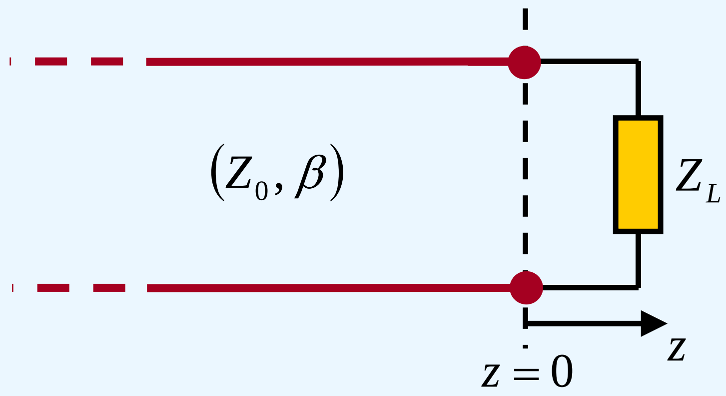
Tema 2. Líneas de Transmisión Terminadas



Bibliografía Básica para este Tema:

[1] R. Neri, "Líneas de Transmisión", McGraw-Hill, México, 1999.

[2] W. H. Hayt Jr. and J. A. Buck , "Engineering Electromagnetics", 7ª Ed, McGraw-Hill International Edition, 2006.

[3] D. M. Pozar, "Microwave Engineering" , 3ª Ed, Wiley, 2005.

[4] F. T. Ulaby et. al "Fundamentals od Applied Electromagnetics" , 6ª Ed, Pearson, 2010.

Neri → Apartados 2.9

Hayt → Apartados 11.9

Pozar → Apartados 2.3, 2.6

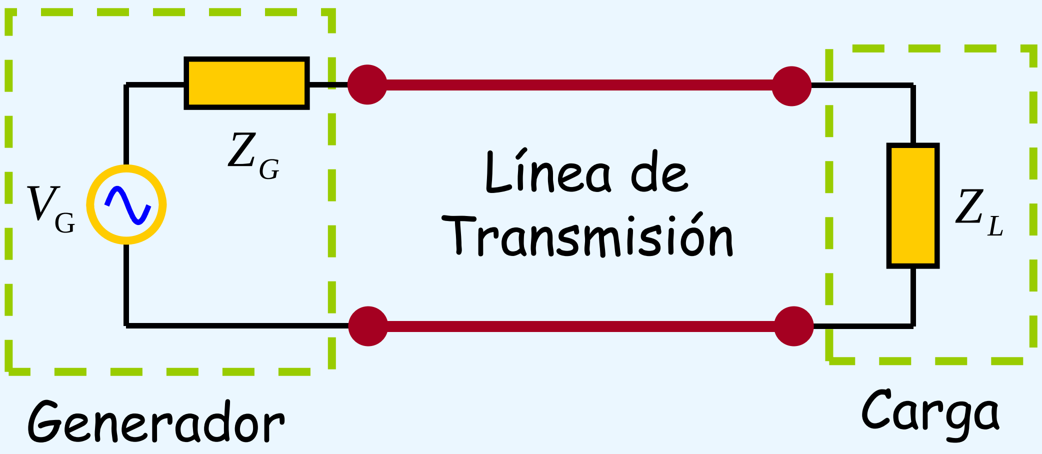
Ulaby → Apartados 2.7, 2.8, 2.12

2.1 Introducción

- En el tema anterior estudiamos líneas de transmisión de longitud infinita, lo cuál obviamente no se encuentra en la práctica.

- El objetivo de este tema es ampliar lo visto en el tema anterior considerando líneas de transmisión terminadas

- En general consideraremos un generador modelado mediante su equivalente Thevenin y una impedancia de carga unidos por una longitud finita de línea de transmisión.

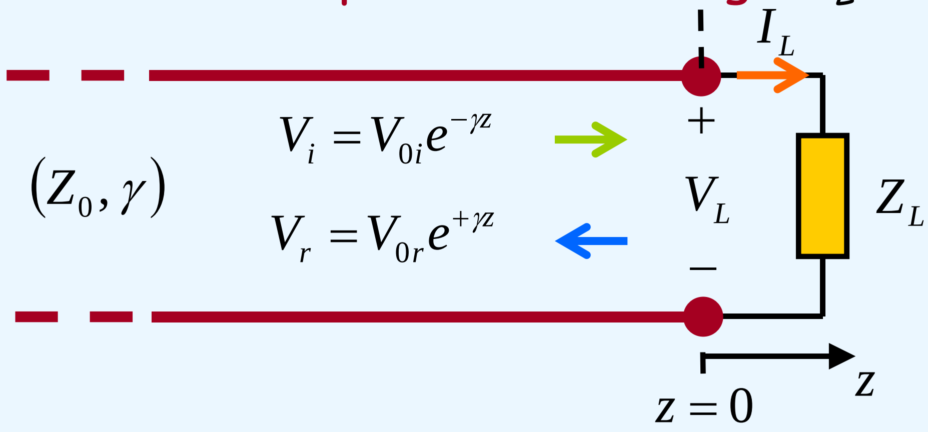


2.2 Reflexión (Pozar 2.3)-(Hayt 11.9)

- Consideramos una línea terminada en una impedancia de carga Z_L:

$$V(z) = V_{0i}e^{-\gamma z} + V_{0r}e^{+\gamma z}$$

$$I(z) = I_{0i}e^{-\gamma z} + I_{0r}e^{+\gamma z}$$



- La tensión y la corriente en los terminales de la carga (z = 0) vale:

$$V_L = V_{0i} + V_{0r}$$

$$I_L = I_{0i} + I_{0r} = \frac{1}{Z_0}\left(V_{0i} - V_{0r}\right)$$

- Además $V_L = Z_L I_L$

$$\left.\begin{array}{l} I_L = \frac{1}{Z_0}\left(V_{0i} - V_{0r}\right) \\ V_L = Z_L I_L \end{array}\right\} \quad V_L = \frac{Z_L}{Z_0}\left(V_{0i} - V_{0r}\right)$$

- Igualando las dos expresiones para V_L:

$$\left.\begin{array}{l} V_L = V_{0i} + V_{0r} \\ V_L = \frac{Z_L}{Z_0}\left(V_{0i} - V_{0r}\right) \end{array}\right\} \quad V_{0i} + V_{0r} = \frac{Z_L}{Z_0}\left(V_{0i} - V_{0r}\right)$$

2.2 Reflexión

- Coeficiente de reflexión en la carga:

- Definimos el coeficiente de reflexión en la carga como $\Gamma_L \equiv \dfrac{V_{0r}}{V_{0i}}$

- Dividiendo la expresión inicial por V_{0i}, resulta

$$\boxed{\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}}$$

- Teniendo en cuenta que $V_{0r} = \Gamma_L V_{0i}$

- Podemos expresar la tensión y corriente totales en la línea como:

$$V(z) = V_{0i}\left(e^{-\gamma z} + \Gamma_L e^{+\gamma z}\right) \qquad I(z) = \frac{V_{0i}}{Z_0}\left(e^{-\gamma z} - \Gamma_L e^{+\gamma z}\right)$$

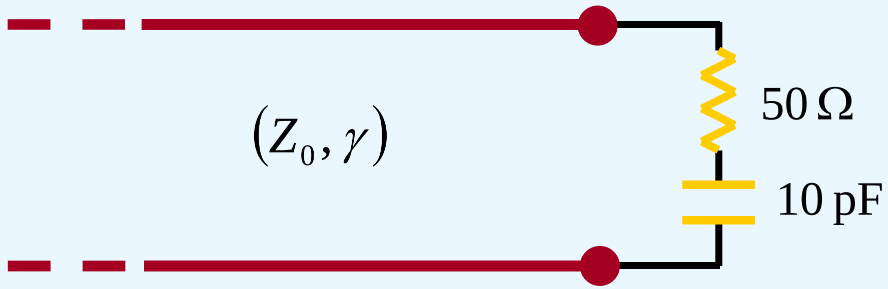
- Cuando $\Gamma_L = 0$ no hay onda reflejada. Esta situación se da cuando $Z_L = Z_0$ y se dice que la línea está terminada en una carga adaptada.

- El general, el coeficiente de reflexión es una cantidad compleja.

- Ejemplo 1: Una línea de transmisión de impedancia característica 100 Ohm está terminada en una impedancia de carga formada por una resistencia de 50 Ohm en serie con una capacidad de 10 pF. Calcular el coeficiente de reflexión en la carga a la frecuencia de 100 MHz.

Ulaby 6ª Ej. 2-3

Solución:



- La impedancia de carga vale

$$Z_L = Z_R + Z_c = R + \frac{1}{j\omega C} = 50 - \frac{j}{2\pi \times 10^8 \times 10^{-11}} = (50 - j159.2)\,\Omega$$

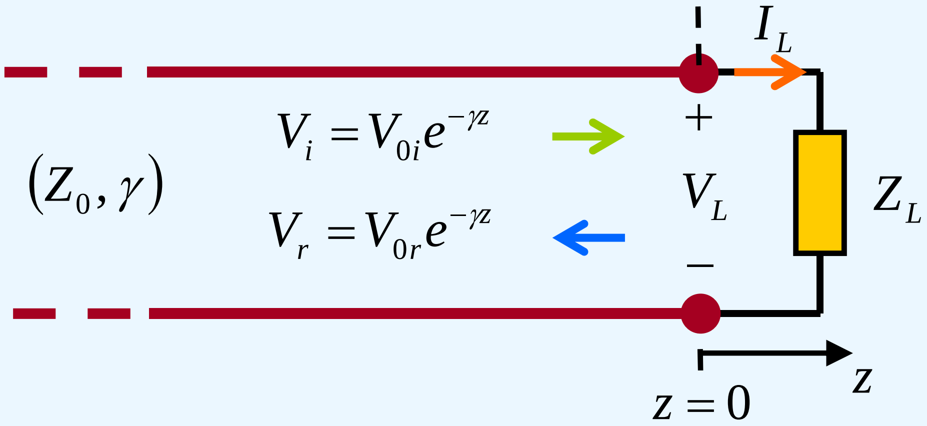
- El coef de refl. resulta

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{50 - j159.2 - 100}{50 - j159.2 + 100} = \frac{-50 - j159.2}{150 - j159.2} = 0.37 \text{ - } j0.67 = 0.76 e^{-j60.7^\circ}$$

2.2 Reflexión

- <u>Conservación de la potencia</u>:

- En general, cuando $Z_L \neq Z_0$ una parte de la potencia incidente se refleja y otra parte es transmitida (disipada) a la carga.



- Según hemos visto la tensión y la corriente en la línea son:

$$V(z) = V_{0i}\left(e^{-\gamma z} + \Gamma_L e^{+\gamma z}\right)$$

$$I(z) = \frac{V_{0i}}{Z_0}\left(e^{-\gamma z} - \Gamma_L e^{+\gamma z}\right)$$

2.2 Reflexión

- Como vimos en el tema anterior, el valor medio de la potencia incidente es

$$P_i(z) = \frac{1}{2}\Re\left[V_i(z) I_i^*(z)\right] = \frac{|V_{0i}|^2}{2|Z_0|^2} R_0 e^{-2\alpha z}$$

- La potencia reflejada resulta

$$P_r(z) = \frac{1}{2}\Re\left[V_r(z) I_r^*(z)\right] = \frac{|V_{0i}|^2 |\Gamma_L|^2}{2|Z_0|^2} R_0 e^{+2\alpha z}$$

- En los terminales de la carga (**z** = 0):

$$\boxed{P_r = |\Gamma_L|^2 P_i}$$

- La potencia transmitida es $P_t = P_i - P_r$, luego

$$\boxed{P_t = \left(1 - |\Gamma_L|^2\right) P_i}$$

- Ejemplo 2: Una línea de transmisión de impedancia característica 50 Ohm y sin pérdidas esta terminada en una impedancia de carga $Z_L = (50 - j75)\Omega$. Si la potencia incidente vale 100 mW, determinar la potencia disipada en la carga.

Hayt 7ª Ej. 11-5

Solución:

- La potencia disipada viene dada por

$$P_t = \left(1 - |\Gamma_L|^2\right) P_i$$

- El coef. de refl. en la carga vale

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{50 - j75 - 50}{50 - j75 + 50} = 0.36 - j0.48$$

- de donde $|\Gamma_L|^2 = (0.36)^2 + (0.48)^2 = 0.36$

- La potencia disipada resulta

$$P_t = \left(1 - |\Gamma_L|^2\right) P_i = (1 - 0.36) \times 100 \times 10^{-3} = 64\,\mathrm{mW}$$

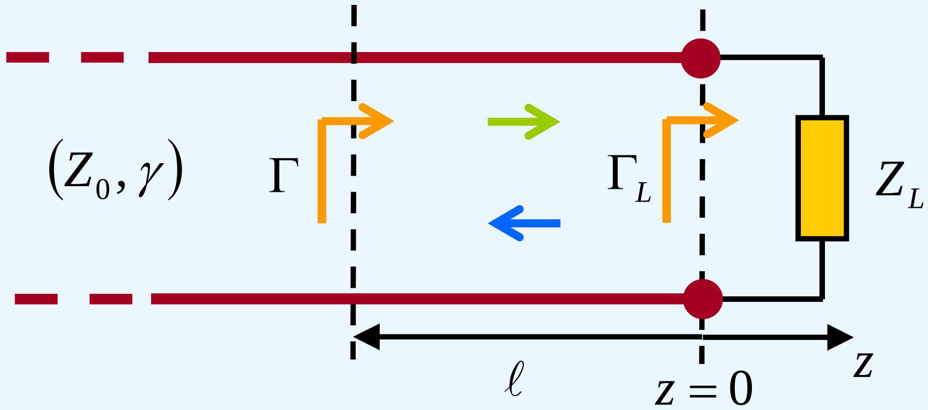
2.2 Reflexión

- <u>Coeficiente de reflexión en una posición arbitraria:</u>

- Hemos definido el coef. de refl. en los terminales de la carga.
- Podemos generalizar esta definición para cualquier posición de la línea (z = -l)

$$V_i(z) = V_{0i}e^{-\gamma z}$$

$$V_r(z) = V_{0r}e^{+\gamma z}$$



- El coef. de refl. en $z = -\ell$ vale

$$\Gamma(\ell) \equiv \frac{V_r(\ell)}{V_i(\ell)} = \frac{V_{0r}e^{-\gamma\ell}}{V_{0i}e^{+\gamma\ell}} = \frac{V_{0r}}{V_{0i}}e^{-2\gamma\ell}$$

- Entonces

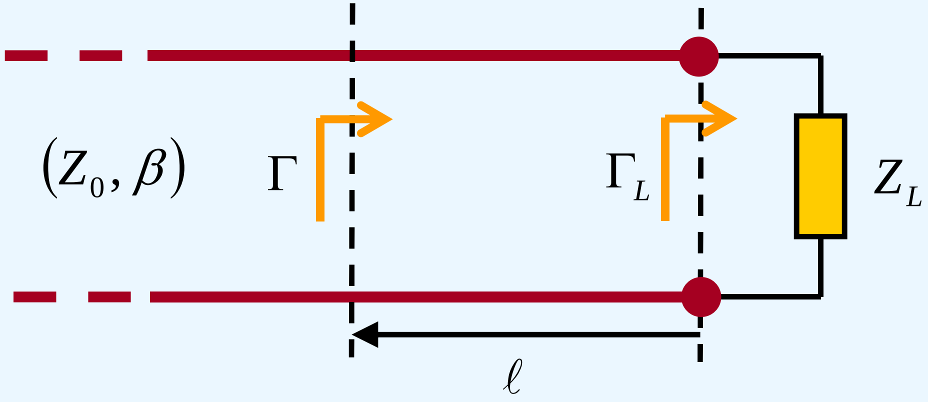
$$\boxed{\Gamma(\ell) = \Gamma_L e^{-2\gamma\ell}}$$

- Para una línea sin pérdidas, el coef. de refl. es una función periódica de periodo $\lambda/2$

- Ejemplo 3: Una línea de transmisión sin pérdidas de impedancia característica 50 Ohm está terminada en una impedancia de carga de valor 100 Ohm. Determinar el coeficiente de reflexión a una distancia 0.1λ de la carga.

Solución:

- Los datos del problema son:



$$Z_0 = 50\,\Omega \qquad Z_L = 100\,\Omega$$

$$\ell = 0.1\lambda$$

$$\gamma = j\beta, \text{ con } \beta \in \mathrm{R}$$

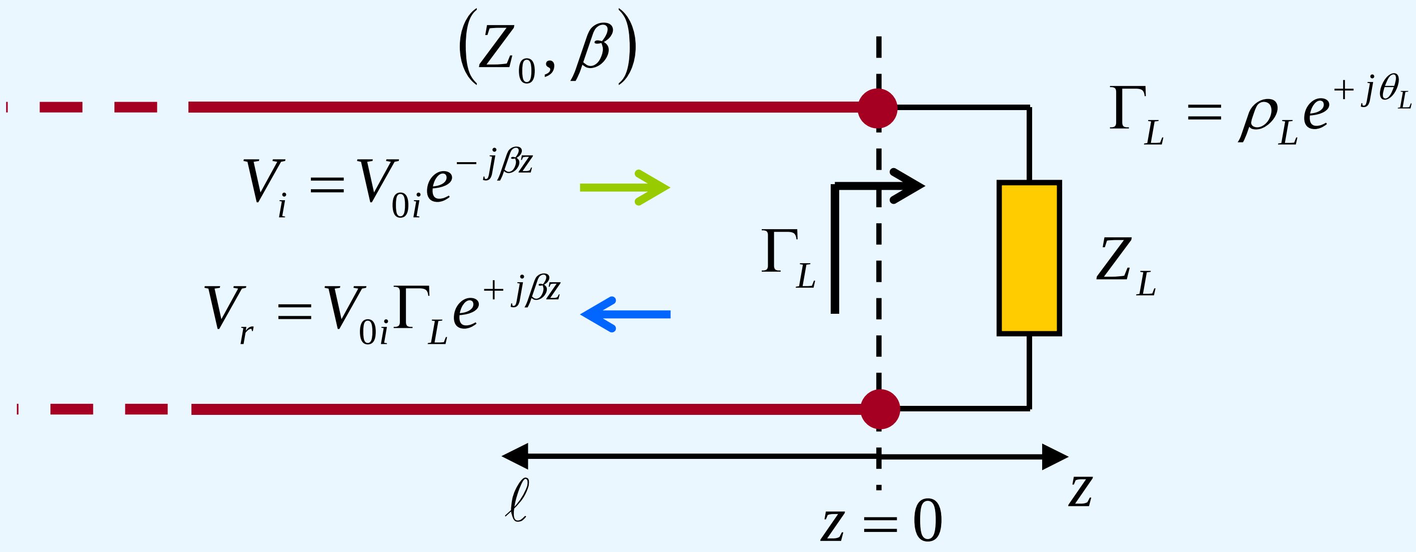
- Según hemos visto, el coef. de refl. a una distancia ℓ vale: $\Gamma(\ell) = \Gamma_L e^{-2\gamma\ell}$

- donde: $$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{100-50}{100+50} = \frac{1}{3} \qquad \gamma\ell = j\beta\ell = j\frac{2\pi}{\lambda}0.1\lambda = j0.2\pi$$

- luego $$\Gamma = \Gamma_L e^{-2\gamma\ell} = \frac{1}{3}e^{-j0.4\pi} = \frac{1}{3}e^{-j72^{\circ}}$$

2.3 Ondas estacionarias (Neri 2.9)

- Consideramos una línea sin pérdidas terminada en una impedancia Z_L:



- La tensión total en la línea es el resultado de la interferencia (suma) de la onda incidente con la reflejada:

$$V(z) = V_i + V_r \qquad \Rightarrow \qquad V(z) = V_{0i}\left(e^{-j\beta z} + \Gamma_L e^{+j\beta z}\right)$$

- Como consecuencia de la interferencia se produce una onda estacionaria. Para estudiar sus propiedades debemos obtener $|V(z)|$

2.3 Ondas estacionarias

$$V(z) = V_{0i}\left(e^{-j\beta z} + \Gamma_L e^{+j\beta z}\right) \quad \Rightarrow \quad |V(z)| = \left|V_{0i}e^{-j\beta z}\right|\left|1+\rho_L e^{+j(2\beta z+\theta_L)}\right|$$

- Teniendo en cuenta que

$$|e^{-j\beta z}| = 1 \quad \text{y} \quad e^{+j(2\beta z+\theta_L)} = \cos(2\beta z+\theta_L) + j\sin(2\beta z+\theta_L)$$

- Resulta $|V(z)| = |V_{0i}|\left[(1+\rho_L\cos(2\beta z+\theta_L))^2 + \rho_L^2\sin^2(2\beta z+\theta_L)\right]^{\frac{1}{2}}$

- Operando

$$|V(z)| = |V_{0i}|\left[1+2\rho_L\cos(2\beta z+\theta_L)+\rho_L^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

- Haciendo en cambio $z = -\ell$

$$\boxed{|V(\ell)| = |V_{0i}|\left[1+2\rho_L\cos(2\beta\ell-\theta_L)+\rho_L^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

- La función |V(z)| (o |V(l)|) se denomina <u>patrón de onda estacionaria</u> de tensión.

2.3 Ondas estacionarias

- <u>Propiedades del patrón de onda estacionaria</u>

- |V(z)| es una función periódica de periodo $\lambda/2$ ya que

$$\cos(2\beta z+\theta_L)=\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda/2}z+\theta_L\right)$$

- Los máximos de tensión ocurren cuando $\cos(2\beta z+\theta_L)=+1$ y valen:

$$\left|V(z)\right|_{\max}=\left|V_{0i}\right|(1+\rho_L)$$

- Los mínimos de tensión ocurren cuando $\cos(2\beta z+\theta_L)=-1$ y valen:

$$\left|V(z)\right|_{\max}=\left|V_{0i}\right|(1-\rho_L)$$

- La distancia entre 2 máximos (o 2 mínimos) consecutivos es $\lambda/2$

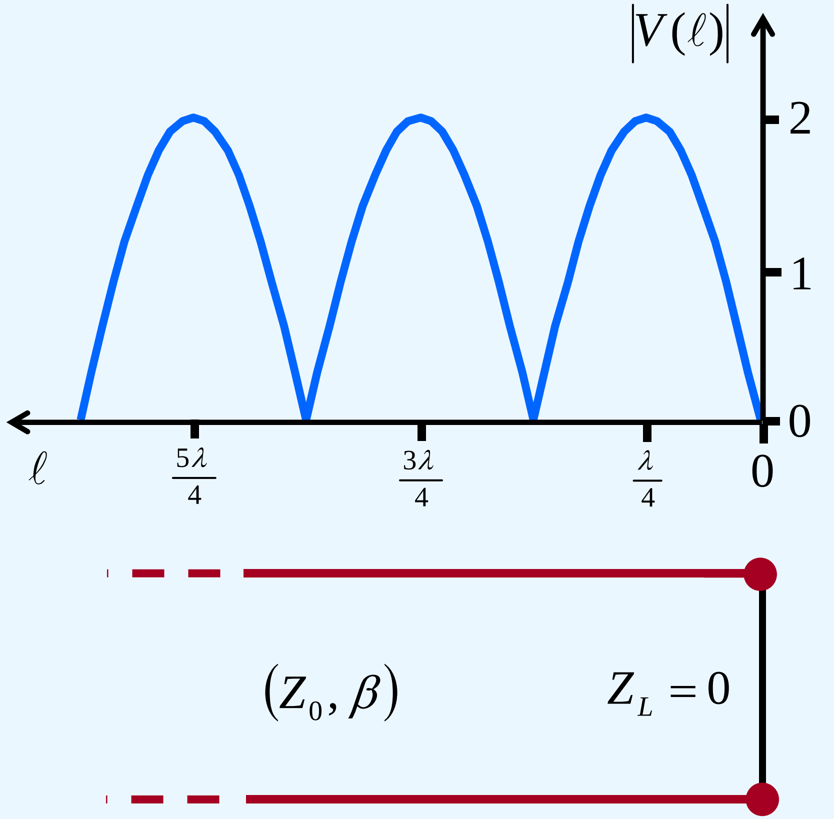
- La distancia entre un máximo y un mínimo consecutivos es $\lambda/4$

- Veamos algunos casos:

2.3 Ondas estacionarias

$$|V_{0i}| = 1\,\mathrm{V}$$

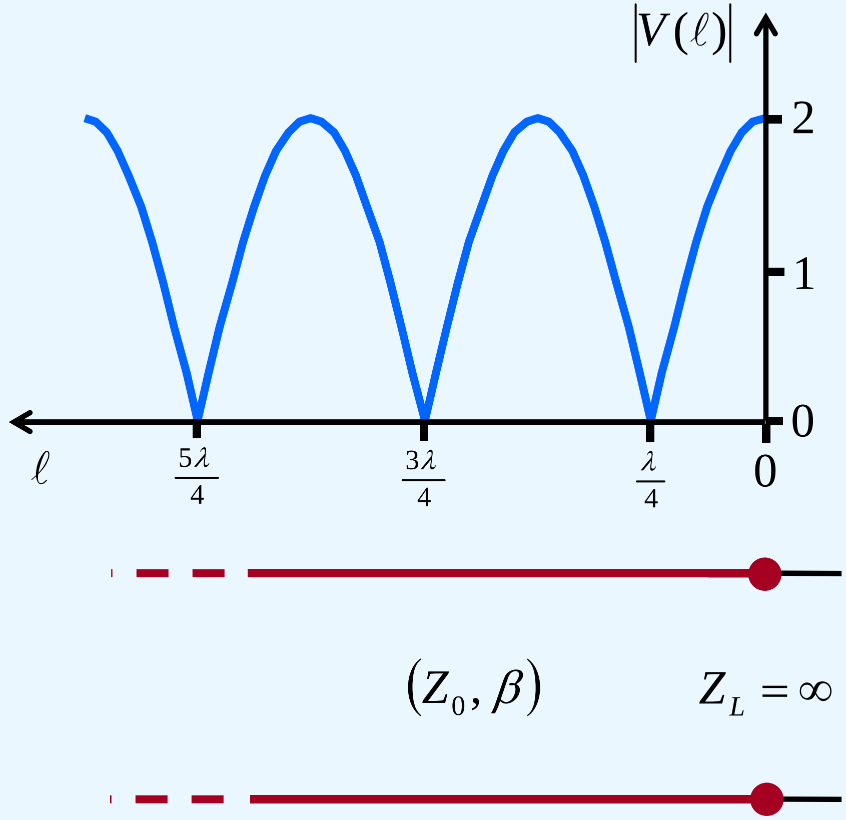
<u>Cortocircuito</u>



$$\Gamma_L = -1$$

$$V_{\max} = 2\,\mathrm{V} \quad V_{\min} = 0$$

<u>Circuito Abierto</u>

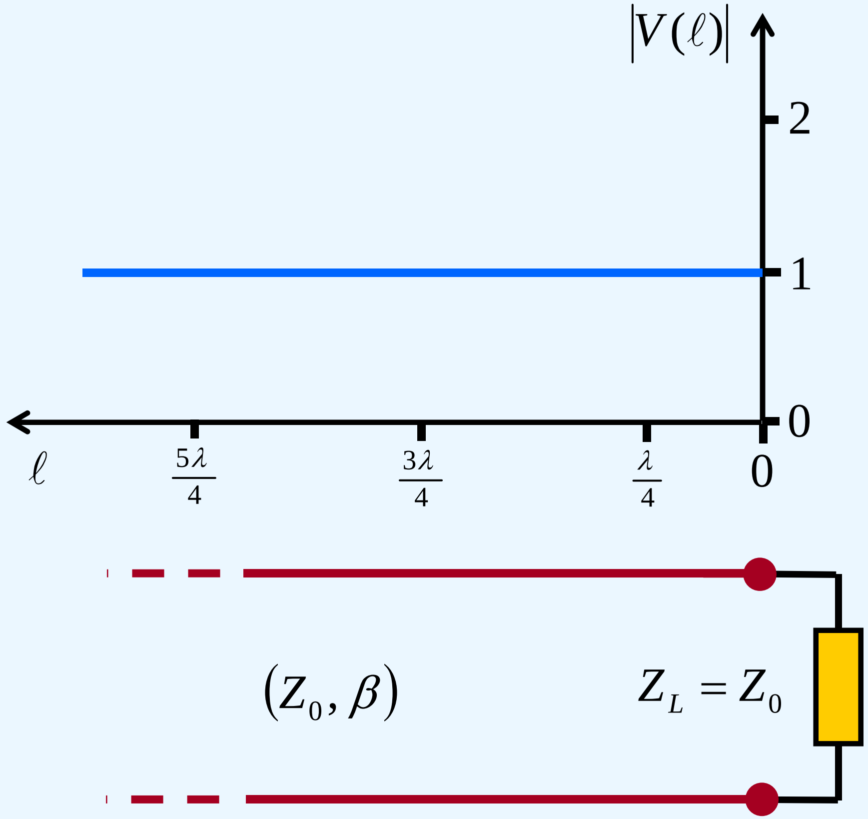


$$\Gamma_L = +1$$

$$V_{\max} = 2\,\mathrm{V} \quad V_{\min} = 0$$

2.3 Ondas estacionarias

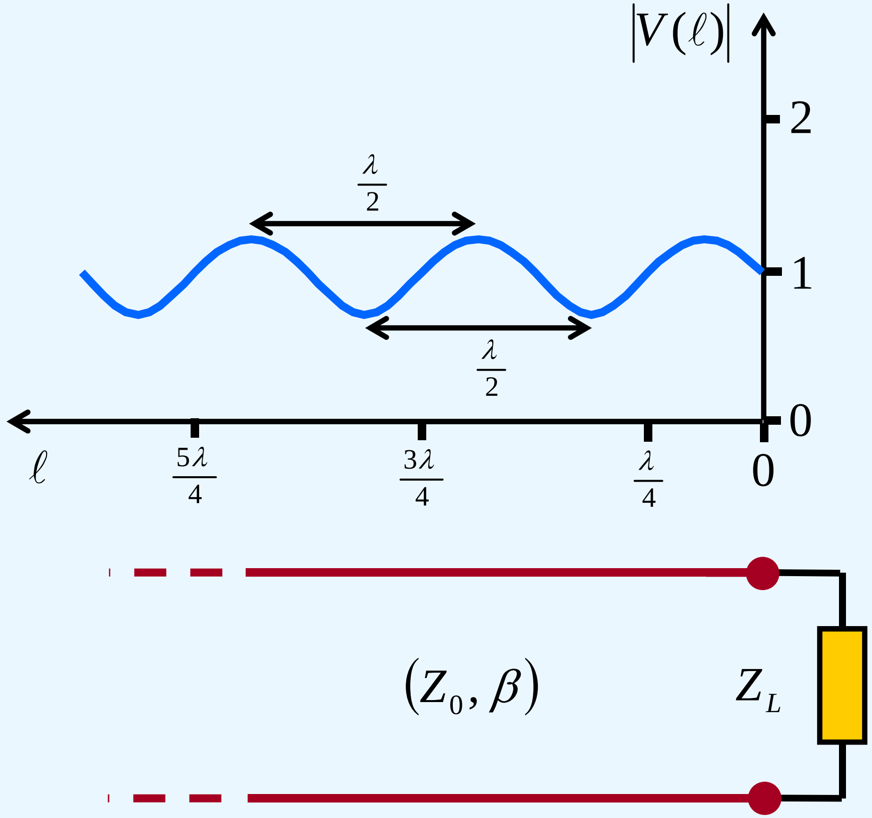
Carga Adaptada



$$\Gamma_L = 0$$

$$V_{\max} = 1\,\text{V} \quad V_{\min} = 1\,\text{V}$$

Carga Arbitraria



- Ejemplo 4: Considérese una línea de transmisión sin pérdidas terminada en una carga. El coeficiente de reflexión en el plano de la carga vale $\Gamma_L = 0.5e^{-j60^\circ}$ y la longitud de onda $\lambda = 24\,\mathrm{cm}$. Determinar la posición del mínimo y el máximo en tensión más cercanos a la carga.

Ulaby 6ª Exercise 2.10

Solución:

- Los máximos de tensión ocurren para $\cos(2\beta z + \theta_L) = +1$
- Haciendo el cambio $z = -\ell$ queda $\cos(2\beta\ell - \theta_L) = +1$, de donde

$$2\beta\ell_{\max} - \theta_L = 2n\pi \quad (n = 0,1,2...) \longrightarrow \quad \ell_{\max} = \frac{2n\pi + \theta_L}{2\beta} \quad (n = 0,1,2...)$$

- como $\theta_L < 0$, el primer máximo se corresponderá con n = 1:

$$\ell_{\max} = \frac{2\pi + \theta_L}{2\beta} = \frac{2\pi - \pi/3}{4\pi/\lambda} = 10\,\mathrm{cm}$$

- Los mínimos de tensión ocurren para $\cos(2\beta z+\theta_L)=-1$

- Empleando la variable l: $\cos(2\beta\ell-\theta_L)=-1$

$$2\beta\ell_{\min}-\theta_L=n\pi \quad (n=1,3,\ldots) \quad \longrightarrow \quad \ell_{\min}=\frac{n\pi+\theta_L}{2\beta} \quad (n=1,3,\ldots)$$

- Para n = 1:

$$\ell_{\min}=\frac{\pi+\theta_L}{2\beta}=\frac{\pi-\pi/3}{4\pi/\lambda}=4\,\text{cm}$$

- Se observa que, efectivamente $\ell_{\max}-\ell_{\min}=10-4=6\,\text{cm}$, que se corresponde con $\lambda/4$

2.3 Ondas estacionarias

- Definimos la Razón de Onda Estacionaria ROE (también S o VSWR) como el cociente entre las tensiones máxima y mínima del patrón de onda estacionaria en tensión.

$$\boxed{\mathrm{ROE} = \frac{|V(z)|_{\max}}{|V(z)|_{\min}} = \frac{1+\rho_L}{1-\rho_L}}$$

- Veamos algunos ejemplos:
  - Carga adaptada. $\rho_L = 0 \;\rightarrow\; \mathrm{ROE} = 1$
  - Corto circuito y circuito abierto. $\rho_L = 1 \;\rightarrow\; \mathrm{ROE} = \infty$
  - Carga pasiva de valor arbitrario. $\rho_L = [0,1] \;\rightarrow\; \mathrm{ROE} = [1,\infty)$

- Ejemplo 5: Una línea de transmisión sin pérdidas y de impedancia característica 140 Ohm está terminada en una impedancia de carga $Z_L = (280 + j182)\,\Omega$. Sabiendo que la longitud de onda en la línea vale 72 cm, calcular:

a) El coeficiente de reflexión en el plano de la carga

b) La razón de onda estacionaria

c) La posición de los máximos de tensión

d) La posición de los mínimos de tensión

Ulaby 6ª Exercise 2.11

Solución:

a) El coef de refl en los terminales de la carga vale

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{280 + j182 - 140}{280 + j182 + 140} = 0.439 + j0.243 = 0.5e^{+j29^\circ}$$

b) La razón de onda estacionaria en la línea es

$$\mathrm{ROE} = \frac{1+\rho_L}{1-\rho_L} = \frac{1+0.5}{1-0.5} = 3$$

c) Localización de los máximos de tensión

Según el ejemplo anterior, los máximos se sitúan a distancias

$$\ell_{\max} = \frac{2n\pi + \theta_L}{2\beta} \quad (n = 0,1,2...)$$

Teniendo en cuenta que $\beta = 2\pi/\lambda$ resulta: $\ell_{\max} = \dfrac{\lambda\theta_L}{4\pi} + \dfrac{n\lambda}{2} \quad (n = 0,1,2...)$

Además $\theta_L = 29^{\circ} = 29\pi/180 \text{ rad}$

Luego

$$\ell_{\max} = \lambda\left(\frac{\theta_L}{4\pi} + \frac{n}{2}\right) = 72\left(\frac{29\pi}{180 \times 4\pi} + \frac{n}{2}\right) = (2.9 + 36n) \text{ cm} \quad (n = 0,1,2...)$$

d) Localización de los mínimos de tensión

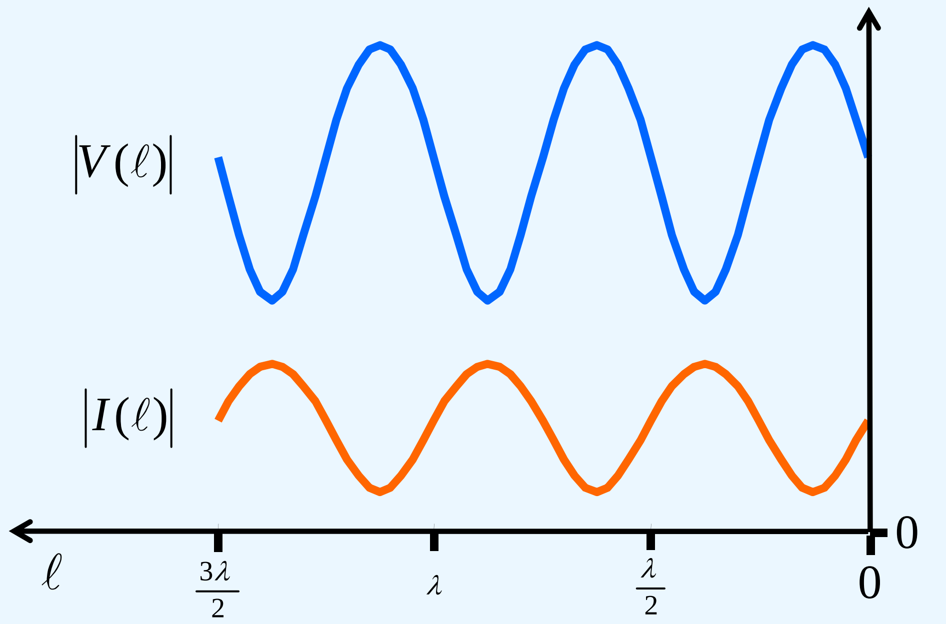
$$\ell_{\min} = \ell_{\max} + \frac{\lambda}{4} = (20.9 + 36n) \text{ cm} \quad (n = 0,1,2...)$$

2.3 Ondas estacionarias

- Análogamente al caso de la tensión, también es posible definir un un patrón de onda estacionaria respecto de la corriente.

- Siguiendo el mismo procedimiento que con la tensión se llega a

$$\left|I(\ell)\right| = \frac{\left|V_{0i}\right|}{Z_0}\left[1 - 2\rho_L\cos(2\beta\ell - \theta_L) + \rho_L^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

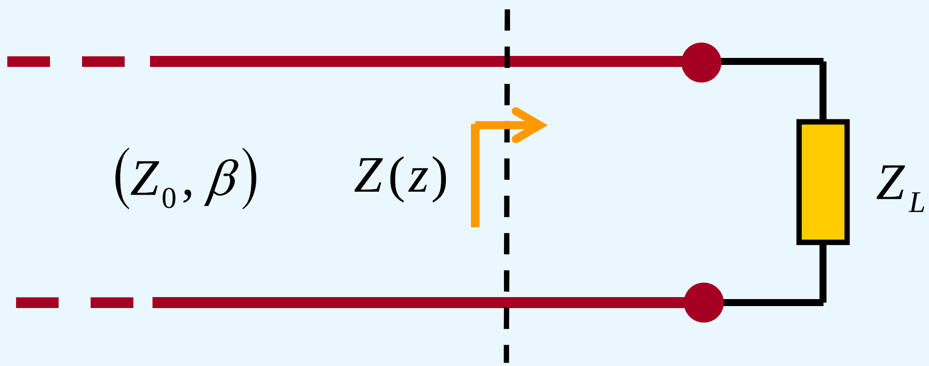


- Los máximos de corriente están en la misma posición que los mínimos de tensión y viceversa

2.4 Impedancia de entrada (Ulaby 2.7-2.8)

- Consideramos una línea de transmisión sin pérdidas y desadaptada
- Sabemos que en una línea desadaptada, tanto la tensión como la corriente totales son función de la posición, z
- Por tanto, el cociente V(z)/I(z) también será función de la posición
- Entonces, podemos definir la impedancia "vista" en una posición arbitraria de la línea (z), como

$$Z(z) = \frac{V(z)}{I(z)}$$



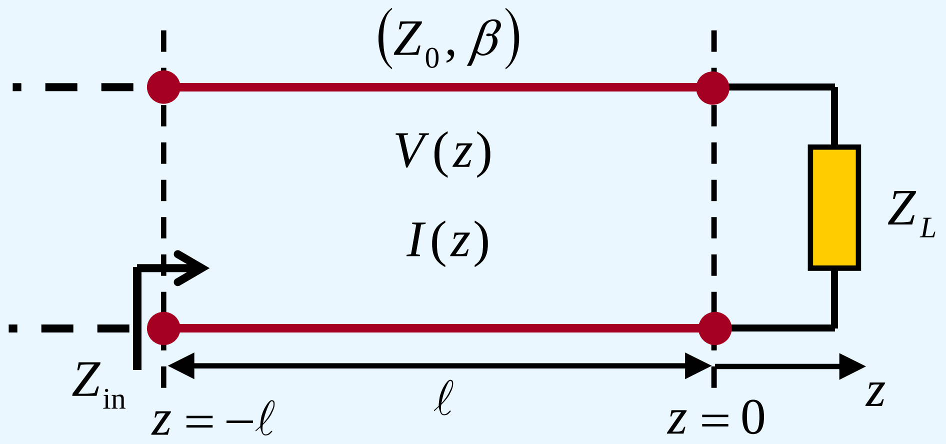
2.4 Impedancia de entrada

- Suele interesar el valor de Z(z) en los terminales de entrada de una línea cargada. En este caso, se denomina impedancia de entrada Z_{in}:

$$V(z) = V_{0i}\left(e^{-j\beta z} + \Gamma_L e^{+j\beta z}\right)$$

$$I(z) = \frac{V_{0i}}{Z_0}\left(e^{-j\beta z} - \Gamma_L e^{+j\beta z}\right)$$

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$



- La impedancia de entrada se puede expresar como:

$$Z_{in}(z) = \frac{V(z)}{I(z)} = Z_0\left(\frac{e^{-j\beta z} + \Gamma_L e^{+j\beta z}}{e^{-j\beta z} - \Gamma_L e^{+j\beta z}}\right) = Z_0 \frac{Z_L - jZ_0 \tan(\beta z)}{Z_0 - jZ_L \tan(\beta z)}$$

2.4 Impedancia de entrada

- La expresión anterior indica que la impedancia varía a lo largo de la línea
- Al igual que el patrón de onda estacionaria, la impedancia es una función de periodo espacial $\lambda/2$
- Los máximos y mínimos de la impedancia se sitúan en las mismas posiciones que los máximos y mínimos de tensión, respectivamente.

2.4 Impedancia de entrada

- Los máximos de impedancia valen:

$$Z\,|_{\max} = \frac{|V(z)|_{\max}}{|I(z)|_{\min}} = \frac{|V_{0i}|(1+\rho_L)}{\dfrac{|V_{0i}|}{Z_0}(1-\rho_L)} = Z_0\frac{1+\rho_L}{1-\rho_L} = Z_0\mathrm{ROE}$$

- y los mínimos:

$$Z\,|_{\min} = \frac{|V(z)|_{\min}}{|I(z)|_{\max}} = \frac{|V_{0i}|(1-\rho_L)}{\dfrac{|V_{0i}|}{Z_0}(1+\rho_L)} = Z_0\frac{1-\rho_L}{1+\rho_L} = \frac{Z_0}{\mathrm{ROE}}$$

- Se observa que los valores de $Z\,|_{\max}$ y $Z\,|_{\min}$ son reales

- Evaluando la expresión de $Z_{\text{in}}(z)$ en **z = -l**, resulta

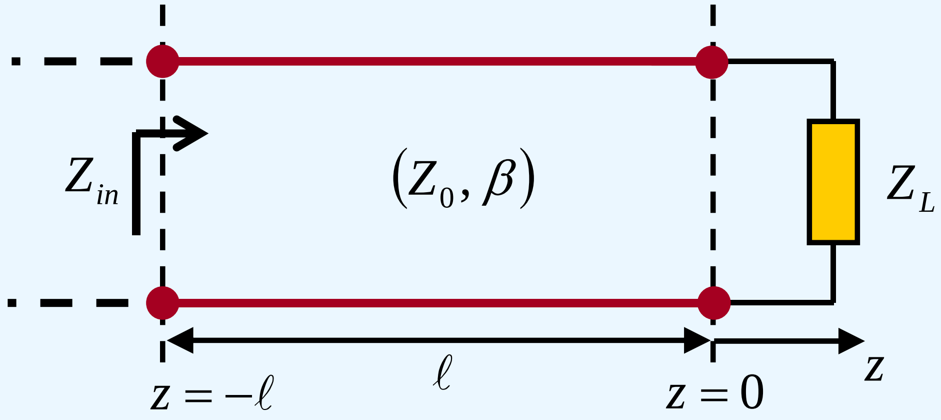
$$\boxed{Z_{\text{in}}(\ell) = Z_0\frac{Z_L + jZ_0\tan(\beta\ell)}{Z_0 + jZ_L\tan(\beta\ell)}}$$

- Ejemplo 6: Se dispone de una línea bifiliar en aire, sin pérdidas, de impedancia característica 50 Ohm y de longitud 2.5 m. Si la línea está terminada en una impedancia de carga $Z_L = (40 + j20)\,\Omega$ a la frecuencia de 300 MHz, determinar la impedancia de entrada. Ulaby 6ª P 2.27

Solución:

- La impedancia de entrada vale:

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan(\beta\ell)}{Z_0 + jZ_L \tan(\beta\ell)}$$



- donde:

$$Z_0 = 50\,\Omega \qquad Z_L = (40 + j20)\,\Omega$$

$$\ell = 2.5\,\mathrm{m}$$

$$f = 300 \times 10^6\ \mathrm{Hz}$$

Línea en aire → $v_p = c$

$$\left.\begin{matrix} \ell = 2.5\,\mathrm{m} \\ f = 300\times10^6\ \mathrm{Hz} \\ v_p = c \end{matrix}\right\} \beta = \frac{\omega}{v_p} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi \times 300 \times 10^6}{3 \times 10^8} = 2\pi\ \mathrm{rad/m}$$

$$\beta\ell = 2\pi \times 2.5 = 5\pi$$

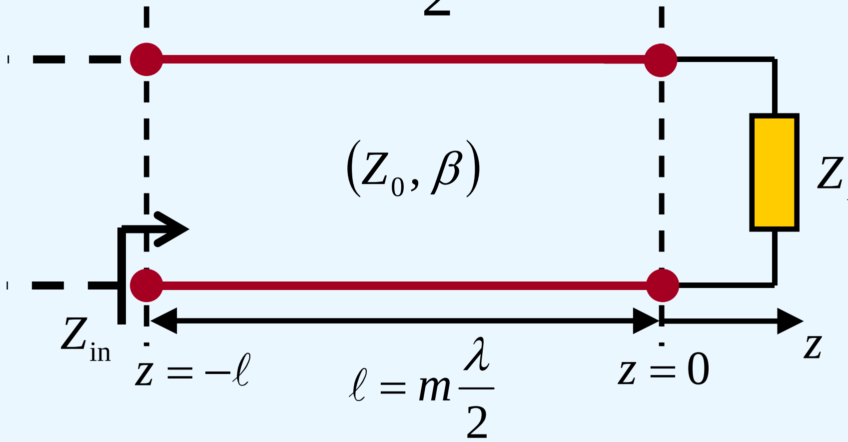
(es una línea $5 \times (\lambda/2)$)

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \overbrace{\tan(\beta\ell)}^{=0}}{Z_0 + jZ_L \underbrace{\tan(\beta\ell)}_{=0}} = Z_L = (40 + j20)\,\Omega$$

2.4 Impedancia de entrada

- Veamos algunos casos particulares de la expresión para Z_{in}:

  - Línea de media onda: $\ell = m\dfrac{\lambda}{2}$ con $m = 0, 1, 2, \ldots$



- Luego

$$\beta\ell = m\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{2} = \mathrm{m}\pi$$

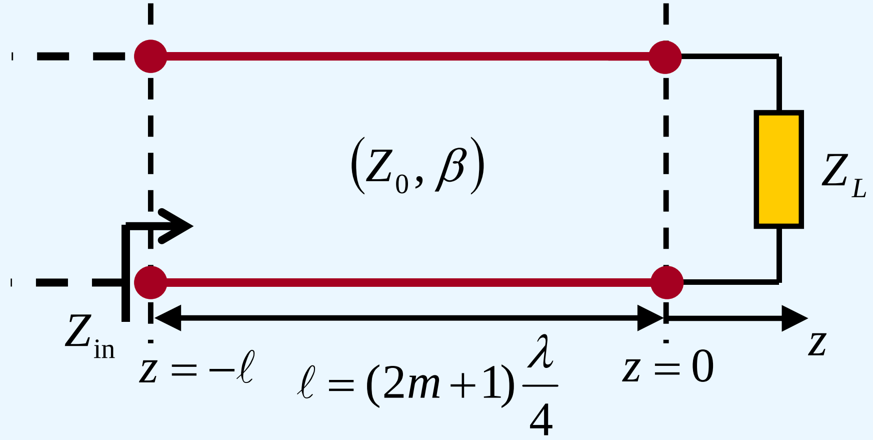
- Entonces

$$\boxed{Z_{\text{in}}(m\lambda/2) = Z_L}$$

¡ La impedancia de entrada es igual a la impedancia de carga!

2.4 Impedancia de entrada

- Línea de cuarto de onda: $\ell = (2m+1)\dfrac{\lambda}{4}$ con $m = 0, 1, 2, ...$



- Luego

$$\beta\ell = (2m+1)\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{4} = (2\text{m}+1)\frac{\pi}{2}$$

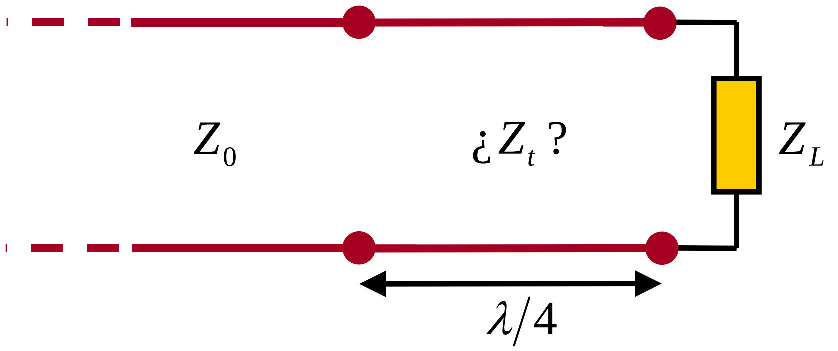
- Entonces $$Z_{\text{in}}(\lambda/4) = \frac{Z_0^2}{Z_L}$$

- Normalizando $$\boxed{\overline{Z}_{\text{in}}(\lambda/4) = \frac{1}{\overline{Z}_L}}$$

¡ La impedancia de entrada normalizada es el inverso de la impedancia de carga normalizada!

- Una aplicación muy importante de la línea cuarto de onda es la adaptación de impedancias.

Ejemplo 7: Una línea de impedancia $Z_0 = 50\,\Omega$ esta terminada en una carga de $Z_L = 100\,\Omega$. Como consecuencia se producen reflexiones en la carga. Para eliminar estas reflexiones (adaptar la carga a la línea) se emplea un transformador $\lambda/4$ como se indica en la figura. Determinar la impedancia característica de dicho transformador.



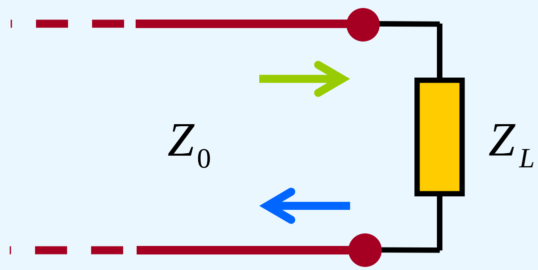
Ulaby 6ª Ex 2-10

Solución:

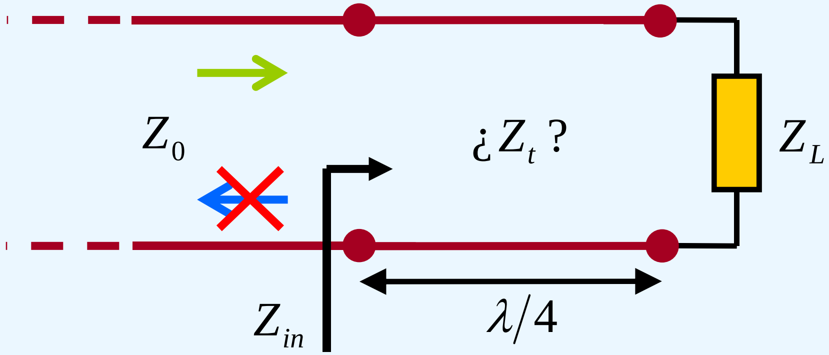
- La situación inicial (sin transformador) se muestra en la figura

- En este caso hay reflexión ya que

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \neq 0$$



- Para eliminar la reflexión utilizamos un transformador como indica el enunciado



- El coef. de refl. en los terminales de la línea vale $\Gamma = \dfrac{Z_{in} - Z_0}{Z_{in} + Z_0}$

- Para eliminar la reflexión debe verificarse $Z_{in} = Z_0$

- Por otra parte, según sabemos $Z_{in} = \dfrac{Z_t^2}{Z_L}$

$$\left.\begin{array}{l} Z_{in} = Z_0 \\ Z_{in} = \dfrac{Z_t^2}{Z_L} \end{array}\right\} \quad \frac{Z_t^2}{Z_L} = Z_0$$

- Por tanto

$$Z_t = \sqrt{Z_0 Z_L} = \sqrt{50 \times 100} = 70.7\,\Omega$$

2.4 Impedancia de entrada

- Línea terminada en cortocircuito:

$$Z_L = 0 \qquad \Gamma_L = -1 \qquad \mathrm{ROE} = \infty$$

- Tensión en la línea:

$$V(\ell) = 2jV_{0i}\sin(\beta\ell)$$

- Corriente en la línea:

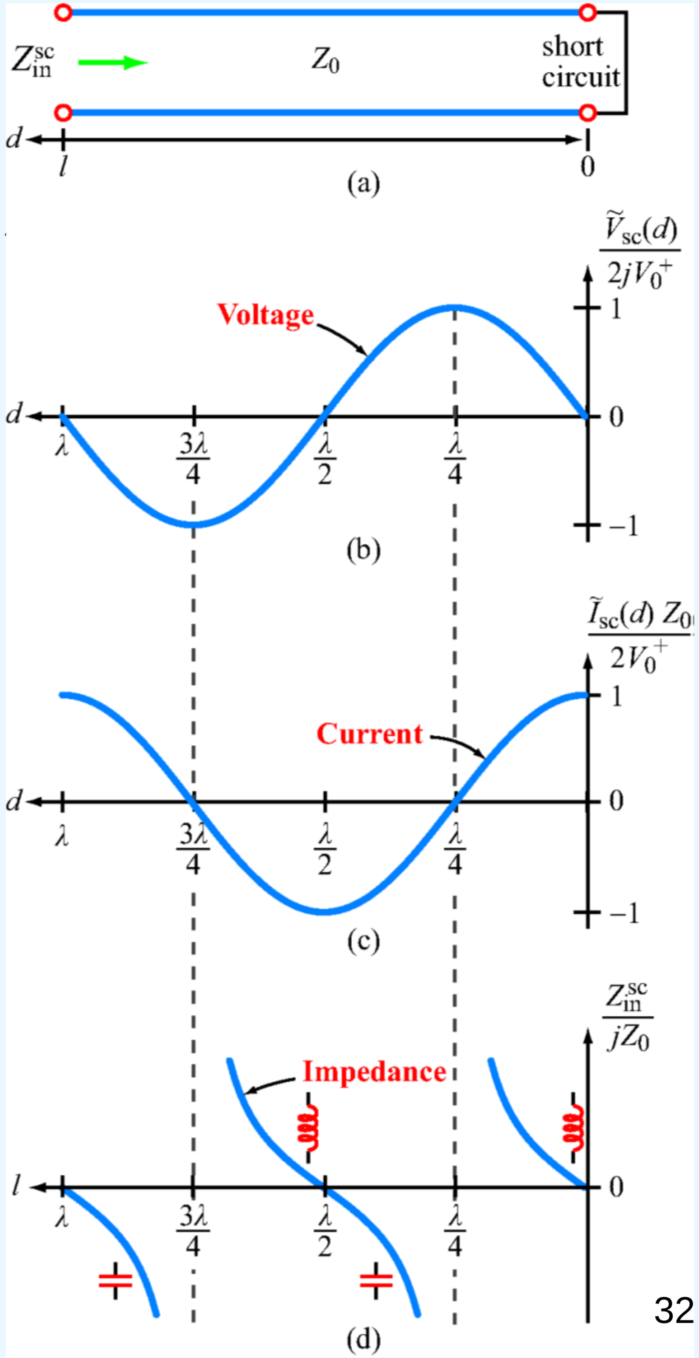
$$I(\ell) = 2\frac{V_{0i}}{Z_0}\cos(\beta\ell)$$

- Impedancia:

$$\boxed{Z_{\mathrm{in}}^{\mathrm{sc}}(\ell) = jZ_0\tan(\beta\ell)}$$

- Si $0 < \beta\ell < \pi/2$ → Z_{in} es inductiva

- Si $\pi/2 < \beta\ell < \pi$ → Z_{in} es capacitiva



2.4 Impedancia de entrada

- Línea terminada en circuito abierto:

$$Z_L = \infty \qquad \Gamma_L = +1 \qquad \mathrm{ROE} = \infty$$

- Tensión en la línea:

$$V(\ell) = 2V_{0i}\cos(\beta\ell)$$

- Corriente en la línea:

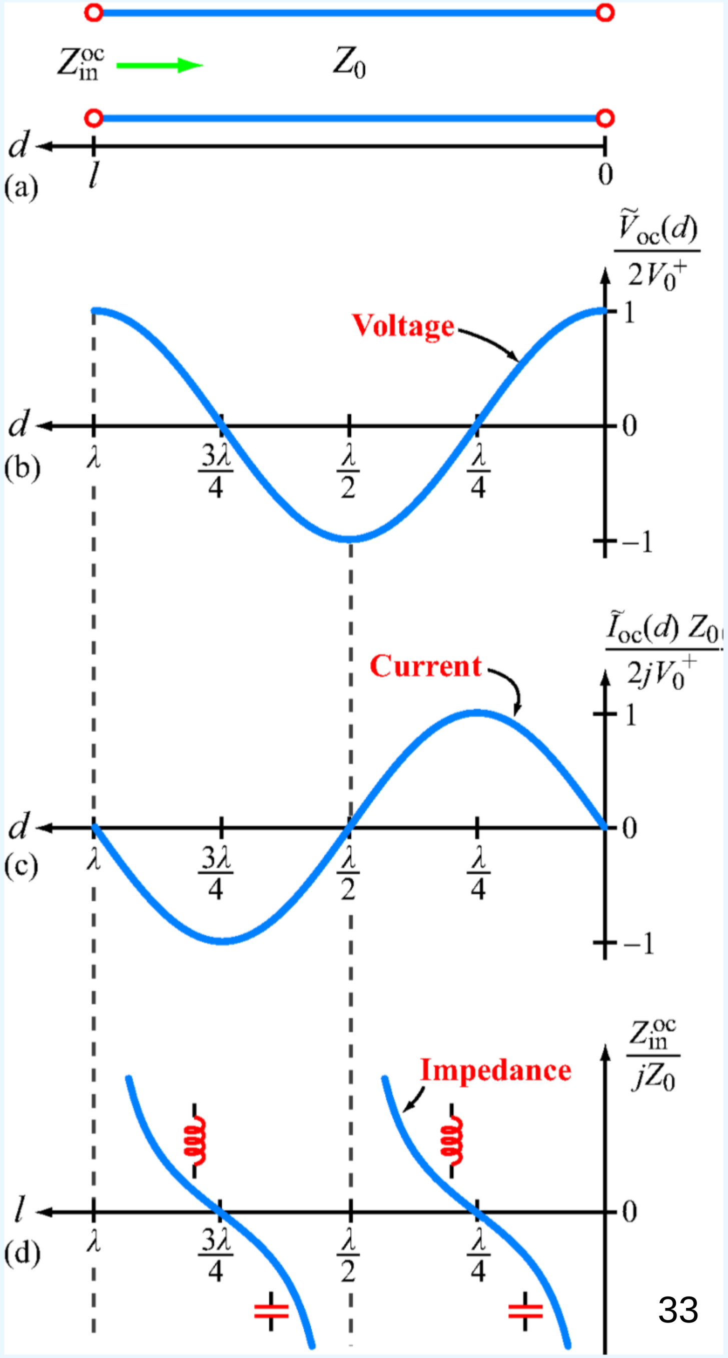
$$I(\ell) = 2j\frac{V_{0i}}{Z_0}\sin(\beta\ell)$$

- Impedancia:

$$\boxed{Z_{\text{in}}^{\text{oc}}(\ell) = -jZ_0\cot(\beta\ell)}$$

- Si $0 < \beta\ell < \pi/2$ → Z_{in} es capacitiva

- Si $\pi/2 < \beta\ell < \pi$ → Z_{in} es inductiva

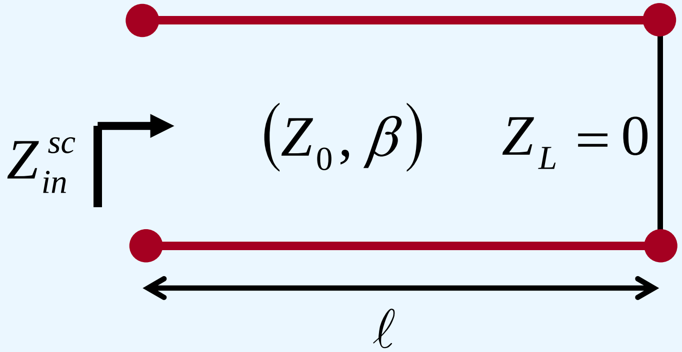


- Ejemplo 8: Determinar la longitud física de una línea de transmisión de 50 Ohm terminada en cortocircuito para que su impedancia de entrada a la frecuencia de 2.25 GHz sea igual a la impedancia de un condensador de 4 pF. La velocidad de fase en la línea vale 0.75c.

Ulaby 6ª Ex 2-8

Solución:

- Debe verificarse: $Z_{\mathrm{in}}^{\mathrm{sc}}(\ell) = Z_C$



- luego $jZ_0 \tan(\beta\ell) = \dfrac{1}{j\omega C}$

- de donde $\tan(\beta\ell) = -\dfrac{1}{Z_0 \omega C} = -0.3537$

- entonces

$$\beta\ell = \arctan(-0.3537) = \begin{cases} -0.34 \ \text{rad} & (4^{\mathrm{o}} \text{ cuadrante}) \\ -0.34 + \pi = 2.8 \ \text{rad} & (2^{\mathrm{o}} \text{ cuadrante}) \end{cases}$$

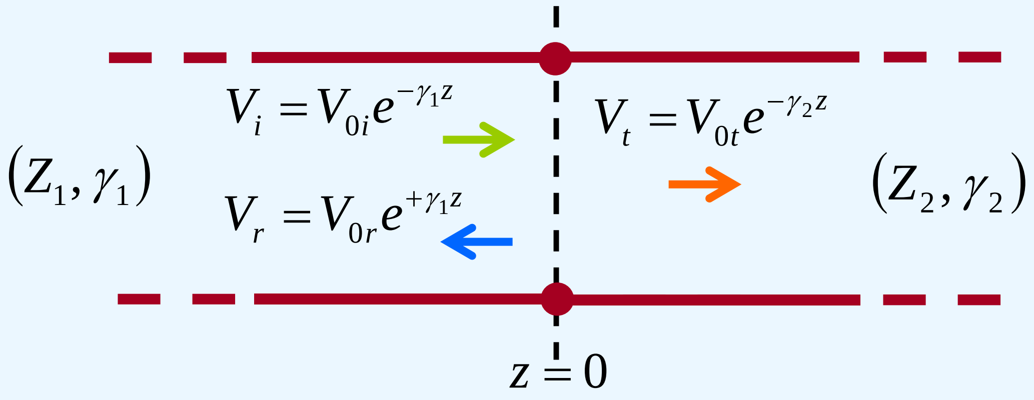
- Tomamos la solución del 2º cuadrante (la de longitud más corta)

$$\ell = \frac{2.8}{\beta} = \frac{2.8 v_p}{\omega} = \frac{2.8 \times 0.75 \times 3 \times 10^8}{2\pi \times 2.25 \times 10^9} = 4.46 \text{ cm}$$

2.4 Impedancia de entrada

- Reflexión y transmisión en la unión de dos líneas de transmisión:

- Consideramos la unión de 2 líneas semiinfinitas de distinta impedancia:



- Una onda incidente se propaga por la línea 1

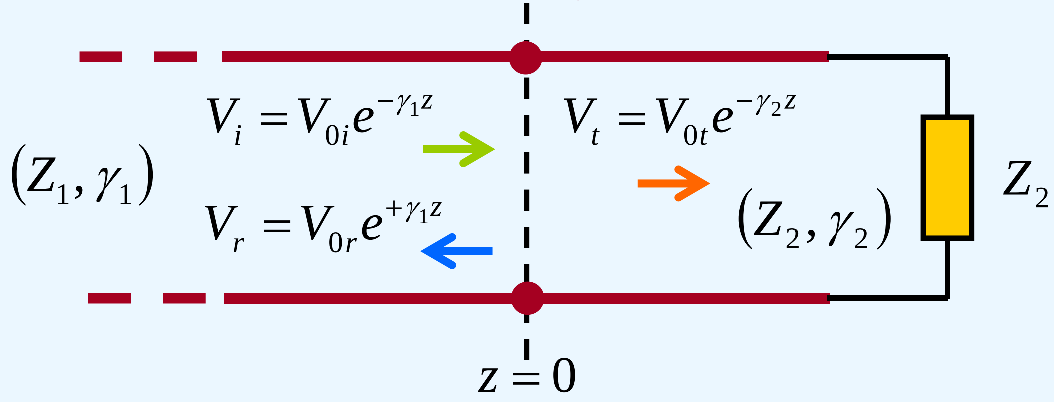
- Cuando la onda incidente "ve" un cambio de impedancia se produce una onda reflejada y otra transmitida

- Queremos calcular los coefs. de reflexión Γ y de transmisión T en la unión (z = 0)

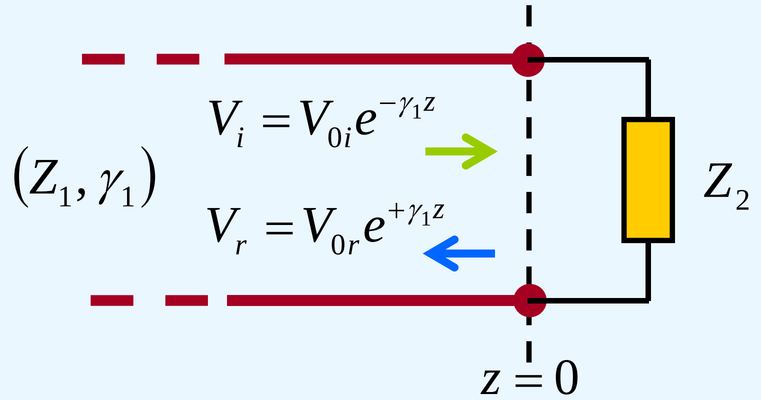
$$\Gamma \equiv \frac{V_{0r}}{V_{0i}} \qquad\qquad T \equiv \frac{V_{0t}}{V_{0i}}$$

2.4 Impedancia de entrada

- El problema planteado no cambia si tomamos una longitud finita de línea 2 y la terminamos en su impedancia característica.



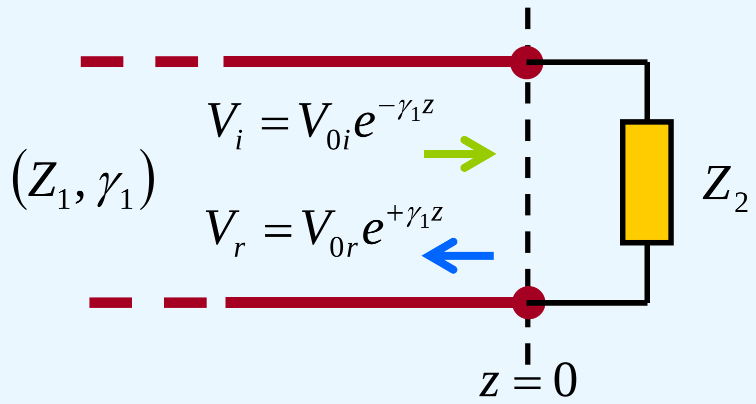
- Tomamos una longitud nula de línea 2



- Este problema ya lo estudiamos en el apartado 2.2

2.4 Impedancia de entrada

- El coef. de refl. vale:



$$\Gamma = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$$

- Para calcular el coef. de trans. tenemos en cuenta que $V_{0t} = V_{0i} + V_{0r}$

- Dividiendo por V_{0i} resulta $T = 1 + \Gamma \longrightarrow \boxed{T = \dfrac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}}$

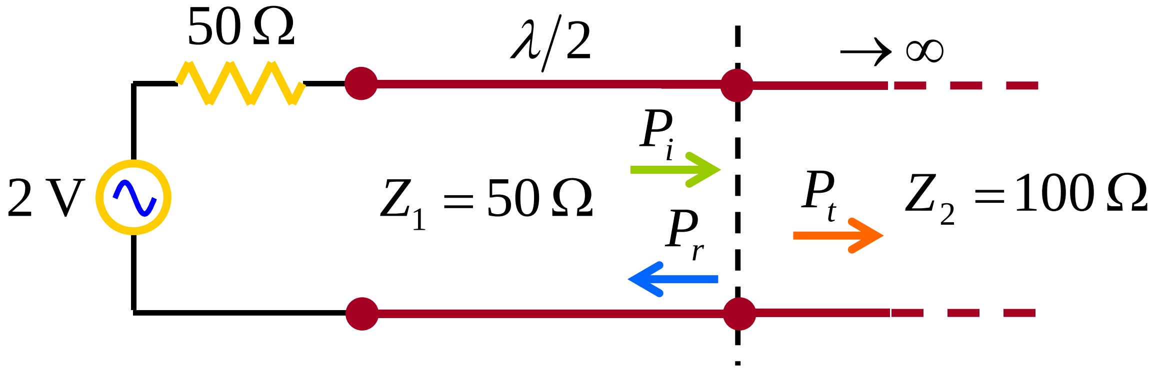
- Es usual expresar Γ, T en decibelios a través de cantidades conocidas como Pérdidas de Retorno

$$\boxed{\mathrm{RL} = \text{-}20 \log |\Gamma| \quad (\mathrm{dB})}$$ (Return Loss)

- y Pérdidas de Inserción

$$\boxed{\mathrm{IL} = \text{-}20 \log |T| \quad (\mathrm{dB})}$$ (Insertion Loss)

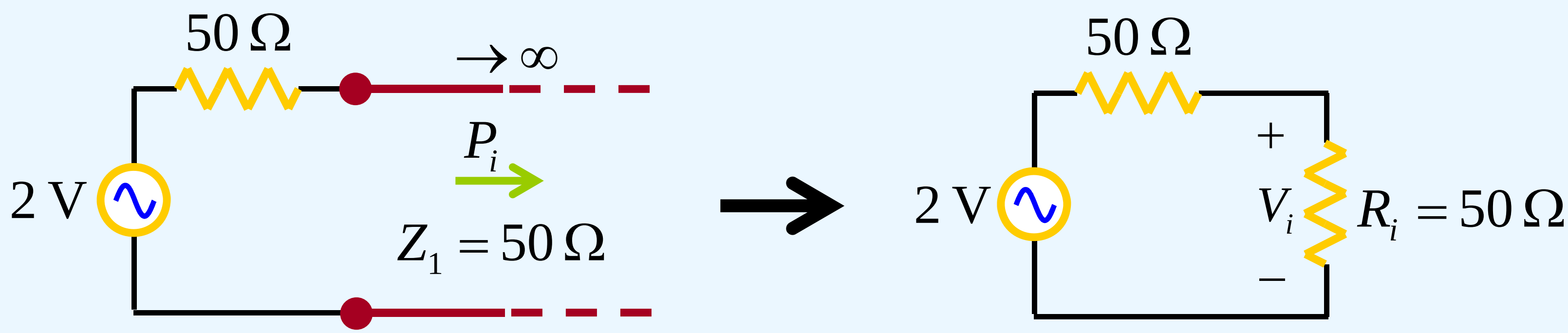
- Ejemplo 9: Calcular, en el circuito de la figura, las potencias incidente, reflejada y transmitida a la línea de 100 Ohm.



Ulaby 6ª P 2.44

Solución:

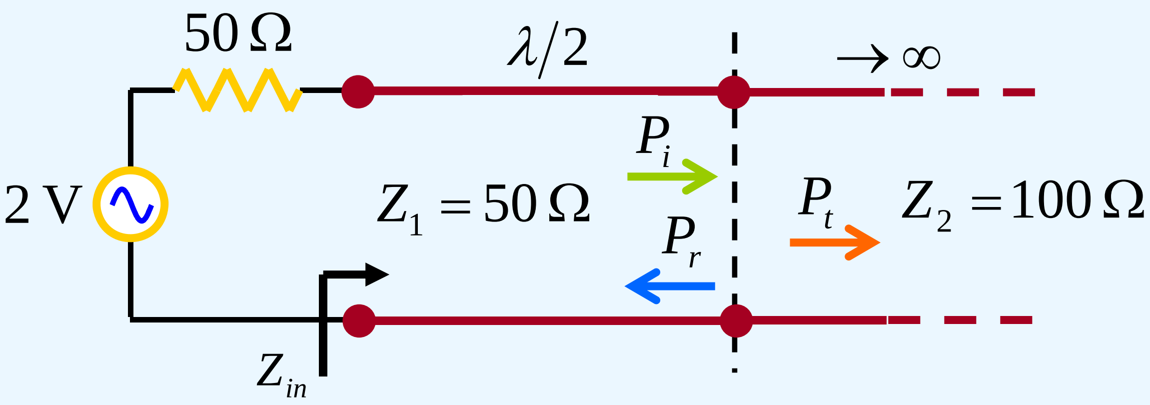
- Comenzaremos calculando la potencia incidente. Para ello, consideramos la siguiente situación

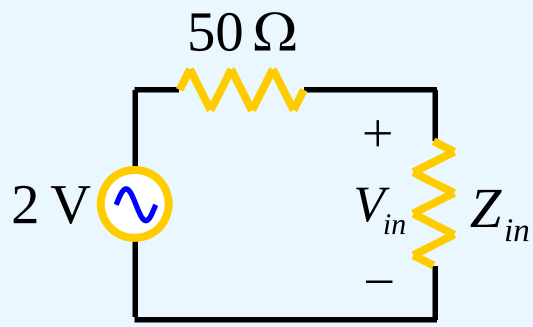


- Entonces

$$P_i = \frac{1}{2}\frac{V_i^2}{R_i} = \frac{1}{2}\frac{1}{50} = 10\,\mathrm{mW}$$

- Teniendo en cuenta la línea $\lambda/2$ no tiene pérdidas, la potencia transmitida es la misma que la potencia disipada en la impedancia de entrada vista desde los terminales del generador





$$V_{in} = 2\frac{100}{150} = \frac{4}{3}\ \mathrm{V}$$

- En este caso $Z_{in} = 100\ \Omega$

$$P_t = \frac{1}{2}\frac{V_{in}^2}{R_{in}} = \frac{1}{2}\frac{(4/3)^2}{100} = 8.9\ \mathrm{mW}$$

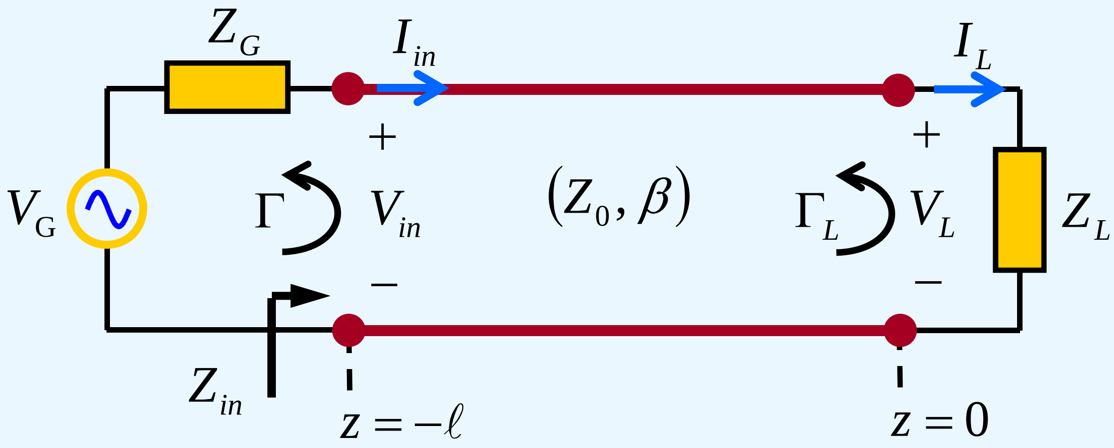
- El coef de refl vale $\Gamma = \dfrac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \dfrac{100-50}{100+50} = \dfrac{1}{3}$

- La potencia reflejada resulta

$$P_r = |\Gamma|^2 P_i = \frac{1}{9}\times 10\ \mathrm{mW} = 1.1\ \mathrm{mW}$$

2.5 Desadaptación en la carga y en el generador (Pozar 2.6)

- Consideramos una línea sin pérdidas terminada en una impedancia de carga Z_L y alimentada mediante un generador de impedancia Z_G



- En general $Z_G \neq Z_0 \neq Z_L$

- Como ya sabemos: $$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan(\beta\ell)}{Z_0 + jZ_L \tan(\beta\ell)}$$

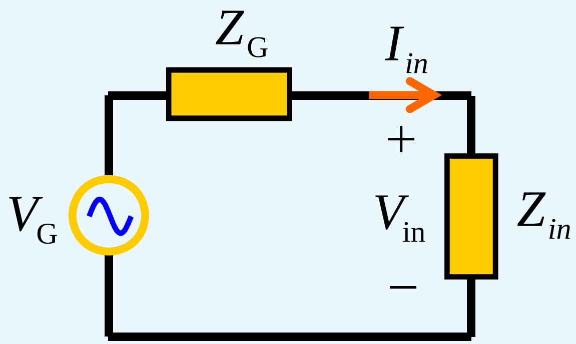
$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

2.5 Desadaptación en la carga y en el generador

- Potencia media entregada a la carga:

$$Z_{in} = R_{in} + jX_{in}$$

$$Z_G = R_G + jX_G$$



$$P = \frac{1}{2}\Re\left[V_{in} I_{in}^*\right] = \frac{1}{2}\Re\left[V_{in}\frac{V_{in}^*}{Z_{in}^*}\right]$$

- Sustituyendo la expresión de V_{in}:

$$V_{in} = V_g \frac{Z_{in}}{Z_g + Z_{in}}$$

$$P = \frac{1}{2}|V_g|^2 \frac{\Re[Z_{in}]}{|Z_g + Z_{in}|^2}$$

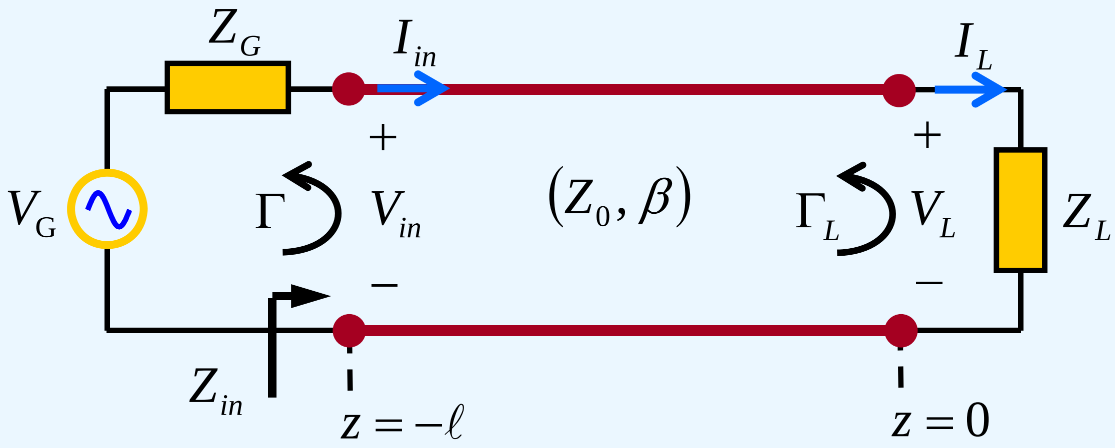
$$P = \frac{1}{2}|V_g|^2 \frac{R_{in}}{(R_g + R_{in})^2 + (X_g + X_{in})^2}$$

- Veamos varios casos:

2.5 Desadaptación en la carga y en el generador

1. Impedancia de carga adaptada a la línea: $Z_L = Z_0$

- En este caso:



$$\Gamma_L = 0$$

$$Z_{in} = Z_0$$

$$P = \frac{1}{2} \frac{|V_g|^2}{|Z_g + Z_0|^2} Z_0$$

2. Línea adaptada el generador: $Z_{in} = Z_g$

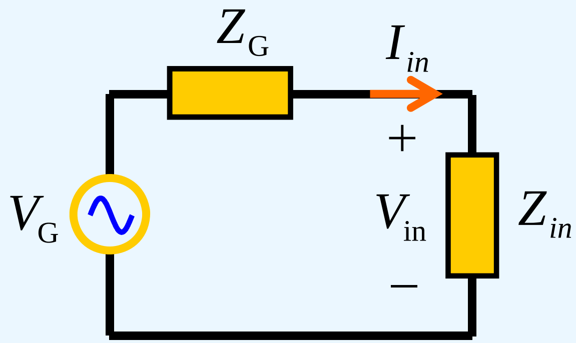
- En este caso: $\Gamma = 0$

$$P = \frac{1}{2} |V_g|^2 \frac{R_g}{4(R_g^2 + X_g^2)}$$

- Surge la siguiente cuestión: ¿cuál es la impedancia Z_{in} óptima para que se produzca la máxima transferencia de potencia a la carga?

2.5 Desadaptación en la carga y en el generador

- Según sabemos de la Teoría de Circuitos, la respuesta es:



$$\boxed{Z_{in} = Z_G^*}$$

!Adaptación Conjugada!

(suponemos Z_G fija)

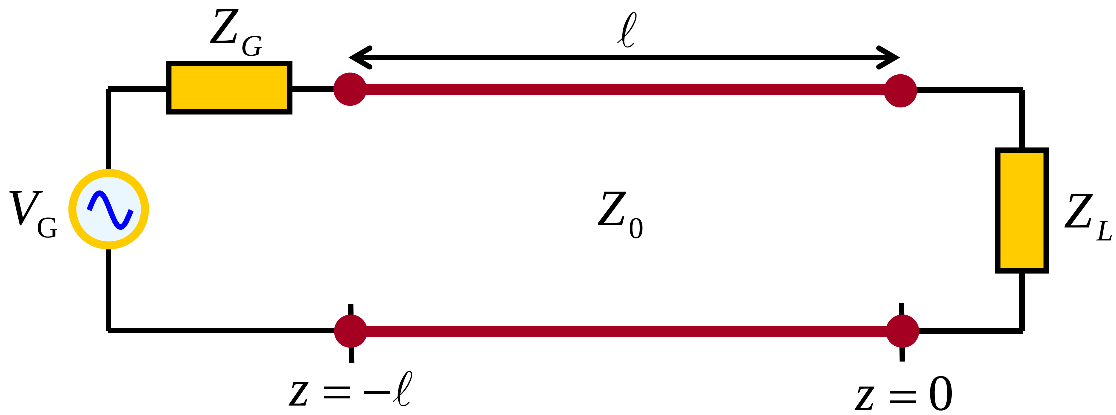
- La potencia máxima transferida a la carga vale

$$\boxed{P_{max} = \frac{|V_G|^2}{8R_G}}$$

- Comentarios:

- Este resultado no implica que los coefs. de refl. Γ y Γ_ℓ sean nulos
- Si Z_g es real este resultado coincide con el caso 2 de la hoja anterior
- Siempre hay pérdida de potencia en el generador. La mayor eficiencia en la transmisión se consigue haciendo Z_g lo más pequeña posible

- Ejemplo 10: Calcular la potencia entregada a la carga en el circuito de la figura. $V_g = 15\sqrt{2}\ \mathrm{V}, Z_g = 75\,\Omega,\ Z_0 = 75\,\Omega,\ Z_L = (60 - j40)\,\Omega,\ \ell = 0.7\lambda.$



Pozar 3ª 2.15

Solución:

- Según hemos visto, la potencia entregada a la carga vale

$$P = \frac{1}{2} |V_g|^2 \frac{\Re[Z_{in}]}{|Z_g + Z_{in}|^2}$$

- La impedancia de entrada en $z = -\ell$ se calcula mediante la expresión:

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan(\beta\ell)}{Z_0 + jZ_L \tan(\beta\ell)}$$

- Los datos para calcular Z_{in} son: $Z_0 = 75\,\Omega,\ Z_L = (60 - j40)\,\Omega,\ \ell = 0.7\lambda.$

- Entonces $$\beta\ell = \frac{2\pi}{\lambda}\ell = \frac{2\pi}{\lambda}0.7\lambda = 1.4\pi$$

- Luego

$$Z_{\text{in}} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan(\beta\ell)}{Z_0 + jZ_L \tan(\beta\ell)}$$

$$= 75 \frac{60 - j40 + j75 \tan(1.4\pi)}{75 + j(60 - j40) \tan(1.4\pi)} = (48.19 + j27.33)\,\Omega$$

- Sustituyendo en la expresión de la potencia

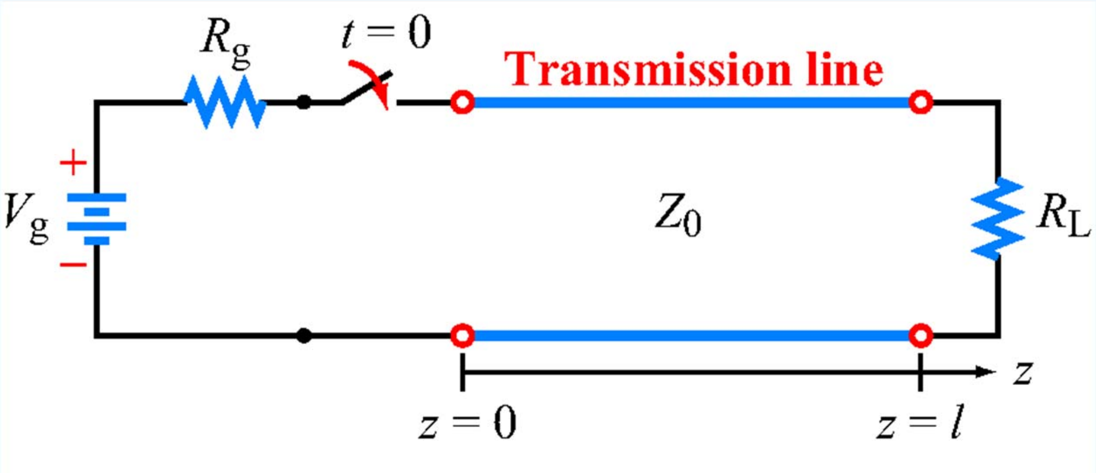
$$P = \frac{1}{2} |V_g|^2 \frac{\Re[Z_{in}]}{|Z_g + Z_{in}|^2} = 15^2 \frac{48.19}{|75 + 48.19 + j27.33|^2} = 0.68\ \text{W}$$

- La máxima potencia entregable a la carga es (no lo piden)

$$P_{\max} = \frac{|\mathrm{V_g}|^2}{8R_\mathrm{g}} = 0.75\ \text{W}$$

2.6 Respuesta transitoria (Ulaby 2-12)

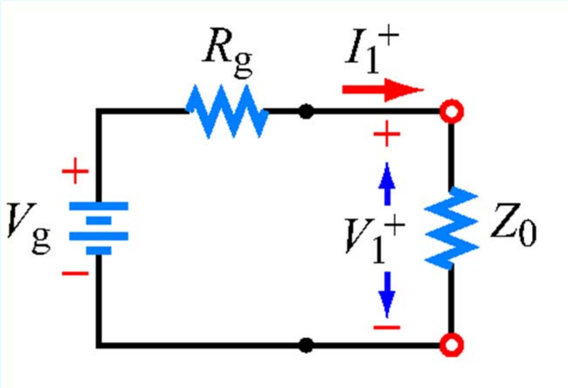
- Hasta ahora hemos estudiado líneas de transmisión en el dominio de la frecuencia
- En este apartado abordamos en estudio de la respuesta transitoria
- Para ello, consideramos un circuito formado por un generador de continua conectado a una línea de transmisión sin pérdidas y terminada en una impedancia de carga resistiva pura, tal como se muestra en la figura.



- Supondremos que el interruptor se cierra en t = 0.

2.6 Respuesta transitoria

- Comenzaremos estudiando el circuito en el instante $t = 0^+$
- Justo en el instante en el que se cierra el interruptor, la impedancia vista desde los terminales del generador ($z=0$) es igual a la impedancia característica de la línea.
- Por tanto, el circuito equivalente en $t = 0^+$ es:



- Entonces, la tensión y la corriente, en la entrada de la línea, en $t = 0^+$ valen:

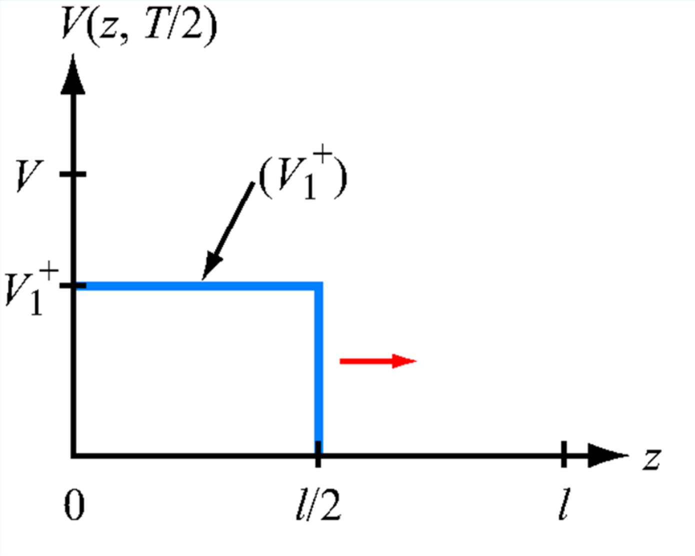
$$I_1^+ = \frac{V_g}{R_g + Z_0} \qquad V_1^+ = \frac{V_g Z_0}{R_g + Z_0}$$

- En consecuencia, la señal comienza a propagarse con velocidad v_p a lo largo de la línea

2.6 Respuesta transitoria

- En un intervalo de tiempo $T = l/v_p$ la señal habrá llegado hasta la posición de la carga ($z=l$).

- Si, por ejemplo, hacemos una foto en el instante $t = T/2$ observamos que la señal ha recorrido la mitad de la línea



- En $t = T$, la señal llega a la carga y se produce otra señal reflejada

$$V_1^- = \Gamma_L V_1^+$$

$$\Gamma_L = \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0}$$

- Después de la primera reflexión, la tensión en la línea es la suma de la onda incidente y la reflejada

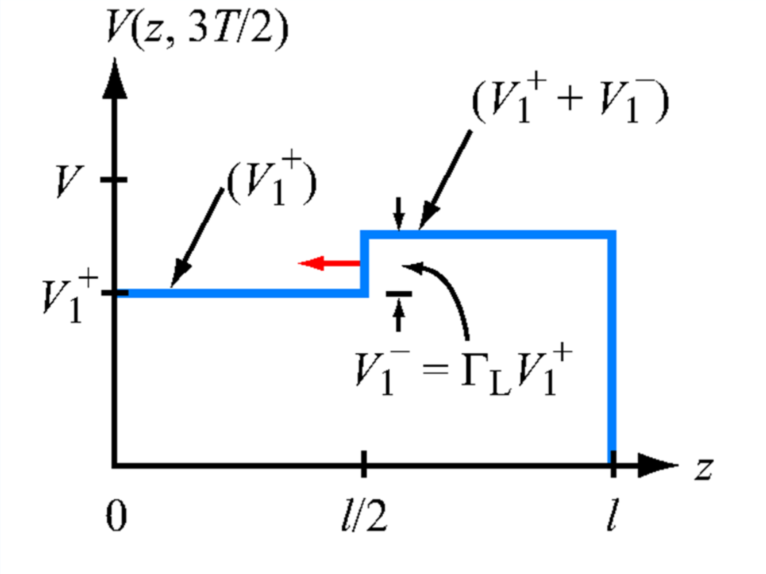
$$V = V_1^+ + V_1^-$$

- de donde

$$V = (1 + \Gamma_L) V_1^+$$

2.6 Respuesta transitoria

- Por ejemplo, la tensión en la línea en t = 3T/2 sería la mostrada en la figura.



- En t = 2T, la señal V_1^- llega a la carga (z = l). Si $R_g \neq Z_0$, se produce una nueva onda reflejada

$$V_2^+ = \Gamma_g V_1^- \qquad \Gamma_g = \frac{R_g - Z_0}{R_g + Z_0}$$

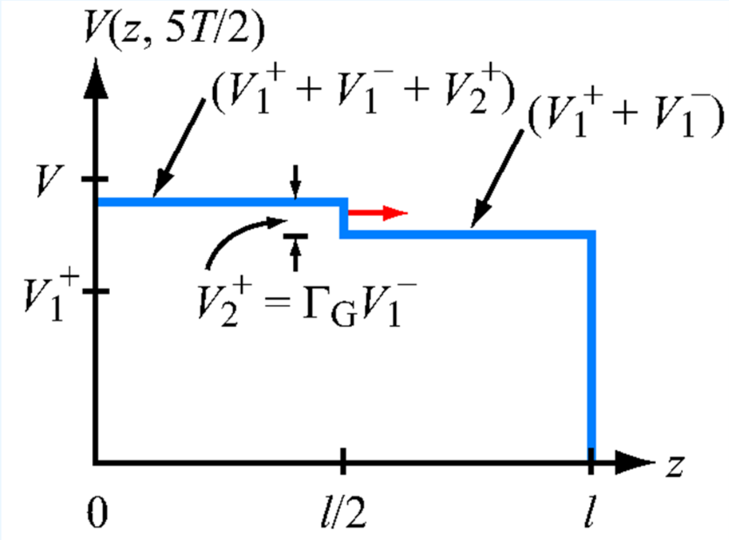
- La onda V_2^+ viaja hacia la carga, sumándose a la señal que ya existe en la línea

$$V = V_1^+ + V_1^- + V_2^+$$

- de donde

$$V = (1 + \Gamma_L + \Gamma_L \Gamma_g) V_1^+$$

- Por ejemplo, la tensión en la línea en t = 5T/2 sería la mostrada en la figura



2.6 Respuesta transitoria

- Este proceso de múltiples reflexiones continua indefinidamente
- Después de mucho tiempo (t → inf) se alcanza el estado estacionario
- La tensión en la línea en el estado estacionario vale

$$V_\infty = V_1^+ + V_1^- + V_2^+ + V_2^- + V_3^+ + V_3^- + \ldots$$

- Escribiendo esta expresión en función de tensión incidente V_1^+

$$V_\infty = (1 + \Gamma_L + \Gamma_L \Gamma_g + \Gamma_L^2 \Gamma_g + \Gamma_L^2 \Gamma_g^2 + \Gamma_L^3 \Gamma_g^2 + \ldots) V_1^+$$
$$= (1 + \Gamma_L)(1 + \Gamma_L \Gamma_g + \Gamma_L^2 \Gamma_g^2 + \Gamma_L^3 \Gamma_g^3 + \ldots) V_1^+$$

- El segundo paréntesis es una serie geométrica cuya suma vale $\dfrac{1}{1 - \Gamma_L \Gamma_g}$
- Entonces

$$V_\infty = \frac{1 + \Gamma_L}{1 - \Gamma_L \Gamma_g} V_1^+$$

2.6 Respuesta transitoria

- Sustituyendo las expresiones de V_1^+, Γ_L , Γ_g , y simplificando, resulta

$$\boxed{V_\infty = V_g \frac{R_L}{R_g + R_L}}$$

- Esta expresión representa la tensión en estado estacionario que, como cabe esperar, coincide con el resultado obtenido en un análisis de DC en el que la línea se sustituye por una conexión ideal.

- La corriente en estado estacionario vale

$$\boxed{I_\infty = \frac{V_\infty}{R_L} = \frac{V_g}{R_g + R_L}}$$

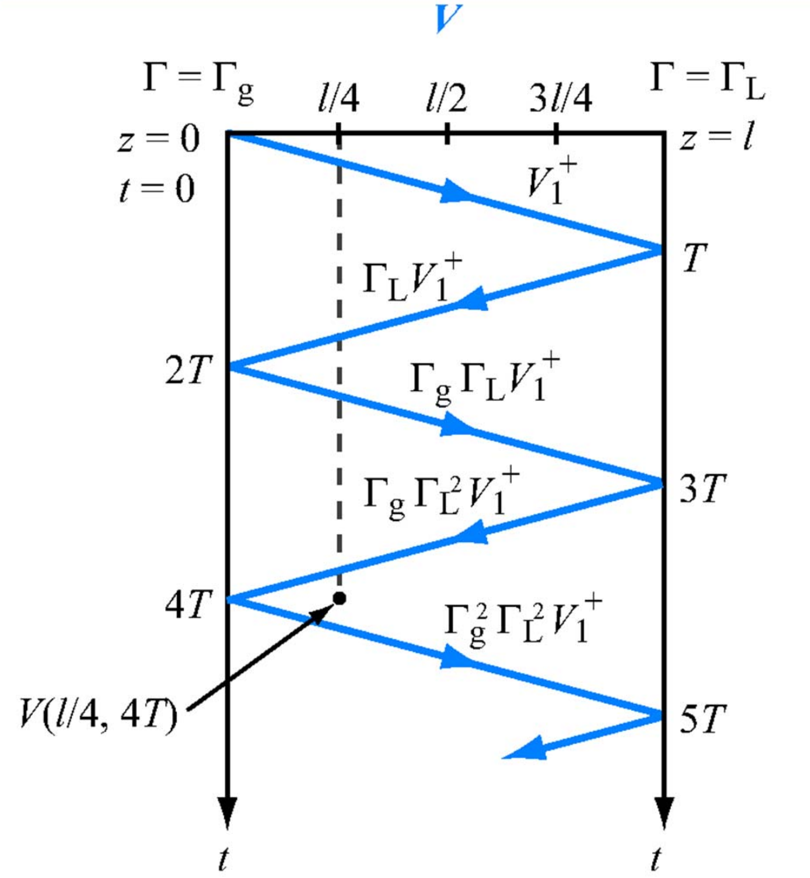
2.6 Respuesta transitoria

Diagramas espacio-tiempo

- En general, resulta difícil calcular la tensión y/o corriente en un punto de la línea debido a las múltiples reflexiones que se producen
- Esta tarea se simplifica considerablemente mediante el uso de representaciones gráficas de tipo espacio-tiempo
- Un diagrama espacio-tiempo consta de:
  - Un eje horizontal que se utiliza para representar la posición a lo largo de la línea
  - Un eje vertical que representa el tiempo
- En $z = 0$ y $z = l$ aparecen indicados los coefs. de refl. en el generador y en la carga, respectivamente.
- El diagrama consiste en una línea en zigzag que indica la evolución de la onda de tensión (o corriente) en la línea

2.6 Respuesta transitoria

- La primera recta (del zigzag) indica que la onda V_1^+ comienza a propagarse hacia z > 0 en z = t = 0, llegando a la carga (z = l) en t = T.
- La segunda recta indica que la onda reflejada se propaga hacia z < 0 llegando al generador en t = 2T y así sucesivamente
- En cada reflexión se multiplica por el coef. de refl. correspondiente
- Este diagrama permite calcular la tensión total en un punto y en un instante determinados
- Así, para calcular $V(z_1,t_1)$ hacemos lo siguiente:
  - se traza una vertical en $z = z_1$, desde $t = 0$ hasta $t = t_1$
  - se suman todas las ondas que corten a la vertical trazada
- Por ejemplo

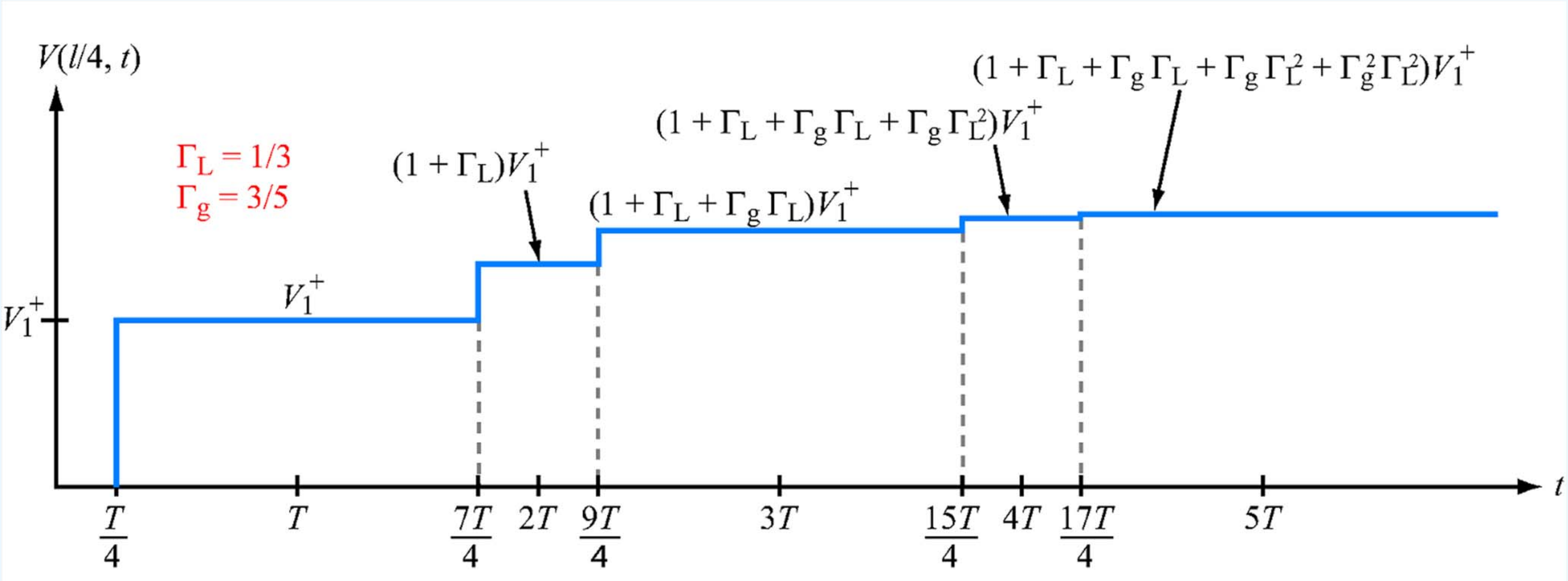


$$V(\ell/4,4T) = (1+\Gamma_L + \Gamma_g\Gamma_L + \Gamma_g\Gamma_L^2)V_1^+$$

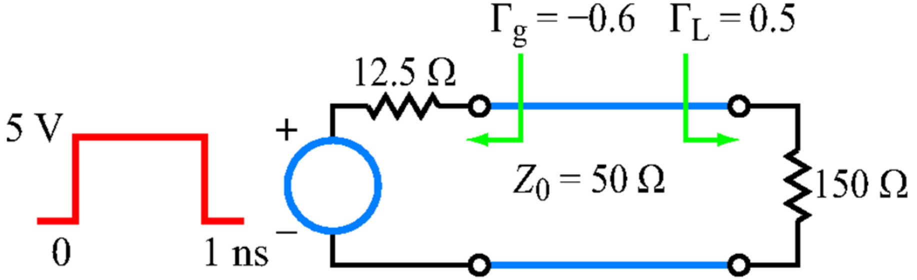
2.6 Respuesta transitoria

- La variación temporal de la tensión en una posición específica z_1 de la línea puede determinarse dibujando los valores de $V(z_1,t)$ obtenidos al recorrer la línea vertical $z = z_1$ desde $t=0$ hasta el instante deseado

- En la figura se muestra la tensión en $z = l/4$



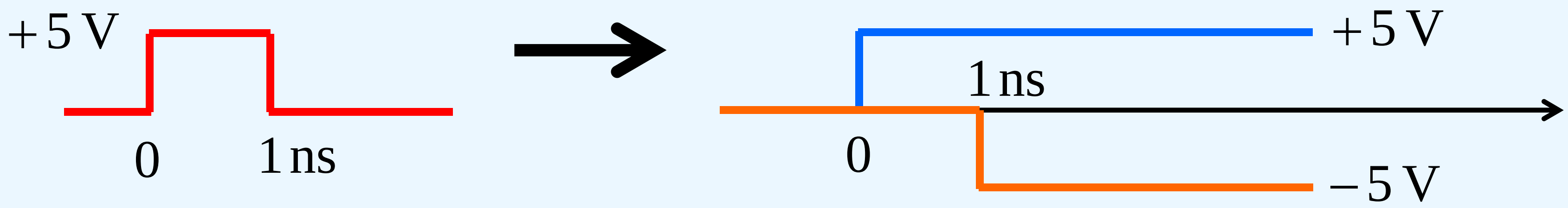
- Ejemplo 10: El circuito de la figura se excita con un pulso de tensión rectangular de altura 5 V y de anchura 1 ns. Calcular la forma de onda de la tensión en los terminales de la carga sabiendo que la línea de transmisión tiene 0.6 m de longitud y la velocidad de fase es c.



Ulaby 6ª Ex 2.15

Solución:

- Trataremos el pulso como la suma de 2 funciones salto



- Debemos dibujar el diagrama espacio-tiempo incluyendo las 2 funciones salto.

- Antes hay que calcular los parámetros necesarios:
  - Tiempo necesario para recorrer la línea:

$$T = \frac{\ell}{c} = \frac{0.6}{3\times 10^8} = 2\ \text{ns}$$

  - Coefs. de refl.:

$$\Gamma_g = \frac{R_g - Z_0}{R_g + Z_0} = \frac{12.5-50}{12.5+50} = -0.6 \qquad \Gamma_L = \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0} = \frac{150-50}{150+50} = 0.5$$

  - Tensión inicial:

$$V_1^+ = \frac{V_g Z_0}{R_g + Z_0} = \frac{5\times 50}{12.5+50} = 4\ \text{V}$$ (para el escalón positivo)

  - Para el escalón negativo será -4V

- Se obtiene el siguiente diagrama espacio temporal

- Con la información de este diagrama se puede obtener la representación de la tensión en la carga que se muestra abajo