. Tenemos que

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt = F(g(b)) - F(g(a))$$

Pero también tenemos que $(F \circ g)'(x) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$, así que $(F \circ g)$ es una primitiva de $f(g(x)) \cdot g'(x)$, así que

$$\int_{a}^{b} f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = (F \circ g)(b) - (F \circ g)(a) = F(g(b)) - F(g(a))$$

Así que los dos resultados son iguales. Esto se conoce como

Teorema 1.7 (Cambio de variable o sustitución). Si f y g' son funciones continuas,

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt = \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx$$

Para recordar esta fórmula, es habitual escribir que t=g(x), y dt=g'(x)dx. Lo que suele olvidarse es la relación entre los límites de integración en cada una de las integrales.

\blacklozenge Ejemplo 1.2.3. Resuelve, utilizando la sustitución $\sqrt{e^x + 1} = t$, la siguiente integral:

$$I = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}} dx$$

Si $t = \sqrt{e^x + 1} = g(x)$, tenemos que identificar en la integral la parte f(g(x)) y la parte g'(x).

Calculamos
$$g'(x) = \frac{1}{2}(e^x + 1)^{1/2}e^x = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x + 1}}$$

Así que la expresión que está en el integrando es:

$$\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}} = 2e^x g'(x)$$

Además si $g(x)=\sqrt{e^x+1}$, despejando $e^x=g^2(x)-1$, así que la integral que estamos buscando se escribiría

$$\int_0^1 2(g^2(x) - 1) \cdot g'(x) dx$$

Y aplicando el teorema esta integral sería igual que la integral

$$\int_{g(0)}^{g(1)} 2(t^2 - 1)dt = \left[\frac{2}{3}t^3 - 2t\right]_{g(0)}^{g(1)}$$

donde $g(0) = \sqrt{2}$ y $g(1) = \sqrt{e+1}.$ Por tanto

$$I = \frac{2}{3}(e+1)^{3/2} - 2(e+1)^{1/2} - \frac{2}{3}(2^{3/2}) + 2(2^{1/2})$$

En ocasiones el teorema parece que se está usando al revés. Consideremos este otro ejemplo:

Ejemplo 1.2.4. Halla la siguiente integral, haciendo el cambio $x = \operatorname{sen} t$:

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Si hay alguna duda, seguramente se resuelva intercambiando el nombre de las variables: $t = \sin x$ y

$$\int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_{\text{sen } 0}^{\sin \pi/2} \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{\cos x} \cdot \cos x dx$$

El resto de los cálculos se deja como ejercicio.

1.2.2. Cálculo de áreas

♦ **Ejemplo 1.2.5.** Algunos de los problemas típicos para los que se usan integrales es para calcular áreas de distintas regiones del plano. Por ejemplo, si a < 0 < b, para calcular el área encerrada entre la gráfica de la función $f(x) = x^3$, el eje horizontal y las rectas x = a, x = b, tendremos que tener en cuenta los intervalos donde f es negativa, de modo que el área que buscamos es

$$-\int_{a}^{0} x^{3} dx + \int_{0}^{b} x^{3} dx$$

Ejemplo 1.2.6. Una idea similar se utiliza para calcular el área encerrada entre las gráficas de dos funciones. Por ejemplo, para calcular el área entre las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$ sobre el intervalo [0,1]

Tendremos en cuenta que en el intervalo [0,1] es $0 \le x \le 1$, y por tanto $x^3 \le x^2$, la gráfica de g queda por debajo de la gráfica de f, y el área que buscamos es

$$A = \int_0^1 x^2 \, dx - \int_0^1 x^3 \, dx$$

De los ejemplos anteriores para calcular integrales de potencias de x tenemos

$$A = 1/2 - 1/3 = 1/6$$

Una de las dificultades a la hora de resolver este tipo de problemas de cálculo de áreas es precisamente determinar correctamente la región.

Ejercicio 1.2.1. Hallar el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^3 - x$ y $g(x) = x^2$.

1.2.3. Valor medio

Otro de los usos habituales de la integral es el concepto de "valor medio" de una función. Estamos acostumbrados al concepto de valor medio de una conjunto finito de datos, que se calcula como la suma de todos los valores dividido entre el número de datos.

En el caso de que los datos de los que queremos obtener la media vengan dados como los resultados de una función f(x) definida en un intervalo [a,b], el concepto equivalente sería sumar todos los valores de f y dividir la suma entre el número de puntos del intervalo. Evidentemente esto no es posible. Para el caso de funciones, la suma de todos los valores de la función se sustituye por la integral, y el número de datos se sustituye por la longitud del intervalo.

De esta manera se define

Definición 1.2 (Valor medio). Sea $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada e integrable. Se define el valor medio de f en [a,b] como

$$VM(f, [a, b]) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

El valor medio de f en [a,b] es el valor que debería tener una función constante en el intervalo para que tuviera la misma integral de f en [a,b].

Pues bien, las propiedades de las funciones continuas estudiadas en el Cálculo Diferencial nos dan ahora otro de los teoremas fundamentales del cálculo integral:

Teorema 1.8 (Teorema del Valor Medio). Si la función f es continua en [a,b], entonces existe algún punto $x_0 \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(x) \, dx = f(x_0)(b-a)$$

Ese valor $f(x_0)$ es entonces el valor medio de la función f en [a,b]

1.2.4. Derivación de integrales

Otra de las aplicaciones más frecuentes del teorema fundamental del cálculo es la utilización del teorema en la derivación de ciertas funciones definidas como integrales mediante la composición de funciones.

Por ejemplo, consideremos la función

$$g(x) = \int_a^{x^3} \frac{1}{1 + \operatorname{sen}^2 t} dt$$

g(x) es una composición de dos funciones, $F(x)=\int_a^x \frac{1}{1+\sin^2t}dt$ y $H(x)=x^3$, de modos que g(x)=F(H(x)). La primera función, F(x) es derivable, según nos indica el teorema fundamental del cálculo, y la segunda funciónH(x) es un polinomio, y también es derivable. La regla de la cadena para la derivación de funciones nos dice que

$$g'(x) = F'(H(x)) \cdot H'(x) = \frac{1}{1 + \sin^2(x^3)} \cdot 3x^2$$

Análogamente, si

$$g(x) = \int_{a}^{\sin x} \frac{1}{1 + \sin^2 t} dt$$

$$g'(x) = \frac{1}{1 + \sin^2(\sin x)} \cdot \cos x$$

1.3. Cálculo de Primitivas

Gracias a los teoremas anteriores, el conocimiento de las derivadas de algunas funciones nos puede facilitar mucho el cálculo de integrales. En general, el problema que se plantea es, para una cierta función f, encontrar una nueva función F que cumpla F'=f Una función como esta F se llama una "**primitiva**" de f.

El teorema fundamental del cálculo nos asegura que cualquier función continua tiene siempre una primitiva, que sería la función $F(x)=\int_a^x f(t)\ dt$, pero lo que tratamos ahora es de encontrar, cuando seamos capaces, una funciónF elemental (que puede obtenerse mediante sumas, multiplicación y cociente de funciones polinómicas, trigonométricas - y sus inversas - logaritmos y exponenciales).

Para dar a entender esta propiedad de ser F una primitiva de f escribiremos la expresión $F(x) = \int f(x) dx$, que se llama también "integral indefinida" de f

En general, no es posible encontrar una primitiva elemental de cualquier función. Un ejemplo que debemos apuntar para que no nos sorprenda en otro momento, es la función $f(x)=e^{-x^2}$, la "campana de Gauss", que no tiene una primitiva elemental.

Lo que veremos en este capítulo son algunos métodos conocidos para hallar primitivas elementales de algunas funciones también elementales. Como dice M. Spivak en su libro "Calculus", y que parece hecho para nosotros:

"En ocasiones puede ocurrir que sea preciso calcular una integral, en condiciones en que no sea posible consultar ninguna de las tablas corrientes de integrales [por ejemplo, puede ocurrir que el lector siga un curso de física en el cual se le pida saber integral]"

Concretando, algunas notaciones:

Para nombrar una primitiva de una función f escribiremos $\int f$ o $\int f(x) dx$. Realmente esto significa el conjunto de todas las primitivas de f.

Se suele escribir

$$\int x^3 \, dx = \frac{x^4}{4} + C$$

donde C es un número cualquiera. Veremos alguna parte de la asignatura donde esta constante C juega un papel principal, pero se indicará cuando sea necesario.

La letra que aparece al final de la integral tiene un papel fundamental en los cálculos, pues nos indica cuál es la variable respecto de la buscamos la integral. Por ejemplo,

$$\int tx \, dx = t \frac{x^2}{2}$$

$$\int tx \, dt = x \frac{t^2}{2}$$

$$\int tx \, dy = txy$$

En muchas ocasiones utilizaremos la regla de Barrow para expresar cálculos

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$$

donde F es una primitiva de f. Utilizaremos las expresiones, bastante cómodas a la hora de escribir:

$$F(x) = \int f(x) \, dx$$

$$F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

con lo que

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = F(x)|_{a}^{b}$$

Una idea que debe quedar clara desde ahora es que no siempre podemos encontrar una primitiva elemental para una función elemental, y no sólo por nuestra ignorancia o incapacidad, sino porque realmente no existe.

Conviene recordar que la función

$$f(x) = e^{-x^2}$$

no tiene primitiva elemental. Saber esto nos puede ahorrar muchas pérdidas de tiempo.

1.4. Primitivas inmediatas

Cuadro 1.1: Funciones elementales

| Función elemental $f(x)$ | Primitiva $F(x) = \int f(x) dx$ |
|--|--|
| f(x) = k (constante) | $F(x) = \int kx dx == ax$ |
| $f(x) = x^k \ (k \neq -1)$ | $F(x) = \int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1}$ |
| $f(x) = \frac{1}{x}$ | $F(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln(x)$ |
| $f(x) = e^x$ | $F(x) = \int e^x dx = e^x$ |
| $f(x) = a^x (a > 0)$ | $F(x) = \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)}$ |
| $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ | $F(x) = \int \operatorname{sen}(x) dx = -\cos(x)$ |
| $f(x) = \cos(x)$ | $F(x) = \int \cos(x) dx = \sin(x)$ |
| $f(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ | $F(x) = \int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ |
| $f(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)}$ | $F(x) = \int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\cot(x) = -\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ |
| $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ | $F(x) = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x)$ |
| $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ | $F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \arcsin(x)$ |

Aplicando la regla de la cadena para la composición de funciones, podemos ampliar fácilmente esta primera lista: Si F(x) y u(x) son funciones derivables, la composición F(u(x) también lo es, y la derivada de g(x) = F(u(x)) es $F'(u(x)) \cdot u'(x)$. Si somos capaces de identificar en la función que tenemos que integrar los dos factores de este producto,

- lacktriangle por un lado la función f de la que sabemos hallar la primitiva F, compuesta con u(x), f(u(x)),
- y por otro u'(x)

podemos identificar las siguientes integrales también como inmediatas.

Cuadro 1.2: Funciones compuestas

| Función compuesta $f(u(x))u'(x)$ | Primitiva $F(x) = \int f(u(x))u'(x) dx$ |
|---|--|
| $f(x) = u(x)^k u'(x) \ (k \neq -1)$ | $F(x) = \int u(x)^k u'(x) dx = \frac{u(x)^{k+1}}{k+1}$ |
| $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ | $F(x) = \int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln(u(x))$ |
| $f(x) = e^{u}(x)u'(x)$ | $F(x) = \int e^{u(x)} u'(x) dx = e^{u(x)}$ |
| $f(x) = a^{u(x)}u'(x)$ | $F(x) = \int a^{u(x)} u'(x) dx = \frac{a^{u(x)}}{\ln(a)}$ |
| $f(x) = \operatorname{sen}(u(x))u'(x)$ | $F(x) = \int \operatorname{sen}(u(x))u'(x) dx = -\cos(u(x))$ |
| $f(x) = \cos(u(x))u'(x)$ | $F(x) = \int \cos(u(x))u'(x) dx = \sin(u(x))$ |
| $f(x) = \frac{u'(x)}{\cos^2(u(x))}$ | $F(x) = \int \frac{u'(x)}{\cos^2(u(x))} dx = \tan(u(x))$ |
| $f(x) = \frac{u'(x)}{\operatorname{sen}^2(u(x))}$ | $F(x) = \int \frac{u'(x)}{\sin^2(u(x))} dx = -\cot(u(x))$ |
| $f(x) = \frac{u'(x)}{1 + u(x)^2}$ | $F(x) = \int \frac{u'(x)}{1 + u(x)^2} dx = \arctan(u(x))$ |
| $f(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1 - u(x)^2}}$ | $F(x) = \int \frac{u'(x)}{\sqrt{1 - u(x)^2}} dx = \arcsin(u(x))$ |

En el cálculo de primitivas suelen aparecer una colección de funciones poco conocidas hasta ahora, pero que juegan un papel importante en nuestra colección de integrales inmediatas: las funciones hiperbólicas.

Se definen:

• Seno hiperbólico de
$$x$$
: $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

- Coseno hiperbólico de x: $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
- Tangente hiperbólica de x: $\tanh x = \frac{e^x e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1 \frac{2}{e^{2x} + 1}$

que se caracterizan por la ecuación fundamental:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Y tienen la siguientes propiedades de derivación:

$$\sinh'(x) = \cosh x$$

 $\cosh'(x) = \sinh x$

$$\tanh'(x) = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

Las funciones hiperbólicas inversas son:

$$\arg \sinh x = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$$

$$\arg \cosh x = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$$

$$\arg \tanh x = \frac{1}{2} \left[\ln(1+x) - \ln(1-x)\right]$$

De donde:

Cuadro 1.3: Funciones hiperbólicas

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \arg \sinh x = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \arg \cosh x = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2} \int \frac{1}{1-x^2} dx = \arg \tanh x = \frac{1}{2} \left[\ln(1+x) - \ln(1-x) \right]$$

1.5. Métodos de Integración

Se conocen como métodos de integración algunos procedimientos basados en las propiedades de las derivadas que permiten obtener con cierta facilidad algunas primitivas de funciones elementales.

A modo de referencia, citamos aquí los métodos que los estudiantes de este curso deben conocer. El desarrollo de estos apartados, y los ejemplos y ejercicios, pueden encontrarse en los libros indicados en la bibliografía de la asignatura: Calculus, de M. Spivak, y Cálculo Integral de P. Cembranos y J. Mendoza.

- 1. Integración por partes (basado en la derivada de un producto de funciones)
- 2. Integración por sustitución o cambio de variable (basado en el teorema de cambio de variable estudiado antes)
- 3. Integración de funciones trigonométricas. Fórmulas de reducción (basadas en las propiedades fundamentales de las funciones trigonométricas, razones de los ángulos dobles, etc.)
- 4. Integración de funciones racionales, cocientes de polinomios (basados en la descomposición del cociente de polinomios en suma de fracciones elementales)
- 5. Integración de funciones racionales con senos y cosenos (basadas en cambios de variables)
- 6. Integración de algunas funciones irracionales, raíces de funciones polinómicas (basadas en cambios de variables)

1.6. Integrales impropias

Para aplicar la regla de Barrow para calcular integrales mediante el cálculo de primitivas, de modo que

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = F(b) - F(a)$$

siendo F una primitiva de f, es imprescindible que el intervalo [a,b] sea acotado y la función f sea acotada en [a,b] (la definición de función integrable impone esta condición). Sin embargo es habitual que encontramos situaciones en las que la función no está acotada en algún punto del intervalo, donde tiene una asíntota vertical, o el intervalo no es acotado, sino que es una semirrecta, o incluso toda la recta.

La utilización de límites nos permite abordar este tipo de problemas, aunque se requiere también una perspectiva más amplia (matemáticamente hablando) del concepto de integral.

Pensemos en las funciones $f(x)=\frac{1}{x}$ y $g(x)=\frac{1}{x^2}$ definidas en el intervalo (0,1]. Son muy parecidas, las dos tienden a infinito cuando nos acercamos al cero (por la derecha). El problema de calcular su integral se interpretaría como la posibilidad de calcular el área encerrada entre la gráfica de la función y el eje horizontal, desde el je vertical hasta la recta x=1.

¿Esto tiene sentido? ¿Ese área puede ser finita, teniendo en cuenta que no podemos cerrar la región cerca del 0? Vamos a ver cómo se aborda este problema, y descubriremos que el área encerrada por f es infinita y en cambio el área encerrada por g es finita, y puede calcularse por métodos de integración.

Definición 1.3 (Integrales impropias). Sea $f:[a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable en cada subintervalo $[a,t] \subseteq [a,b)$. Se define la integral impropia de f en [a,b) como

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = \lim_{t \to b^{-}} \int_{a}^{t} f(x) dx$$

si este límite existe (es finito). En este caso se dice que la integral es convergente.

La definición se extiende a los casos en que f está definida en un intervalo (a,b] y no está acotada al acercarse a a:

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = \lim_{t \to a^{+}} \int_{t}^{b} f(x) dx$$

Si f tiene una asíntota vertical en un punto c, con a < c < b, definimos la integral impropia en [a,b] aprovechando las propiedades de la adición de intervalos de la integral

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

donde cada una de las integrales de la derecha se definen como integrales impropias.

Si lo que queremos es integral f en un intervalo no acotado $[a,\infty)$, definimos la integral impropia de f en $[a,\infty)$ como

$$\int_{a}^{\infty} f(x) \, dx = \lim_{t \to \infty} \int_{a}^{t} f(x) \, dx$$

Y de forma similar si se trata de estudiar la integral en un intervalo $(-\infty, b]$, o en toda la recta $(-\infty, \infty)$, etc.

Ejercicio 1.6.1. Calcular las integrales impropias de las funciones $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = \frac{1}{x^2}$ en (0,1]

Ejercicio 1.6.2. Calcular la integral impropia de $f(x) = e^{-x}$ en $[0, \infty)$. Comprobar que $f(x) = e^{-x^2}$ es integrable en sentido impropio.

En esta clase de situaciones, es interesante a veces saber si la integral va a existir (va a ser finita) o no, independientemente de si sabemos calcularla exactamente. Para ello utilizamos los siguientes teoremas:

Teorema 1.9 (Criterio de comparación para integrales impropias). Supongamos que tenemos dos funciones $f:[a,\infty)\longrightarrow \mathbb{R}$, $y\ g:[a,\infty)\longrightarrow \mathbb{R}$, no negativas, $f(x)\geq 0$ y $g(x)\geq 0$ para todo $x\in [a,\infty)$, y que $f(x)\leq g(x)$ para todo $x\in [a,\infty)$.

- a). Si la integral de g es convergente, entonces la de f también.
- b). Si la integral de f es divergente, entonces la de g también

Teorema 1.10 (Criterio del cociente para integrales impropias). Supongamos que tenemos dos funciones $f:[a,\infty)\longrightarrow \mathbb{R}$, y $g:[a,\infty)\longrightarrow \mathbb{R}$, no negativas, $f(x)\geq 0$ y $g(x)\geq 0$ para todo $x\in [a,\infty)$, y que de g conocemos cómo es el comportamiento de su integral.

a). Si existe el límite del cociente,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

y es distinto de 0 e infinito, entonces las integrales de las dos funciones tienen el mismo comportamiento (o las dos convergen, o las dos divergen, es decir, las dos son finitas o las dos son infinitas a la vez).

- b). Si L=0 y la integral de g converge (es finita), la de f también. Pero si la de g diverge (es infinita), no sabemos nada de f.
- c). Si $L = \infty$ y la integral de g diverge (es infinita), la de f también. Y si la de g converge (es finita), no sabemos nada de la de f.

Y para aplicar este teorema, necesitaremos conocer algunas clases de funciones para utilizar en el papel de g, para lo que se proponen los siguientes ejercicios:

Ejercicio 1.6.3. Estudiar las siguientes integrales impropias:

a).
$$\int_{a}^{\infty} e^{-kx} dx \ (a \text{ fijo, con } -\infty < a < \infty).$$

b).
$$\int_{a}^{\infty} \frac{1}{x^{k}} dx \ (a \text{ fijo, } a > 0)$$

c).
$$\int_0^a \frac{1}{x^k} dx \ (a \text{ fijo, } a > 0)$$

1.6.1. La función Gamma

El concepto de integral impropia da lugar a una conocida función, la Función Gamma o Función de Euler.

Para cada número real x > 0 se define la función $\Gamma(x)$ por

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

Algunas propiedades son:

- 1. Esta función está bien definida, en el sentido de la integral impropia es siempre convergente.
- a) Para un x fijo, con 0 < x < 1, la función que está en el integrando tiene problemas en t=0 (porque no está acotada) y para llegar el infinito, así que la integral impropia se separa en dos partes

$$\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t} dt = \int_0^1 t^{x-1}e^{-t} dt + \int_1^\infty t^{x-1}e^{-t} dt$$

En la primera basta utilizar que $e^{-t} \leq 1$ para todo t, y por tanto

$$\int_0^1 t^{x-1}e^{-t} dt \le \int_0^1 t^{x-1} dt = \frac{t^x}{x} \Big|_0^1 = 1/x$$

Y en la segunda, al contrario, acotamos el primer factor $t^{x-1} \le 1$, de modo que

$$0 < t^{x-1}e^{-t} < e^{-t}$$

y por tanto

$$\int_{1}^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \le \int_{1}^{\infty} e^{-t} dt$$

que es convergente.

- b) Si x=1, $\Gamma(1)=1$, calculando la integral impropia $\int_0^\infty e^{-t}\,dt$
- c) Si x>1, consideramos también la separación del intervalo de integración en dos partes para utilizar en una de ellas el criterio del cociente con una función del tipo $g(x)=\frac{1}{x^k}$:

$$\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t} dt = \int_0^1 t^{x-1}e^{-t} dt + \int_1^\infty t^{x-1}e^{-t} dt$$

La primera es la integral de una función continua en un intervalo acotado, así que está bien definida y es un número.

En la segunda integral utilizamos el criterio del cociente con $f(t)=t^{x-1}e^{-t}$ y $g(t)=1/t^2$

$$\frac{f(t)}{g(t)} = \frac{t^{x-1}e^{-t}}{1/t^2} = t^{x+1}e^{-t} \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$$

Aplicando el criterio del cociente, como la integral de g es convergente en $[1, \infty)$, la de f también.

Así que en todos los casos $\Gamma(x)$ está bien definido.

2. Aplicando la integración por partes,

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

3. $\Gamma(1)=1$. Y por tanto $\Gamma(2)=1\Gamma(1)=1$, y $\Gamma(3)=2\Gamma(2)=2\cdot 1$, $\Gamma(4)=3\Gamma(3)=3\cdot 2\cdot 1$ y en general para cada $n\in\mathbb{N}$

$$\Gamma(n+1) = (n)\Gamma(n) = (n)(n-1)\Gamma(n-1) = \dots = n!$$

$$(\Gamma(1) = 0! = 1)$$

La función Gamma generaliza el concepto de factorial de un número natural a números reales positivos. Pero también se extiende a números reales negativos, e incluso a números complejos.

Capítulo 2

Integral de Riemann para funciones de n variables

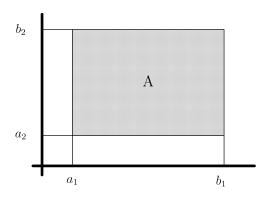
2.1. Integral de Riemann en \mathbb{R}^n . Concepto y Propiedades Fundamentales. Construcción de la Integral

La integral de Riemann en \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 , o para funciones de n variables, es una generalización de la integral de funciones de una variable. La definición que vamos a dar reproduce el método usado para funciones de una variable en intervalos, ahora para funciones acotadas definidas en rectángulos. La generalización a otra familia más amplia de conjuntos se verá más adelante.

Para unificar las definiciones y enunciados, adoptaremos un vocabulario que se adapte a cualquier dimensión, aunque nuestras referencias y los dibujos que podamos hacer son siempre los de funciones de dos o tres variables.

Llamamos "rectángulo" en \mathbb{R}^n a un producto cartesiano de n intervalos

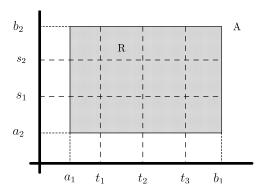
$$A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$



y llamamos "volumen" de A al producto de las longitudes de sus lados

$$v(A) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdot \cdots \cdot (b_n - a_n)$$

Llamamos partición de A a una familia P formada por una partición de cada uno de los intervalos, $P = \{P_1, P_2, \dots P_n\}$, donde $P_i = \{a = t_0 \leq \dots \leq t_{k_i} = b_i\}$ es una partición de $[a_i, b_i]$



Una partición P de A define una familia finita de "rectángulos" que llamaremos \mathfrak{R}_P , que verifica, entre otras cosas,

$$A = \bigcup_{R \in \mathfrak{R}_P} R; \quad \ v(A) = \sum_{R \in \mathfrak{R}_P} v(R)$$

Construimos las Sumas de Riemann:

Definición 2.1 (Sumas de Riemann).

Sea $f:A\longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada, y P una partición de A. Para cada rectángulo $R\in\mathfrak{R}_P$ se definen:

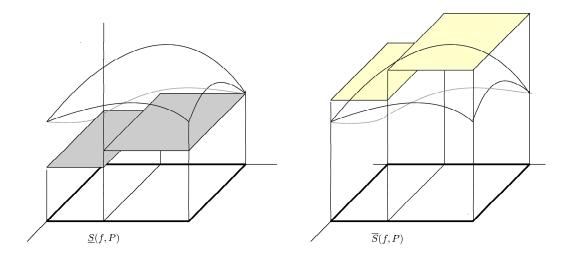
$$m_R(f) = \inf\{f(x); x \in R\}$$
 $M_R(f) = \sup\{f(x); x \in R\}$

Se definen la Suma Inferior de Riemann y la Suma Superior de Riemann por

$$L(f,P) = \sum_{R \in \mathfrak{R}_P} m_R(f) \ v(R) \qquad U(f,P) = \sum_{R \in \mathfrak{R}_P} M_R(f) \ v(R)$$

respectivamente.

Si f es una función no negativa, L(f,P) es la suma de los volúmenes de los "prismas" $R imes [0,m_R(f)]$, levantados por debajo de la gráfica de f, y U(f,P) es la suma de los volúmenes de los "prismas" $R imes [0,M_R(f)]$ construidos por encima de la gráfica de f



Estas sumas superiores e inferiores verifican las siguientes propiedades:

- 1.- Para toda partición P de A, $L(f,P) \leq U(f,P)$
- 2.- Para toda partición P de A, $m_A(f)v(A) \leq L(f,P) \leq U(f,P) \leq M_A(f)v(A)$
- 3.- Si P y Q son dos particiones cualesquiera de A, $L(f,P) \leq U(f,Q) \label{eq:Lorentz}$

Definimos ahora las integrales inferior y superior de una función de la siguiente manera:

Definición 2.2 (Integral Superior e Integral Inferior).

Sea A un rectángulo en \mathbb{R}^2 , y $f:A\longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Se llama integral inferior de f en A a

$$\underline{\int}_A f = \sup\{L(f,P); \ P \textit{partición de } A\}$$

 ${\sf Y}$ se llama integral superior de f en A a

$$\overline{\int}_A f = \inf\{U(f,P); \ P \textit{partición de } A\}$$

Las integrales superior e inferior están bien definidas, en el sentido de que como los conjuntos de sumas superiores e inferiores de Riemann de f son acotados, existen el supremo y el ínfimo respectivamente.

Además, por las propiedades que hemos visto antes, se tiene que

$$m_A(f)v(A) \le L(f,P) \le \underline{\int}_A f \le \overline{\int}_A f \le U(f,Q) \le M_A(f)v(A)$$

para cualquier partición P y Q de A.

Y esto nos lleva a la definición de la integral:

Definición 2.3 (función Integrable Riemann).

Sea A un rectángulo en \mathbb{R}^2 , y $f:A\longrightarrow \mathbb{R}$. Se dice que f es integrable Riemann en A si es ACOTADA y las integrales superior e inferior de f en A coinciden. En este caso se llama integral de f en A a

$$\int_{A} f = \int_{A} f = \int_{A} f$$

Una cuestión de notación:

Para funciones de dos variables es habitual utilizar la expresión $\iint_A f(x,y) \, dx dy$ en los cálculos, y para funciones de tres variables se utiliza $\iiint_A f(x,y,z) \, dx dy dz$ sin embargo de momento, mientras no sea necesario hacer cálculos, para los resultados teóricos utilizaremos la expresión $\iint_A f$ o $\iint_A f(x) \, dx$ donde x es una variable bidimensional, tridimensional, o n-dimensional que se mueve en el dominio A.

Esta notación nos permite mostrar que muchos de los resultados teóricos fundamentales sobre las propiedades de la integral no dependen del número de variables. Salvo algunas excepciones que se señalarán cuando aparezcan, las propiedades de la integral son las mismas para funciones en intervalo de \mathbb{R} , en rectángulos de \mathbb{R}^2 , y en general en cualquier espacio del tipo \mathbb{R}^n

♦ Ejemplo 2.1.1. Toda función constante en un rectángulo es integrable. Además, si f(x) = a para cada $x \in A$, entonces $\int_A f = av(A)$

En efecto, si P es una partición cualquiera de A, y R es uno de los rectángulos definidos por P, $m_R(f) = a = M_R(f)$, así que

$$U(f,P) = \sum_{R \in \mathfrak{R}_P} M_R(f)v(R) = \sum_{R \in \mathfrak{R}_P} av(R) = s \sum_{R \in \mathfrak{R}_P} v(R) = av(A)$$

٧

$$L(f,P) = \sum_{R \in \mathfrak{R}_P} m_R(f) v(R) = \sum_{R \in \mathfrak{R}_P} av(R) = s \sum_{R \in \mathfrak{R}_P} v(R) = av(A)$$

Por tanto

$$\overline{\int}_A f = \inf\{U(f, P), \ P \text{ partición de } A\} = av(A)$$

У

$$\underline{\int}_A f = \sup\{L(f,P),\ P \text{ partición de } A\} = av(A)$$

las dos integrales son iguales, f es integrable, y $\int_A f = av(A)$

igoplus **Ejemplo 2.1.2.** Una función del tipo de la de Dirichlet, $f:[0,1] imes [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

no es integrable Riemann.

En efecto, si P es una partición cualquiera de A, y R es uno de los rectángulos definidos por P, en R habrá puntos (x,y) con x racional y puntos (x,y) con x irracional, de modo que $m_R(f)=0$ y $M_R(f)=1$, así que

$$U(f, P) = \sum_{R \in \mathfrak{R}_P} M_R(f) v(R) = \sum_{R \in \mathfrak{R}_P} v(R) = v([0, 1] \times [0, 1]) = 1$$

У

$$L(f, P) = \sum_{R \in \mathfrak{R}_P} m_R(f) v(R) = 0$$

Por tanto

$$\overline{\int}_A f = \inf\{U(f,P),\ P \text{ partición de } A\} = 1$$

٧

$$\underline{\int}_A f = \sup\{L(f,P),\ P \text{ partición de } A\} = 0$$

igl Ejemplo 2.1.3. Otras funciones no integrables en \mathbb{R}^2

Partiendo del ejemplo anterior, es fácil construir otras funciones que no sean integrables, definidas en conjuntos de \mathbb{R}^2 , o en general de \mathbb{R}^n . Por ejemplo, puede ser

$$g(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \quad \mathrm{si} \quad (x,y) \in \mathbb{Q}^2 \\ 0 & \quad \mathrm{si} \quad (x,y) \not \in \mathbb{Q}^2 \end{array} \right.$$

2.1.1. Criterio de Riemann

Como en el caso de funciones de una variable, el primer teorema que vamos a señalar, da una condición equivalente para la integrabilidad de una función. Sin embargo, el verdadero interés de este teorema lo veremos más adelante.

Teorema 2.1 (Criterio de Integrabilidad de Riemann).

Sea A un rectángulo en \mathbb{R}^n , y $f:A\longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada en A. f es integrable en A si y sólo si para cada $\epsilon>0$ existe una partición P_{ϵ} de A tal que

$$U(f, P_{\epsilon}) - L(f, P_{\epsilon}) \le \epsilon$$

Teorema 2.2 (Las funciones continuas son integrables).

Sea A un rectángulo en \mathbb{R}^2 , y $f:A\longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en A. Entonces f es integrable en A.

La idea de la demostración se basa en que al ser la función continua, haciendo las particiones en rectángulos suficientemente pequeños se puede conseguir que la diferencia entre el supremo y el ínfimo de f en un rectángulo, que por las propiedades de las funciones continuas serán realmente un máximo y un mínimo, y se alcanzan en puntos de cada rectángulo, están muy próximos. Digamos que para cualquier ϵ se puede conseguir hacer una partición P_{ϵ} de modo que en cada rectángulo se verifique

$$M_R - m_R \le \epsilon / v(A)$$

con lo que
$$U(f, P_{\epsilon}) - L(f, P_{\epsilon}) \le \epsilon$$

La condición de ser continua es suficiente, pero no es necesaria. Es fácil demostrar que una función como

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

definida en $[-1,1] \times [-1,1]$ es integrable y su integral vale cero, aunque evidentemente no es continua en (0,0).

Más adelante podremos ver que la condición de continuidad se puede debilitar, si el conjunto de puntos donde la función es discontinua es "pequeño". Pero esta es otra historia (La propiedad de ser o no f integrable está relacionado con la forma del conjunto de puntos de discontinuidad de f. La relación entre estas dos propiedades excede con mucho el nivel y el contenido de este curso; forma parte de una rama de la matemática llamada Teoría de la Medida.)

Y utilizaremos esto para poder trabajar con funciones definidas en dominios distintos a los

rectángulos.

2.2. Propiedades

Para terminar este primer capítulo, vamos a demostrar las propiedades elementales de la integral

Teorema 2.3 (Propiedades de la Integral de Riemann).

Sea A un rectángulo en \mathbb{R}^n , y sean $f:A\longrightarrow \mathbb{R}$ y $g:A\longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones integrables en A.

1. si
$$f \ge 0$$
, entonces $\int_A f \ge 0$

2. si
$$f \geq g$$
, entonces $\int_A f \geq \int_A g$

3.
$$|f|$$
 también es integrable, y $\left|\int_A f\right| \leq \int_A |f|$

4. Ia suma
$$f+g$$
 es integrable y $\int_A (f+g) = \int_A f + \int_A g$

5. para todo
$$k \in \mathbb{R}$$
 el producto kf es integrable, y $\int_A (kf) = k \int_A f$

6.
$$\max\{f,g\}$$
 y $\min\{f,g\}$ son integrables

- 7. el cuadrado f^2 es integrable
- 8. el producto fg es integrable

Unas observaciones:

- 1. No debemos lanzarnos, la integral del máximo de f y g no es el máximo de las integrales de f y de g, ni la integral del producto es el producto de las integrales.
- 2. Otra idea que conviene tener presente: en el enunciado se da por supuesto que cada una de las funciones es integrable por separado. No es cierto en general que si la suma es integrable, se pueda deducir que cada una de los funciones lo era. ¿Algún ejemplo sencillo?

Y además, la propiedad equivalente a la aditividad respecto del dominio en una variable quedaría ahora enunciada de la siguiente manera:

Proposición 2.4 (Aditividad de la integral respecto al dominio).

Sea P una partición cualquiera de A. f es integrable en A si y sólo si para cada rectángulo $R \in \mathfrak{R}_P$ la restricción de f a R es integrable. Además en este caso

$$\int_A f = \sum_{R \in \mathfrak{R}_P} \int_R f$$

♦ Ejemplo 2.2.1. Las funciones f^+ y f^-

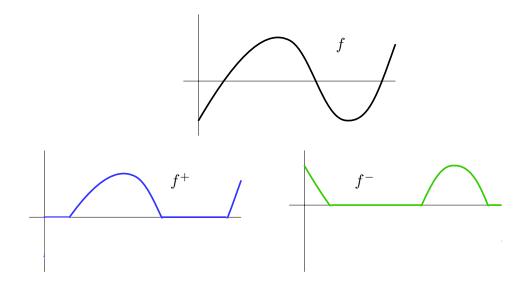
Un caso particular que se deduce de las propiedades anteriores, y que jugará un papel especial en la teoría de integración es el de las funciones f^+ y f^- .

Dada una función $f:A\longrightarrow \mathbb{R}$, se llaman

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$$

٧

$$f^-(x) = -\min\{f(x), 0\} = \max\{-f(x), 0\}$$



Las funciones f^+ y f^- son funciones no negativas, y cumplen $f = f^+ - f^-$ y $|f| = f^+ + f^-$, de donde se deduce, por ejemplo, que f es integrable si y sólo si f^+ y f^- son integrables.

2.3. Integrales reiteradas: Teorema de Fubini

El teorema de Fubini nos va a facilitar una técnica para el cálculo de integrales de funciones de dos variables mediante el cálculo de dos integrales sucesivas de funciones de una variable. A partir de ahí se podrán utilizar todas las técnicas conocidas del Análisis de una variable para el cálculo de integrales mediante cálculo de primitivas y el teorema fundamental del cálculo (Regla de Barrow): cambios de variables, integración por partes, etc.

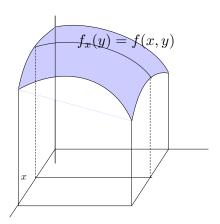
Si A es un rectángulo en \mathbb{R}^2 , podemos descomponerlo como producto cartesiano de dos intervalos, $A=A_1\times A_2=[a_1,b_1]$ $A_2=[a_2,b_2]$

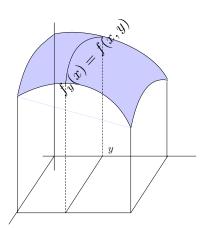
Los elementos de A los escribiremos como pares (x,y), con $x \in A_1$, e $y \in A_2$, y las funciones definidas en A como f(x,y)

Para cada $x \in A_1$ fijo, podemos considerar la función $f_x:A_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f_x(y) = f(x,y)$$

donde x es una constante, y la variable es $y \in A_2$.





Y de igual manera, para cada $y \in A_2$ fijo,podemos considerar la función $f_y:A_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f_y(x) = f(x,y)$$

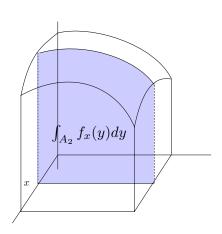
donde y es una constante y la variable es $x \in A_1$.

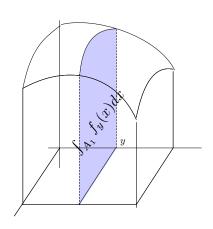
Si estas funciones son integrables, sus integrales se escribirían

$$\int_{A_2} f_x = \int_{a_2}^{b_2} f_x(y) \, dy = \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) \, dy$$

У

$$\int_{A_1} f_y = \int_{a_1}^{b_1} f_y(x) \, dx = \int_{a_1}^{b_1} f(x, y) \, dx$$





Para la función inicial $f:A\longrightarrow \mathbb{R}$ escribiremos $\int_A f(x,y)\ d(x,y).$

Con estas notaciones podemos enunciar el siguiente teorema

Teorema 2.5 (de Fubini).

Sean A_1 y A_2 dos intervalos en \mathbb{R} , $A=A_1\times A_2$, y f de A en \mathbb{R} una función integrable. Si la función

$$I(x) = \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy$$

existe (es decir, si cada $f_x:A_2\longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable) entonces I(x) es integrable en A_1 , se verifica

$$\int_{A} f(x,y) d(x,y) = \int_{a_{1}}^{b_{1}} I(x) dx = \int_{a_{1}}^{b_{1}} \left(\int_{a_{2}}^{b_{2}} f(x,y) dy \right) dx$$

Observaciones:

1. Intercambiando el papel de la x y la y en la demostración, se puede obtener una fórmula de integración en orden inverso:

Si f es una función integrable en un rectángulo $A=A_1\times A_2$, y la función $I(y)=\int_{a_1}^{b_1}f(x,y)\,dx$ y existe, se verifica

$$\int_{A} f(x,y) d(x,y) = \int_{a_2}^{b_2} I(y) dy = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x,y) dx \right) dy$$

2. Si la función f(x,y) es continua, el teorema de Fubini se puede aplicar en los dos órdenes, y

$$\int_{A} f(x,y) d(x,y) = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x,y) dy \right) dx = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x,y) dx \right) dy$$

3. Si f no es integrable, pueden existir o no las integrales iteradas, ser iguales, o ser distintas. Sólo en este último caso se puede deducir que la función no es integrable.

El teorema es cierto también para funciones de tres variables, y en general para cualquier número n de variables. Enunciamos el caso n=3:

Teorema 2.6 (de Fubini).

Sean A_1 , A_2 y A_3 tres intervalos en \mathbb{R} , $A=A_1\times A_2\times A_3$, y f de A en \mathbb{R} una función integrable en A. Entonces para cualquier permutación (i,j,k) de (1,2,3) se tiene

$$\int_{A_1 \times A_2 \times A_3} f = \int_{a_i}^{b_i} \left[\int_{a_j}^{b_j} \left(\int_{a_k}^{b_k} f(x_1, x_2, x_3) \, dx_k \right) dx_j \right] dx_i$$

si estas integrales existen.

Observaciones:

- 1. Normalmente llamamos a las variables x,y y z cuando son solo tres, pero es muy importante asociar correctamente cada variable a su intervalo. Por eso hemos optado por esta notación numerando las variables.
- 2. Si f no es integrable, pueden existir o no las integrales iteradas, ser iguales, o ser distintas. Sólo en este último caso se puede deducir que la función no es integrable.

♦ Ejemplo 2.3.1. Función no integrable

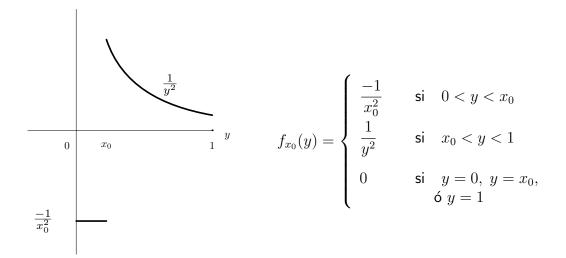
Consideremos la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{y^2} & \text{si} \quad 0 < x < y < 1 \\ \frac{-1}{x^2} & \text{si} \quad 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

definida en $A = [0,1] \times [0,1]$

Si aplicamos directamente el teorema para integrar primero respecto de y y luego respecto de x tenemos:

Para cada $x_0 \in [0,1]$ fijo,



que es integrable (sólo tiene tres puntos de discontinuidad), y verifica

$$\int_{A_2} f_{x_0}(y) dy = \int_0^{x_0} \frac{-1}{x_0^2} dy + \int_{x_0}^1 \frac{1}{y^2} dy =$$

$$= \left[\frac{-y}{x_0^2} \right]_{y=0}^{y=x_0} + \left[\frac{-1}{y} \right]_{y=x_0}^1 = \frac{-1}{x_0} - 1 + \frac{1}{x_0} = -1$$

Y si planteamos la integral en el orden contrario:

Para cada $y_0 \in [0,1]$ fijo,

$$f_{y_0}(y) = \begin{cases} \frac{1}{y_0^2} & \text{si} \quad 0 < x < y_0 \\ \frac{-1}{x^2} & \text{si} \quad y_0 < x < 1 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0, \ x = y_0, \ x = 1 \end{cases}$$

que es integrable (sólo tiene tres puntos de discontinuidad), y verifica

$$\int_{A_1} f_{y_0}(x) dx = \int_0^{y_0} \frac{1}{y_0^2} dx + \int_{y_0}^1 \frac{-1}{x^2} dx =$$

$$= \frac{x}{y_0^2} \Big|_{x=0}^{x=y_0} + \frac{1}{x} \Big|_{x=y_0}^1 = \frac{1}{y_0} + 1 + \frac{-1}{y_0} = 1$$

En este caso podemos asegurar. como consecuencia del teorema de Fubini, que f no es integrable

(aunque de hecho ya debíamos habernos dado cuenta de que f no es una función acotada en $A = [0,1] \times [0,1]$, por lo que no está definida la integral de Riemann de f en A)

Una aplicación importante del teorema de Fubini, es el llamado Principio de Cavalieri, para el cálculo de volúmenes de sólidos en el espacio:

Teorema 2.7 (Principio de Cavalieri).

Supongamos que M es una región simple en R^3 , y sea A un prisma que contiene a M, de modo que para todo $(x, y, z) \in M$ se tiene $a_3 \le z \le b_3$.

Para cada plano $z=z_0$, con $a_3 \leq z_0 \leq b_3$, llamamos M_{z_0} a la sección de M con el plano,

$$M_{z_0} = \{(x, y); (x, y, z_0) \in M\}$$

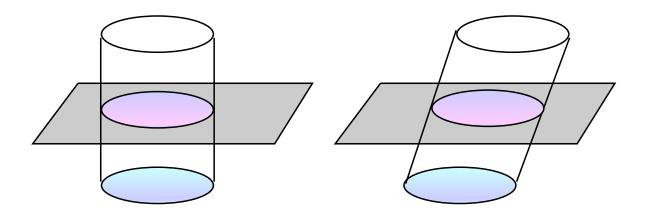
Si los conjuntos M_{z_0} son regiones simples del plano, se tiene

$$v(M) = \int_{a_3}^{b_3} v(M_z) dz$$

Es decir, el volumen de M es la integral de las áreas de las secciones por los planos perpendiculares al eje z.

Por supuesto, el Principio de Cavalieri se puede aplicar mediante las secciones con planos perpendiculares a cualquiera de los ejes de coordenadas.

Una aplicación inmediata de este principio muestra que el volumen de un cilindro de base un conjunto D y altura H es el mismo si es recto (altura perpendicular a la base) que si está inclinado, pues las secciones por planos paralelos a la base son iguales en los dos casos.



2.4. Funciones definidas sobre otros conjuntos acotados

La construcción de la integral de Riemann que hemos estudiado se basa en los rectángulos como dominio de las funciones integrables, por la comodidad de sub-dividirlos mediante particiones. Es evidente que un procedimiento de integración debe abarcar dominios más generales.

En una variable podíamos considerar las funciones acotadas definidas en una unión finita de intervalos cerrados y acotados, sumando las integrales en cada uno de ellos. También en el plano podemos considerar fácilmente funciones definidas en conjuntos que puedan descomponerse en unión finita de rectángulos que no se solapen (como mucho se cortan en los bordes). Pero es evidente que hay conjuntos elementales del plano, como un circulo, que no pueden descomponerse de esta forma.

En esta sección vamos a ver cómo generalizar el cálculo de integrales a funciones acotadas definidas en dominios acotados, no necesariamente rectángulos.

Definición 2.4 (Función Característica).

Sea M un subconjunto de \mathbb{R}^n . Se llama función característica de M a la función $\chi_M : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\chi_M(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in M \\ 0 & \text{si } x \notin M \end{cases}$$

Las funciones características tienen las siguientes propiedades:

a.
$$\chi_{\mathbb{R}^n \setminus M} = 1 - \chi_M$$

d.
$$\chi_{A \setminus B} = \chi_A - \chi_{A \cap B} = \chi_A (1 - \chi_B)$$

b.
$$\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$$

c.
$$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}$$

e.
$$(\chi_M)^2 = \chi_M$$

Y además,

Proposición 2.8. Sea M un conjunto en \mathbb{R}^n . El conjunto de puntos de discontinuidad de χ_M es la frontera (el borde) de M.

La definición de este tipo de funciones nos permite generalizar la construcción de la integral de Riemann a una clase mucho más amplia de conjuntos que los rectángulos con los que hemos trabajado hasta ahora:

Definición 2.5 (Integral sobre conjuntos acotados).

Sea $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada, y M un conjunto acotado en \mathbb{R}^n . Se dice que f es integrable en M si el producto $f\cdot \chi_M$ es integrable en algún rectángulo A que contenga a M. En esta caso, se llama integral de f en M a

$$\int_{M} f = \int_{A} f \cdot \chi_{M}$$

Conviene hacerse un dibujo: la función $f \cdot \chi_M$ vale lo mismo que f en los puntos que están en M, y cero en los puntos del rectángulo fuera de M.

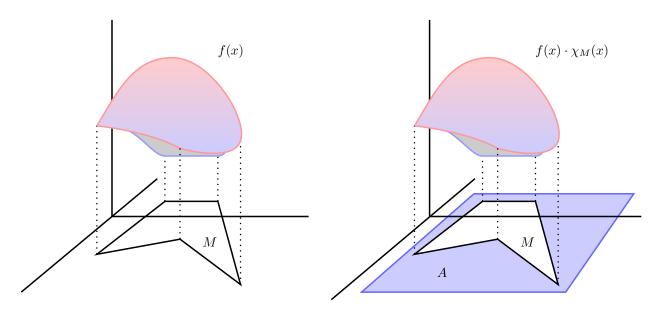


Figura 2.1: Integral sobre conjuntos acotados

La forma del conjunto juega un papel importante en el hecho de que una función acotada pueda o no ser integrable en M. Por ejemplo, si M es el conjunto de los puntos del cuadrado $[0,1] \times [0,1]$ que tienen la primera coordenada, x racional, la función característica de M es

$$\chi_M(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Y la función constante f(x) = 1 no sería integrable sobre M, pues

$$\int_{M} f = \int_{[0,1]\times[0,1]} 1 \cdot \chi_{M}(x,y) \ d(x,y)$$

es la misma función que ya vimos en el ejemplo 2.1.2.

La dificultad de tratar esta función está en la forma del conjunto M, cuya frontera es todo el rectángulo $[0,1] \times [0,1]$. Este conjunto no tienen como borde una linea, como estamos acostumbrados a dibujar, sino que cualquier punto del cuadrado está en el borde de M.

Para evitar este tipo de problemas, nos limitaremos al estudio de funciones sobre conjuntos acotados "simples", cuyo borde está formado por un conjunto finito de curvas que son gráficas de funciones continuas.

Definición 2.6 (Regiones bidimensionales simples). Una región bidimensional simple en la dirección de las y (o de tipo 1) es un subconjunto cerrado y acotado del plano, limitado por arriba y por abajo por las gráficas de dos funciones continuas. Es decir, se puede describir como

$$M = \{(x, y) : a \le x \le b, \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)\}$$

donde a y b son números reales con a < b y ϕ_1 y ϕ_2 son funciones continuas en [a,b] con $\phi_1 \le \phi_2$

Una región bidimensional simple en la dirección de las x (o de tipo 2) es un subconjunto cerrado y acotado del plano, limitado por la izquierda y por la derecha por las gráficas de dos funciones continuas. Es decir, se puede describir como

$$M = \{(x, y) : c \le y \le d, \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$$

donde c y d son números reales con c < d y ϕ_1 y ϕ_2 son funciones continuas en [c,d] con $\phi_1 \le \phi_2$

Llamaremos "región simple" a un conjunto que sea de cualquiera de los dos tipos anteriores.

El borde de una región simple en la dirección de las y está formado por las gráficas de las dos funciones ϕ_1 y ϕ_2 entre a y b, y los segmentos verticales x=a entre $\phi_1(a)$ y $\phi_2(a)$, y x=b entre $\phi_1(b)$ y $\phi_2(b)$

En el caso de funciones de tres variables hablaríamos de

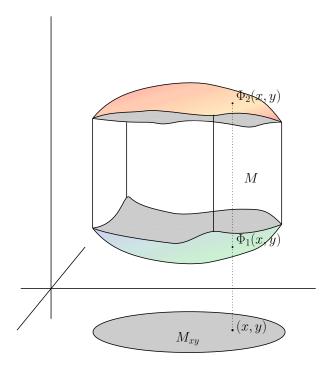


Figura 2.2: Región simple respecto al eje z en \mathbb{R}^3

Definición 2.7 (Regiones tridimensionales simples). Una región tridimensional simple en la dirección de las z (o de tipo 1) es un subconjunto cerrado y acotado del plano, limitado por arriba y por abajo por las gráficas de dos funciones continuas de dos variables definidas en un conjunto M_{xy} del plano que es una región bidimensional simple . Es decir, se puede describir como

$$M = \{(x, y, z) : (x, y) \in M_{xy}; \ \Phi_1(x, y) \le z \le \Phi_2(x, y)\}$$

donde M_{xy} es una región simple del plano y Φ_1 y Φ_2 son funciones continuas en M_{xy} con $\Phi_1 \leq \Phi_2$

Análogamente se definiría una región simple en la dirección de otro de los ejes. Llamaremos "región simple" a un conjunto que sea de cualquiera de los tres tipos anteriores.

El borde de una región simple en la dirección de las z está formado por las superficies definidas por las gráficas de las dos funciones Φ_1 y Φ_2 sobre M_{xy} , y el cilindro vertical construido sobre el borde de M_{xy} entre las dos superficies.

2.4.1. Áreas y volúmenes de regiones simples

En la primera parte de este capítulo hemos introducido la integral de funciones de dos variables para calcular el volumen encerrado entre la gráfica de una función acotada y no negativa definida en un rectángulo, y el plano horizontal. Y uno de los ejemplos, el 2.1.1 nos mostraba que cualquier

función constante es integrable y que $\int_A k = k \cdot v(A).$

En particular, si k=1, $\int_A 1=v(A)$, la integral de la función constantemente 1 es el área del rectángulo (como era de esperar, evidentemente).

Esta propiedad de la integral nos permite ahora definir el área de las regiones simples, utilizando la integral como herramienta:

Definición 2.8 (Áreas de Regiones bidimensionales simples). *Se define el área de una región bidimensional simple, M*, como

$$a(M) = \int_{M} 1 = \int_{A} \chi_{M}(x, y) d(x, y)$$

donde A es cualquier rectángulo que contenga a A.

El teorema de Fubini nos da un método para calcular estas integrales. Supongamos que M es una región elemental simple en la dirección del eje y, de forma que podemos escribir M en la forma

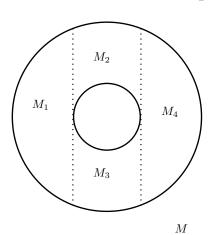
$$M = \{(x, y) : a \le x \le b, \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)\}$$

Y que A es un rectángulo que contiene a M (por ejemplo, de la forma

$$A = [a, b] \times [c = \min\{\phi_1(x), x \in [a, b]\}, d = \max\{\phi_2(x), x \in [a, b]\}]$$

Teniendo en cuenta que la función $\chi_M(x,y)$ vale cero cuando $(x,y) \notin M$ y vale uno cuando $(x,y) \in M$,

$$\int_A \chi_M(x,y) d(x,y) = \int_a^b \left[\int_c^{\phi_1(x)} 0 \, dy + \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} 1 \, dy + \int_{\phi_2(x)}^d 0 \, dy \right] dx = \int_a^b \phi_2(x) - \phi_1(x) dx$$



En los casos más complicados será necesario descomponer M en una unión de regiones elementales de los dos tipos posibles, calcular el area de cada región por separado, y sumar los resultados.

Para volúmenes de regiones tridimensionales simples la idea es la misma:

Definición 2.9 (Volumen de Regiones tridimensionales simples). Se define el volumen de una región tridimensional simple, M, como

$$a(M) = \iiint_M 1 = \iiint_A \chi_M(x, y, z) d(x, y, z)$$

donde A es cualquier rectángulo (realmente un prisma) que contenga a M.

El teorema de Fubini nos da un método para calcular estas integrales. Supongamos que M es una región elemental simple en la dirección del eje z, de forma que podemos escribir M en la forma

$$M = \{(x, y, z) : (x, y) \in M_{xy}, \Phi_1(x, y) \le z \le \Phi_2(x, y)\}$$

Y que A es un rectángulo que contiene a M.

Teniendo en cuenta que la función $\chi_M(x,y,z)$ vale cero cuando $(x,y,z) \notin M$ y vale uno cuando $(x,y,z) \in M$,

$$\iiint_A \chi_M(x, y, z) \ d(x, y, z) = \int_{M_{xy}} \left[\int_{\Phi_1(x, y)}^{\Phi_2(x, y)} 1 \ dz \right] \ d(x, y)$$

Si a su vez describimos M_{xy} como región simple de la forma

$$M_{xy} = \{(x, y); \ a < x < b; \ \phi_1(x) < y < \phi_2(x)\}\$$

podríamos descomponer la integral doble en dos integrales simples, quedando

$$\iiint_A \chi_M(x, y, z) d(x, y, z) = \int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \left(\int_{\Phi_1(x, y)}^{\Phi_2(x, y)} 1 dz \right) dy \right] dx$$

2.4.2. Conjuntos de volumen cero

El concepto de área de un conjunto da lugar a la definición de un tipo de conjuntos que juegan un papel principal en la teoría de integración: los conjuntos de volumen cero, o "despreciables para la integral".

Definición 2.10 (Conjuntos de volumen cero). Se dice que un conjunto en \mathbb{R}^2 (o de \mathbb{R}^3) es de volumen cero si es acotado y su área (o su volumen), en el sentido definido anteriormente, es cero.

Es decir C es un conjunto de volumen cero si es acotado y $v(C) = \int_C 1 = 0$

Realmente el concepto de área que hemos introducido en la sección anterior para regiones simples, se extiende a conjuntos acotados, con la salvedad de que podemos encontrarnos conjuntos para los que no es posible calcular la integral, porque la función característica χ_M correspondiente no es integrable. Desde el punto de vista teórico, tendríamos que reconocer que hay conjuntos para los que no podemos definir el área. Concretamente, el ejemplo que ya hemos tratado otras veces, $M = \{(x,y), 0 \le x \le 1; \ 0 \le y \le 1; \ x \in \mathbb{Q}\}$ es uno de estos conjuntos raros.

En el extremo contrario de las rarezas están los conjuntos de volumen cero, entre los que están los conjuntos formados por un solo punto o un conjunto finito de puntos, por líneas que pueda describir como gráficas de funciones continuas en un intervalo (de una variable), o las líneas que se pueda describir como la imagen de una función de clase C^1 definida en un intervalo cerrado y acotado (de una variable), y las uniones finitas de este tipo de conjuntos. Es decir, conjuntos formados por trozos de curvas.

Y en el espacio serían de volumen cero conjuntos formados por trozos de superficies.

La importancia de estos conjuntos queda reflejada en el siguiente teorema

Teorema 2.9 (Condiciones suficientes de integrabilidad).

Si f es una función acotada definida en un rectángulo $A \subset \mathbb{R}^2$ tal que el conjunto de puntos de discontinuidad de f en A es de volumen cero, entonces f es integrable en A.

Por esta razón, a los conjuntos de volumen cero se les llama también "despreciables" para la integral.

2.4.3. Ejemplos

Algunos ejercicios habituales sobre el calculo de integrales de dos variables presentan como principales dificultades:

- 1. Identificar la región sobre la que se quiere calcular la integral.
- 2. Aplicar el teorema de Fubini expresando correctamente los límites de integración.
- 3. Hacer un intercambio en el orden de integración, para facilitar la realización de los cálculos.
- **♦ Ejemplo 2.4.1.** En la siguiente integral, dibujar la región de integración, cambiar el orden de integración, y calcular la integral en los dos órdenes.

MAt III: Cálculo Integral 2020-21

$$\int_0^1 \int_1^{2-y} (x+y^2) \, dx \, dy$$

♦ Ejemplo 2.4.2. Expresar la siguiente integral en los dos órdenes de integración, y resolver una de ellas.

$$\iint_D x \ d(x,y) \ {\rm siendo} \ D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 9, \ y \le 1\}$$

♦ Ejemplo 2.4.3. En la siguiente integral, dibujar la región de integración expresar la integral en otros dos órdenes de integración distintos, al menos.

$$\int_0^1 \int_1^{1-x} \int_x^1 f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx$$

2.5. Cambios de variable en el plano

En las integrales de una variable, una técnica útil de cálculo es hacer cambios de variable, que transforman la función que se ha de integral en otra mucho más sencilla, y modifica también el intervalo de integración.

En el caso de las funciones de dos variables ocurre algo similar: un cambio de variable adecuado puede modificar la función transformándola en otra más sencilla, pero sobre todo puede modificar el conjunto donde tenemos que integrar de forma importante. En lo que sigue consideraremos como recintos de integración las uniones finitas de regiones simples, ya que al hacer cambios de variables es habitual que los rectángulos se transformen en conjuntos que no sean rectángulos.

Lo primero que hay que tener presente es que los cambios de variable son transformaciones del plano donde está el dominio de integración. Un tipo de cambios de variables son las transformaciones lineales, que representan un cambio en el sistema de coordenadas (un cambio en la base vectorial) que utilizamos para representar \mathbb{R}^2 .

La situación general será algo como lo siguiente: Tenemos una región del plano $D \subset \mathbb{R}^2$, y una función $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$D \subset \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longrightarrow f(x,y)$$

MAt III: Cálculo Integral 2020-21

y debemos encontrar la integral de f sobre D,

$$\iint_D f(x,y) \, dxdy$$

.

Y tenemos también una trasformación en el plano, $T:M\longrightarrow D$, que nos permite representar las coordenadas (x,y) de los puntos de D mediante la transformación (x,y)=T(u,v) como funciones de otras variables u y v definidas en otra región distinta del plano M

La situación entonces es

$$\begin{split} M \subset \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{T} & T(M) = D \subset \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ (u,v) & & \longrightarrow & T(u,v) = (x,y) & \longrightarrow & f(T(u,v)) = f(x,y) \end{split}$$

La pregunta es ¿para calcular la integral

$$\iint_D f(x,y) \, dx dy$$

no podríamos calcular

$$\iint_{M} f(T(u,v)) \ dudv$$

?

Por desgracia, la respuesta es que no es tan sencillo. La razón quizá se entienda bien si pensamos en lo que es esta segunda integral, reconstruyéndola a partir de la definición de la integral de Riemann mediante por ejemplo las sumas inferiores.

Hacemos una partición de M, y en cada rectángulo de esta partición calculamos el $m_R = \inf\{f(T(u,v)),\ (u,v)\in R\}$, multiplicamos por el área de R, y sumamos estos resultados para todos los rectángulos de la partición.

$$L(f \circ T, P) = \sum_{R} m_{R}(f \circ T)v(R)$$

Ahora intentamos hacer la primera integral, utilizando como partición de D la que resulta de la transformación T aplicada a la partición de M, que llamaríamos T(P)

Cada rectángulo de M se transforma en un "casi rectángulo." D, T(R), en el calculamos el ínfimo de f, $m_{T(R)} = \inf\{f(x,y), (x,y) \in T(R)\}$, multiplicamos por el área de T(R), y sumamos

$$L(f, T(P) = \sum_{T(R)} m_{T(R)}(f)v(T(R))$$

En estas dos expresiones $m_R(f \circ T) = m_{T(R)}(f)$, pero el volumen de R no es igual al volumen de T(R). Y esta es la razón por la que esas dos integrales no son iguales.

Una transformación T en el plano produce dilataciones en las distancias entre los puntos del plano en el espacio origen y los transformados en el espacio final, que hace que las áreas de los rectángulos cambien. Utilizando un poco de álgebra lineal, se puede probar que si T es una transformación lineal en el plano, del tipo T(u,v)=(u-v,u+v), cada rectángulo R se transforma en un paralelogramo T(R), y el coeficiente de dilatación de las áreas es justo el módulo del determinante de la matriz asociada a T (en este ejemplo el determinate vale 2).

Cuando T no es lineal, el coeficiente de dilatación no es constante, sino que sería distinto en cada rectángulo de la partición.

El cálculo infinitesimal nos permite llegar a un resultado general cuando la transformación T es una aplicación inyectiva y de clase C^1 $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ (derivadas parciales continuas), utilizando como factor de dilatación el valor absoluto del determinante de la diferencial de T,

$$JT(u.v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial t_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial t_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial t_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial t_2}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix}$$

$$(T(u,v) = t_1(u,v), t_2(u,v))$$

De esta forma se obtiene la fórmula para el teorema del Cambio de variables:

Teorema 2.10 (de Cambio de Variables en \mathbb{R}^2).

Sea M una región simple del plano, y $T:M\longrightarrow D$ una función de clase C^1 inyectiva en el interior de M y tal que el determinante $JT(u,v)\neq 0$ para todo (u,v) en el interior de M. Sea $f:T(M)=D\longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en el interior de D. Entonces la función $f\circ T|JT|$ es integrable en M y

ntonces la funcion
$$f\circ T|JT|$$
 es integrable en M y

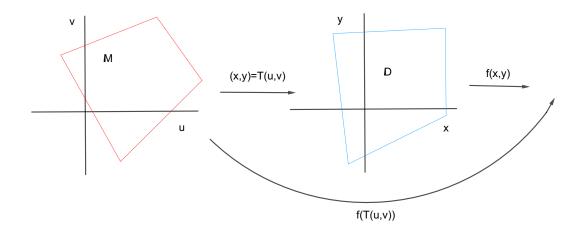
$$\iint_{D=T(M)} f(x,y) \, dxdy = \iint_{M} f \circ T(u,v) |JT(u,v)| \, dudv$$

Atención al módulo del determinante ${\it JT}$

El teorema se cumple también si cambiamos M por una unión finita de regiones simples del plano, aplicando el teorema en cada una por separado y sumando los resultados.

2.5.1. Ejemplos

En los ejercicios de cambios de variables una de las dificultades que aparece es la correcta identificación de los conjuntos que han de ser los dominios de integración antes y después del cambio de variable. Puede ayudar identificar cada elemento en el siguiente esquema:



$$\iint_{D} f(x,y) \, d(x,y) = \iint_{M} f(T(u,v)) |JT(u,v)| \, d(u,v)$$

♦ Ejemplo 2.5.1. Sea T(u,v)=(4u,2u+3v). Sea M el rectángulo $[0,1]\times[1,2]$. Hallar D=T(M). Calcular

a)
$$\iint_D xy d(x,y)$$
 b) $\iint_D (x-y) d(x,y)$

♦ Ejemplo 2.5.2. Sea D la región definida por las condiciones $0 \le y \le x; \ 0 \le x \le 1$. Calcular $\iint_D (x+y)d(x,y)$

por medio del cambio de variables x=u+v, y=u-v. Comprobar el resultado haciendo también la integral directamente.

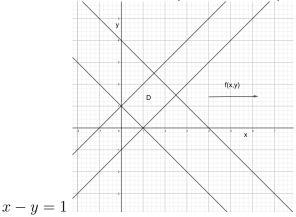
Suele haber dos motivos fundamentales para plantear un cambio de variable a la hora de calcular una integral: uno es obtener una función más sencilla de integral, y el otro obtener una descripción del dominio de integración más sencilla.

En ocasiones, la expresión de f(x,y) nos sugiere hacer un cambio de variable.

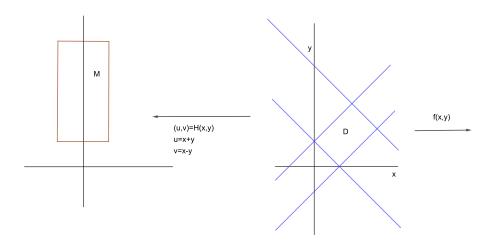
Por ejemplo, supongamos que nos piden calcular

$$\iint_D (x+y)^2 e^{x-y} d(x,y)$$

donde D es el recinto del plano limitado por las rectas x+y=1, x+y=4, x-y=-1 y



Parece bastante claro que sería interesante hacer un cambio de variable $u=x+y,\ v=x-y$, es decir (u,v)=H(x,y)=(x+y,x-y). Pero este cambio de variable va "al revés" de lo que dice el teorema de cambio de variable.



En este caso, para aplicar el teorema de cambio de variable necesitaríamos utilizar la transformación $T=H^{-1}$, y teniendo en cuenta que el teorema de la función inversa (Matemáticas II: Cálculo Diferencial) nos asegura que

$$JT(u,v) = \frac{1}{JH(x(u,v),y(u,v))}$$

En nuestro ejemplo, JH(x,y)=-2, así que JT(u,v)=-1/2 y

$$\iint_D (x+y)^2 e^{x-y} d(x,y) = \iint_M u^2 e^v(1/2) d(u,v)$$

2.5.2. Coordenadas polares

El cambio de coordenadas más utilizado para funciones de dos variables es el cambio a coordenadas polares.

Las coordenadas polares son un sistema de representación de puntos en el plano similar al que usaría un radar clásico: Desde el centro de coordenadas hacemos un barrido angular de 0° a 360° (realmente de 0rad a $2\pi rad$, pues los ángulos los mediremos en radianes). Cada punto que encontremos en este barrido se caracteriza por el ángulo en el que lo hemos encontrado, y la distancia a la que está de nosotros.

r mide la distancia del punto (x,y) al origen de coordenadas, $r=\sqrt{x^2+y^2}$, así que $r\geq 0$ y α mide la posición angular desde el eje x positivo, de modo que $\alpha\in[0,2\pi)$

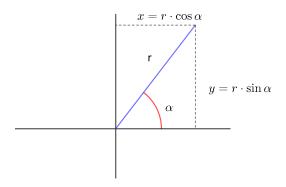


Figura 2.3: Coordenadas polares

La transformación que define el cambio de coordenadas polares a cartesianas es

$$T(r, \alpha) = (r \cdot \cos \alpha, r \cdot \sin \alpha)$$

T es una función diferenciable, verifica que

$$JT(r,\alpha) = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -r \cdot \sin \alpha \\ \sin \alpha & r \cdot \cos \alpha \end{vmatrix} = r(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = r$$

Para poder utilizarla como cambio de variable la función T tiene que ser inyectiva en el interior del dominio de integración, para lo que se considerará definida en $U=\{(r,\alpha),\ r\geq 0;\ 0\leq \alpha<2\pi\}\subset\mathbb{R}^2$, de manera que cada punto del plano está unívocamente definido por un par (r,α) .

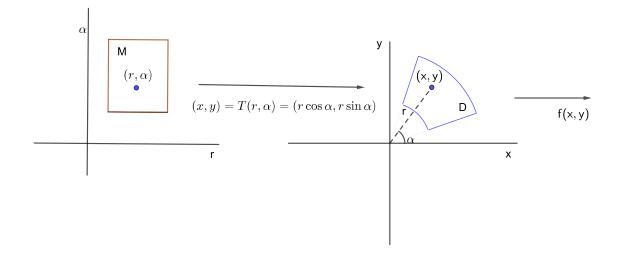


Figura 2.4: Cambio de variable a coordenadas polares

También tiene que cumplir que el jacobiano de T no se anule, pero cualquiera que sea el conjunto M contenido en U, el jacobiano $JT(r,\alpha)=r$ es distinto de cero en el interior de M.

$$\iint_D f(x,y) d(x,y) = \iint_M f(T(r,\alpha)) |JT(r,\alpha)| d(r,\alpha)$$

$$\iint_D f(x,y) d(x,y) = \iint_M f(r\cos\alpha, r\sin\alpha) \cdot r d(r,\alpha)$$

A parte de la dificultad que pueda tener en sí el cálculo de alguna de estas dos integrales, el foco de estos problemas estará casi siempre en identificar correctamente los conjuntos D y M.

Quizá sea conveniente introducir algunas generalizaciones que se suelen utilizar para simplificar esta identificación entre los dos conjuntos:

Dependiendo de la forma del conjunto D, a veces se considera la medida del ángulo α en un intervalo de longitud 2π no necesariamente entre 0 y 2π . Por ejemplo, entre $-\pi/2$ y $3\pi/2$.

Y también en algunas ocasiones se considera la posibilidad de tomar r negativo y ángulos en un intervalo de longitud π , de modo que un par $(-1,\pi/4)$ sería un punto en la recta que forma ángulo $\pi/4$ con el eje x positivo, pero en el lado opuesto de la recta respecto al origen de coordenadas.

La conveniencia de utilizar uno u otro criterio se verá mejor en los ejercicios y problemas.

igoplus Ejemplo 2.5.3. Calcular el área de la región del plano limitada por la curva $x^2+y^2=2x$

Capítulo 3

Cálculo vectorial: curvas e integrales de linea

Se llama cálculo vectorial a un área de la matemática que estudia funciones definidas entre espacios de vectores. Está a caballo entre el análisis (límites, derivadas, integrales...) y la geometría (curvas, superficies, campos...) y es la herramienta matemática fundamental para la física, al menos para la física elemental que puede describirse mediante el uso de vectores (estática y dinámica, movimientos, velocidades, aceleraciones, fuerzas, trabajo, presión, energías, termodinámica, hidrodinámica, fluidos, electricidad, magnetismo, etc.)

En esta asignatura, el cálculo vectorial se divide en dos grandes bloques, que corresponden con dos sistemas de modelos de la física: las funciones definidas sobre curvas (trayectorias) y las funciones definidas sobre superficies. Veremos en cada caso cómo los modelos de la física se adaptan a ciertos modelos matemáticos (o viceversa).

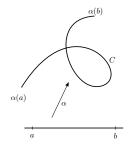
3.1. Curvas Regulares y Simples

Vamos a estudiar algunas aplicaciones del calculo diferencial e integral a funciones que están definidas sobre los puntos de una curva del plano o del espacio, como por ejemplo la temperatura de un móvil en el espacio, o el trabajo generado por un móvil en un campo de fuerzas. Para ello, empezaremos por dar una definición de las curvas mediante funciones que podamos manipular.

Para unificar las definiciones en el plano y en el espacio, escribiremos \mathbb{R}^n , donde n puede ser 2 o 3.

Definición 3.1 (Curvas en \mathbb{R}^n).

Un conjunto C de \mathbb{R}^n es una curva regular y simple si existe una función $\alpha:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}^n$ inyectiva y regular tal que $C=\alpha([a,b])$



A la función α se le llama una parametrización de C, y los puntos $\alpha(a)$ y $\alpha(b)$ se llaman extremos de C. La parametrización de una curva no es única: puede haber, y de hecho las hay, infinitas funciones que describen la misma curva.

Se dice que una función es regular si es de clase C^1 y la derivada es distinta de cero en todos los puntos.

La condición de que α sea de clase C^1 en el intervalo cerrado [a,b] se entiende como que α es continua en [a,b], derivable en (a,b), y en los extremos a y b existen derivadas laterales, de modo que la función derivada extendida así hasta los extremos del intervalo sea continua. La condición de que la derivada de α sea distinta de cero se aplica también a esas derivadas laterales en los extremos.

Geométricamente, estas condiciones sobre α implican que en cada punto de C existe una única recta tangente, incluso en los extremos de C, y además que la curva es *suave*: la dirección (y sentido) de la recta tangente varia de forma continua.

Además al ser α invectiva, la curva no se corta a si misma (no tiene puntos múltiples).

♦ Ejemplo 3.1.1.

a. Un segmento entre dos puntos A y B de \mathbb{R}^2 o de \mathbb{R}^3 es una curva, que se puede parametrizar mediante la función

$$\alpha: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n; \quad \alpha(t) = tB + (1-t)A$$

También se puede parametrizar mediante la función

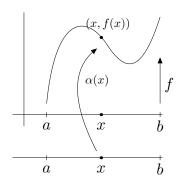
$$\beta: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n; \quad \beta(s) = sA + (1-s)B$$

0

$$\gamma(u) = u^3 B + (1 - u^3) A; \quad \gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

b. La gráfica de una función de clase C^1 , $f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$ es una curva en \mathbb{R}^2 que se puede parametrizar mediante la función

$$\alpha: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2; \quad \alpha(x) = (x, f(x))$$

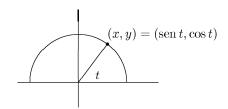


Y si $F:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}^2$, es una función de clase C^1 , se puede parametrizar mediante la función

$$\alpha: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3; \quad \alpha(x) = (x, f_1(x), f_2(x))$$

donde f_1 y f_2 son las componentes de F.

c. Una semicircunferencia $C=\{(x,y): x^2+y^2=R^2; \ y\geq 0\}$ es una curva, que se puede parametrizar mediante la función

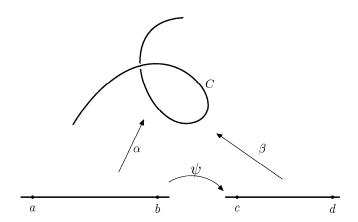


$$\alpha: [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2; \ \alpha(t) = (\cos t, \sin t)$$

La utilización de parametrizaciones para representar curvas nos permite usar técnicas de cálculo para deducir propiedades de las curvas, o de las funciones definidas a lo largo de curvas. Pero una misma curva admite infinitas parametrizaciones distintas, por lo que hay que tener cuidado en distinguir si una propiedad lo es de C o de la parametrización α .

El hecho de utilizar solo curvas regulares y simples, y parametrizaciones regulars e inyectivas, es fundamental en construcción del modelo matemático, porque permite utilizar propiedades del cálculo diferencial, concretamente el teorema de la función inversa, para asegurar que todas las posibles parametrizaciones de una misma curva son equivalentes entre sí:

Teorema 3.1 (Parametrizaciones equivalentes de una curva). Si $\alpha:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $\beta:[c,d] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ son dos parametrizaciones (regulares e inyectivas) de la misma curva (regular y simple), entonces existe una función $\psi:[a,b] \longrightarrow [c,d]$ biyectiva, de clase C^1 y con $\psi'(t) \neq 0$ para todo $t \in [a,b]$, tal que $\alpha = \beta \circ \psi$ ψ se denomina cambio de parámetro, y se dice que α y β son equivalentes.



Este cambio de parámetro nos va a permitir demostrar que las propiedades que vamos a estudiar lo son de C (no dependen de la parametrización utilizada como modelo de C)

Por ejemplo, la recta tangente a la curva en un punto no depende de la parametrización:

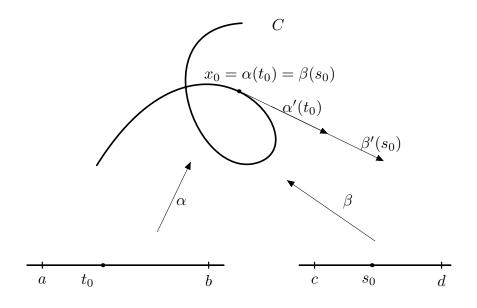
Sean $\alpha:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $\beta:[c,d]\longrightarrow \mathbb{R}^n$ son dos parametrizaciones de la misma curva, y $\psi:[a,b]\longrightarrow [c,d]$ el cambio de parámetro, de modo que $\alpha=\beta\circ\psi$

Sea $t_0\in[a,b]$ tal que $\alpha(t_0)=x_0$, y $s_0\in[c,d]$ tal que $\beta(s_0)=x_0$. Se tiene $\psi(t_0)=s_0$, y

$$\alpha'(t_0) = (\beta \circ \psi)'(t_0) = \beta'(\psi(t_0))\psi'(t_0) = \beta'(s_0)\psi(t_0)$$

donde $\psi'(t_0) \neq 0$. Es decir, los vectores $\alpha'(t_0)$ y $\beta'(s_0)$ son proporcionales, y por tanto son paralelos y definen la misma recta tangente

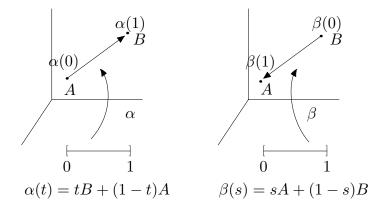
$$R_T: \quad x_0 + \lambda \alpha'(t_0) \quad \equiv \quad x_0 + \mu \beta'(s_0)$$



Hay un concepto sin embargo en relación con las curvas que sí depende de la parametrización que se utilice, que es la orientación, o el sentido de recorrido de C.

Cuando se escoge una parametrización de una curva, automáticamente se define un sentido de recorrido de C, empezando en $\alpha(a)$ y acabando en $\alpha(b)$

Si en el ejemplo del segmento entre dos puntos consideramos la parametrización α , el sentido de recorrido de C será del punto A al punto B, pero si escogemos la parametrización β , iremos de B a A.



Y hay problemas en los que es fundamental definir el sentido de recorrido que debe tener C.

Es fácil comprobar que dadas dos parametrizaciones α y β de C, las dos definen el mismo sentido de recorrido en C si y sólo si la función de cambio de parámetro es estrictamente creciente $(\psi'(t)>0$ para todo $t\in[a,b]$), y definen orientaciones opuestas si ψ es estrictamente decreciente $(\psi'(t)<0$ para todo $t\in[a,b]$). Observemos además que como ψ' es continua, y no se anula nunca, ψ' no puede cambiar de signo en [a,b], así que basta con comprobar en un punto del intervalo si $\psi'(t)$ es positivo o negativo.

Diremos que una curva está orientada si escogemos un sentido de recorrido para C, y escribiremos C^+ . Diremos que α es una parametrización de C^+ si es una parametrización de C que la recorra en el sentido de orientación definido para C^+ . Si β es otra parametrización de C que describe la curva con la orientación opuesta, diremos que β es una parametrización de C^-

En la práctica, para definir la orientación de una curva, basta con indicar cuál debe ser el extremo inicial y cuál el extremo final, o dar directamente una parametrización de C^+ .

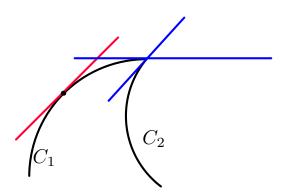
Si α es una parametrización de C^+ , una forma sencilla de conseguir una parametrización en sentido opuesto es definir

$$\beta(t) = \alpha(a+b-t)$$

3.2. Curvas regulares a trozos. Curvas cerradas

Para algunas de las aplicaciones que vamos a estudiar, este tipo de curvas es excesivamente sencillo, por lo que vamos a utilizar dos generalizaciones.

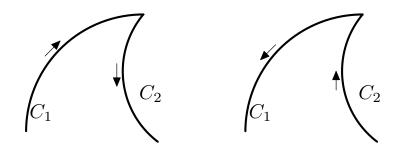
En primer lugar, es posible que la curva tenga algunos picos. Una curva de este tipo tendría una parametrización $\alpha:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}^n$ inyectiva y "regular a trozos", es decir, de modo que existe una familia finita de puntos $a=\leq t_1\leq\cdots\leq t_k=b$ de modo que α es regular en cada intervalo $[t_i,t_{i+1}]$. Los picos de la curva estarían en los puntos $\alpha(t_i)$, y en ellos habría dos rectas tangentes.



En la práctica puede ser difícil encontrar α con estas propiedades, y será suficiente considerar C como una unión finita de curvas consecutivas C_1, \ldots, C_k (que se puedan describir de modo que el extremo final de una curva sea el inicial de la siguiente, y no tengan otro punto en común) Así por ejemplo, dado un punto x_0 en C que no sea un pico (un punto regular de C), estará en una de las curvas C_i , y bastará encontrar una parametrización cualquiera de C_i para poder calcular la recta tangente a C en x_0

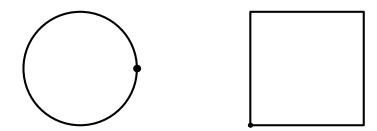
En cada arco C_i todas las parametrizaciones son equivalentes.

Una curva regular a trozos se orienta como una curva regular, indicando cuál debe ser el extremo inicial y cual el extremo final. Cuando se orienta uno de los trozos de la curva, los demás quedan orientados automáticamente de modo que sean consecutivos; hay que tener cuidado para que la orientación del conjunto sea la correcta.



Otro tipo de curvas que vamos a considerar son las curvas cerradas, como una circunferencia, o

un cuadrado



Una curva cerrada puede parametrizarse mediante una función $\alpha:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}^n$ que sea regular (o regular a trozos) e inyectiva en [a,b), con $\alpha(a)=\alpha(b)$

Por ejemplo, la circunferencia se puede parametrizar mediante la función

$$\alpha: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \alpha(t) = (R\cos t, R\sin t)$$

y el cuadrado mediante la función

$$\beta: [0,4] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t))$$

donde

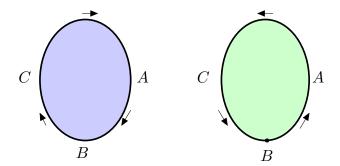
$$\beta_1: \left\{ \begin{array}{lll} t & \text{si} & 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{si} & 1 \leq t \leq 2 \\ 3-t & \text{si} & 2 \leq t \leq 3 \\ 0 & \text{si} & 3 \leq t \leq 4 \end{array} \right. \qquad \beta_2: \left\{ \begin{array}{lll} 0 & \text{si} & 0 \leq t \leq 1 \\ t-1 & \text{si} & 1 \leq t \leq 2 \\ 1 & \text{si} & 2 \leq t \leq 3 \\ 4-t & \text{si} & 3 \leq t \leq 4 \end{array} \right.$$

Sin embargo en la mayoría de los casos es difícil encontrar una parametrización definida en un sólo intervalo [a,b] para toda la curva. A los efectos de los resultados que vamos a utilizar, podemos considerar las curvas cerradas como curvas regulares a trozos, dividiéndolas si es preciso por varios puntos.

La única particularidad que tienen las curvas cerradas es la dificultad para definir la orientación. Una parametrización define automáticamente un sentido de recorrido de la curva, pero como $\alpha(a)=\alpha(b)$, para distinguirlo en un dibujo hacen falta tres puntos: indicando el orden por el que se debe pasar por tres puntos queda unívocamente definida la orientación de C.

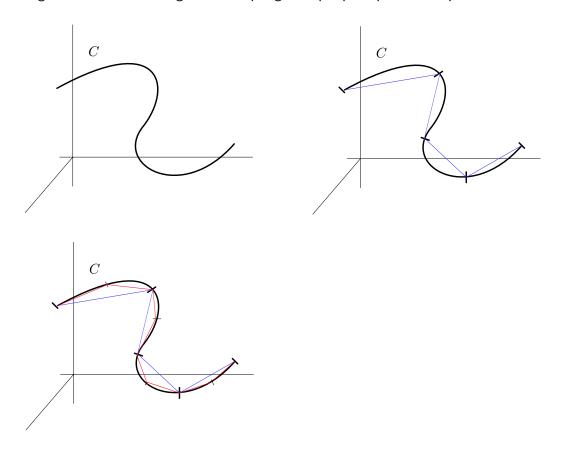
Cuando se trata de curvas planas, hay además otros criterios clásicos: se puede decidir si la curva debe recorrerse en sentido horario o en sentido anti-horario. Por convenio se suele considerar que el sentido anti-horario es el sentido positivo, y el sentido horario es el negativo.

Y como este criterio es difícil de distinguir si la curva es muy grande, o muy complicada, también se puede decidir indicando si la región acotada por la curva debe quedar a la izquierda según se recorre la curva (sentido positivo) o a la derecha (sentido negativo).



3.3. Longitud de una curva

La idea para calcular la longitud de una curva contenida en el plano o en el espacio consiste en dividirla en segmentos pequeños, escogiendo una familia finita de puntos en C, y aproximar la longitud mediante la longitud de la poligonal que pasa por dichos puntos.



Cuantos más puntos escojamos en C, mejor será el valor obtenido como aproximación de la longitud de C.

Para ello, escogemos una parametrización $\alpha:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^n$ de C, y una partición $P=\{a=t_0\leq t_1\leq t_2\leq \|\cdots\leq t_k=b\}$, y calculamos aproximadamente la longitud del arco $\alpha([t_i,t_{i+1}])$ como la longitud del segmento $[\alpha(t_i),\alpha(t_{i+1})]$.

Utilizando la distancia euclídea en \mathbb{R}^n , y aplicando a las coordenadas de α el teorema del valor medio en el intervalo $[t_i, t_{i+1}]$,

$$L(\alpha([t_i, t_{i+1}])) = \|\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j(t_{i+1}) - \alpha_j(t_i)|^2}$$

У

$$|\alpha_j(t_{i+1}) - \alpha_j(t_i)| = |\alpha'_j(s_i)||t_{i+1} - t_i|$$

$$\mathsf{con}\ s_i \in [t_i, t_{i+1}]$$

Utilizamos ahora que como α_j es de clase C^1 , su derivada es continua, por lo que si los intervalos $[t_i,t_{i+1}]$ son suficientemente pequeños podemos suponer que $\alpha_j'(s_i)=\alpha_j'(t_i)$, y sustituyendo en la fórmula anterior queda

$$\|\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |\alpha'_j(t_i)|^2 |t_{i+1} - t_i|^2} =$$
$$= \|\alpha'(t_i)\| |t_{i+1} - t_i|$$

Así la longitud total de la curva es

$$L(C) = \sum_{i=0}^{k-1} L(\alpha([t_i, t_{i+1}])) = \sum_{i=0}^{k-1} \|\alpha'(t_i)\| |t_{i+1} - t_i|$$

El valor de este sumatorio está entre los valores de la suma inferior y la suma superior de Riemann de la función $g(t) = \|\alpha'(t)\|$ asociadas a la partición P. Si tomamos particiones de [a,b] cada vez más finas, y dado que $g(t) = \|\alpha'(t)\|$ es integrable por ser continua, las sumas superiores e inferiores tienden a la integral de Riemann, y se obtiene la definición de la longitud de C como

$$L(C) = \int_{a}^{b} \|\alpha'(t)\| dt$$

Sin embargo, según esta definición, aparentemente la longitud de una curva dependería de la parametrización α que se utilice para representarla. El siguiente teorema muestra que gracias la equivalencia entre las parametrizaciones de una curva regular y simple, la fórmula anterior no depende de α .

Teorema 3.2. Sea C una curva regular y simple en \mathbb{R}^n , y $\alpha:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^n$, $\beta:[c,d]\longrightarrow\mathbb{R}^n$ dos parametrizaciones de C. Se tiene que

$$\int_{a}^{b} \|\alpha'(t)\| dt = \int_{c}^{d} \|\beta'(s)\| ds$$

En efecto, si $\psi:[a,b]\Longrightarrow [c,d]$ es la función de cambio de parámetro, biyectiva, de clase C^1 y regular, de modo que $\alpha=\beta\circ\psi$. Entonces $\alpha'(t)=\beta'(\psi(t))\psi'(t)$, y aplicando el teorema de cambio de variables

$$\int_{c}^{d} \|\beta'(s)\| ds = \int_{\psi^{-1}([c,d])} \|\beta(\psi(t))\| \ |\psi'(t)| \ dt = \int_{a}^{b} \|\alpha'(t)\| dt$$

Definición 3.2 (Longitud de una Curva).

Sea C una curva regular y simple en R^n . Sea $\alpha:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}^n$ una parametrización de C. Se define la longitud de C como

$$l(C) = \int_{a}^{b} \|\alpha'(t)\| dt$$

 $Si\ C$ es una curva regular a trozos, se define su longitud como la suma de las longitudes de cada trozo regular.

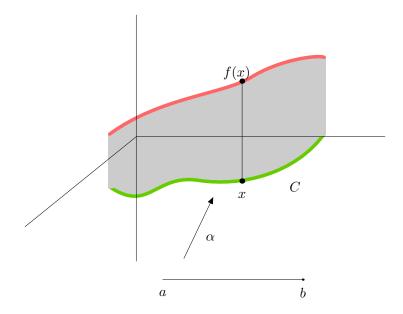
 $Si\ C$ es una curva cerrada simple, se puede dividir por tres puntos, y considerarla como una curva regular a trozos.

3.4. Integral de linea de un campo escalar

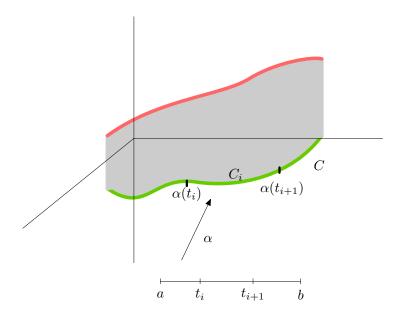
Se llama campo escalar en \mathbb{R}^n a una función definida de \mathbb{R}^n en \mathbb{R} , como por ejemplo la función que describe la temperatura en cada punto del espacio \mathbb{R}^3 .

Para entender el significado de la definición de integral de línea de un campo escalar, consideremos el siguiente ejemplo:

Supongamos que tenemos una curva C en \mathbb{R}^2 , parametrizada mediante una función $\alpha:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^2$, y una función escalar $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$, continua. Podemos representar gráficamente la función f sobre la curva C como un muro que levanta una altura f(x,y) sobre cada punto (x,y) de C. Se trata ahora de calcular el área de ese muro entre la curva C y la gráfica de f sobre la curva.



Repitiendo la idea de la construcción de la integral de Riemann en un intervalo, dividimos la curva C por una familia finita de puntos, definiendo una partición P de [a,b], $P=\{a=t_0<_1<\cdots< t_n=b\}$



La curva queda dividida en una unión finita de arcos $C_i=lpha([t_i-1,t_i])$

Definimos las sumas inferiores y superiores

$$U(f, C, P) = \sum_{i=1}^{n} M_{C_i}(f)l(C_i)$$

$$L(f, C, P) = \sum_{i=1}^{n} m_{C_i}(f)l(C_i)$$

donde $M_{C_i}(f)$ es el ínfimo de f en C_i , $m_{C_i}(f)$ es el supremo de f en C_i , y $l(C_i)$ es la longitud de C_i .

$$M_{C_i}(f) = \sup\{f(x), x \in C_i\} = \sup\{f \circ \alpha(t), t \in [t_{i-1}, t_i]\} = M_{[t_{i-1}, t_i]}(f \circ \alpha)$$

$$m_{C_i}(f) = \inf\{f(x), \ x \in C_i\} = \inf\{f \circ \alpha(t), \ t \in [t_{i-1}, t_i]\} = m_{[t_{i-1}, t_i]}(f \circ \alpha)$$

У

$$l(C_i) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\alpha'(t)\| dt$$

de modo que

$$U(f, C, P) = \sum_{i=1}^{n} M_{[t_{i-1}, t_i]}(f \circ \alpha) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\alpha'(t)\| dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} M_{[t_{i-1}, t_i]}(f \circ \alpha) \|\alpha'(t)\| dt \ge$$

$$\ge \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f \circ \alpha(t) \|\alpha'(t)\| dt = \int_{a}^{b} f \circ \alpha(t) \|\alpha'(t)\| dt$$

y análogamente

$$L(f, C, P) = \sum_{i=1}^{n} m_{[t_{i-1}, t_i]}(f \circ \alpha) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\alpha'(t)\| dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} m_{[t_{i-1}, t_i]}(f \circ \alpha) \|\alpha'(t)\| dt \le$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f \circ \alpha(t) \|\alpha'(t)\| dt = \int_{a}^{b} f \circ \alpha(t) \|\alpha'(t)\| dt$$

Al variar las particiones de [a,b], y suponiendo condiciones de continuidad para el campo f, las sumas superiores y las sumas inferiores se aproximan a un mismo valor, que será justamente la integral en el intervalo [a,b] de la función $(f\circ\alpha)\|\alpha'\|$. En general diremos que f es integrable a lo largo de α si el supremo de las sumas inferiores coincide con el ínfimo de las sumas superiores, al variar las particiones de [a,b].

Formalizar estas definiciones y poder utilizar la potencia del cálculo matemático exige tener que formalizar también un poco más el lenguaje para establecer algunas condiciones del cálculo diferencial que justifican el "buen funcionamiento" de los teoremas fundamentales. Por ejemplo, para estar seguros de que las funciones necesarias son realmente integrables, necesitamos establecer condiciones de continuidad...

En particular, en adelante consideraremos que las curvas y las funciones están definidas en conjuntos abiertos:

Definición 3.3 (Conjuntos abiertos). Un subconjunto U de \mathbb{R}^n es abierto si ningún punto de U es límite de una sucesión de puntos del complementario $\mathbb{R}^n \setminus U$. Es decir, si U es abierto, y x es un punto de U, cerca de x no habrá puntos del complementario.

Por ejemplo, hablaremos de curvas contenidas en conjuntos abiertos, y funciones continuas definidas en esos conjuntos abiertos, para asegurar que cerca de los puntos de la curva donde estamos trabajando no hay puntos de discontinuidad de la función.

Otro detalle formal: Aparentemente el resultado de esta integral depende de la parametrización α escogida para representar la curva C. Podríamos pensar que si escogemos distintas parametrizaciones, tendremos resultados distintos. Sin embargo, gracias a la equivalencia entre todas las parametrizaciones de una curva regular y simple, esto no es así:

Teorema 3.3. Sea C una curva regular y simple en \mathbb{R}^n . Sea $\alpha:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^n$ y $\beta:[c,d]\longrightarrow\mathbb{R}^n$ dos parametrizaciones de C. Sea f una función escalar continua en un abierto que contenga a C. Entonces

$$\int_{a}^{b} f \circ \alpha(t) \|\alpha'(t)\| dt = \int_{c}^{d} f \circ \beta(s) \|\beta'(s)\| ds$$

Esto nos permite definir la integral como una propiedad de la curva \mathcal{C} , y no de sus parametrizaciones:

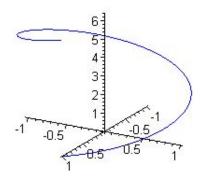
Definición 3.4 (Integral de un campo escalar a lo largo de una curva).

Sea C una curva regular y simple en \mathbb{R}^n , y $\alpha:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^n$ una parametrización de C. Sea f un campo escalar continuo en un abierto que contenga a C. Se define la integral de f a lo largo de C como $\int_C f = \int_a^b f \circ \alpha(t) \|\alpha'(t)\| dt$

Si C es una curva regular a trozos, se define la integral de f a lo largo de C como la suma de las integrales en cada trozo regular.

 $Si\ C$ es una curva cerrada, se puede dividir por tres puntos, y considerarla como una curva regular a trozos.

♦ Ejemplo 3.4.1.



Sea
$$C=\alpha[0,2\pi]$$
, donde $\alpha(t)=(\cos t,\sin t,t)$. Calcular $\int_C x^2+y^2+z^2$

$$\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$$
, luego $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$ y

$$\int_C f = \int_0^{2\pi} f \circ \alpha(t) \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t + t^2) \sqrt{2} dt =$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (1 + t^2) dt = \sqrt{2} (2\pi + \frac{8\pi^3}{3})$$

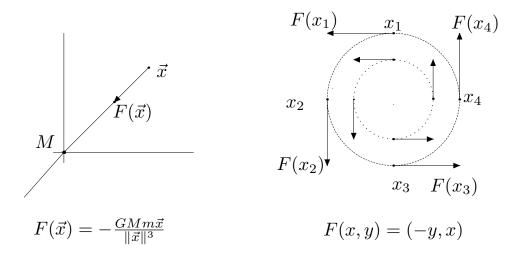
3.5. Integral de linea de un campo vectorial

Un campo vectorial en \mathbb{R}^n es una función $F:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$, que asocia a cada punto del espacio un vector del mismo espacio. Por ejemplo, un campo vectorial puede ser al campo gravitatorio generado por una masa: si tenemos una masa M situado en el origen de coordenadas, sobre un cuerpo de masa m situado en un punto x del espacio actúa una fuerza F(x) que tiene la dirección del vector x, pero sentido opuesto (de x al origen de coordenadas), y magnitud $\|F(x)\| = \frac{GMm}{\|x\|^2}$

Utilizando el lenguaje vectorial, el campo de gravedad queda definido por la función

$$F(x) = -\frac{GMm}{\|x\|^2} \, \frac{x}{\|x\|}$$

Un campo vectorial se suele representar gráficamente dibujando en el mismo espacio (\mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3) algunos puntos x, y el vector asociado F(x) con origen en el punto x

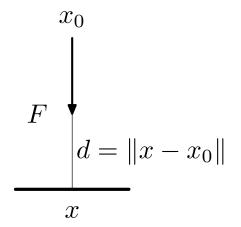


Para entender el significado de la integral de un campo vectorial a lo largo de una curva, consideramos el ejemplo del cálculo del trabajo generado por un campo de fuerzas sobre un móvil que se desplaza dentro de él.

El caso más sencillo es el del trabajo generado por la caída de un cuerpo por el efecto de la gravedad:

En principio el trabajo generado se calcula como el producto de la fuerza por el desplazamiento,

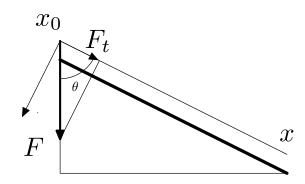
$$T = F \cdot d$$



Este concepto se concreta un poco más, añadiendo un signo que interprete si el trabajo se genera (cuando la fuerza tiene el mismo sentido que el desplazamiento) o se consume (cuando la fuerza tiene sentido opuesto al desplazamiento, por ejemplo para levantar otra vez el objeto). En lenguaje vectorial, $d = ||x - x_0||$, y

$$T = \pm ||F|| \cdot ||x - x_0||$$

Un caso un poco más complicado es el del trabajo generado por el desplazamiento de un móvil por un plano inclinado, sujeto sólo al efecto de la fuerza de la gravedad.



El vector F se puede descomponer como suma de dos vectores, uno en la dirección del desplazamiento y otro perpendicular al plano inclinado. Sólo la componente del vector F en la dirección del desplazamiento, F_t genera trabajo.

$$T = \pm ||F_t|| \cdot ||x - x_0||$$

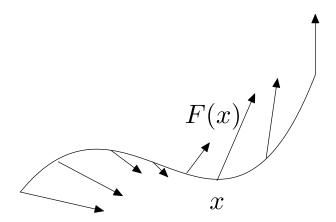
Utilizando un poco de trigonometría y el producto escalar, se tiene

$$||F_t|| = ||F|| \cos \theta = \frac{|\langle F, x - x_0 \rangle|}{||x - x_0||}$$

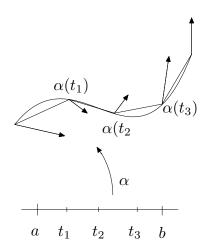
y por tanto

$$T = \pm \frac{|\langle F, x - x_0 \rangle|}{\|x - x_0\|} \cdot \|x - x_0\| = \langle F, x - x_0 \rangle$$

Por último, consideremos el caso general, en el que hay un campo vectorial continuo pero que no es constante, y un movimiento que no es rectilíneo.



La idea entonces es dividir la curva C trayectoria del móvil en segmentos lo bastante pequeños como para poder suponer que son rectos y que en cada uno el campo sí es constante (gracias a la continuidad). Para ello escogemos una parametrización $\alpha:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}^n$ de C, y una partición $P=\{a=t_0\leq t_1\leq \cdots \leq t_k=b\}$



Calculamos el trabajo generado en cada arco de curva $C_i=\alpha([t_i,t_{i+1}])$ como si fuera un segmento recto, y el campo fuera constantemente $F(\alpha(t_i))$. La componente tangencial de $F(\alpha(t_i))$ en la dirección de la curva la podemos calcular utilizando el vector director de la recta tangente a la curva en el punto $\alpha(t_i)$, $\alpha'(t_i)$; como también $\alpha'(t)$ es continua, podemos suponer que si C_i es bastante pequeño $\alpha'(t)$ es constante. De este modo

$$||F_t(\alpha(t_i))|| = \frac{\langle F(\alpha(t_i)), \alpha'(t_i) \rangle}{||\alpha'(t_i)||}$$

Así, si llamamos $L(C_i)$ a la longitud de C_i , el trabajo generado en C_i es aproximadamente

$$T_{i} = \frac{\langle F(\alpha(t_{i})), \alpha'(t_{i}) \rangle}{\|\alpha'(t_{i})\|} L(C_{i}) = \frac{\langle F(\alpha(t_{i})), \alpha'(t_{i}) \rangle}{\|\alpha'(t_{i})\|} \int_{t_{i}}^{t_{i+1}} \|\alpha'(t)\| dt$$

$$\simeq \frac{\langle F(\alpha(t_{i})), \alpha'(t_{i}) \rangle}{\|\alpha'(t_{i})\|} \|\alpha'(t_{i})\| |t_{i+1} - t_{i}| = \langle F(\alpha(t_{i})), \alpha'(t_{i}) \rangle |t_{i+1} - t_{i}|$$

El trabajo total generado a lo largo de la curva C será la suma de estos valores T_i

$$T = \sum_{i=0}^{k-1} T_i = \sum_{i=0}^{k-1} \langle F(\alpha(t_i)), \alpha'(t_i) \rangle |t_{i+1} - t_i|$$

Si tomamos ahora particiones del intervalo [a,b] cada vez con más puntos, estas sumas tienden al valor de la integral

$$T = \int_{a}^{b} \langle F \circ \alpha(t), \alpha'(t) \rangle dt$$

Esta expresión es la que se va a utilizar como definición de la integral de F a lo largo de la curva C. Aparentemente el resultado de la integral depende de la función α que se utilice para parametrizar la curva C. El siguiente resultado muestra que realmente sólo depende de la orientación que α define sobre la curva, lo que era de esperar si pensamos en la interpretación del problema físico en el que nos hemos basado: si recorriendo la curva en un sentido se genera trabajo, al volver sobre la misma en sentido contrario se consumirá la misma cantidad de trabajo.

La demostración del resultado se basa en la equivalencia de las parametrizaciones de una curva regular y simple, y en el teorema de cambio de variable. Recordemos que dos parametrizaciones de la misma curva tienen la misma orientación si y sólo si la función de cambio de parámetro es creciente, o lo que es lo mismo, si su derivada es positiva en todos los puntos; y tienen orientaciones opuestas si el cambio de parámetro es decreciente, o su derivada es negativa.

Teorema 3.4. Sea C una curva regular y simple en \mathbb{R}^n , U un abierto que contenga a C, y $F:U\longrightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo. Sean $\alpha:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $\beta:[c,d]\longrightarrow \mathbb{R}^n$ dos parametrizaciones de C.

Si α y β tienen la misma orientación en C, entonces

$$\int_{a}^{b} \langle F \circ \alpha(t), \alpha'(t) \rangle dt = \int_{c}^{d} \langle F \circ \beta(t), \beta'(t) \rangle dt$$

Y si α y β tienen orientaciones opuestas en C, entonces

$$\int_a^b \langle F \circ \alpha(t), \alpha'(t) \rangle dt = -\int_c^d \langle F \circ \beta(t), \beta'(t) \rangle dt$$

Definición 3.5 (Integral de línea de un campo vectorial).

Sea C^+ una curva regular y simple orientada en \mathbb{R}^n , U un abierto de \mathbb{R}^n que contenga a C, y $F:U\longrightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo. Sea $\alpha:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}^n$ una parametrización cualquiera de C^+ . Se define la integral de F a lo largo de C^+ como

$$\int_{C^+} F = \int_a^b \langle F \circ \alpha(t), \alpha'(t) \rangle dt$$

Si C^+ es regular a trozos, se define la integral de F a lo largo de C^+ como la suma de las integrales sobre cada trozo regular, orientados de forma compatible con la definición de C^+ . Y análogamente si C^+ es una curva cerrada simple regular a trozos Y orientada.

Si llamamos C^- a la curva C con la orientación opuesta, se tiene

$$\int_{C^+} F = -\int_{C^-} F$$

Notaciones:

$$\int_{C^+} F = \int_{C^+} f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n$$

♦ Ejemplo 3.5.1. Sea
$$C^+ = \{(x,y): \ x^2 + y^2 = 1, x \leq 0 \quad \text{\'o} \quad y \leq 0\}$$
 orientada de $P = (0,1)$ a $Q = (1,0)$. Calcular $\int_{C^+} (x^2, -xy)$

Observaciones: En todo lo que hemos trabajado sobre integrales de linea de funciones escalares y vectoriales hemos considerado sólo curvas simples (parametrizaciones inyectivas), de forma que en nuestros modelos lo importante de la curva es su forma. Las parametrizaciones regulares y simples de estas curvas son siempre equivalentes, y los resultados de las integrales dependen de la forma de C y no de la parametrización escogida.

En física, los problemas no siempre son así. También es posible que interese trabajar con diferentes formas de recorrer la misma curva, por ejemplo a diferente velocidad, o dando varios recorridos a una misma curva, etc. En ese caso se definen las integrales sobre una trayectoria o a lo largo de un camino $\alpha:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}^n$, que describe una curva C, que es la imagen de α . Aquí la función escogida, α , juega un papel principal en el resultado, y cambiar una parametrización por otra puede cambiar completamente el resultado.

Por ejemplo, las funciones $\alpha(t)=(\cos t, \sin t); \ t\in [0,2\pi]$ y $\beta(t)=(\cos(2t), \sin(2t)); \ t\in [0,2\pi]$ recorren la circunferencia de centro (0,0) y radio 1, pero α sólo da una vuelta, y β da dos vueltas en el mismo tiempo. Si estas funciones son trayectorias de dos móviles, uno recorre el doble de espacio que el otro. Si integramos un campo de fuerzas a lo largo de α y a lo largo de β , veremos que el trabajo realizado por el segundo móvil es el doble del primero.

Cuando hablamos de "trayectorias" o "caminos" entendemos una forma concreta de recorrer la curva, descrita por una función α .

Si tenemos una trayectoria $\alpha:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}^n$, podemos fácilmente construir otra que sea similar pero vaya en sentido contrario

$$\beta(t) = \alpha(b+a-t); \ t \in [a,b]$$

o una que vaya el doble de rápido

$$\gamma/t) = \alpha(2t); \ t \in [a/2, b/2]$$

3.6. Teorema de Green

Recordemos la definición de las regiones simples del plano que vimos en el capítulo 2:

Definición 3.6 (Regiones simples del plano).

Un conjunto $S \subset \mathbb{R}^2$ se llama región simple si existen funciones de clase C^1 , $p:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}, \ q:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}, \ r:[c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ y $s:[c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$S = \{(x,y): \ x \in [a,b], \ p(x) \leq y \leq q(x)\} = \{(x,y): \ y \in [c,d], \ r(y) \leq x \leq s(y)\}$$

Para una región simple, su frontera es una curva cerrada simple regular a trozos.

El teorema de Green establece una relación entre la integral de linea de un campo vectorial F(x,y) a lo largo de la frontera de S y la integral doble dentro de S de una función asociada a F, el rotacional de F,

Para ayudar a entender lo que significa el teorema, necesitamos interpretar lo que significan la integral de F a lo largo de una curva, y el rotacional de F.

Pensemos en el campo vectorial F como el movimiento de un fluido (por ejemplo, en un modelo que represente la velocidad de cada partícula en la superficie de un río).

La integral de linea a lo largo de una curva de un campo vectorial nos da una medida del esfuerzo que realiza una partícula para moverse a lo largo de esa curva, cuando está sometido al campo de fuerzas definido por F. O la energía que se produce en ese movimiento. El esfuerzo realizado y la energía producida son conceptos similares, aunque en el lenguaje común se entenderían como opuestos.

En nuestro problema estamos tratando de conocer el esfuerzo o la energía producida para rodear una región de la superficie.

Parece bastante claro que ese esfuerzo dependerá de si nuestro movimiento va a favor o en contra de la corriente, descrita por F(x,y). Para poder comparar el esfuerzo que requieren distintas trayectorias, utilizamos un criterio común de orientación: siempre en sentido contrario a las agujas del reloj (sentido positivo).

El resultado de la integral de linea tiene entonces que ver con la relación entre la dirección de F(x,y) y la dirección de nuestra trayectoria.

El otro concepto, el de rotacional de un campo F(x,y), es una forma de medir los efecto rotatorios que el campo F(x,y) produce en cada punto del fluido.

Ahora debería ser más razonable entender que ese esfuerzo que hay que hacer para recorrer la curva esté relacionado con los movimientos rotatorios que se están produciendo en la región que queremos rodear.

Se sugiere ver estos enlaces, que acompañan una explicación intuitiva con algunas herramientas gráficas muy interesantes.

KHAN ACADEMY: EL TEOREMA DE GREEN

KHAN ADEMY: ROTACIONAL DE UN FLUIDO EN DOS DIMENSIONES

Teorema 3.5 (Teorema de Green).

Sea $S\subset\mathbb{R}^2$ una región elemental, y $F:U\longrightarrow\mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase C^1 en un abierto U que contenga a S. Entonces

$$\int_{Fr(S)^{+}} F = \iint_{S} \left(\frac{df_{2}}{dx}(x, y) - \frac{df_{1}}{dy}(x, y) \right) d(x, y)$$

donde $F = (f_1, f_2)$ y $Fr(S)^+$ es la frontera de S orientada positivamente (dejando la región S a la izquierda)

Comprobar esta fórmula es sencillo:

Descomponemos el campo F como suma de dos campos, $F = (f_1, f_2) = (f_1, 0) + (0, f_2)$. Vamos a demostrar que para el campo $(f_1, 0)$ se verifica la ecuación

$$\int_{C^{+}} (f_1, 0) = \iint_{S} -\frac{df_1}{dy}(x, y)d(x, y)$$

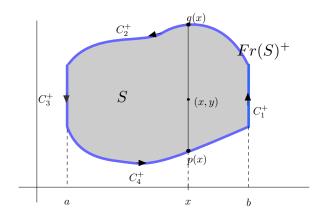
Análogamente se demuestra que también

$$\int_{C^{+}} (0, f_2) = \iint_{S} \frac{df_2}{dx}(x, y) d(x, y)$$

y sumando las dos igualdades se obtiene

$$\int_{C_{+}^{+}} (f_{1}, f_{2}) = \int_{C_{+}^{+}} (f_{1}, 0) + \int_{C_{+}^{+}} (0, f_{2}) = \iint_{S} \frac{df_{2}}{dx}(x, y) - \frac{df_{1}}{dy}(x, y)d(x, y)$$

Como S es una región elemental, existen dos funciones p y q de clase C^1 , $p:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ y $q:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, tales que $S=\{(x,y): a \leq x \leq b; \ p(x) \leq y \leq q(x)\}.$



La frontera de S está formada por cuatro trozos regulares,

$$Fr(C)^+ = C_1^+ \cup C_2^+ \cup C_3^+ \cup C_4^+$$

 C_1^+ se puede parametrizar mediante la función

$$\alpha(t) = (b, t); t \in [p(b), q(b)]$$

que verifica $\alpha'(t) = (0,1)$, luego

$$\int_{C_1^+} (f_1, 0) = \int_{p(b)}^{q(b)} \langle (f_1 \alpha(t), 0), (0, 1) \rangle dt = 0$$

Análogamente C_3^- se puede parametrizar mediante la función

$$\beta(t) = (a, t); \ t \in [p(a), q(a)]$$

que verifica $\beta'(t) = (0,1)$, luego

$$\int_{C_3^+} (f_1, 0) = -\int_{C_3^-} (f_1, 0) = -\int_{p(a)}^{q(a)} \langle (f_1 \beta(t), 0), (0, 1) \rangle dt = 0$$

 C_2^- se puede parametrizar mediante la función que describe la gráfica de la función q(x),

$$\lambda(x) = (x, q(x)), \ x \in [a, b]$$

que verifica $\lambda'(x)=(1,q'(x)$, de modo que

$$\int_{C_2^+} (f_1, 0) = -\int_{C_2^-} (f_1, 0) = -\int_a^b \langle (f_1 \lambda(x), 0), (1, q'(x)) \rangle dx =$$

$$= -\int_a^b f_1(x, q(x)) dx$$

Por último C_4^+ se puede parametrizar mediante la función

$$\delta(x) = (x, p(x)); \ x \in [a, b]$$

que verifica $\delta'(x) = (1, p'x)$), y

$$\int_{C_A^+} (f_1, 0) = \int_a^b \langle (f_1 \delta(x), 0), (1, p'(x)) \rangle dx = \int_a^b f_1(x, p(x)) dx$$

Por tanto

$$\int_{Fr(S)^{+}} (f_1, 0) = \int_a^b f_1(x, p(x)) - f_1(x, q(x)) dx$$

Por otra parte, aplicando el teorema de Fubini para el cálculo de la integral de $\frac{df_1}{dy}$ en S, se tiene

$$\iint_{S} \frac{df_{1}}{dy}(x,y)d(x,y) = \int_{a}^{b} \int_{p(x)}^{q(x)} \frac{df_{1}}{dy}(x,y)dydx = \int_{a}^{b} f_{1}(x,q(x)) - f_{1}(x,p(x))dx$$

tniendo en cuenta que según la Regla de Barrow,

$$\int_{p(x)}^{q(x)} \frac{df_1}{dy}(x,y)dy = f_1(x,q(x)) - f_1(x,p(x))$$

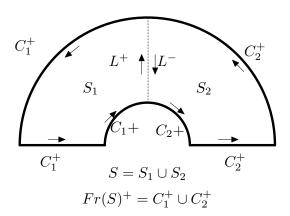
Comparando los dos resultados, se tiene

$$\int_{C^{+}} (f_1, 0) = \iint_{S} -\frac{df_1}{dy}(x, y)d(x, y)$$

La otra igualdad, $\int_{C^+}(0,f_2)=\iint_S\frac{df_2}{dx}(x,y)d(x,y) \qquad \text{se demuestra análogamente, expresando }S \text{ como región elemental respecto al eje vertical}$

♦ Ejemplo 3.6.1. Aplicación del teorema de Green en regiones elementales a trozos: aunque la demostración se hace sólo en regiones elementales, la fórmula que se obtiene se puede aplicar también a campos definidos en regiones del plano que se pueden descomponer como unión de regiones elementales que no se solapen (como un puzzle).

Consideremos un ejemplo: si S es la región de la figura, y la descomponemos como unión de dos regiones elementales S_1 y S_2 trazando el segmento L, podemos aplicar el teorema en S_1 y S_2 por separado.



La frontera de S_1 está formada por la curva C_1 y el segmento L, orientados como se indica en el dibujo. La frontera de S_2 está formada por la curva C_2 , y el segmento L con la orientación opuesta. Y la frontera de S está formada por las curvas C_1 y C_2

Entonces

$$\int_{S} \frac{df_{2}}{dx}(x,y) - \frac{df_{1}}{dy}(x,y)d(x,y) =$$

$$= \int_{S_{1}} \frac{df_{2}}{dx}(x,y) - \frac{df_{1}}{dy}(x,y)d(x,y) + \int_{S_{2}} \frac{df_{2}}{dx}(x,y) - \frac{df_{1}}{dy}(x,y)d(x,y) =$$

$$= \int_{Fr(S_{1})^{+}} F + \int_{Fr(S_{2})^{+}} F =$$

$$= \left(\int_{C_{1}^{+}} F + \int_{L^{+}} F\right) + \left(\int_{C_{2}^{+}} F + \int_{L^{-}} F\right) =$$

$$= \int_{C^{+}} F + \int_{C^{+}} F = \int_{Fr(S)^{+}} F$$

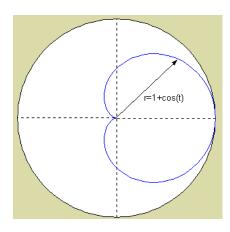
♦ Ejemplo 3.6.2. Una de las aplicaciones usuales del teorema de Green es el cálculo de áreas de regiones elementales a trozos del plano:

Si S es una región elemental, y F(x,y) es un campo de clase C^1 en un abierto que contenga a S y que verifique que la diferencia de las derivadas cruzadas de sus componentes es 1, $\left(\frac{df_1}{dy}(x,y)-\frac{df_2}{dx}(x,y)=1\right)$, entonces aplicando el teorema

$$v(S) = \int_{S} 1d(x,y) = \int_{S} \frac{df_1}{dy}(x,y) - \frac{df_2}{dx}(x,y) = \int_{Fr(S)^+} F$$

Como campo F se puede utilizar, por ejemplo, $F(x,y)=\frac{1}{2}(-y,x)$

Calcular el área encerrada por la cardioide, $r=1+\cos\theta$



La ecuación $r=1+\cos\theta$ define en coordenadas polares la cardioide, de modo que

$$x = r\cos\theta = (1 + \cos\theta)\cos\theta$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta = (1 + \cos \theta) \operatorname{sen} \theta$$

Estas ecuaciones nos dan una parametrización de la curva como una función $\alpha(\theta)=(x(\theta),y(\theta))$ definida en $[0,2\pi]$

.

$$\alpha'(\theta) = (x'(\theta), y'(\theta)) = (-\sin\theta\cos\theta - (1+\cos\theta)\sin\theta, -\sin^2\theta + (1+\cos\theta)\cos\theta) =$$
$$= (-\sin\theta - \sin2\theta, \cos\theta + \cos2\theta)$$

Utilizando el campo vectorial $F(x,y) = \frac{1}{2}(-y,x)$, tenemos

$$A = \int_{C^+} F = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \langle (-y(\theta), x(\theta)), (x'(\theta), y'(\theta)) \rangle d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \{ (-(1 + \cos \theta) \sin \theta)(-\sin \theta - \sin 2\theta) +$$

$$+ ((1 + \cos \theta) \cos \theta)(\cos \theta + \cos 2\theta) \} d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} (1 + \cos \theta)^2 d\theta = 3\pi$$

3.7. Teorema Fundamental del Cálculo Vectorial

El siguiente teorema es una versión del teorema fundamental del cálculo de funciones reales de una variable real para las integrales de linea. Desde el punto de vista de la interpretación de los modelos de problemas de la física, es también una propiedad fundamental de algunos fenómenos, que dan lugar a leyes como la conservación de la energía o de los momentos de inercia, etc. El teorema se conoce también como teorema fundamental de las integrales de línea, o teorema del gradiente.

Teorema 3.6 (Teorema Fundamental del Cálculo Vectorial).

Sea U un abierto en \mathbb{R}^n , $f:U\longrightarrow\mathbb{R}$ un campo escalar de clase C^1 en U, y $p,\ q$ dos puntos de U tales que existe una curva simple regular a trozos contenida en U de p a $q,\ C^+$ Se tiene

$$\int_{C^+} \nabla f = f(q) - f(p)$$

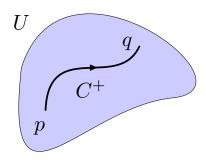
Donde ∇f es el gradiente de f, $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$.

Este teorema es sencillo de comprobar, apoyándonos en la regla de la cadena y el teorema fundamental del cálculo integral, dos poderosos teoremas. Pero que sea fácil de demostrar no quiere decir que sea fácil interpretar su significado.

Consideremos el término de la izquierda: $\int_{C^+} \nabla f = \int_a^b \langle \nabla (f(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle dt$

El producto escalar $<\nabla(f(\alpha(t)),\alpha'(t)>$ equivale a la derivada direccional de f en un punto $\alpha(t)$ de la curva, en la dirección $\alpha'(t)$ tangente a la curva. Es decir, mide la razón de cambio de f cuando nos movemos una pequeña distancia a lo largo de la curva con respecto a t. Si multiplicamos por esa variación de t, tenemos la variación neta de la función. Y si sumamos todas estas pequeñas variaciones a lo largo de t, obtendremos cuánto ha variado f desde el punto inicial al punto final. Es decir, f(q)-f(p).

Lo que sigue es la demostración formal del teorema:



Supongamos primero que C^+ es una curva regular y simple contenida en U, de p a q, y sea $\alpha:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}^n$ una parametrización de C^+ (de modo que $\alpha(a)=p$ y $\alpha(b)=q$).

.

Consideremos la función $f \circ \alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$:

 $(f \circ \alpha)$ es de clase C^1 en [a,b], y

$$(f \circ \alpha)'(t) = \langle \nabla f(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle$$

Entonces

$$\int_{C^+} \nabla f = \int_a^b \langle \nabla f \circ \alpha(t), \alpha'(t) \rangle dt =$$

$$= \int_a^b (f \circ \alpha)'(t) dt = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)) = f(q) - f(p)$$

Si C^+ es regular a trozos, existe una familia finita de puntos $\{a=t_0leqt_1\leq t_2\leq \cdots \leq t_k=b\}$ de modo que α es regular en cada intervalo $[t_i,t_{i+1}]$. Entonces llamando C_i^+ a cada curva $\alpha([t_i,t_{i+1}])$ orientada de $\alpha(t_i)$ a $\alpha(t_{i+1})$, y aplicando el caso anterior

$$\int_{C^{+}} \nabla f = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{C_{i}^{+}} \nabla f =$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} \left(f(\alpha(t_{i+1})) - f(\alpha(t_{i})) \right) =$$

$$= f(\alpha(t_{1})) - f(\alpha(t_{0})) + f(\alpha(t_{2})) - f(\alpha(t_{1})) + \dots + f(\alpha(t_{k})) - f(/\alpha(t_{k-1})) =$$

$$= f(\alpha(t_{k})) - f(\alpha(t_{0})) = f(q) - f(p)$$

La consecuencia importante del teorema es la siguiente:

La integral de un gradiente continuo a lo largo de cualquier curva contenida en U depende sólo de los extremos de la curva, y no de la curva en sí. Esta propiedad da nombre a un tipo especial de campos vectoriales:

Definición 3.7 (Campos conservativos).

Sea U un abierto de \mathbb{R}^n , y $F:U\longrightarrow\mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo en U. Se dice que f es conservativo en U si para todos p y q en U, la integral a lo largo de cualquier curva simple regular a trozos contenida en U que una p y q es la misma (depende sólo de los puntos p y q, y no de la curva).

Esta propiedad es equivalente a que la integral a lo largo de cualquier curva cerrada contenida en U valga cero.

Según el teorema, los gradientes continuos son campos conservativos en cualquier abierto de su dominio. El que un campo sea conservativo o no depende del campo, y del conjunto donde está definido. Con algunas condiciones sobre el tipo de dominio de la función F, se puede demostrar que de hecho todos los campos conservativos son gradientes de alguna función.

Esto hace especialmente interesante descubrir si un campo vectorial dado es el gradiente de algún campo escalar, y encontrar cuál.

Definición 3.8 (Función Potencial).

Sea F un campo vectorial continuo. Se llama función potencial de F a cualquier función f de clase C^1 que verifique $F = \nabla f$, si es que existe.

La función potencial, para los gradientes, viene a ser la "primitiva" del campo F.

El último resultado es una condición necesaria para que un campo de clase C^1 definido en una abierto conexo de \mathbb{R}^n sea conservativo, y es consecuencia inmediata del teorema de igualdad de las derivadas cruzadas de las funciones de clase C^2 .

Proposición 3.7. Si un campo vectorial $F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $F = (f_1, \dots, f_n)$, de clase C^1 , es el gradiente de una función $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, C^1 en U. Entonces necesariamente se verifica

$$rac{df_j}{dx_i}(x) = rac{df_i}{dx_j}(x)$$
 para todo $i,j=1,\ldots,n$

- ♦ **Ejemplo 3.7.1**. Estudiar si los siguientes campos vectoriales son conservativos, y en su caso hallar una función potencial
- 1) $F(x,y) = (y \operatorname{sen} x, x \operatorname{sen} y) \operatorname{en} \mathbb{R}^2$

2)
$$F(x,y) = \left(\frac{2y}{x^2 + y^2}, \frac{-2x}{x^2 + y^2}\right)$$
 en $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

3)
$$F(x, y, z) = (\sin 2x \sin 2y, 2\cos 2y \sin^2 x, -2z \sin(z^2))$$

En el primer caso, el campo es de clase C^1 en \mathbb{R}^2 , así que para ser un gradiente debería tener las derivadas cruzadas iguales, pero

$$\frac{df_1}{dy}(x,y) = \sin x$$

У

$$\frac{df_2}{dx}(x,y) = \sin y$$

luego no es conservativo.

En el segundo caso, también F es de clase C^1 en U (aunque no lo es en \mathbb{R}^2). Además

$$\frac{df_1}{dy}(x,y) = \frac{2(x^2 + y^2) - 4x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

У

$$\frac{df_2}{dx}(x,y) = \frac{-2(x^2+y^2)+4x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

son iguales.

Sin embargo F no es conservativo: la condición de la proposición no es suficiente si el dominio de la función tiene "un agujero".

Si calculamos la integral de F a lo largo de la circunferencia unidad, parametrizada mediante la función $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$ en $[0, 2\pi]$, tenemos

$$\int_{C^{+}} F = \int_{C^{+}} f_{1} dx + f_{2} dy =$$

$$= \int_{0}^{2\pi} 2 \operatorname{sen} t (-\operatorname{sen} t) + (-2 \cos t) \cos t dt = \int_{0}^{2\pi} (-2) dt = -4\pi \neq 0$$

En el tercer caso, vamos a ver cómo se puede encontrar una función potencial de F. Debe ser una función f de clase C^1 que verifique las ecuaciones

$$\frac{df}{dx}(x, y, z) = f_1(x, y, z) = \sin 2x \sin 2y$$

$$\frac{df}{dy}(x, y, z) = f_2(x, y, z) = 2\cos 2y \sin^2 x$$

$$\frac{df}{dz}(x, y, z) = f_3(x, y, z) = -2z \sin(z^2)$$

Observando la última ecuación, que parece la más sencilla, f tendrá que ser una primitiva (integrando respecto de z) de la función $-2z \operatorname{sen}(z^2)$

$$f(x, y, z) = \int -2z \sin(z^2) dz = \cos(z^2) + \phi(x, y)$$

donde $\phi(x,y)$ puede ser cualquier función que no dependa de z.

Derivando ahora esta expresión de f respecto de x, deberá verificarse la primera ecuación, así que

$$\frac{df}{dx}(x,y,z) = \frac{d\phi}{dx}(x,y) = \sin 2x \sin 2y$$

y por tanto, otra vez calculando primitivas (ahora respecto de x)

$$\phi(x,y) = \int \sin 2x \sin 2y dx = \frac{-1}{2} \cos 2x \sin 2y + \psi(y)$$

donde $\psi(y)$ puede ser cualquier función que no dependa de x (ni por supuesto de z)

Tenemos entonces $f(x,y,z) = \cos(z^2) + \frac{1}{2}\cos 2x \sin 2y + \psi(y)$

Derivando ahora respecto de y tenemos la segunda ecuación del sistema

$$\frac{df}{dy}(x, y, z) = \frac{-1}{2}\cos 2x 2\cos 2y + \psi'(y) = 2\cos 2y \sin^2 x$$

despejando $\psi'(y)$

$$\psi'(y) = \cos 2y(2\sin^2 x + \cos 2x) = \cos 2y(2\sin^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x) = \cos 2y$$

y por tanto

$$\psi(y) = \int \cos 2y = \frac{1}{2} \sin 2y + K$$

donde K es una constante cualquiera.

Así

$$f(x, y, z) = \cos(z^2) - \frac{1}{2}\cos 2x \sin 2y + \frac{1}{2}\sin 2y + K = \cos(z^2) + \sin^2 x \sin 2y + K$$

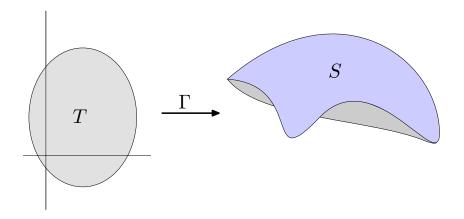
Capítulo 4

Calculo Vectorial: Integrales de Superficie.

4.1. Superficies Regulares y Simples

En los próximos capítulos vamos a estudiar algunas aplicaciones del cálculo diferencial e Integral a funciones definidas sobre una superficie, partiendo de ejemplos de la dinámica de fluidos. Para ello en este capítulo daremos una definición de superficie mediante funciones que podamos manipular con técnicas analíticas. Aunque la teoría de superficies se puede desarrollar en espacios \mathbb{R}^n con $n \geq 3$, vamos a considerar sólo superficies en \mathbb{R}^3

Definición 4.1 (Superficies en \mathbb{R}^3). Un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^3$ se llama una superficie regular y simple si existe una región elemental del plano $T \subseteq \mathbb{R}^2$ y una función $\Gamma: T \longrightarrow \mathbb{R}^3$ inyectiva y regular en T, tal que $S = \Gamma(T)$



La función Γ se llama una parametrización de S, y se llama borde de S a la imagen por Γ de la frontera de T, $b(S) = \Gamma(Fr(T))$

La función Γ tiene tres componentes y dos variables, y se suele escribir como

$$\Gamma(u,v) = (\gamma_1(u,v), \gamma_2(u.v), \gamma_3(u,v))$$

o interpretando las componentes de Γ como las coordenadas de un punto en el espacio

$$\Gamma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

Recordamos que un conjunto $T\subset\mathbb{R}^2$ es una región elemental del plano si existen funciones de clase C^1 , $p:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R},\ q:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R},\ r:[c,d]\longrightarrow\mathbb{R}$ y $s:[c,d]\longrightarrow\mathbb{R}$ tales que

$$T = \{(x,y): x \in [a,b], p(x) \le y \le q(x)\} =$$
$$= \{(x,y): y \in [c,d], r(y) \le x \le s(y)\}$$

Y la función Γ regular en T quiere decir que es de clase C^1 y tiene diferencial de rango 2, en un abierto U que contiene a T.

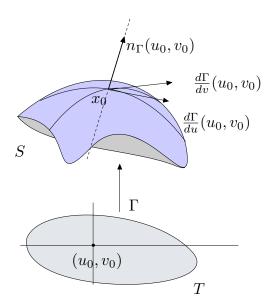
(Si n=1, una región elemental es un intervalo [a,b], y la condición de función regular que hemos utilizado en la teoría de curvas es equivalente a ésta: α es regular en [a,b] si y sólo si se puede extender a un intervalo abierto I que contenga a [a,b], de forma que sea regular en I)

La condición de que Γ sea regular implica que la matriz

$$d\Gamma = \begin{pmatrix} \frac{d\Gamma}{du} & \frac{d\Gamma}{dv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d\gamma_1}{du} & \frac{d\gamma_1}{dv} \\ \frac{d\gamma_2}{du} & \frac{d\gamma_2}{dv} \\ \frac{d\gamma_3}{du} & \frac{d\gamma_3}{dv} \end{pmatrix}$$

tiene rango dos, y por tanto que los dos vectores columnas $\frac{d\Gamma}{du}$ y $\frac{d\Gamma}{dv}$ son linealmente independientes, o lo que es lo mismo, su producto vectorial no es cero

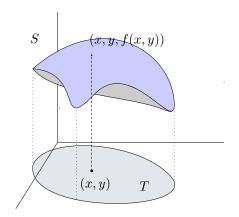
$$n_{\Gamma} = \frac{d\Gamma}{du} \times \frac{d\Gamma}{dv} \neq \vec{0}$$



Geométricamente, esto indica que la superficie no tiene picos o aristas, y en cada punto de S existe un único plano tangente. La condición de que Γ sea inyectiva implica que la superficie no tiene puntos múltiples, no se corta a sí misma.

La frontera de T es una curva cerrada simple regular a trozos en el plano, y el borde de S es una curva cerrada simple regular a trozos en el espacio.

♦ Ejemplo 4.1.1.



La gráfica de una función de clase C^1 en una región elemental del plano es una superficie regular y simple en \mathbb{R}^3 : Si $f:T\longrightarrow \mathbb{R}$, podemos parametrizar la gráfica de f mediante la función

$$\Gamma: T \longrightarrow \mathbb{R}^3;$$

$$\Gamma(x,y) = (x,y,f(x,y))$$

Una superficie tiene siempre infinitas parametrizaciones diferentes. Como en el caso de las curvas, se puede demostrar que si $\Gamma: T \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y $\Delta: M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ son dos parametrizaciones de la misma superficie, existe una función $\psi: T \longrightarrow M$ biyectiva y regular (de clase C^1 en un abierto que contiene a T y con $J\psi = det(d\psi) \neq 0$ en todo T), tal que $\Gamma = \Delta \circ \psi$. Se dice que las parametrizaciones Γ y Δ son equivalentes, y la función ψ se denomina cambio de parámetro.

De la condición $\Gamma = \Delta \circ \psi$, se deduce que

$$d\Gamma(u,v) = d\Delta(\psi(u,v)) \circ d\psi(u,v)$$

y operando se obtiene

$$\frac{d\Gamma}{du}(u,v) \times \frac{d\Gamma}{dv}(u,v) = \frac{d\Delta}{ds}(\psi(u,v)) \times \frac{d\Delta}{dt}(\psi(u,v)) \cdot J\psi(u,v)$$

En efecto, si ponemos las coordenadas,

$$\Lambda(s,t) = (\lambda_1(s,t), \lambda_2(s,t), \lambda_3(s,t))$$

$$\Gamma(u,v) = \Lambda \circ \psi(u,v) = (\lambda_1(\psi(u,v)), \lambda_2(\psi(u,v)), \lambda_3(\psi(u,v)))$$

$$\psi(u,v) = (\psi_1(u,v), \psi_2(u,v))$$

Derivando respecto de u

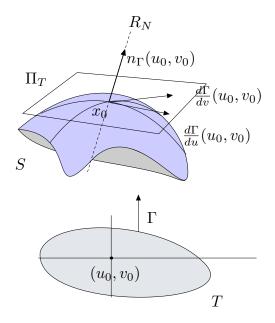
$$\frac{d\Gamma}{du}(u,v) = \begin{pmatrix}
\frac{d\lambda_1}{ds}(\psi(u,v))\frac{d\psi_1}{du}(u,v) + \frac{d\lambda_1}{dt}(\psi(u,v))\frac{d\psi_2}{du}(u,v) \\
\frac{d\lambda_2}{ds}(\psi(u,v))\frac{d\psi_1}{du}(u,v) + \frac{d\lambda_2}{dt}(\psi(u,v))\frac{d\psi_2}{du}(u,v) \\
\frac{d\lambda_3}{ds}(\psi(u,v))\frac{d\psi_1}{du}(u,v) + \frac{d\lambda_3}{dt}(\psi(u,v))\frac{d\psi_2}{du}(u,v)
\end{pmatrix} = \frac{d\Lambda}{ds}(\psi(u,v))\frac{d\psi_1}{du}(u,v) + \frac{d\Lambda}{dt}(\psi(u,v))\frac{d\psi_2}{du}(u,v)$$

Y análogamente

$$\begin{split} \frac{d\Gamma}{dv}(u,v) &= \begin{pmatrix} \frac{d\lambda_1}{ds}(\psi(u,v))\frac{d\psi_1}{dv}(u,v) + \frac{d\lambda_1}{dt}(\psi(u,v))\frac{d\psi_2}{dv}(u,v) \\ \frac{d\lambda_2}{ds}(\psi(u,v))\frac{d\psi_1}{dv}(u,v) + \frac{d\lambda_2}{dt}(\psi(u,v))\frac{d\psi_2}{dv}(u,v) \\ \frac{d\lambda_3}{ds}(\psi(u,v))\frac{d\psi_1}{dv}(u,v) + \frac{d\lambda_3}{dt}(\psi(u,v))\frac{d\psi_2}{dv}(u,v) \end{pmatrix} = \\ &= \frac{d\Lambda}{ds}(\psi(u,v))\frac{d\psi_1}{dv}(u,v) + \frac{d\Lambda}{dt}(\psi(u,v))\frac{d\psi_2}{dv}(u,v) \end{split}$$

Y haciendo ahora el producto vectorial, teniendo en cuenta que $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ se obtiene la fórmula anterior.

Esto demuestra que los vectores *normales* definidos por ambas parametrizaciones en un punto de la superficie son proporcionales, y por tanto tienen la misma dirección, así que definen la misma recta. También se deduce que el plano perpendicular a esa recta es el mismo, independientemente de la parametrización de S:



Se llama recta normal a la superficie S en un punto x_0 a la recta que pasa por x_0 y tiene dirección $n_{\Gamma}(u_0,v_0)$, donde $\Gamma:T\longrightarrow\mathbb{R}^3$ es una parametrización cualquiera de S, y $\Gamma(u_0,v_0)=x_0$ Se llama plano tangente a S en x_0 al plano que pasa por x_0 y es perpendicular a la recta normal. Este plano está generado por los vectores $\frac{d\Gamma}{du}(u_0,v_0)$ y $\frac{d\Gamma}{dv}(u_0,v_0)$

$$R_N \equiv \{x \in \mathbb{R}^3 : x = x_0 + \lambda n_{\Gamma}(u_0, v_0); \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$$\Pi_T \equiv \{x \in \mathbb{R}^3 : x = x_0 + \lambda \frac{d\Gamma}{du}(u_0, v_0) + \mu \frac{d\Gamma}{dv}(u_0, v_0); \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

Por otro lado, como la función $\psi: T \longrightarrow M$ es de clase C^1 , y el determinante de la diferencial, $det(d\psi(u,v))$ no se anula nunca, tampoco puede cambiar de signo en T: si $det(d\psi(u,v))>0$ en un punto de T, es positivo en todos los puntos de T, y entonces los vectores normales definidos por Γ y por Λ tienen también el mismo sentido; y si $det(d\psi(u,v))<0$ en un punto de T, también es negativo en todos los puntos de T, y los vectores normales definidos por ambas parametrizaciones tienen sentidos opuestos en todos los puntos de la superficie.

Esta observación divide las posibles parametrizaciones de una superficie en dos grupos, según el sentido que definan sobre el vector normal a la superficie. En ciertos problemas, la diferencia entre un sentido o el otro es fundamental para la interpretación de los resultados de los cálculos realizados sobre la superficie (por ejemplo, en la dinámica de fluidos). Esta observación da lugar a la definición de las superficies orientadas:

Diremos que una superficie S está orientada si se escoge un sentido para el vector normal a la superficie, y escribiremos S^+ . Diremos que Γ es una parametrización de S^+ si es una parametrización de S que respete el sentido escogido para el vector normal en cada punto de la superficie. En otro caso, Γ será una parametrización de S^- .

Si $\Gamma: T \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y $\Lambda: M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ son dos parametrizaciones de la misma superficie, entonces ambas definen la misma orientación en S si y sólo si el determinante de la diferencial del cambio de parámetro es positivo, y definen orientaciones opuestas si es negativo.

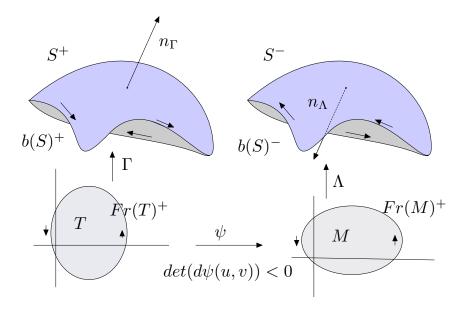
Hay una relación entre la orientación de una superficie y la orientación de su borde (que es una curva cerrada simple regular a trozos en \mathbb{R}^3).

Si $\Gamma: T \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización de una superficie S, el borde de S es la imagen por Γ de la frontera de T, $\Gamma(Fr(T))$. Escogemos entonces una parametrización de la frontera de T que la recorra en sentido positivo (dejando la región T a la izquierda), $\alpha: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$. La función

$$\Gamma \circ \alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

es una parametrización del borde de S. Con este procedimiento asociamos a Γ una orientación de S y una orientación de b(S). Se puede comprobar que si Γ y Λ definen la misma orientación en S, también definen la misma orientación en b(S); y si definen orientaciones opuestas en S, también definen orientaciones opuestas en el borde. Así que también se puede escoger una orientación de una superficie decidiendo el sentido de recorrido que debe tener el borde de la superficie.

Geométricamente, la relación entre la orientación del vector normal y la orientación del borde de una superficie se rige por la regla del sacacorchos": el sentido del vector normal es el de avance de un tornillo cuya cabeza fuese la superficie y girase en el sentido indicado en el borde de S.



4.2. Superficies regulares a trozos

En la práctica, la mayoría de las superficies no son tan sencillas como las hemos definido: por ejemplo, la superficie de un cubo tiene vértices y aristas. Es necesario generalizar la definición, para incluir superficies de este tipo.

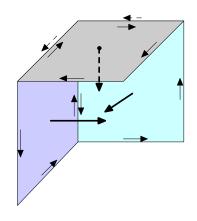
Definición 4.2 (Superficies simples regulares a trozos). Un conjunto S contenido en \mathbb{R}^3 es una superficie simple regular a trozos si existe una región elemental a trozos en el plano $T=T_1\cup\cdots\cup T_k$ (que se puede descomponer como unión finita de regiones T_i elementales, T conexo, $T_i\cap T_j^0=\emptyset$ si $i\neq j$, como un puzzle), y una función $\Gamma:T\longrightarrow\mathbb{R}^3$, de clase C^1 en T, inyectiva en el interior de T, y regular en cada T_i , tal que $\Gamma(T_i)\cap\Gamma(T_j^0)=\emptyset$ si $i\neq j$, y de modo que $S=\Gamma(T)$

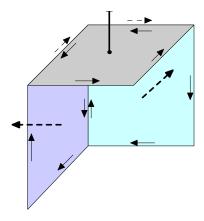
Evidentemente esta definición es difícil de manejar, y en la clase de problemas que vamos a ver, será simplemente una unión finita de superficies regulares y simples $S_i = \Gamma(T_i)$, con algunas condiciones de intersección: tres o más superficies no se pueden cortar a lo largo de una curva, aunque si pueden tener un vértice común...

Para poder dar una definición precisa de cuándo una unión finita de superficies se puede considerar una superficie regular a trozos, se necesita un lenguaje y técnicas más avanzadas de Topología de las que se disponen en este curso. Nosotros consideraremos sólo superficies sencillas, como las caras de un prisma, una esfera (unión de dos semiesferas), etc.

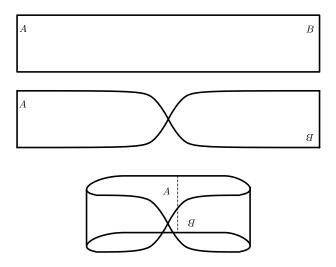
Para calcular la recta normal o el plano tangente de un punto de una superficie regular a trozos bastará utilizar solamente la cara que contiene al punto, y se podrá utilizar cualquier parametrización de ella.

Sin embargo para definir la orientación de una superficie regular a trozos habrá que tener más cuidado: para orientar una superficie regular a trozos, hay que definir una orientación en cada trozo regular, de forma que dos caras que tienen una arista común en su borde definan orientaciones opuestas en ella.





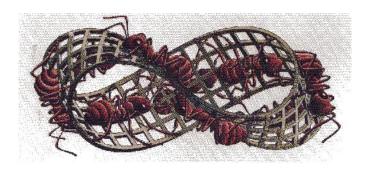
Esto no siempre se puede hacer: la Cinta de Möbius es el ejemplo más sencillo de superficie que no es orientable. Para construirla basta coger una tira de papel alargada; hay que pegar los dos extremos, pero después de hacer un giro a uno de ellos.



En la siguiente dirección puedes ver algunos datos biográficos sobre Möbius

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Mobius.html

Este dibujo se debe al pintor holandés Maurits Cornelis Escher.



4.3. Área de una Superficie

La idea para calcular el área de una superficie es sub-dividirla en regiones bastante pequeñas como para suponer que son planas, y aproximar el valor del área como la suma de esas regiones planas.

Para ver a qué fórmula nos lleva este procedimiento, consideramos una superficie regular y simple

en \mathbb{R}^3 , y $\Gamma: T \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización de S.

Si realizamos una partición de T, obtenemos una "partición" de la superficie en regiones casi rectangulares. Sea R uno de los rectángulos de la partición, de vértices $(u_0,v_0),(u_0+h,v_0),(u_0,v_0+j),(u_0+h,v_0+j)$.

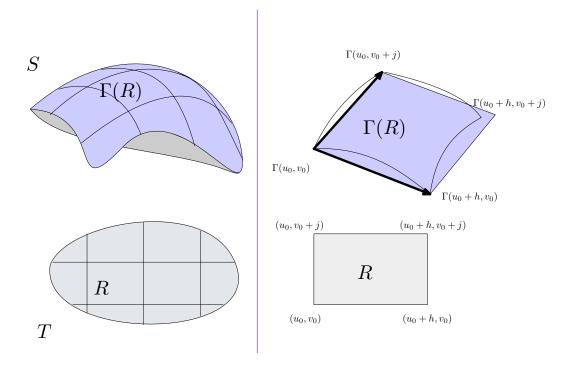
Aproximamos el área de $\Gamma(R)$ por el área del paralelogramo de lados los segmentos

$$\Gamma(u_0,v_0),\Gamma(u_0+h,v_0)$$

У

$$\Gamma(u_0, v_0), \Gamma(u_0, v_0 + j)$$

como el producto vectorial de los dos vectores:



$$a(\Gamma(R)) \sim \| \overrightarrow{(\Gamma(u_0 + h, v_0) - \Gamma(u_0, v_0))} \times \overrightarrow{(\Gamma(u_0, v_0 + j), \Gamma(u_0, v_0))} \| =$$

$$= \| \overrightarrow{\gamma_1(u_0 + h, v_0) - \gamma_1(u_0, v_0)} \quad \overrightarrow{\gamma_2(u_0 + h, v_0) - \gamma_2(u_0, v_0)} \quad \overrightarrow{\gamma_3(u_0 + h, v_0) - \gamma_3(u_0, v_0)} \quad \|$$

$$= \| \overrightarrow{\gamma_1(u_0, v_0 + j) - \gamma_1(u_0, v_0)} \quad \overrightarrow{\gamma_2(u_0, v_0 + j) - \gamma_2(u_0, v_0)} \quad \overrightarrow{\gamma_3(u_0, v_0 + j) - \gamma_3(u_0, v_0)} \quad \|$$

donde
$$\Gamma(u,v) = (\gamma_1(u,v), \gamma_2(u,v), \gamma_3(u,v))$$

En cada coordenada podemos aplicar el teorema del valor medio, de modo que

$$\gamma_i(u_0 + h, v_0) - \gamma_i(u_0, v_0) = \frac{d\gamma_i}{du}(s_i, v_0) \cdot h$$

con $s_i \in [u_0, u_0 + h]$, y utilizando la continuidad de las derivadas parciales de Γ podemos aproximar el valor de la derivada en el punto (s_i, v_0) por la derivada el el punto (u_0, v_0) , de modo que

$$\gamma_i(u_0 + h, v_0) - \gamma_i(u_0, v_0) \sim \frac{d\gamma_i}{du}(u_0, v_0) \cdot h$$

Análogamente,

$$\gamma_i(u_0,v_0+j)-\gamma_i(u_0,v_0)=\frac{d\gamma_i}{dv}(u_0,t_i)\cdot j\sim \frac{d\gamma_i}{dv}(u_0,v_0)\cdot j$$
 (con $t_i\in [v_o,v_o+j]$) y

$$a(\Gamma(R)) \sim \left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{d\gamma_1}{du}(u_0, v_0) \cdot h & \frac{d\gamma_2}{du}(u_0, v_0) \cdot h & \frac{d\gamma_3}{du}(u_0, v_0) \cdot h \\ \frac{d\gamma_1}{dv}(u_0, v_0) \cdot j & \frac{d\gamma_2}{dv}(u_0, v_0) \cdot j & \frac{d\gamma_3}{dv}(u_0, v_0) \cdot j \end{vmatrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{d\gamma_1}{du}(u_0, v_0) & \frac{d\gamma_2}{du}(u_0, v_0) & \frac{d\gamma_3}{du}(u_0, v_0) \\ \frac{d\gamma_1}{dv}(u_0, v_0) & \frac{d\gamma_2}{dv}(u_0, v_0) & \frac{d\gamma_3}{dv}(u_0, v_0) \end{vmatrix} \| \cdot |h| |j| =$$

$$= \left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{d\gamma_1}{du}(u_0, v_0) & \frac{d\gamma_2}{du}(u_0, v_0) & \frac{d\gamma_3}{du}(u_0, v_0) \\ \frac{d\gamma_1}{du}(u_0, v_0) & \frac{d\gamma_2}{dv}(u_0, v_0) & \frac{d\gamma_3}{du}(u_0, v_0) \end{vmatrix} \| \cdot a(R) =$$

$$= \left\| \frac{d\Gamma}{du}(u_0, v_0) \times \frac{d\Gamma}{dv}(u_0, v_0) \| \cdot a(R)$$

El área total de la superficie será entonces

$$a(S) = \sum_{R \in \mathfrak{R}} a(\Gamma(R)) = \sum_{R \in \mathfrak{R}} \|\frac{d\Gamma}{du}(u_R, v_R) \times \frac{d\Gamma}{dv}(u_R, v_R)\| \cdot a(R)$$

siendo cada (u_R, v_R) el vértice inferior izquierdo de R.

Así, el área de S es un número que está entre las sumas superior e inferior de Riemann de la función $\|\frac{d\Gamma}{du}(u,v) \times \frac{d\Gamma}{dv}(u,v)\|$, que es una función continua en T, y por tanto integrable. Si hacemos particiones de T cada vez más finas, estas sumas tienden a la integral, y se obtiene

$$a(S) = \int_T \left\| \frac{d\Gamma}{du}(u, v) \times \frac{d\Gamma}{dv}(u, v) \right\| d(u, v) = \int_T \left\| n_{\Gamma}(u, v) \right\| d(u, v)$$

 $(n_{\Gamma}(u,v))$ es el vector normal definido por Γ)

Esta será la fórmula que se utilice como definición de área de una superficie. Pero antes, una observación: aparentemente el cálculo del área de una superficie depende de la parametrización Γ que se utilice para representarla. Hay que ver que esto no es así, y que el resultado de la integral es independiente de la parametrización.

Proposición 4.1. Sea S una superficie regular y simple, y sean $\Gamma: T \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $y \Lambda: M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dos parametrizaciones de S. Entonces

$$\int_T \|\frac{d\Gamma}{du}(u,v) \times \frac{d\Gamma}{dv}(u,v)\|d(u,v) = \int_M \|\frac{d\Lambda}{ds}(s,t) \times \frac{d\Lambda}{dt}(s,t)\|d(s,t)$$

La demostración es inmediata utilizando el cambio de parámetro entre Γ y Λ como cambio de variable.

Definición 4.3 (Area de una Superficie).

Sea S una superficie regular y simple en \mathbb{R}^3 . Se define el área de S como

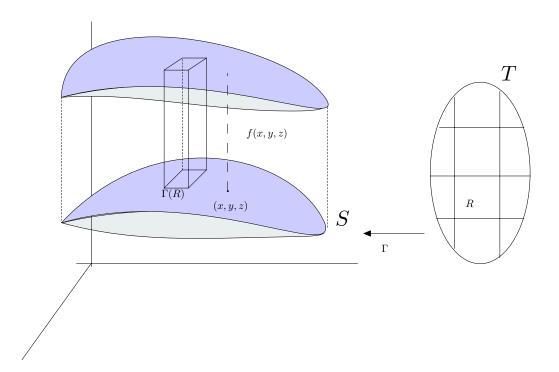
$$a(S) = \int_{T} \left\| \frac{d\Gamma}{du}(u, v) \times \frac{d\Gamma}{dv}(u, v) \right\| d(u, v)$$

donde $\Gamma: T \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización cualquiera de S.

Si S es una superficie regular a trozos, el área de S es la suma de las áreas de cada trozo regular.

4.4. Integrales de Superficie de Campos Escalares

El primer tipo de integrales de superficie aparece en el estudio de funciones escalares definidas sobre los puntos de una superficie, como por ejemplo la temperatura sobre la superficie de la Tierra. Para llegar a la construcción de la integral, vamos a considerar un ejemplo más sencillo: consideramos una superficie regular y simple, y representamos una función $f:S\longrightarrow \mathbb{R}$ levantando cada punto (x,y,z) de S una distancia igual a f(x,y,z), de manera que obtenemos una nueva superficie "paralela a S". Vamos a tratar de calcular el volumen encerrado entre las dos superficies, con un procedimiento similar al que se utilizó para calcular el volumen encerrado entre la gráfica de una función de dos variables y el plano horizontal mediante la integral de Riemann.



Consideramos $\Gamma: T \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización de S, y obtenemos una partición de S haciendo una partición de T.

Sobre cada trozo $\Gamma(R)$ obtenido en la superficie, calculamos el supremo y el ínfimo de f

$$M_{\Gamma(R)}(f) = \sup\{f(x), x \in \Gamma(R)\} = \sup\{f(\Gamma(u, v)), (u, v) \in R\} = M_R(f \circ \Gamma)$$

$$m_{\Gamma(R)}(f)=\inf\{f(x),\;x\in\Gamma(R)\}=\inf\{f(\Gamma(u,v)),\;(u,v)\in R\}=m_R(f\circ\Gamma)$$

Y calculamos las sumas superior e inferior como la suma de los volúmenes de los prismas de base $\Gamma(R)$ y alturas $M_{\Gamma(R)}$ y $m_{\Gamma(R)}$ respectivamente

$$U(f,\Gamma,P) = \sum_{R \in \mathfrak{R}} M_{\Gamma(R)}(f) a(\Gamma(R)) = \sum_{R \in \mathfrak{R}} M_R(f \circ \Gamma) \int_R \|n_{\Gamma}(u,v)\| d(u,v)$$

у

$$L(f,\Gamma,P) = \sum_{R \in \mathfrak{R}} m_{\Gamma(R)}(f) a(\Gamma(R)) = \sum_{R \in \mathfrak{R}} m_R(f \circ \Gamma) \int_R \|n_{\Gamma}(u,v)\| d(u,v)$$

utilizando la fórmula que hemos visto antes para calcular el área de $\Gamma(R)$.

Entonces

$$L(f, \Gamma, P) \leq \sum_{R \in \mathfrak{R}} \int_{R} f \circ \Gamma(u, v) \|n_{\gamma}(u, v)\| d(u, v) =$$

$$= \int_{T} f \circ \Gamma(u, v) \|n_{\gamma}(u, v)\| d(u, v) \leq L(f, \Gamma, P)$$

Si hacemos las particiones cada vez más finas, estas sumas deben tender al volumen que buscamos entre las dos superficies, y obtenemos lo que llamamos la integral de f sobre S como

$$\int_{S} f = \int_{T} f \circ \Gamma(u, v) \|n_{\Gamma}(u, v)\| d(u, v)$$

Aparentemente el resultado de la integral dependerá de la parametrización Γ que utilicemos para describir la superficie S, sin embargo esto no es así.

Proposición 4.2. Sea S una superficie regular y simple en \mathbb{R}^3 , y sean $\Gamma: T \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $y \Lambda: M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dos parametrizaciones de S. Sea $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar continuo en un abierto U que contenga a S. Entonces

$$\int_T f \circ \Gamma(u, v) \|n_{\Gamma}(u, v)\| d(u, v) = \int_M f \circ \Lambda(s, t) \|n_{\Lambda}(s, t)\| d(s, t)$$

La demostración es consecuencia inmediata de la equivalencia de las parametrizaciones y el teorema de cambio de variable.

Definición 4.4 (Integral de Superficie de Campos Escalares).

Sea S una superficie regular y simple en \mathbb{R}^3 , y sea $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ un campo escalar continuo en un abierto U que contenga a S. Se define la integral de f sobre S como

$$\int_{S} f = \int_{T} f \circ \Gamma(u, v) \|n_{\Gamma}(u, v)\| d(u, v)$$

donde $\Gamma: T \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización cualquiera de S

Si S es una superficie regular a trozos, se define la integral de f sobre S como la suma de las integrales en cada trozo regular.

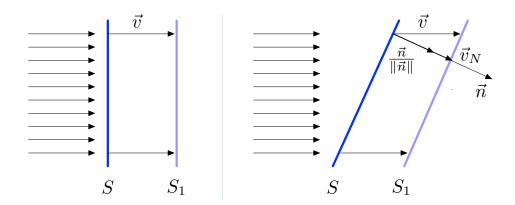
4.5. Integrales de Superficie de Campos Vectoriales

Al igual que utilizamos el modelo de cálculo del trabajo generado por un campo de fuerzas para interpretar el significado de la integral de línea de campos vectoriales, vamos a utilizar ahora la dinámica de fluidos para interpretar la integral de superficie de campos vectoriales.

Si tenemos un fluido, como un líquido o un gas, en movimiento con velocidad $\vec{v}(x,y,z)$ en cada punto (x,y,z), e interponemos una superficie S, se llama flujo a través de S a la cantidad de fluido que la atraviesa por unidad de tiempo.

Para calcular el flujo, consideremos primero el ejemplo más sencillo, en el que la velocidad del fluido es constantemente \vec{v} (misma dirección, sentido y módulo), e interponemos una superficie plana y perpendicular a \vec{v} : el flujo por unidad de tiempo será igual al volumen encerrado entre la superficie S y la superficie donde se encuentran las partículas del fluido un segundo después, S_1 , que será paralela a S a distancia $\|\vec{v}\|$: es decir, el flujo es igual al producto de la norma de \vec{v} por el área de S

$$\Phi = \|\vec{v}\| \cdot a(S)$$



Si S es una superficie plana, pero no es perpendicular a \vec{v} , entonces el volumen encerrado entre S y S_1 será igual al producto de la norma del vector $\vec{v_N}$ (componente de \vec{v} en la dirección perpendicular a S) por el área de S. Si \vec{n} es un vector normal (perpendicular) a S,

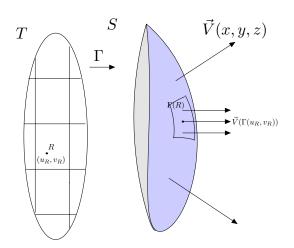
$$\Phi = \|\vec{v_N}\|a(S) = | < \vec{v}, \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} > |a(S)|$$

En física de interpreta de forma un poco más abstracta el flujo, considerando que tiene signo positivo o negativo según el sentido en que atraviese la superficie

$$\Phi = <\vec{v}, \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} > a(S)$$

tiene signo positivo si el ángulo entre \vec{v} y \vec{n} es menor que $\pi/2$, y signo negativo si es mayor que $\pi/2$

En el caso más general, la velocidad de cada partícula de fluido será una función continua $\vec{V}(x,y,z)$, no necesariamente constante, y la superficie no será necesariamente plana ni perpendicular a al movimiento. La idea es que sin embargo, si dividimos la superficie en regiones suficientemente pequeñas, podemos suponer que la superficie es plana y la velocidad constante en ellas, gracias a la continuidad de \vec{V} y de las parametrizaciones de las superficies.



Consideramos entonces una parametrización $\Gamma: T \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de S, y hacemos una partición P de T. Para cada rectángulo $R \in \mathfrak{R}_P$, calculamos el flujo que atraviesa $\Gamma(R)$ suponiendo que $\vec{V}(x,y,z) = \vec{V}(\Gamma(u_R,v_R))$ es constante $((u_R,v_R)$ es un punto cualquiera de R), y que $\Gamma(R)$ es una superficie plana

$$\Phi_R = \langle \vec{V}(\Gamma(u_R, v_R)), \frac{n_{\Gamma}(u_R, v_R)}{\|n_{\Gamma}(u_R, v_R)\|} \rangle a(\Gamma(R))$$

Aplicando la fórmula del área de

$$\Gamma(R) = \int_{R} \|n_{\Gamma}(u, v)\| d(u, v) \sim \|n_{\Gamma}(u_R, v_R)\| a(R)$$

se tiene

$$\Phi_R = <\vec{V}(\Gamma(u_R, v_R)), n_{\Gamma}(u_R, v_R) > a(R)$$

y el flujo total a través de la superficie

$$\Phi \sim \sum_{R \in \mathfrak{R}_P} \Phi_R = \sum_{R \in \mathfrak{R}_P} \langle \vec{V}(\Gamma(u_R, v_R)), n_{\Gamma}(u_R, v_R) > a(R)$$

Haciendo las particiones cada vez más finas, esta suma tiende a la integral

$$\Phi = \int_T \langle \vec{V}(\Gamma(u, v)), n_{\Gamma}(u, v) \rangle d(u, v)$$

Esta fórmula es la que se utiliza como definición de la integral de \vec{V} a través de S, aunque primero hay que observar en qué medida puede depender de la parametrización Γ que hayamos escogido para S

Proposición 4.3. Sea S una superficie regular y simple en \mathbb{R}^3 , y sean $\Gamma: T \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y $\Lambda: M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dos parametrizaciones de S. Sea $F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo vectorial continuo en un abierto que contenga a S. Si Γ y Λ definen la misma orientación en S entonces

$$\int_T \langle F \circ \Gamma(u, v), n_{\Gamma}(u, v) \rangle d(u, v) = \int_M \langle F \circ \Lambda(s, t), n_{\Lambda}(s, t) \rangle d(s, t)$$

Y si Γ y Λ definen orientaciones opuestas, entonces

$$\int_T < F \circ \Gamma(u,v), n_{\Gamma}(u,v) > d(u,v) = -\int_M < F \circ \Lambda(s,t), n_{\Lambda}(s,t) > d(s,t)$$

La demostración es consecuencia de la equivalencia de las parametrizaciones y el teorema de cambio de variable.

Definición 4.5 (Integral de Superficie de Campos Vectoriales). Sea S^+ una superficie regular y simple orientada en \mathbb{R}^3 , y $F:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo en un abierto que contenga a S. Se define la integral de F a través de S como

$$\int_{S^+} F = \int_T \langle F \circ \Gamma(u, v), n_{\Gamma}(u, v) \rangle d(u, v)$$

siendo $\Gamma: T \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización cualquiera de S^+

Si S^+ es una superficie regular a trozos y orientada, se define la integral como la suma de las integrales en cada trozo regular, con la orientación definida por S^+ en cada uno.

Observaciones:

Es bastante habitual escribir $\Gamma(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$, y el vector normal

$$n_{\Gamma}(u,v) = \left(\frac{dy}{du}\frac{dz}{dv} - \frac{dy}{dv}\frac{dz}{du}, \frac{dz}{du}\frac{dx}{dv} - \frac{dz}{dv}\frac{dx}{du}, \frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right) =$$

$$= (dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy)$$

utilizando una notación algebraica ($dx \wedge dy$ se lee "producto exterior" de dx y dy), y la integral se escribe

$$\int_{S^+} F = \int_{S^+} f_1 \, dy \wedge dz + f_2 \, dz \wedge dx + f_3 \, dx \wedge dy$$

4.6. Teorema de Stokes

Un campo vectorial $F:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ de clase C^1 como el que expresa la velocidad de las partículas de un fluido en el espacio tiene asociado otro campo llamado "rotacional de F", que mide de alguna manera el efecto de rotación que el campo produce en el movimiento. Este campo se define por la expresión

Rotacional de un campo vectorial

$$rot(F)(x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{df_3}{dy} - \frac{df_2}{dz}, \frac{df_1}{dz} - \frac{df_3}{dx}, \frac{df_2}{dx} - \frac{df_1}{dy}\right)_{(x,y,z)}$$

Por la similitud con las expresiones de cálculo utilizadas en geometría, en algunos textos se escribe el rotacional como el producto vectorial del gradiente por F

$$rotF = \nabla \times F$$

El Teorema de Stokes establece una relación entre la integral de superficie del rotacional de un campo vectorial y la integral del campo sobre el borde de la superficie:

Teorema 4.4 (Teorema de Stokes).

Sea S^+ una superficie regular y simple orientada, y sea $\Gamma: T \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización de S^+ , que sea de clase C^2 . Sea $F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 en un abierto que contenga a S. Entonces

$$\int_{b(S)^+} F = \int_{S^+} rot(F)$$

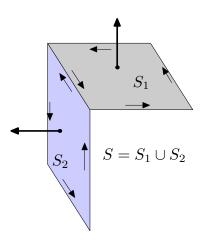
donde $b(S)^+$ tiene la orientación que resulta de aplicar Γ a la frontera de T, y $Fr(T)^+$ se orienta en sentido anti-horario (dejando la región T a la izquierda)

Observaciones:

1- Para la demostración del teorema se necesita una parametrización de clase C^2 de la superficie. Sin embargo, una vez demostrado, como todas las parametrizaciones de S^+ y de $b(S)^+$ son equivalentes, las integrales no dependen de las parametrizaciones, luego la fórmula es válida con cualquier parametrización. Es decir, es necesario que S admita una parametrización de clase C^2 , pero entonces el resultado es cierto con cualquier parametrización.

2- El teorema se demuestra por comodidad para superficies regulares y simples, pero también se verifica en superficies regulares a trozos orientables, que admitan una parametrización de clase C^2 en cada trozo regular, ya que las aristas comunes a dos trozos aparecen orientadas en sentidos opuestos en cada uno, con lo que

$$\int_{b(S)^{+}} F = \sum_{i=1}^{k} \int_{b(S_{i})^{+}} F = \sum_{i=1}^{k} \int_{S_{i}^{+}} rotF = \int_{S^{+}} rotF$$



4.7. Teorema de Gauss

Asociado a un campo vectorial de clase C^1 hay también un campo escalar, que en el caso de la dinámica de fluidos mide la expansión o la contracción del fluido, llamado "divergencia de F", y que se define mediante la expresión

Divergencia de un campo vectorial

$$div F(x, y, z) = \frac{df_1}{dx}(x, y, z) + \frac{df_2}{dy}(x, y, z) + \frac{df_3}{dz}(x, y, z)$$

También en este caso, se utiliza el parecido con la expresión de un producto escalar, y en algunos textos se escribe

$$divF(x, y, z) = \langle \nabla, F \rangle$$

El teorema de Gauss establece una relación entre la integral sobre una superficie cerrada de un campo vectorial, y la integral de Riemann en el cuerpo encerrado por la superficie de la divergencia del campo, que desde el punto de vista de la dinámica de fluidos establecería una relación entre la cantidad de fluido que atraviesa una superficie, y la medida en que el fluido se expande. Desde el punto de vista matemático, el Teorema de Gauss es una generalización a dimensión tres del Teorema de Green que hemos demostrado para integrales de linea en regiones elementales del plano.

Definición 4.6 (Regiones elementales en \mathbb{R}^3). Un conjunto V contenido en \mathbb{R}^3 se llama región elemental si existen regiones elementales del plano T_1 , T_2 , T_3 y funciones de clase C^1 , p_1 , q_1 , p_2 , q_2 , p_3 , q_3 , tales que

$$V = \{(x, y, z) : (x, y) \in T_1, p_1(x, y) \le z \le q_1(x, y)\} =$$

$$= \{(x, y, z) : (y, z) \in T_2, p_2(y, z) \le x \le q_2(y, z)\} =$$

$$= \{(x, y, z) : (x, z) \in T_3, p_3(x, z) \le y \le q_3(x, z)\}$$

La frontera de una región elemental es una superficie simple cerrada regular a trozos, orientable, y el conjunto V es medible Jordan ya que es acotado y su frontera tiene medida cero.

Teorema 4.5 (Teorema de Gauss, o de la Divergencia).

Sea V una región elemental del \mathbb{R}^3 , y sea $F:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 en un abierto que contenga a V. Entonces

$$\int_{Fr(V)^{+}} F = \int_{V} div F(x, y, z) d(x, y, z)$$

donde $Fr(V)^+$ se orienta de modo que el vector normal apunte hacia el exterior de V.

Observaciones:

1- Es fácil comprobar que la divergencia del rotacional de un campo vectorial de clase \mathbb{C}^2 es cero. Aplicando entonces el Teorema de Gauss, la integral sobre la frontera de una región elemental (que es una superficie cerrada simple regular a trozos y orientable) de un rotacional es cero.

Esta propiedad de los rotacionales generaliza el concepto de los campos conservativos que estudiamos en el tema de las integrales de línea: en aquel caso vimos que la integral a lo largo de una curva cerrada de un campo conservativo es cero.

2- Como en el caso del Teorema de Green, el Teorema de Gauss se puede utilizar para calcular volúmenes de regiones elementales del espacio, haciendo la integral sobre la frontera de un campo de clase C^1 cuya divergencia valga uno.