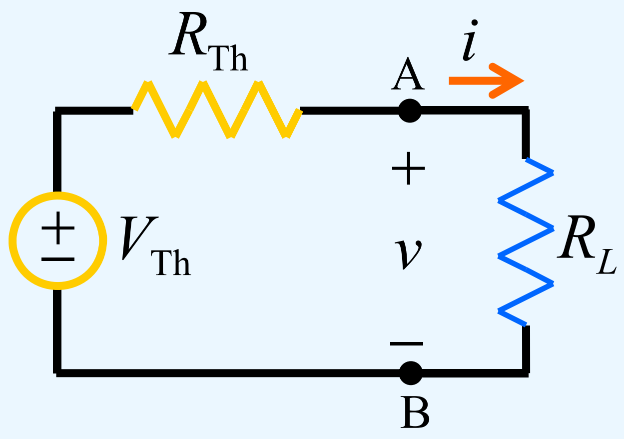
Tema 3. Teoremas de la Teoría de Circuitos



Bibliografía Básica para este Tema:

[1] C. K. Alexander, M. N. O. Sadiku, "Fundamentos de circuitos eléctricos", McGraw-Hill.

[2] R. C. Dorf, J. A. Svoboda, "Introduction to electric circuits", John Wiley & Sons.

Sadiku → Tema 4

Dorf → Tema 5

- Esta presentación se encuentra, temporalmente, en:

http://personales.unican.es/peredaj/AC.htm

3.1 Introducción

- Como hemos visto en temas anteriores, las ecuaciones de Kirchhoff permiten analizar un circuito sin alterar su configuración original.

- Sin embargo, la complejidad creciente de los circuitos que se usan en la práctica hace que los cálculos se vuelvan tediosos.

- En este tema veremos un conjunto de técnicas que permiten reducir la complejidad que un circuito antes de proceder a su análisis:

    - El principio de superposición
    - La transformación de fuentes
    - Los teoremas de Thevenin y Norton

3.2 Superposición

- Un circuito lineal es aquél que sólo tiene elementos lineales y fuentes
- Un elemento lineal es aquél cuya relación i-v es lineal:

$$v = a\,i, \quad \text{con } a = \text{cte}$$

- En esta asignatura sólo se consideran circuitos lineales
- Los circuitos lineales verifican el principio de superposición

> El principio de superposición establece que la tensión entre los extremos (o corriente a través) de un elemento de un circuito lineal es la suma algebraica de las tensiones (o corrientes) a través de ese elemento debidas a cada una de las fuentes independientes cuando actúa sola.

- El principio de superposición ayuda a analizar un circuito lineal con más de una fuente independiente mediante el cálculo de la contribución de cada fuente independiente por separado

3.2 Superposición

- La aplicación del principio de superposición tiene los siguientes pasos:

1. Apagar todas las fuentes independientes excepto una.
   Encontrar la salida (tensión o corriente) debido a la fuente activa.
2. Repetir el paso anterior para cada una de las fuentes independientes presentes en el circuito.
3. La contribución total vendrá dada por la suma algebraica de las contribuciones de cada una de las fuentes independientes.

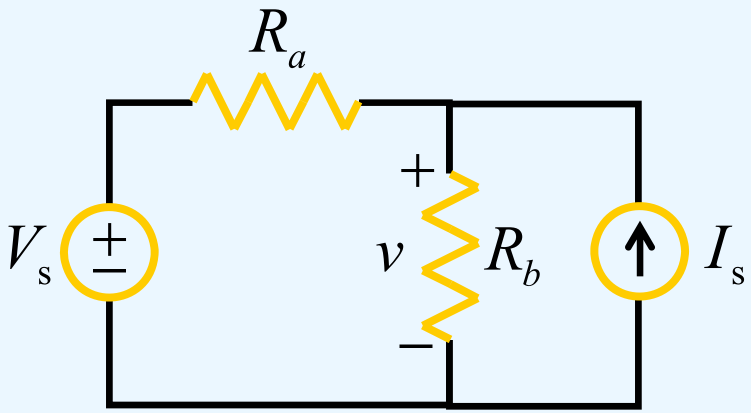
- Observaciones:

  - Apagar una fuente independiente de tensión implica reemplazarla por una fuente de tensión de 0V (cortocircuito)

  - Apagar una fuente independiente de corriente implica reemplazarla por una fuente de corriente de 0A (circuito abierto)

  - Las fuentes dependientes no se modifican

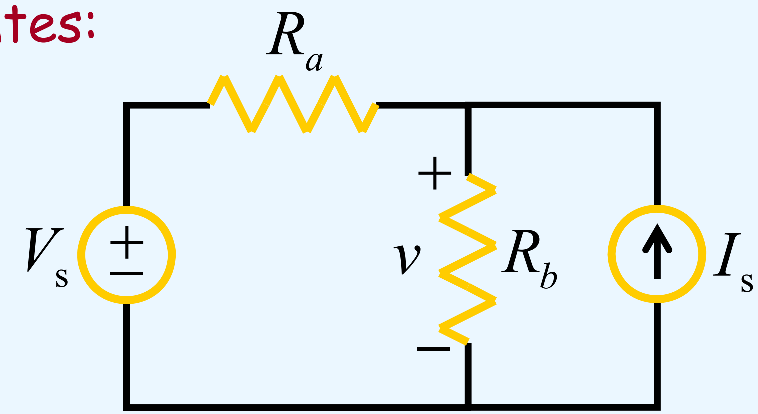
-Ejemplo 1: Calcular v en el circuito de la figura, aplicando el principio de superposición. $R_a = 8$ Ohm, $R_b = 4$ Ohm, $V_s = 6$ V, $I_s = 3$ A



Solución:

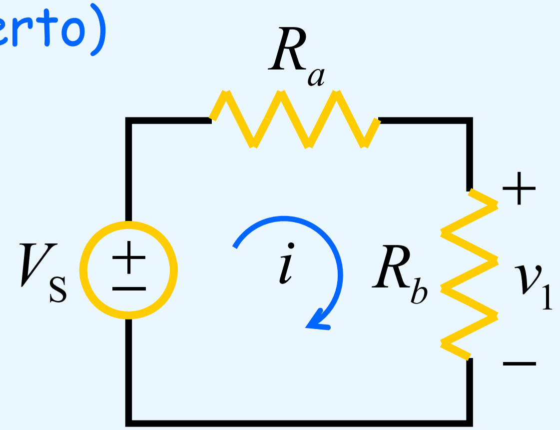
- Puesto que hay dos fuentes independientes:

$$v = v_1 + v_2$$



- v_1 es la tensión debida a V_s con $I_s = 0$
- v_2 es la tensión debida a I_s con $V_s = 0$

- Cálculo de v_1: (dejamos I_s en circuito abierto)



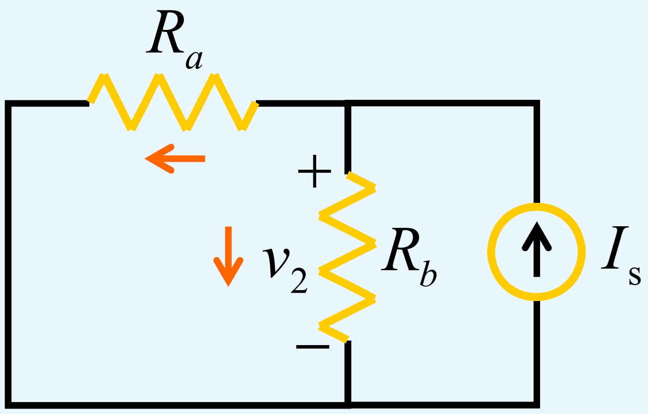
- Aplicando la KVL: $V_s = R_a i + R_b i$

- luego $i = \dfrac{V_s}{R_a + R_b} = \dfrac{6}{8+4} = 0.5\ \mathrm{A}$

- Por tanto $v_1 = R_b i = 4 \times 0.5 = 2\ \mathrm{V}$

* También podemos aplicar directamente la fórmula del divisor de tensión

- Cálculo de v_2: (cortocircuitamos V_s)



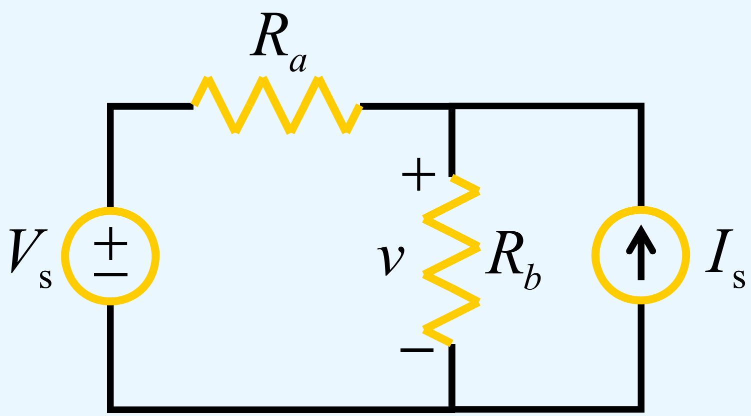
- Aplicando la KCL: $I_s = \dfrac{v_2}{R_a} + \dfrac{v_2}{R_b}$

- luego $v_2 = \dfrac{R_a R_b}{R_a + R_b} I_s = \dfrac{8 \times 4}{8 + 4} \times 3 = 8 \text{ V}$

* También podemos aplicar directamente la fórmula del divisor de corriente

- La solución final es:

$$\boxed{v = v_1 + v_2 = 2 + 8 = 10 \text{ V}}$$

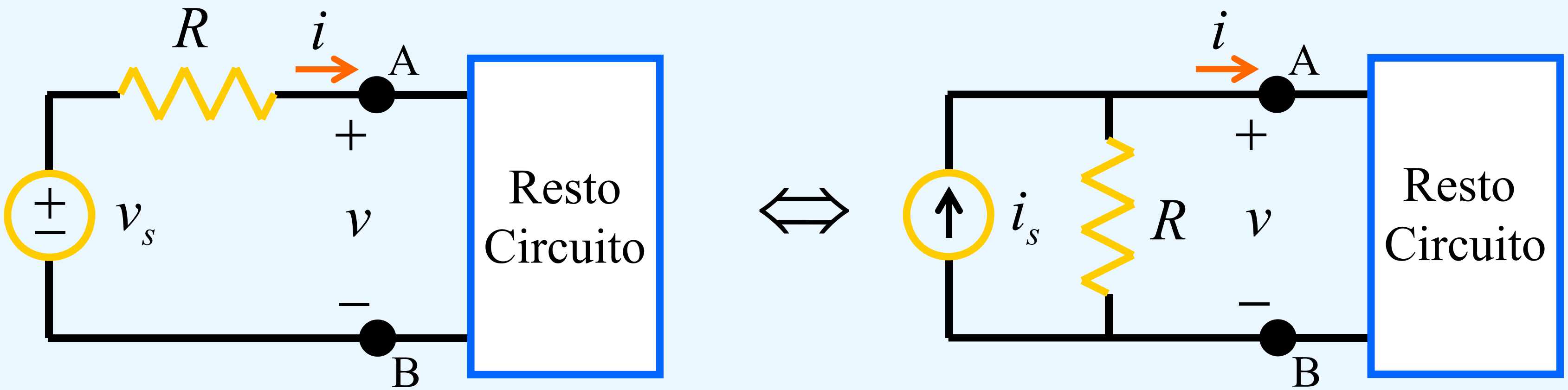


(circuito original)

3.3 Transformación de fuentes

- La transformación de fuentes se usa para simplificar circuitos

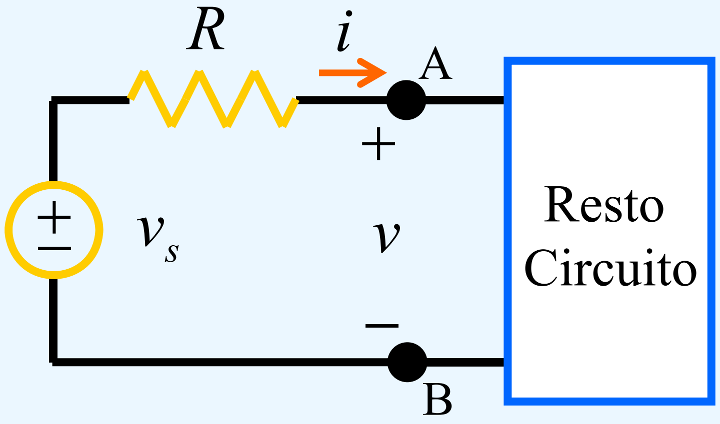
Una transformación de fuentes es el proceso de sustituir una fuente de tensión v_s en serie con una resistencia R por una fuente de corriente i_s en paralelo con una resistencia R, o viceversa



$$\boxed{v_S = Ri_S}$$

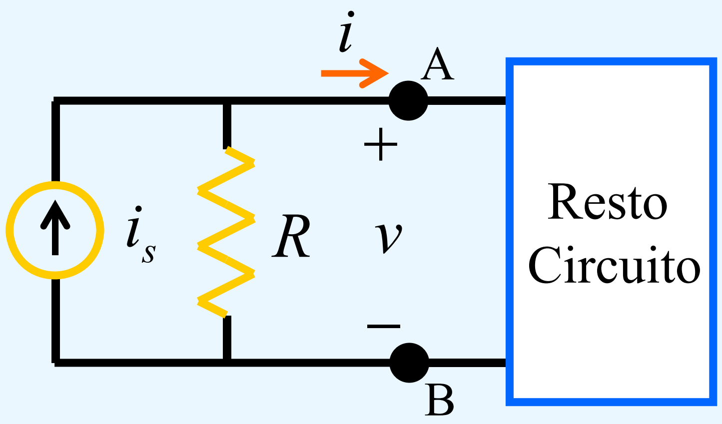
3.3 Transformación de fuentes

- Comprobación



- Aplicando KVL:

$$v_s = Ri + v \Rightarrow i = \frac{v_s}{R} - \frac{v}{R}$$



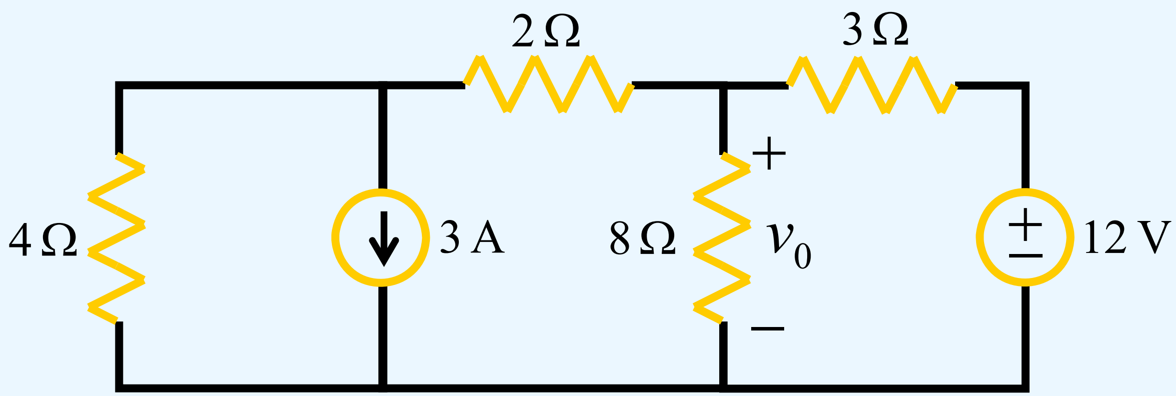
- Aplicando KCL:

$$i_s = \frac{v}{R} + i \Rightarrow i = i_s - \frac{v}{R}$$

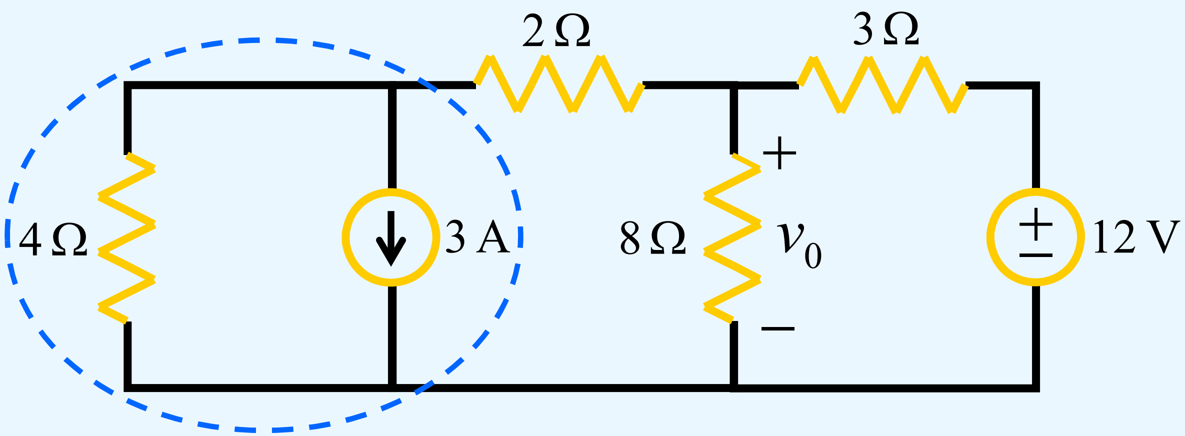
$$\boxed{i_s = \frac{v_s}{R}}$$

¡Debe cumplise para que ambos circuitos sean equivalentes!

-Ejemplo 2: Calcular v_0 en el circuito de la figura. Para ello, reducir el circuito a un divisor de corriente aplicando transformación de fuentes

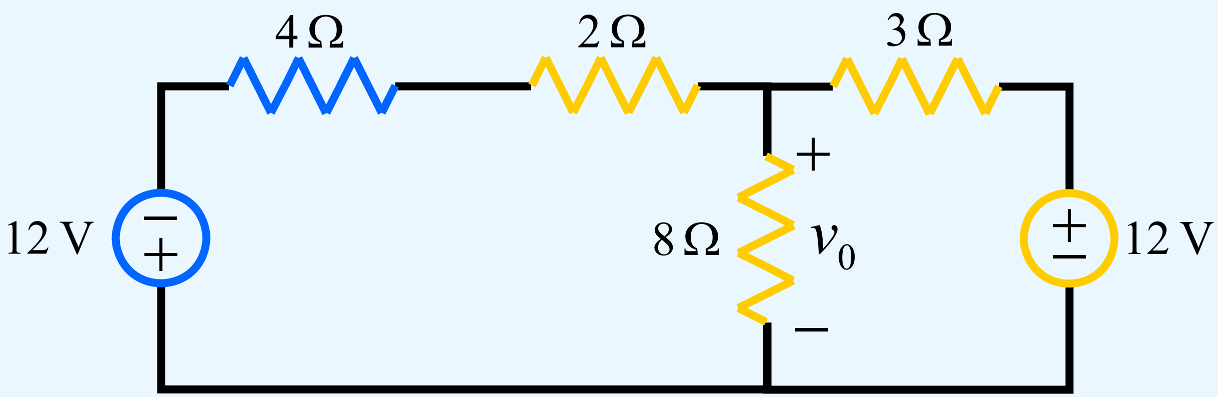


Solución:

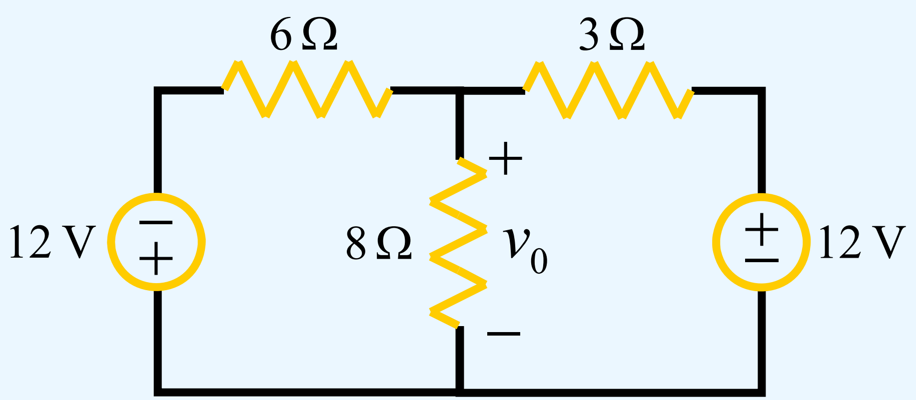


- Comenzamos transformando la fuente de corriente a una de tensión:

$$v_S = Ri_S = 4 \times 3 = 12\ \text{V}$$

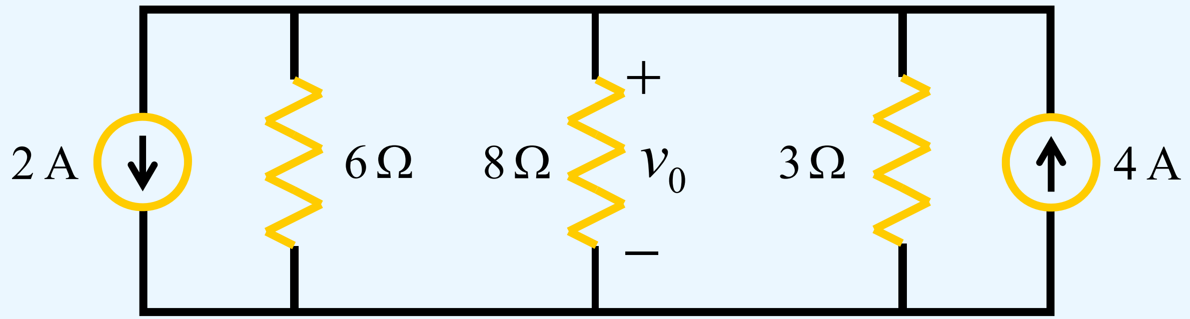


- Ahora, asociamos las dos resistencias en serie:



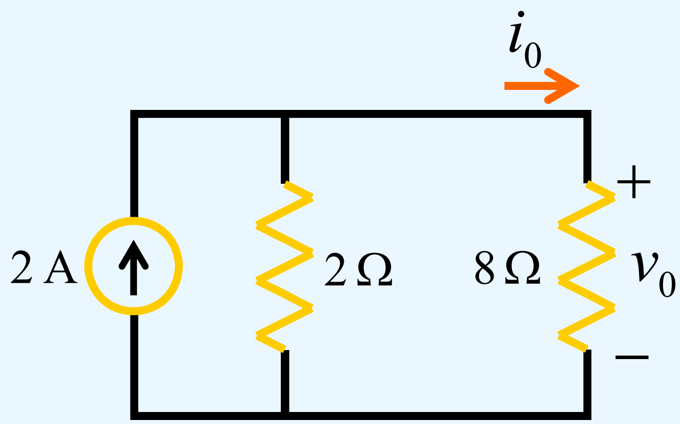
- Seguidamente, transformamos las fuentes de tensión:

$$i_S = \frac{v_S}{R} = \frac{12}{6} = 2\ \text{A} \qquad\qquad i_S = \frac{v_S}{R} = \frac{12}{3} = 4\ \text{A}$$



- Agrupando resistencias y fuentes:

$$6\,\Omega \,\|\, 3\,\Omega = \frac{6\times 3}{6+3} = 2\,\Omega$$



- Por último, usamos la fórmula del divisor de corriente:

$$i_0 = \frac{2}{2+8}\times 2 = 0.4\ \text{A}$$

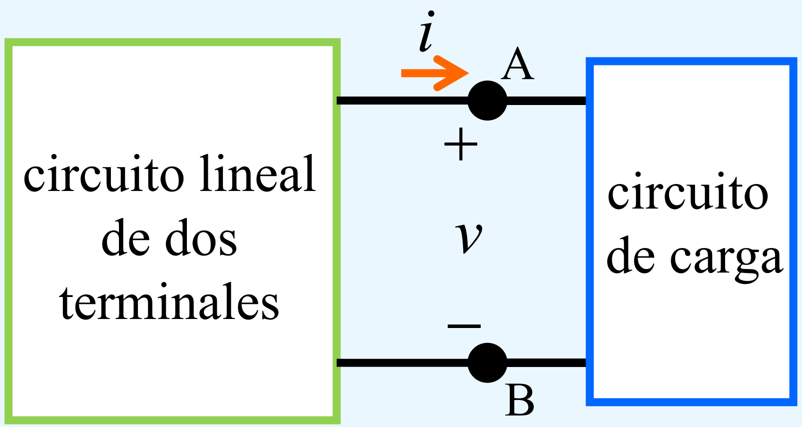
- y la ley de Ohm:

$$v_0 = R i_0 \ = 8\times 0.4 = 3.2\ \text{V}$$

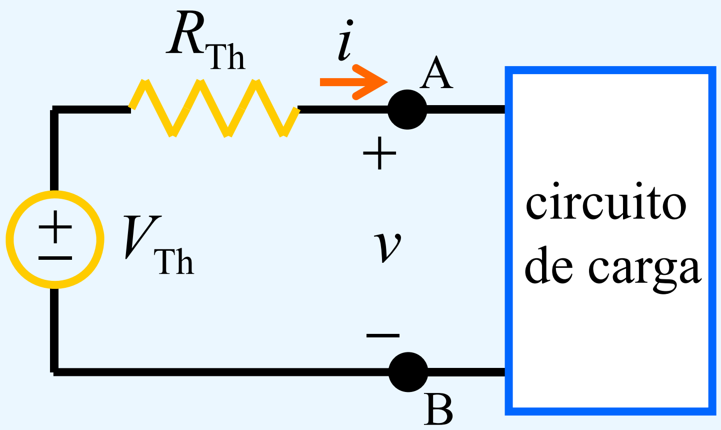
3.4 Teorema de Thevenin

- Suele ocurrir que un elemento de un circuito sea variable (carga), mientras que los demás permanecen fijos. Entonces, cada vez que se cambia la carga debemos volver a analizar todo.
- El teorema de Thevenin proporciona una técnica para sustituir la parte fija por un circuito equivalente sencillo.

El teorema de Thevenin establece que un circuito lineal de dos terminales puede sustituirse por un circuito equivalente formado por una fuente de tensión V_{Th} en serie con una resistencia R_{Th}



Circuito original

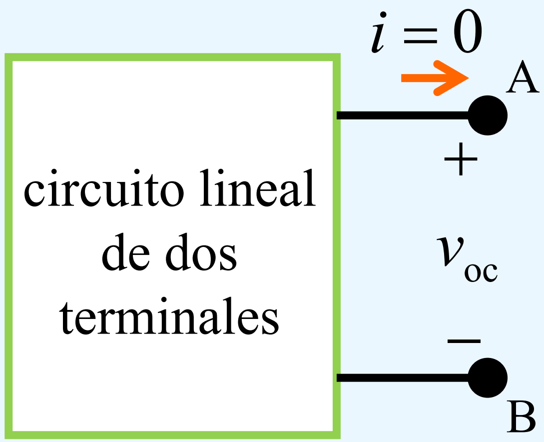


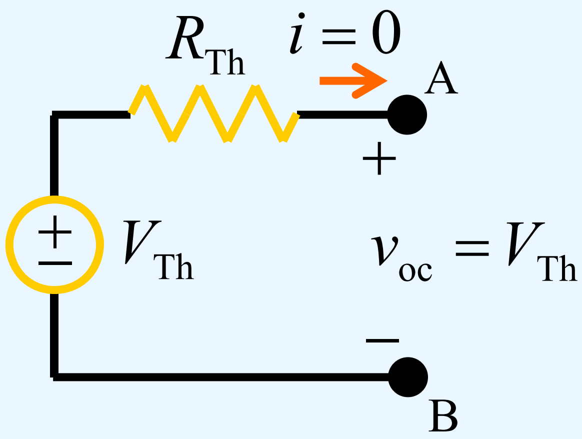
Circuito equivalente de Thevenin

3.4 Teorema de Thevenin

- Cálculo de la tensión equivalente de Thevenin:

  - Utilizamos como circuito de carga un circuito abierto





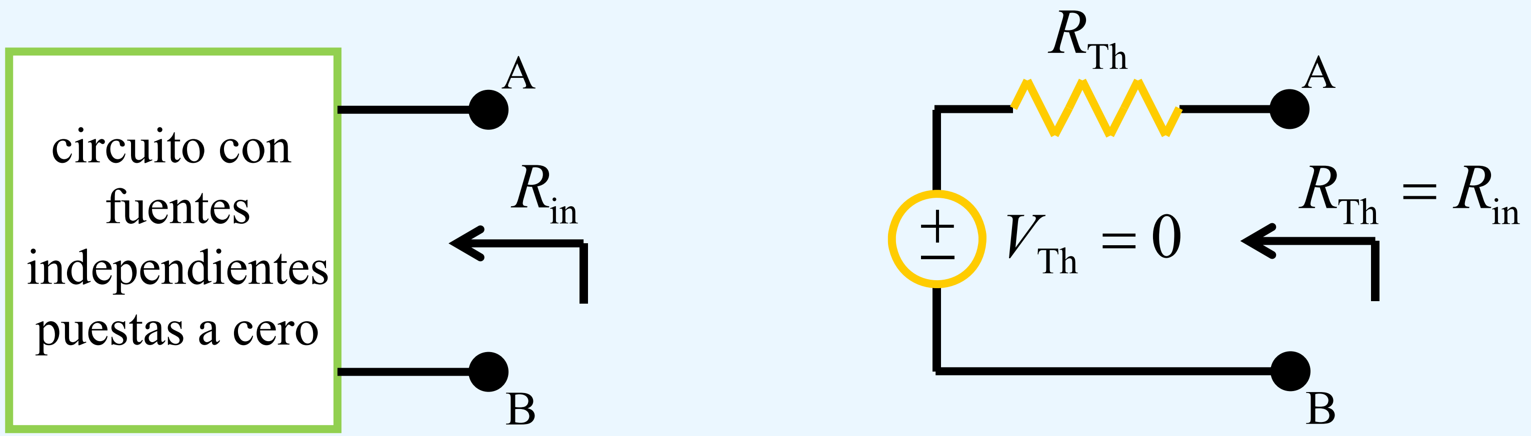
- En esta situación se cumple

$$\boxed{V_{Th} = v_{oc}}$$

3.4 Teorema de Thevenin

- Cálculo de la resistencia equivalente de Thevenin, R_{Th}:

  - Se ponen a cero las fuentes independientes. Entonces la R_{Th} coincide con la resistencia de entrada R_{in} vista en los terminales del circuito



- Entonces

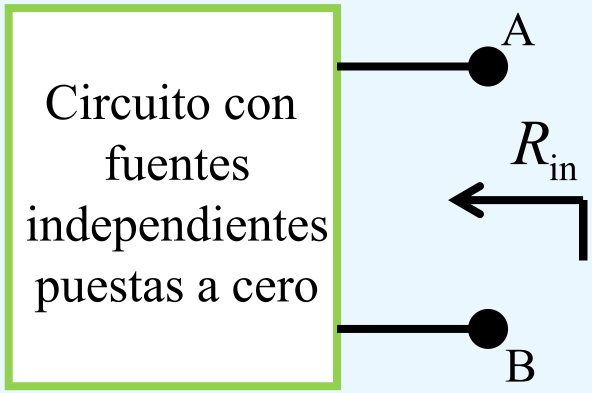
$$\boxed{R_{Th} = R_{in} \text{ (con las fuentes independientes a cero)}}$$

- Poner las fuentes independientes a cero significa:

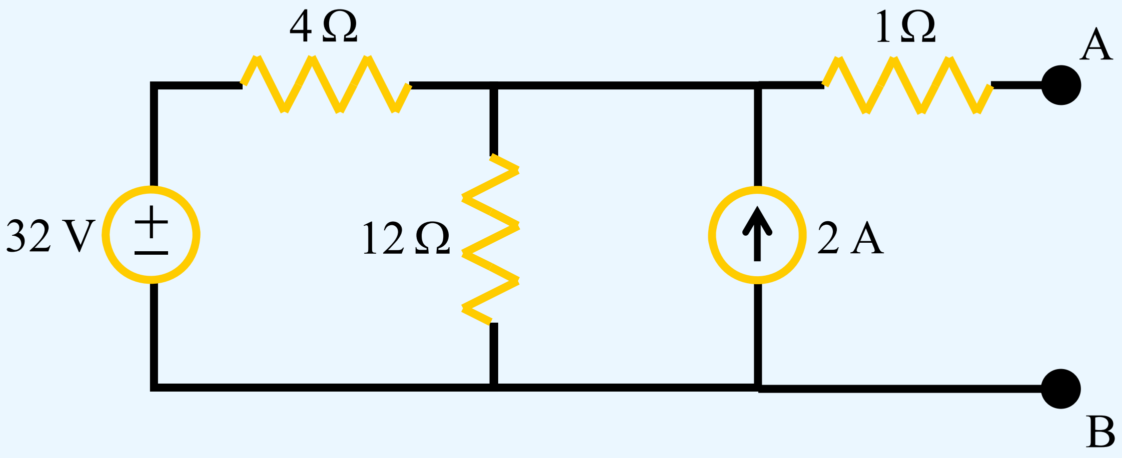
1. Cortocircuitar las fuentes independientes de tensión
2. Dejar en circuito abierto las fuentes independientes de corriente

- Determinación de la resistencia de entrada R_{in}:

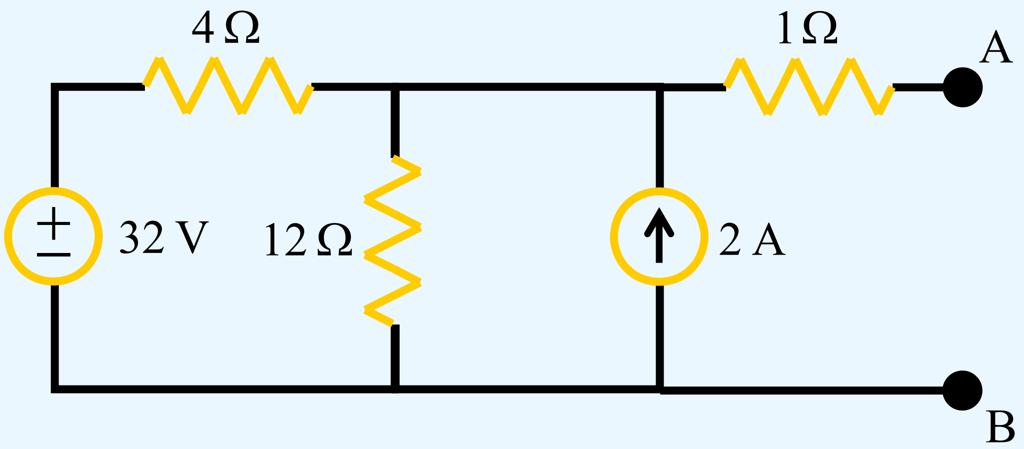
- CASO 1: Circuito SIN fuentes dependientes.
  1. Se ponen las fuentes independientes a cero
  2. Se calcula R_{in} mediante asociación de resistencias

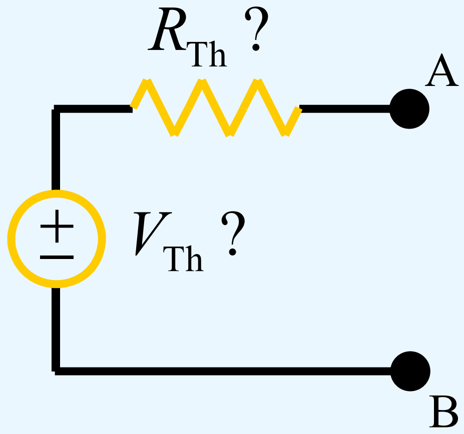


-Ejemplo 3: Calcular el equivalente Thevenin del circuito de la figura



Solución:

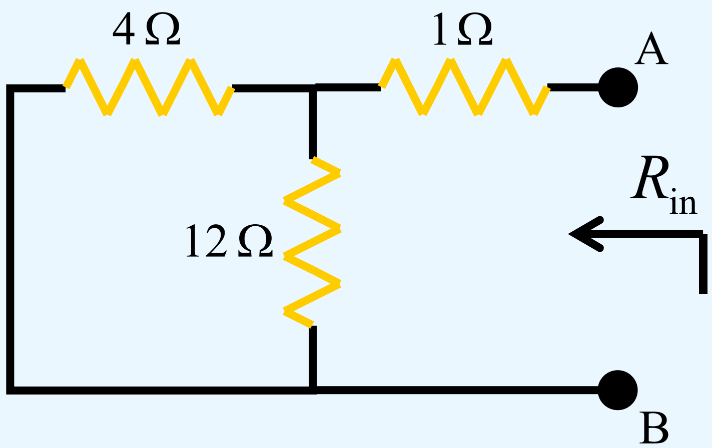




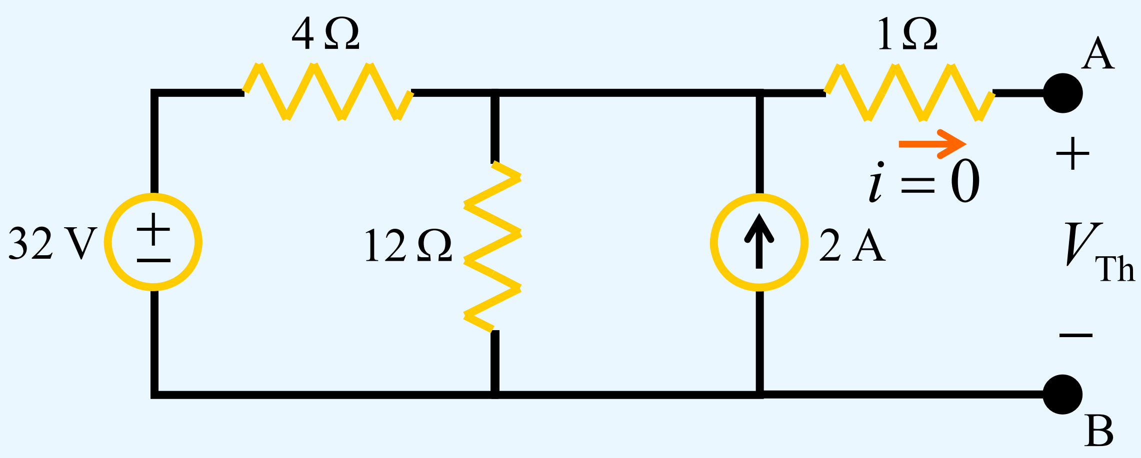
- Comenzamos calculando la resistencia Thevenin. Para ello, ponemos a cero las fuentes independientes y calculamos la resistencia de entrada

$$R_{in} = \left(4\ \Omega \parallel 12\ \Omega\right) + 1\ \Omega$$

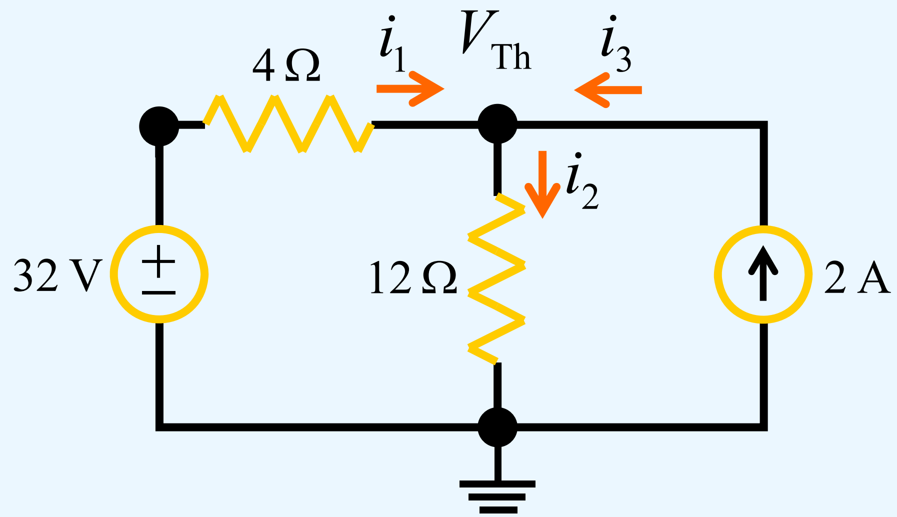
$$= \frac{4 \times 12}{4 + 12} + 1 = 4\ \Omega$$



- Para obtener la <u>tensión Thevenin</u> calculamos la tensión de circuito abierto en los terminales A-B



- Resolvemos por análisis de nudos



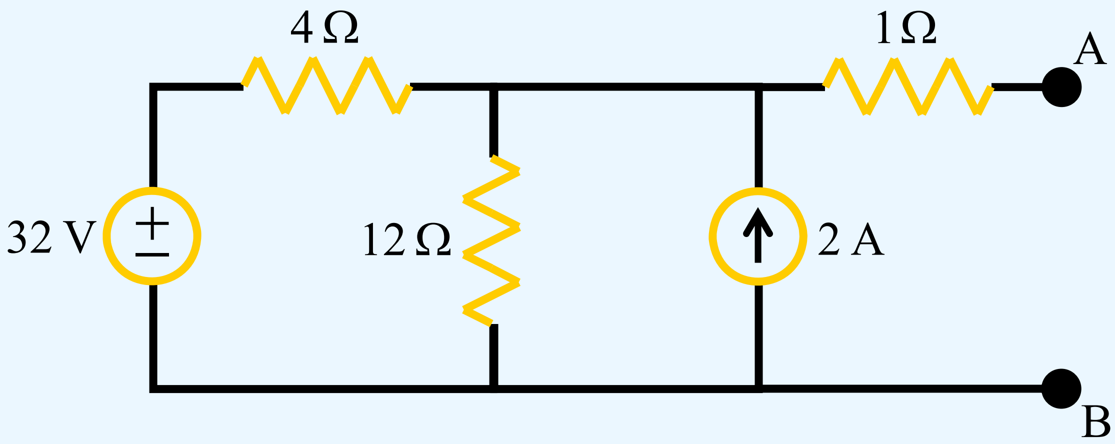
- KCL: $i_1 + i_3 = i_2$

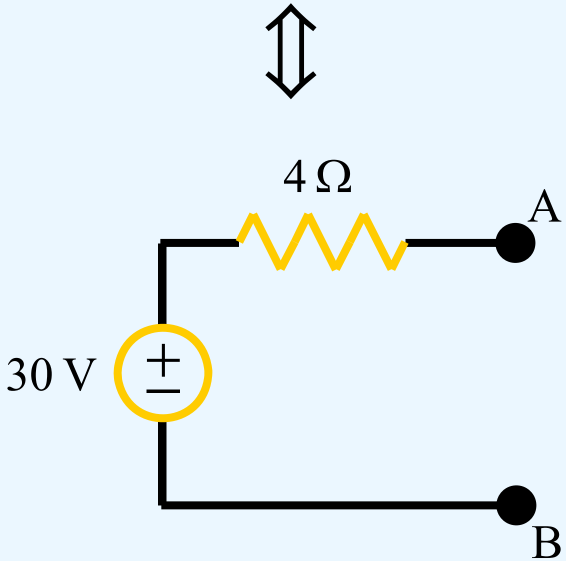
- Usando la ley de Ohm:

$$\frac{32 - V_{Th}}{4} + 2 = \frac{V_{Th}}{12}$$

- Despejando: $V_{Th} = 30\ \mathrm{V}$

- Por tanto:





$$R_{\mathrm{Th}} = R_{\mathrm{in}} = 4\ \Omega$$

$$V_{\mathrm{Th}} = 30\ \mathrm{V}$$

3.4 Teorema de Thevenin

- Determinación de la resistencia de entrada R_{in}:

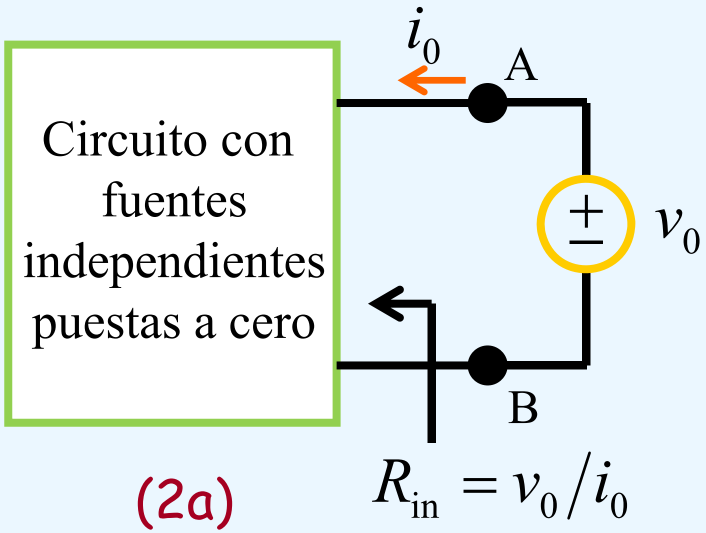
- <u>*CASO 2*</u>: Circuito CON fuentes dependientes.

1. Se ponen las fuentes independientes a cero

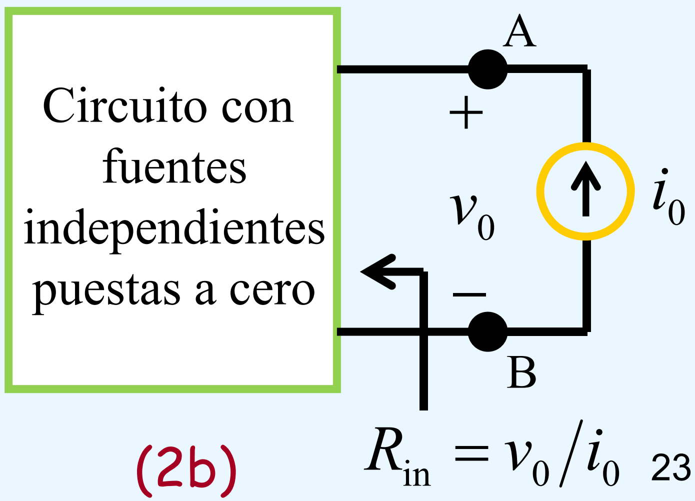
2a. Se aplica una fuente de tensión v_0 entre los terminales AB y se calcula la corriente i_0 que circula por la fuente.

2b. O bien, se aplica una fuente de corriente i_0 entre los terminales AB y se calcula la tensión v_0 entre dichos terminales.

Entonces $R_{in}=v_0/i_0$



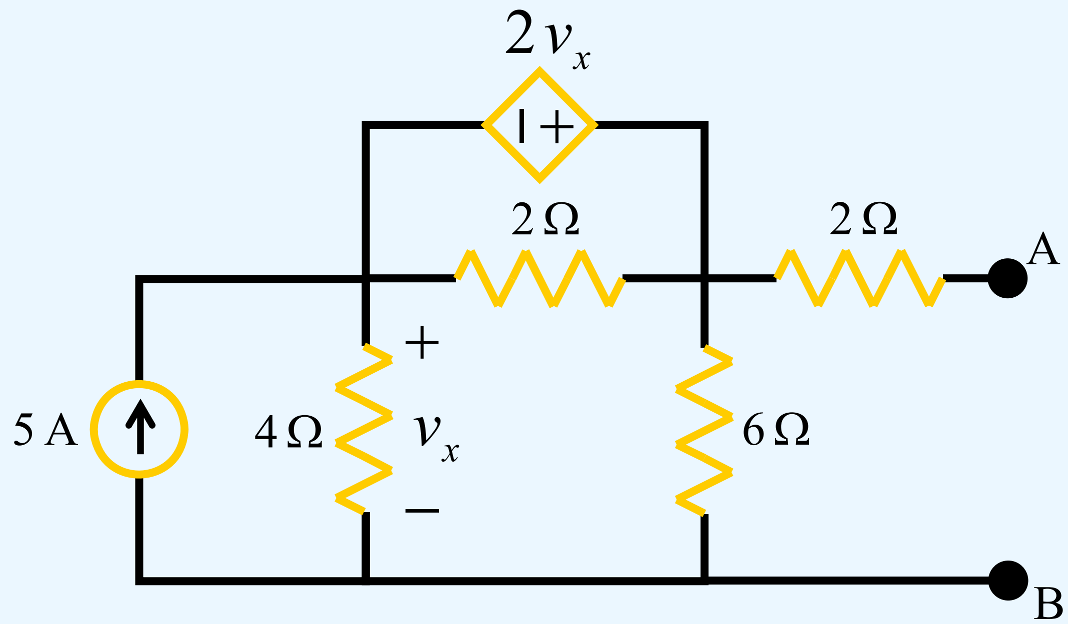
(2a)



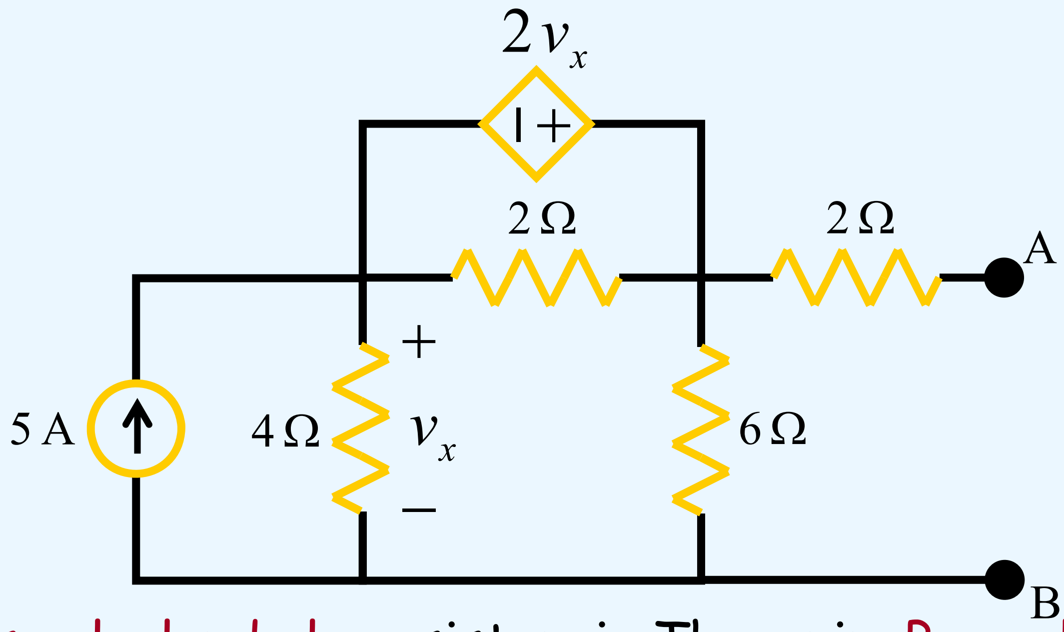
(2b)

-<u>Ejemplo 4</u>: Calcular el equivalente Thevenin del circuito de la figura

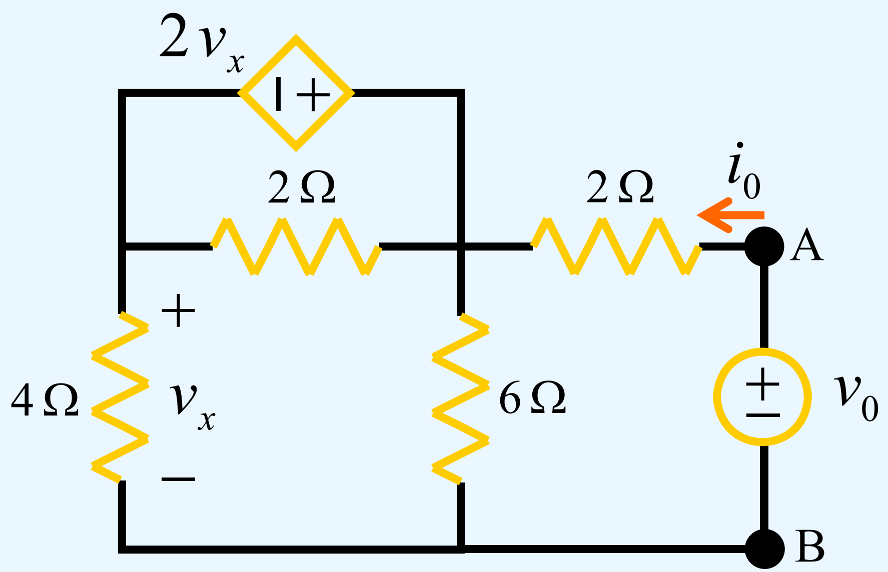
A&S-3ª Ej. 4.9



Solución:

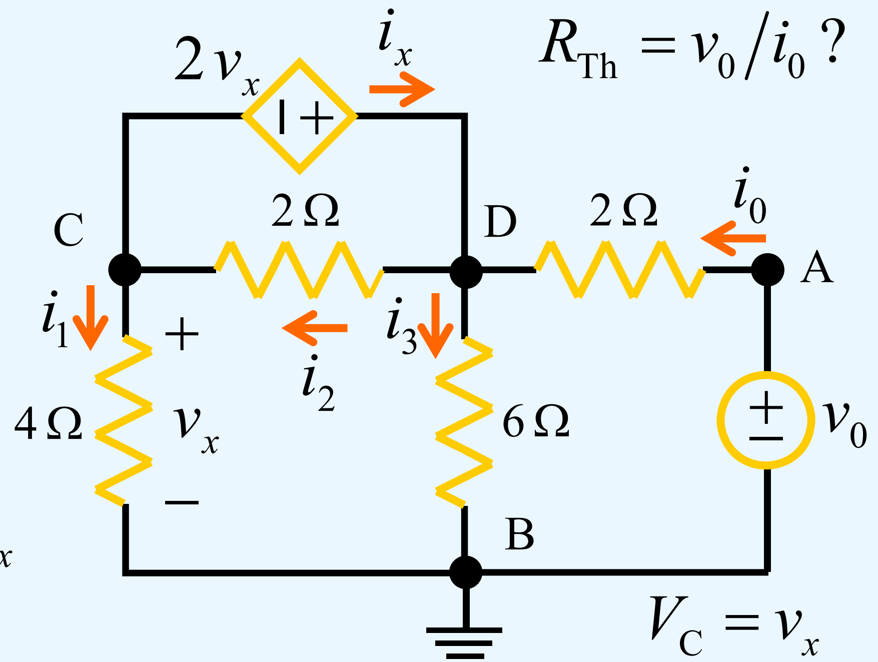


- Comenzamos calculando la resistencia Thevenin. Para ello, ponemos a cero las fuentes independientes, ponemos una fuente de tensión v_0 entre los terminales y calculamos la corriente que pasa por ella.



$$R_{\text{in}} = v_0 / i_0$$

- Resolvemos por análisis de nudos:



$V_{\mathrm{C}} = v_x$

$V_{\mathrm{A}} = v_0$

- Aplicando la KCL:
- NUDO C: $i_2 = i_1 + i_x$
- NUDO D: $i_0 + i_x = i_2 + i_3$
- Nudo (C + D): $i_0 = i_1 + i_3$
- Fuente: $V_{\mathrm{D}} - V_{\mathrm{C}} = 2v_x \;\Rightarrow\; V_{\mathrm{D}} = 3v_x$
- Ley Ohm:

$$i_0 = \frac{v_0 - 3v_x}{2} \qquad i_1 = \frac{v_x}{4} \qquad i_3 = \frac{3v_x}{6}$$

- Sust. en Nudo (C+D):

$$\frac{v_0 - 3v_x}{2} = \frac{v_x}{4} + \frac{3v_x}{6}$$

- de donde $v_x = \dfrac{2}{9} v_0$

- De la ley de Ohm en A-D:

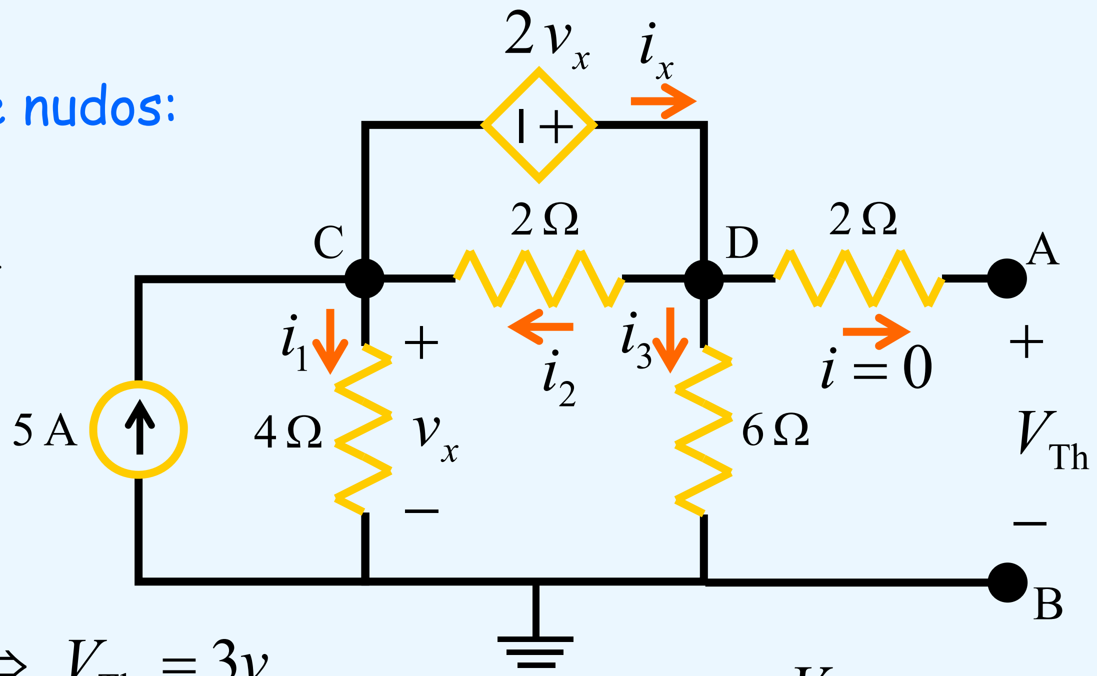
$$i_0 = \frac{v_0 - 3v_x}{2}$$

- Sust. v_x y despejando

$$\boxed{\frac{v_0}{i_0} = R_{\mathrm{Th}} = 6\Omega}$$

- Para obtener la <u>tensión Thevenin</u> calculamos la tensión de circuito abierto

- Resolvemos por análisis de nudos:



- NUDO C: $i_2 + 5 = i_1 + i_x$

- NUDO D: $i_x = i_2 + i_3$

- Nudo (C + D): $5 = i_1 + i_3$

- Fuente: $V_{\text{Th}} - V_{\text{C}} = 2v_x \;\Rightarrow\; V_{\text{Th}} = 3v_x$

$V_{\text{C}} = v_x$

$V_{\text{D}} = V_{\text{A}} = V_{\text{Th}}$

- Ley de Ohm: $i_1 = \dfrac{v_x}{4} \qquad i_3 = \dfrac{3v_x}{6}$

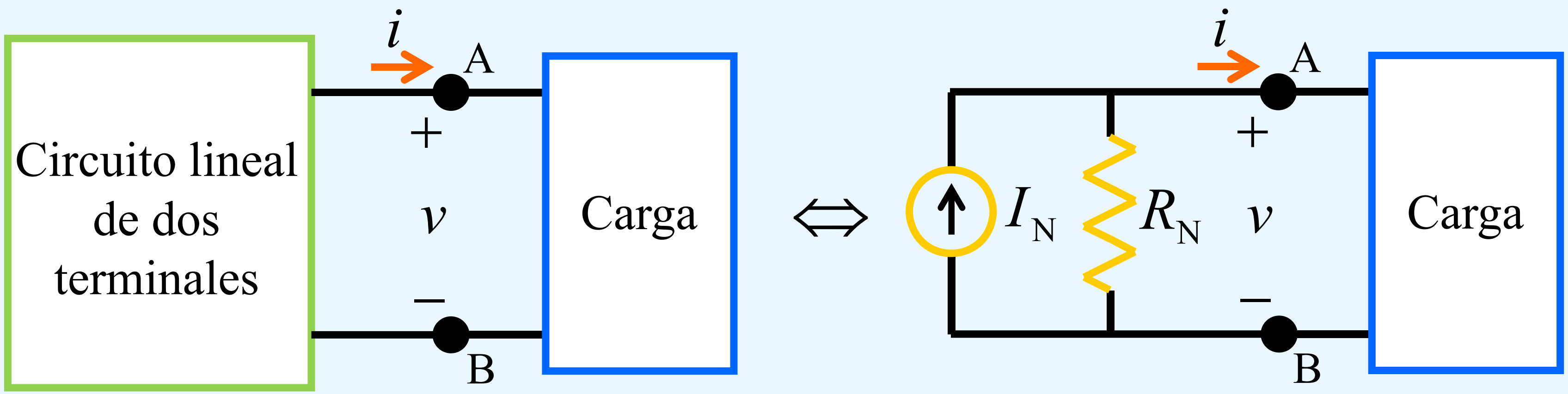
- Sust. en nudo (C+D):

$$5 = \frac{v_x}{4} + \frac{v_x}{2} \;\longrightarrow\; v_x = \frac{20}{3}\ \text{V} \;\longrightarrow\; \boxed{V_{\text{Th}} = 3v_x = 20\ \text{V}}$$

3.5 Teorema de Norton

- El teorema de Norton es el dual del teorema de Thevenin

El teorema de Norton establece que un circuito lineal de dos terminales puede sustituirse por un circuito equivalente formado por una fuente de corriente I_N en paralelo con una resistencia R_N



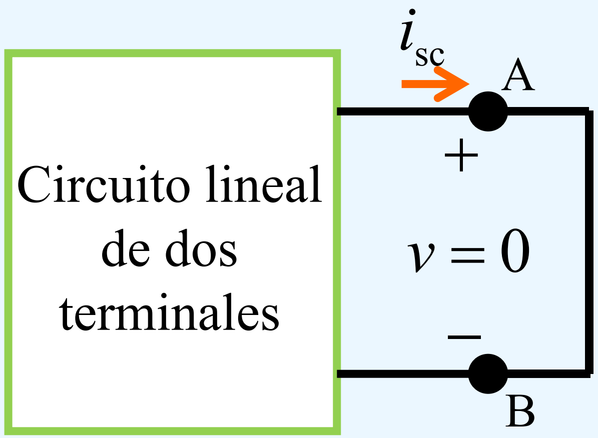
Circuito original

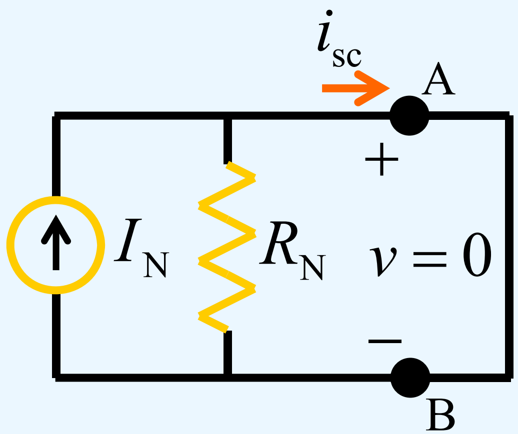
Circuito equivalente de Norton

3.5 Teorema de Norton

- Cálculo de la corriente de Norton:

  - Utilizamos como circuito de carga un corto circuito





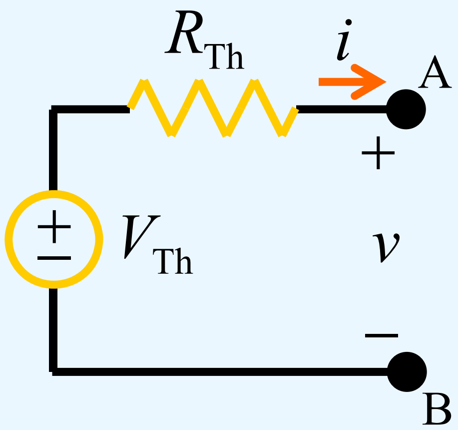
  - En esta situación se cumple

$$\boxed{I_N = i_{sc}}$$

3.5 Teorema de Norton

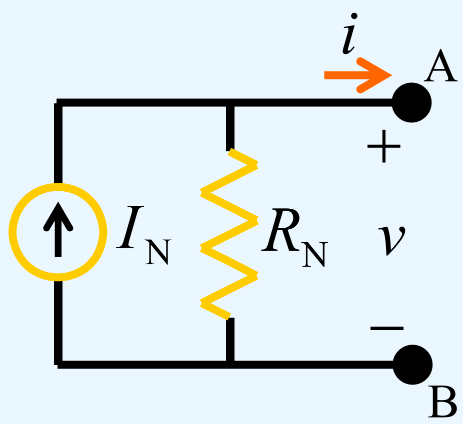
- Cálculo de la resistencia de Norton:

  - Partimos del equivalente Thevenin y aplicamos transformación de fuentes



$$R_N = R_{Th}$$

$$I_N = \frac{V_{Th}}{R_{Th}}$$

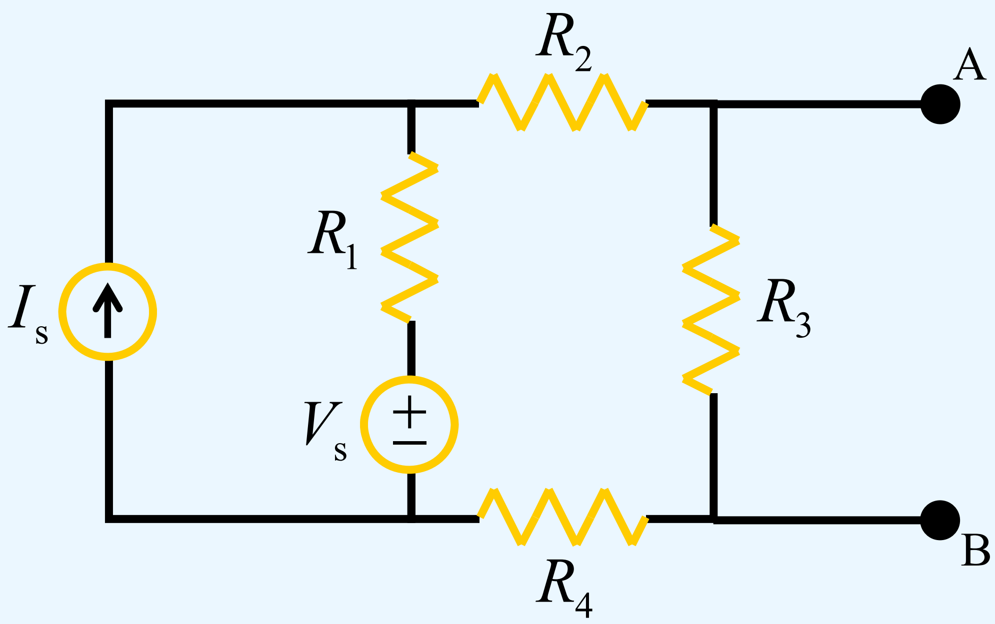


- Además, teniendo en cuenta que $\begin{cases} V_{Th} = v_{oc} \\ I_N = i_{sc} \end{cases}$

- se obtiene

$$\boxed{R_{Th} = R_N = \frac{V_{Th}}{I_N} = \frac{v_{oc}}{i_{sc}}}$$

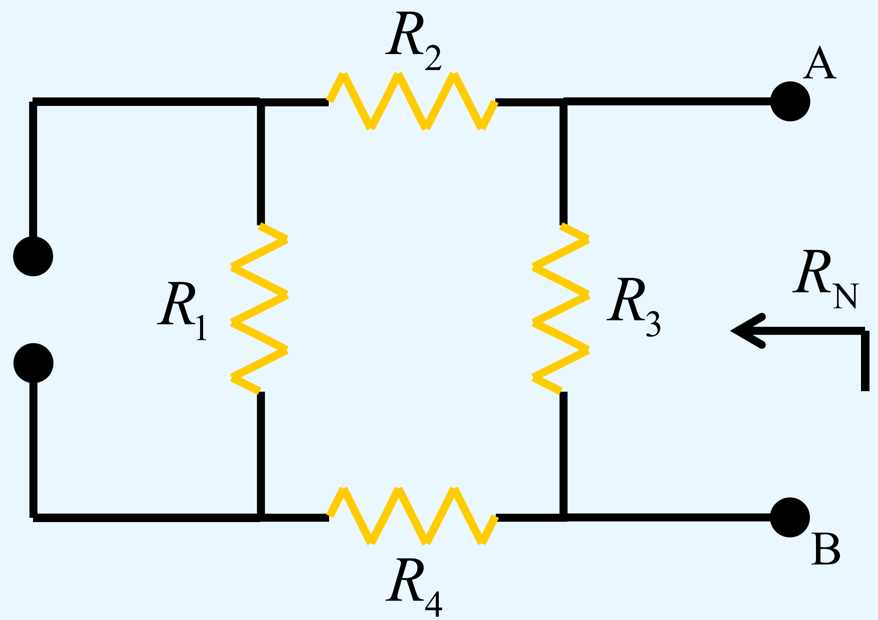
- Ejemplo 5: Calcular el equivalente Norton del circuito de la figura.
I_s = 2 A, V_s = 12 V, R_1 = 4 Ohm, R_2 = R_4 = 8 Ohm, R_3 = 5 Ohm



Solución:

- Cálculo de la resistencia equivalente de Norton R_N :

  - Ponemos a cero las fuentes independientes



$R_1 = 4\ \Omega$

$R_2 = 8\ \Omega$

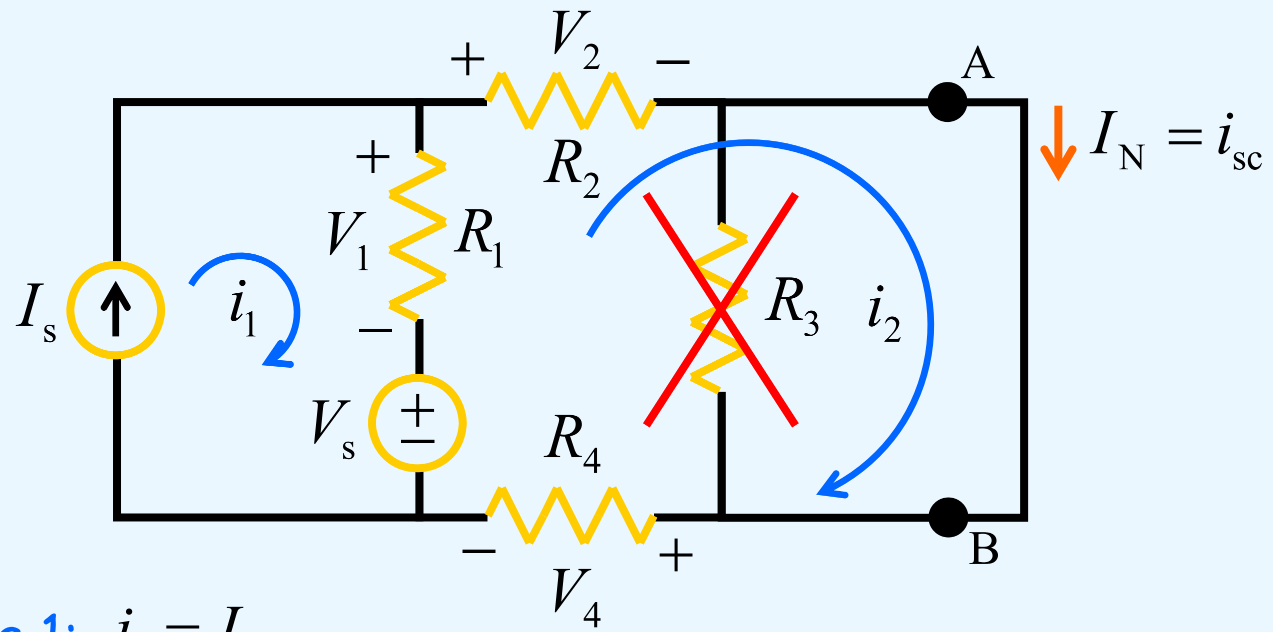
$R_3 = 5\ \Omega$

$R_4 = 8\ \Omega$

$$\boxed{R_N = (R_1 + R_2 + R_4) \,\|\, R_3 = 20 \,\|\, 5 = \frac{20 \times 5}{20 + 5} = 4\,\Omega}$$

- Cálculo de la fuente de corriente equivalente de Norton I_N :

- Calculamos la corriente de cortocircuito



$R_1 = 4\ \Omega$

$R_2 = 8\ \Omega$

$R_3 = 5\ \Omega$

$R_4 = 8\ \Omega$

$I_S = 2\ \text{A}$

$V_S = 12\ \text{V}$

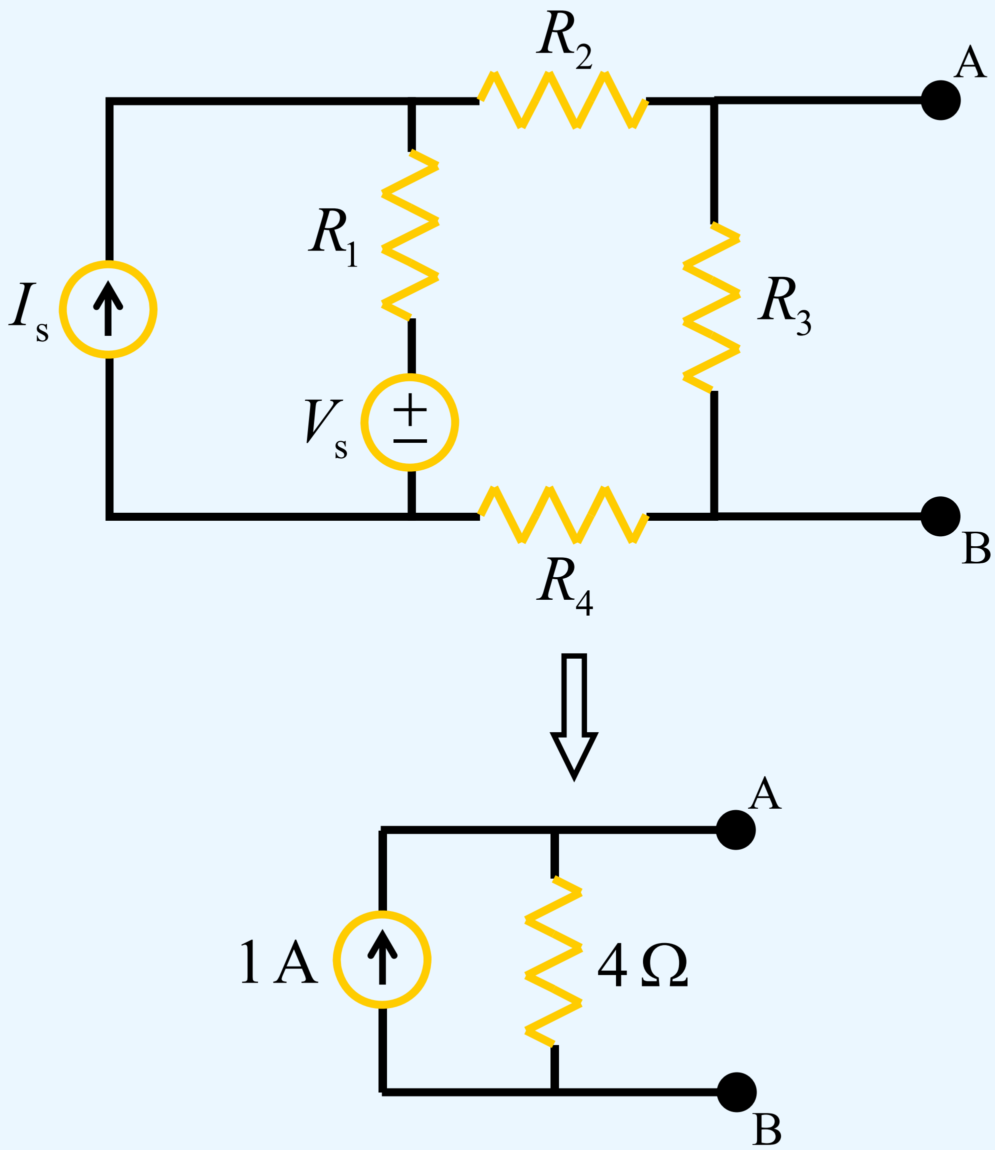
- Malla 1: $i_1 = I_S$

- KVL para la malla 2: $-V_s - V_1 + V_2 + V_4 = 0$

- Aplicando la ley de Ohm: $-V_s - R_1(I_S - i_2) + R_2 i_2 + R_4 i_2 = 0$

- Resolviendo: $i_2 = \dfrac{V_s + R_1 I_S}{R_1 + R_2 + R_4} = \dfrac{12 + (4 \times 2)}{4 + 8 + 8} = 1\ \text{A}$

$$\boxed{I_N = i_2 = 1\ \text{A}}$$

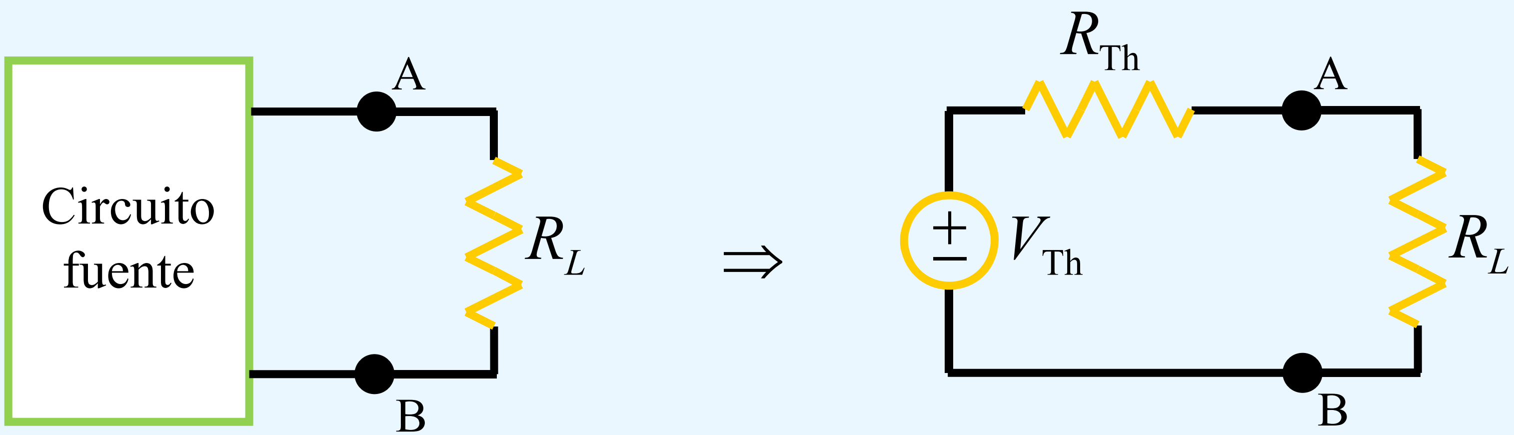


R_2
A
R_1
I_s
R_3
V_s
B
R_4
A
1 A
4 Ω
B

3.6 Máxima transferencia de potencia

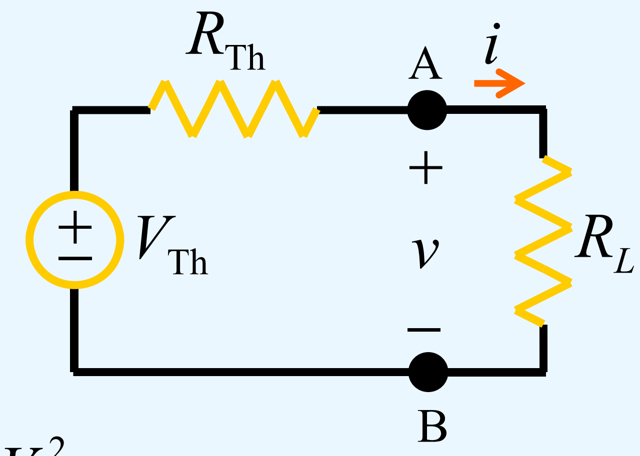
- En muchas situaciones prácticas un circuito se diseña para suministrar potencia a una carga

En condiciones de circuito fuente fijo y carga variable, la transferencia de potencia a la carga es máxima cuando la resistencia de carga R_L es igual a la resistencia del equivalente Thevenin del circuito fuente R_{Th} visto desde la fuente



$$\boxed{p = p_{max} \;\Rightarrow\; R_L = R_{Th}}$$

3.6 Máxima transferencia de potencia



- Demostración

  - Partimos del equivalente Thevenin del circuito fuente

$$\left.\begin{aligned} v &= \frac{R_L}{R_{\text{Th}} + R_L} V_{\text{Th}} \\ i &= \frac{v}{R_L} = \frac{V_{\text{Th}}}{R_{\text{Th}} + R_L} \end{aligned}\right\} \quad \mathrm{p} = vi = \frac{R_L}{\left(R_{\text{Th}} + R_L\right)^2} V_{\text{Th}}^2$$

  - Para encontrar el máximo derivamos: $\dfrac{\partial \mathrm{p}}{\partial R_L} = \dfrac{R_{\text{Th}} - R_L}{\left(R_{\text{Th}} + R_L\right)^3} V_{\text{Th}}^2$

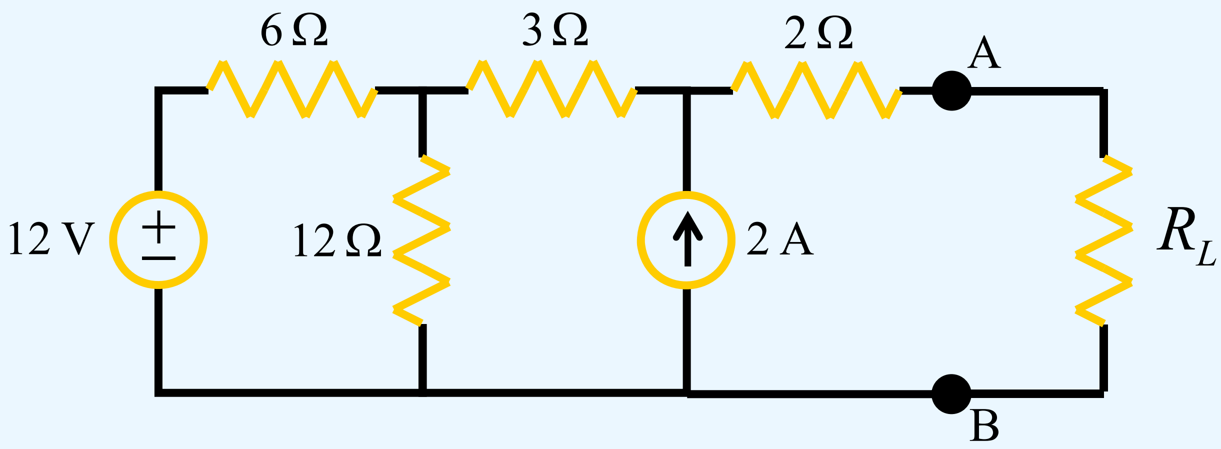
  - Igualando a cero la derivada: $\boxed{\dfrac{\partial \mathrm{p}}{\partial R_L} = 0 \;\Rightarrow\; R_L = R_{\text{Th}}}$

  - Se puede comprobar que $\dfrac{\partial^2 \mathrm{p}}{\partial R_L^2} < 0$

  - La potencia máxima resulta: $\boxed{p_{\max} = \dfrac{V_{\text{Th}}^2}{4R_L}}$

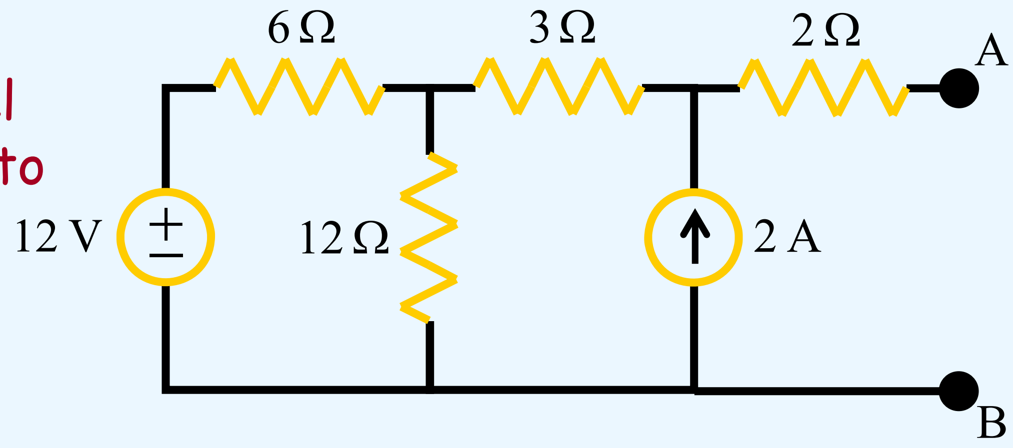
- <u>Ejemplo 6</u>: Determinar el valor de R_L para que la transferencia de potencia en el circuito de la figura sea máxima. Calcular la potencia máxima.

A&S-3ª Ej. 4.13

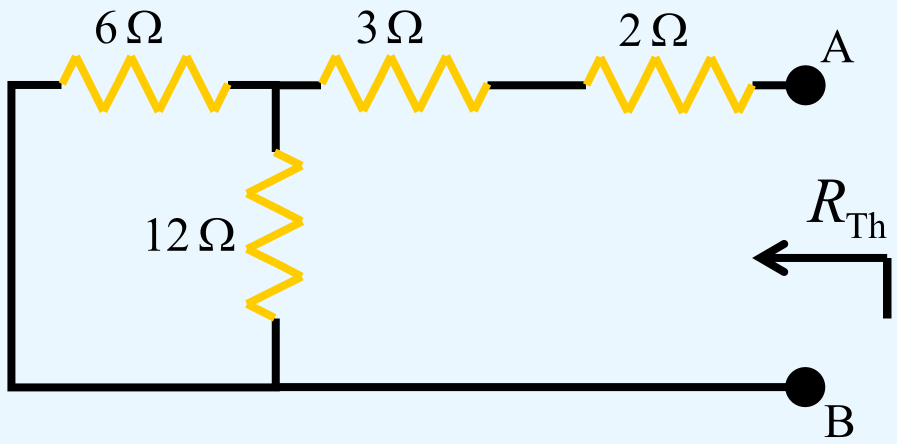


Solución:

- Comenzaremos determinando el equivalente Thevenin del circuito fuente:

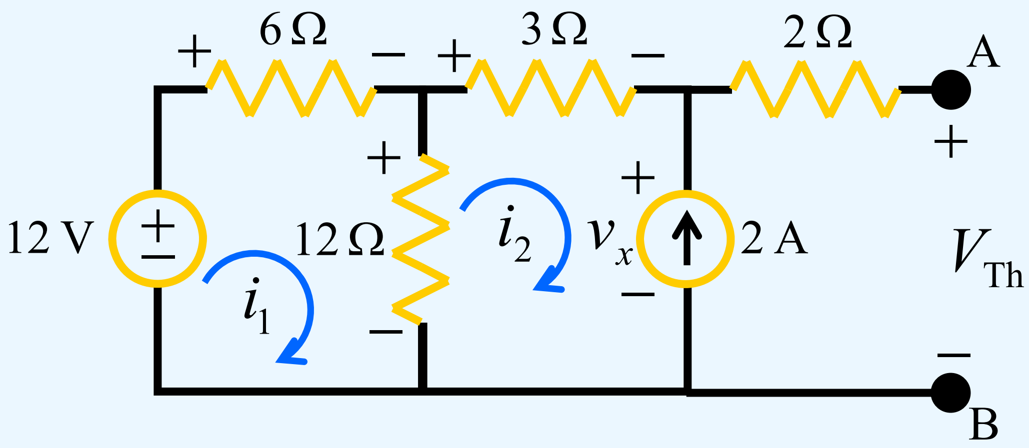


- Cálculo de la resistencia Thevenin R_{Th} :



$$R_{Th} = (6\Omega \parallel 12\Omega) + 3\Omega + 2\Omega = \frac{6 \times 12}{6 + 12} + 3 + 2 = 9\ \Omega$$

- Cálculo de la tensión Thevenin V_{Th} :



- Malla 1: $-12+6i_1+12(i_1+2)=0 \longrightarrow i_1=-\dfrac{2}{3}\text{ A}$

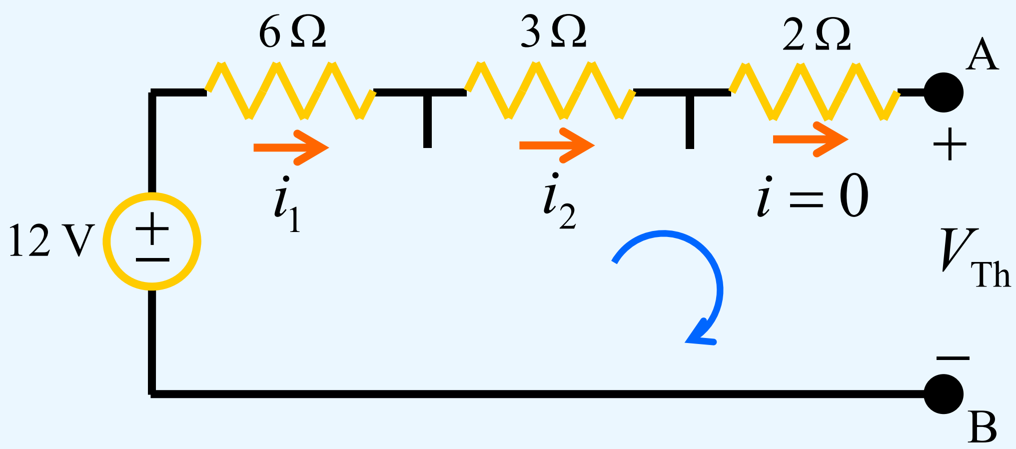
- Malla 2: $i_2=-2\text{ A}$

- Cálculo de V_{Th}:

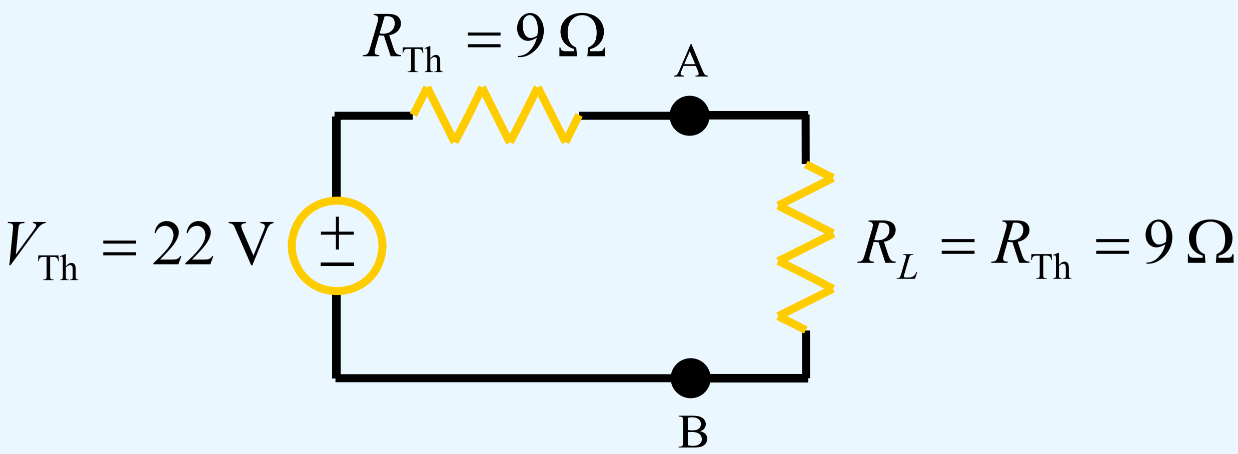
$$V_{Th}-12+6i_1+3i_2=0$$

$$V_{Th}=12-6i_1-3i_2$$

$$\boxed{V_{Th}=22\text{ V}}$$



- Cálculo de la potencia máxima



$$p_{\max} = \frac{V_{\text{Th}}^2}{4R_L} = \frac{(22)^2}{4\times 9} = 13.44\ \text{W}$$