

Tema 4. Condensadores y Bobinas

4.1 Introducción

4.2 Condensadores

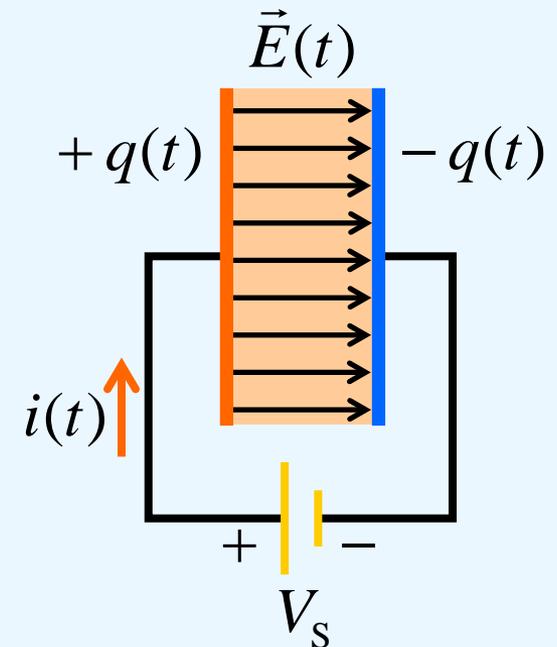
4.3 Energía almacenada en un condensador

4.4 Asociación de condensadores

4.5 Bobinas

4.6 Energía almacenada en una bobina

4.7 Asociación de bobinas



Bibliografía Básica para este Tema:

- [1] C. K. Alexander, M. N. O. Sadiku, "Fundamentos de circuitos eléctricos", 3ª ed., McGraw-Hill, 2006.
- [2] R. C. Dorf, J. A. Svoboda, "Introduction to electric circuits", 7th ed., John Wiley & Sons, 2006.

Sadiku → Tema 6

Dorf → Tema 7

- Esta presentación se encuentra, temporalmente, en:

<http://personales.unican.es/peredaj/AC.htm>

4.1 Introducción

- En los temas anteriores hemos estudiado circuitos en régimen de corriente continua (sólo incluyen fuentes de continua y resistencias)
- Una fuente de continua es aquella que proporciona un valor constante (independiente del tiempo) de tensión (o corriente).
- El concepto "fuente de continua" es una idealización, ya que todas las fuentes se encienden y apagan en instantes concretos de tiempo
- En este tema y el siguiente abordaremos el análisis de circuitos con fuentes que se encienden y/o apagan en instantes concretos de tiempo
- Estamos interesados en estudiar circuitos en régimen transitorio, es decir, queremos analizar cómo varían las tensiones y corrientes en un circuito durante los instantes de tiempo inmediatamente posteriores a un cambio abrupto en el valor de alguna fuente
- Para realizar este estudio debemos introducir nuevos elementos de circuito: los condensadores y las bobinas

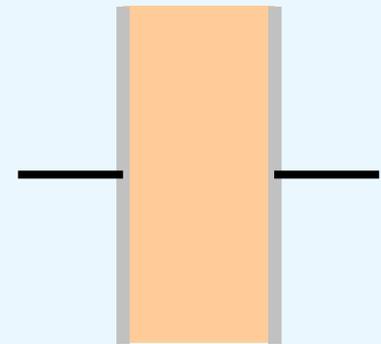
4.2 Condensadores

- Definición de condensador:

- * Un condensador es un elemento pasivo capaz de almacenar energía eléctrica
- * Esta formado por dos conductores (armaduras) separados por un material aislante (dieléctrico)

- **Condensador de placas plano-paralelas:** en su configuración más sencilla las armaduras están constituidas por una pareja de placas metálicas mutuamente paralelas.

- En muchas aplicaciones prácticas las placas son de aluminio, mientras que el dieléctrico puede ser aire, cerámica, papel, mica,...



4.2 Condensadores

- Condensador descargado:

- Un condensador descargado es aquél cuyas placas no tienen carga neta (son neutras)

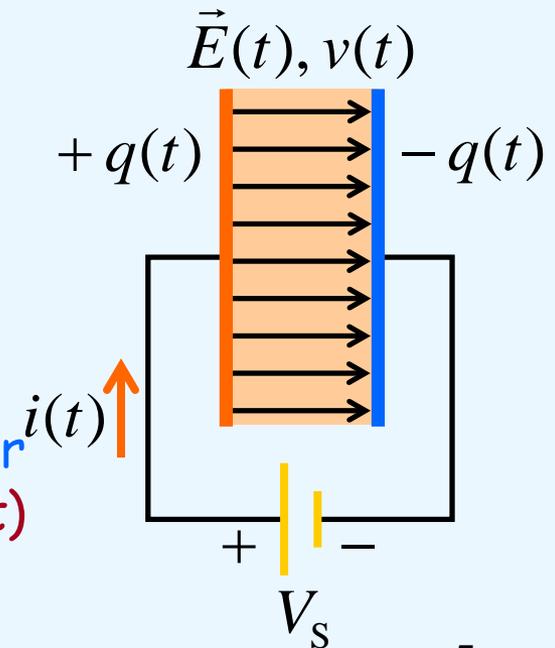
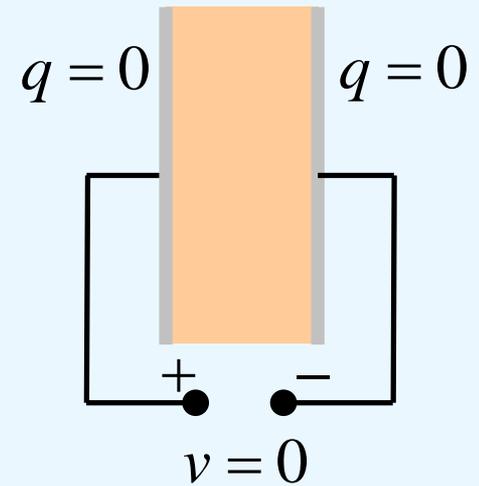
- La tensión entre las placas de un condensador descargado es nula

- Proceso de carga: (descripción fenomenológica)

- La forma más sencilla de cargar un condensador es conectándolo a una batería

- Durante el proceso de carga:

1. Se crea una corriente en el circuito $i(t)$
2. Electrones de una placa pasan a la otra
3. Aparece un campo eléctrico en el condensador
4. Se establece una tensión entre las placas $v(t)$



4.2 Condensadores

- Proceso de carga: (descripción fenomenológica)

- El proceso de carga No es instantáneo

- Termina cuando:

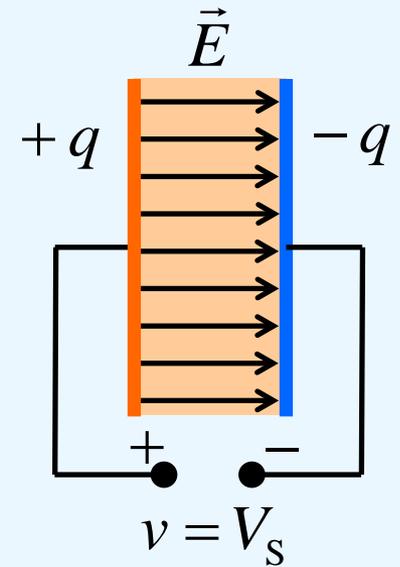
1. La corriente se va a cero

2. La tensión se iguala a la de la fuente

- Una vez concluido el proceso de carga y retirada la batería:

1. Ambas placas tienen la misma carga, pero de signo contrario

2. La tensión entre las placas es igual a la tensión de la batería



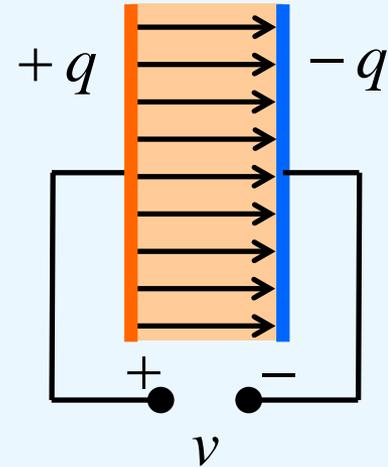
4.2 Condensadores

- Definición de capacidad:

“La capacidad es la relación entre la carga en la placa positiva, $q > 0$, y la tensión entre las dos placas $v > 0$ ”

- Matemáticamente:

$$C = \frac{q}{v}$$



- Unidades de la capacidad: El faradio (F)

$$1 \text{ faradio} = \frac{1 \text{ culombio}}{1 \text{ voltio}} \quad \longrightarrow \quad 1 \text{ F} = \frac{1 \text{ C}}{1 \text{ V}}$$

4.2 Condensadores

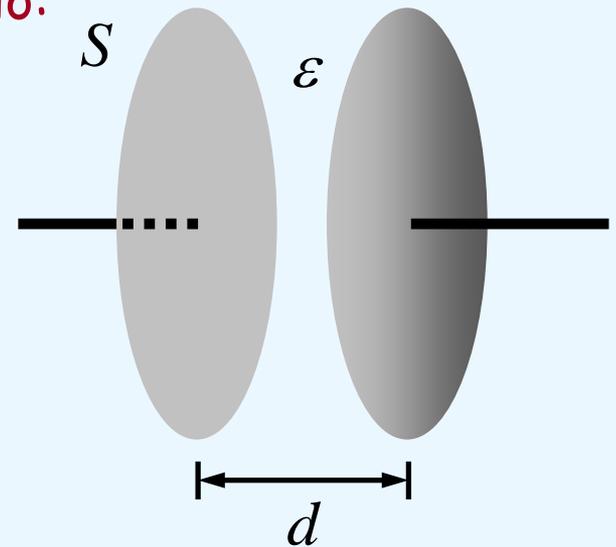
- Definición de capacidad:

- **Condensador lineal:** la capacidad de un condensador lineal es un valor positivo que no depende de la carga ni de la tensión aplicada, sólo depende de la geometría y de los materiales

- Capacidad de un condensador plano-paralelo:

$$C = \frac{\epsilon S}{d}$$

- S : área de las placas
- d : separación entre placas
- ϵ : permitividad del dieléctrico



4.2 Condensadores

- Relación i - v para un condensador:

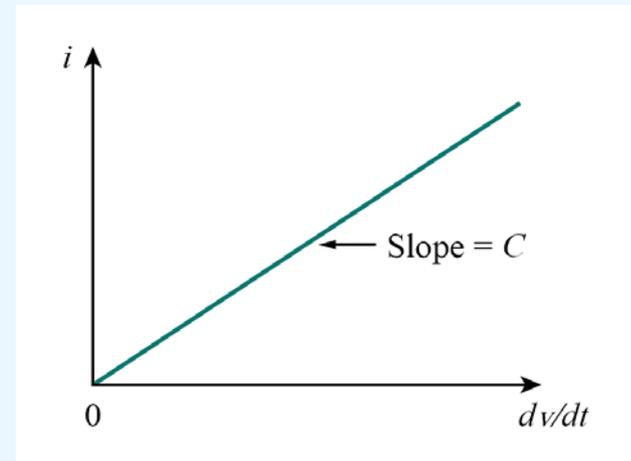
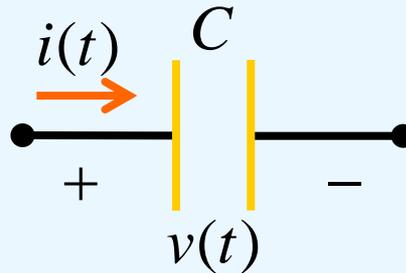
- Partimos de la relación carga-tensión: $q = Cv$

- Derivando respecto del tiempo: $\frac{dq}{dt} = C \frac{dv}{dt}$

- Teniendo en cuenta que: $i = \frac{dq}{dt}$

- Resulta:

$$i = C \frac{dv}{dt}$$

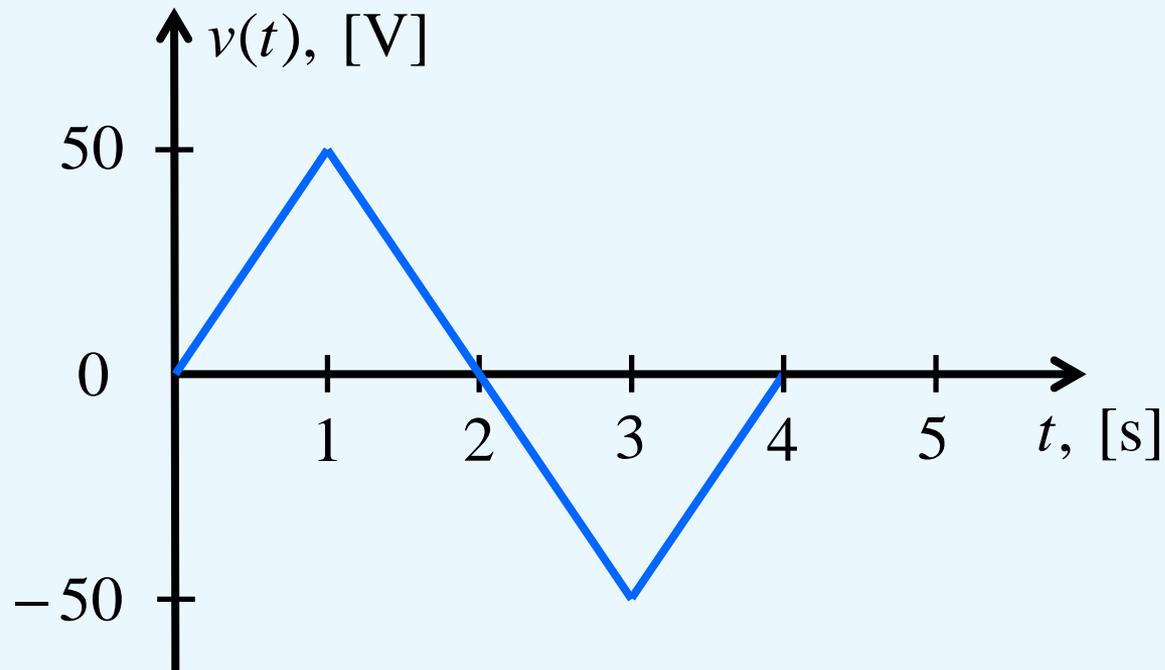


- Si $\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow i = 0$, luego

En régimen de corriente continua el circuito equivalente de un condensador es un circuito abierto

-Ejemplo 1: Determinar la corriente que circula por un condensador de $200 \mu\text{F}$ si la tensión entre sus terminales es la mostrada en la figura.

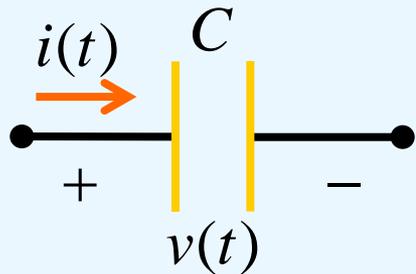
A&S-3ª Ej. 6.4



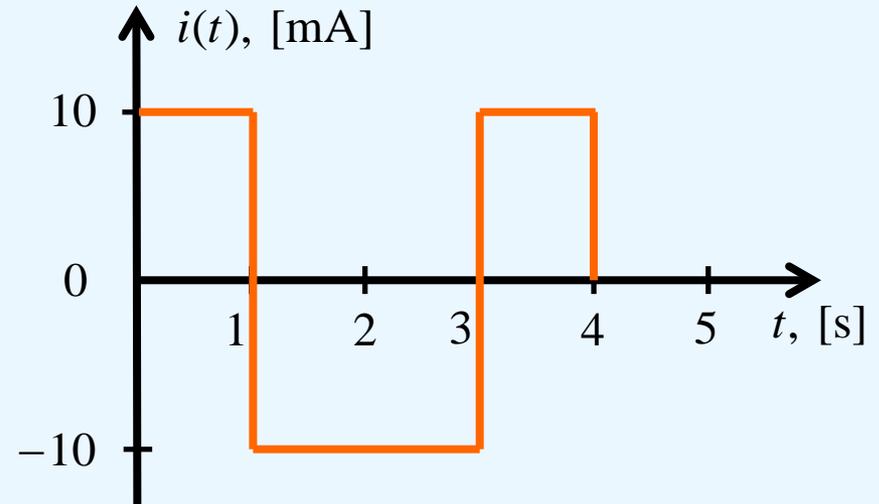
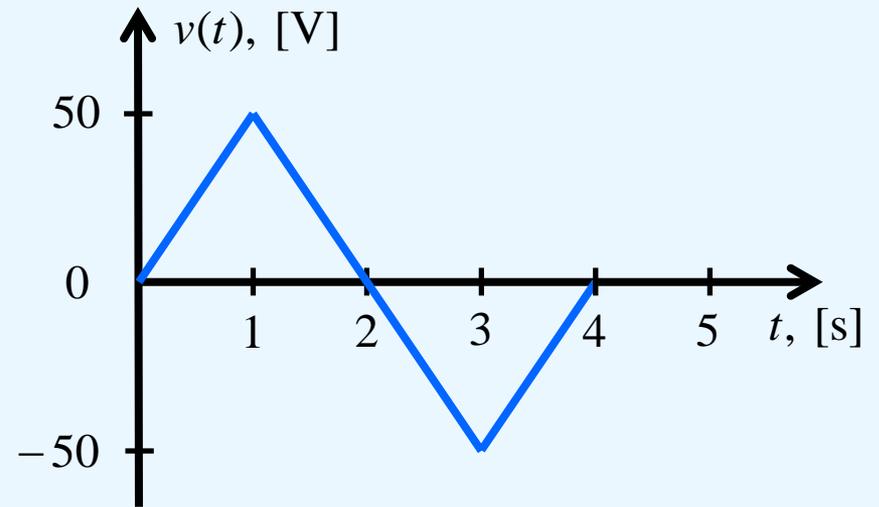
Solución:

$$C = 200 \mu\text{F}$$

$$v(t) = \begin{cases} 50t & 0 < t < 1 \\ 100 - 50t & 1 < t < 3 \\ -200 + 50t & 3 < t < 4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$



$$i(t) = 200 \times 10^{-6} \times \begin{cases} +50 & 0 < t < 1 \\ -50 & 1 < t < 3 \\ +50 & 3 < t < 4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} = \begin{cases} +10 \text{ mA} & 0 < t < 1 \\ -10 \text{ mA} & 1 < t < 3 \\ +10 \text{ mA} & 3 < t < 4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

4.2 Condensadores

- Relación v-i para un condensador:

- Partimos del resultado anterior: $i = C \frac{dv}{dt} \longrightarrow dv = \frac{1}{C} idt$

- Integrando: $\int_{t_0}^t dv = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t idt \longrightarrow v(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t idt + v(t_0)$

- donde $v(t_0)$ es la tensión en el instante inicial $t = t_0$

- El condensador es un elemento con memoria

La tensión entre las armaduras de un condensador depende de la historia pasada de la corriente y del valor inicial de tensión

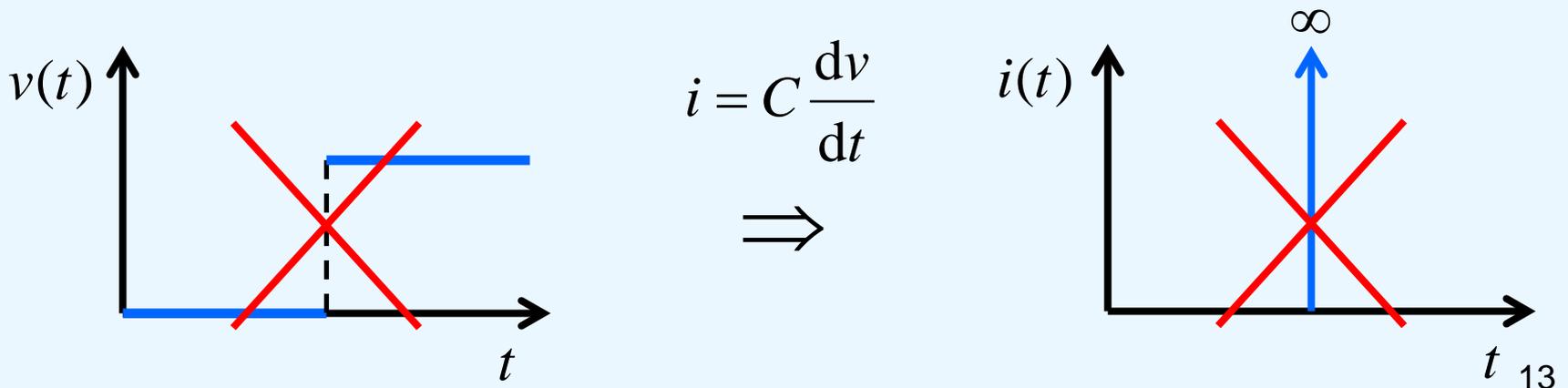
4.2 Condensadores

- Condición de continuidad para la tensión de un condensador:

- Cálculo de la tensión en $t = t_0^+$:

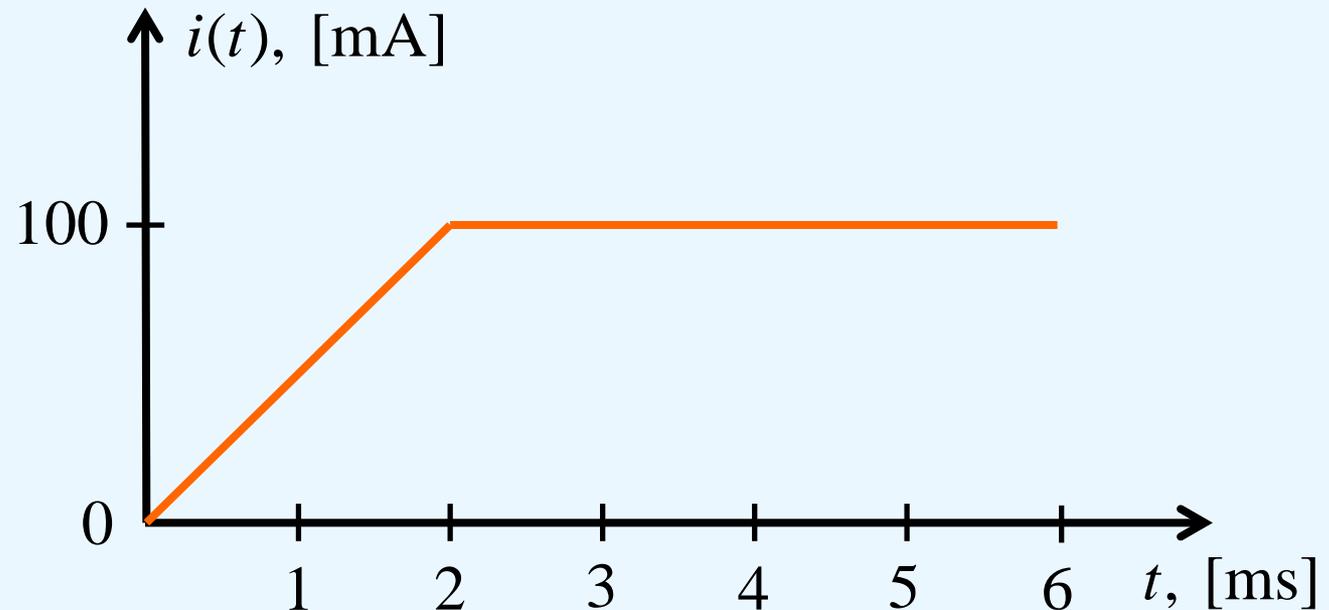
$$v(t_0^+) = \frac{1}{C} \underbrace{\int_{t_0}^{t_0^+} i dt}_{=0} + v(t_0) \Rightarrow v(t_0^+) = v(t_0)$$

La tensión entre las armaduras de un condensador NO puede variar de forma brusca (instantánea).

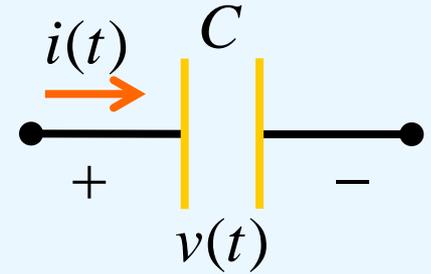


-Ejemplo 2: Por un condensador de 1 mF inicialmente descargado fluye la corriente que se muestra en la figura. Calcular la tensión en el condensador en los instantes $t = 2$ ms y $t = 5$ ms.

A&S-3ª PdeP. 6.4

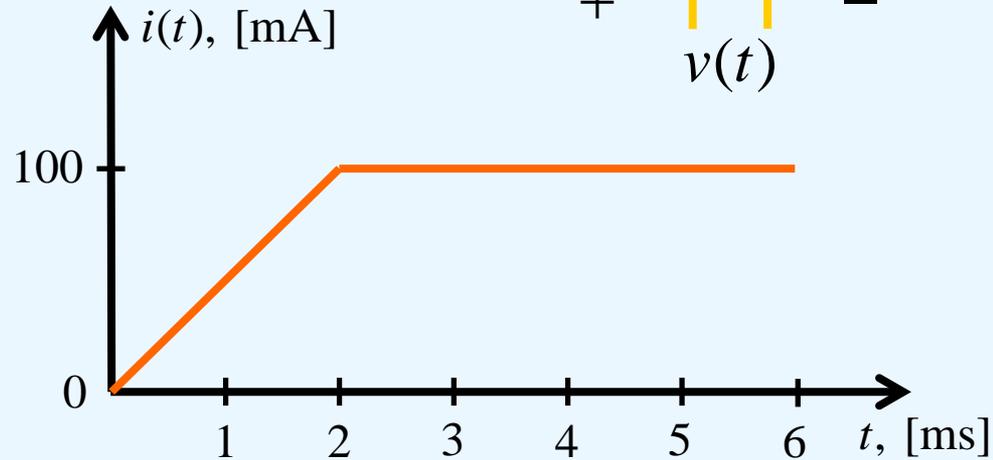


Solución: $C = 1 \text{ mF}$ $v(2 \text{ ms}) = ?$
 $v(5 \text{ ms}) = ?$



$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t) dt + v(t_0)$$

$$i(t) = \begin{cases} 50t \text{ A} & 0 \text{ s} < t < 2 \text{ ms} \\ 0.1 \text{ A} & 2 \text{ ms} < t < 5 \text{ ms} \\ 0 \text{ A} & \text{en otro caso} \end{cases}$$



- **Caso t = 2 ms:** $t_0 = 0$ $v(0) = 0$

$$v(2 \text{ ms}) = \frac{1}{C} \int_0^{2 \times 10^{-3}} 50t dt = \frac{1}{C} 25 t^2 \Big|_0^{2 \times 10^{-3}} = 10^3 \times 25 \times 4 \times 10^{-6} = 0.1 \text{ V}$$

- **Caso t = 5 ms:** $t_0 = 2 \text{ ms}$ $v(2 \text{ ms}) = 0.1 \text{ V}$

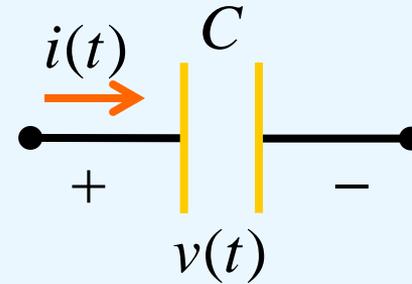
$$v(5 \text{ ms}) = \frac{1}{C} \int_{2 \times 10^{-3}}^{5 \times 10^{-3}} 0.1 dt + v(2 \text{ ms})$$

$$= 10^3 \times 0.1 t \Big|_{2 \times 10^{-3}}^{5 \times 10^{-3}} + 0.1 = 0.3 + 0.1 = 0.4 \text{ V}$$

4.3 Energía almacenada en un condensador

- Potencia en un condensador:

$$\left. \begin{aligned} p &= vi \\ i &= C \frac{dv}{dt} \end{aligned} \right\} p = Cv \frac{dv}{dt}$$



- La potencia puede ser positiva o negativa:

1. Si $v \frac{dv}{dt} > 0 \Rightarrow p > 0$ el condensador está almacenando energía

2. Si $v \frac{dv}{dt} < 0 \Rightarrow p < 0$ el condensador está suministrando energía

- Un condensador ideal no disipa energía

4.3 Energía almacenada en un condensador

- Energía almacenada en un condensador:

$$p = \frac{dw}{dt} \Rightarrow dw = p dt$$

- Integrando

$$\int_{-\infty}^t dw = \int_{-\infty}^t p dt$$

$$w(t) - w(-\infty) = \int_{-\infty}^t p dt = \int_{-\infty}^t C v \frac{dv}{dt} dt = C \int_{-\infty}^t v dv = \frac{1}{2} C v^2 \Big|_{-\infty}^t$$

- Considerando que en $t = -\text{inf}$ el condensador esta descargado:

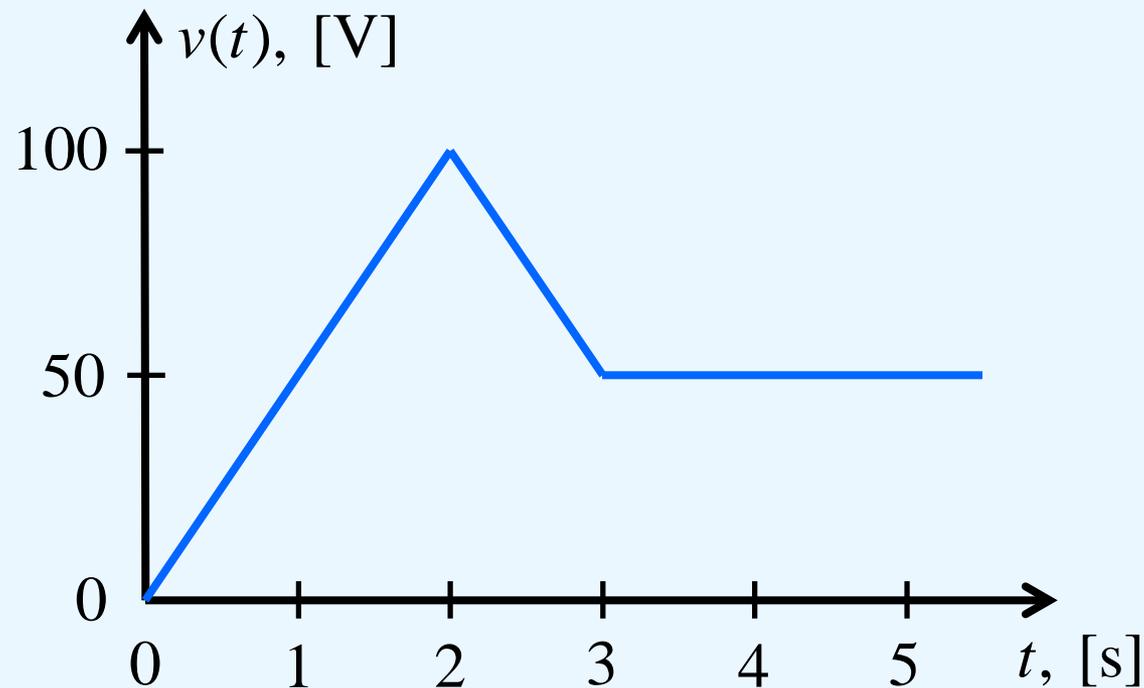
$$v(-\infty) = 0 \Rightarrow w(-\infty) = 0$$

- Entonces

$$w(t) = \frac{1}{2} C [v(t)]^2$$

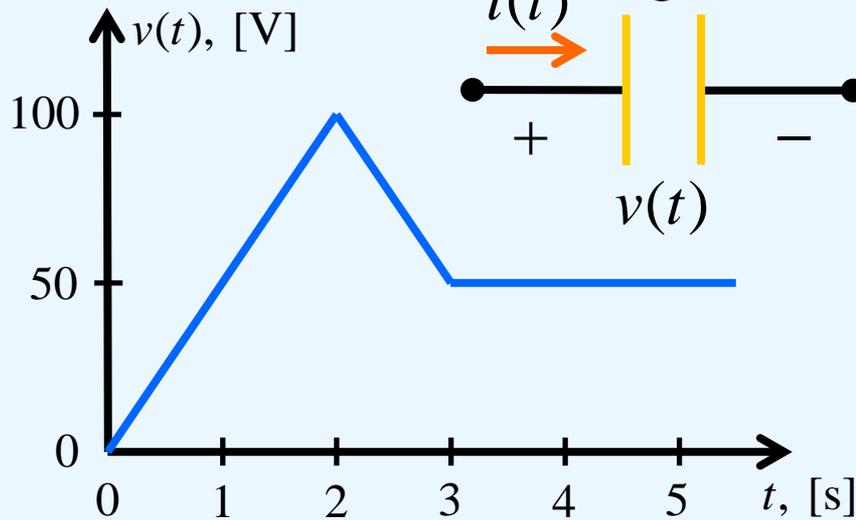
-Ejemplo 3: La tensión a través de un condensador de 5 mF se muestra en la figura. Dibujar las gráficas correspondientes a la corriente, potencia y energía en dicho condensador

D&S-7ª Ej. 7.3-2



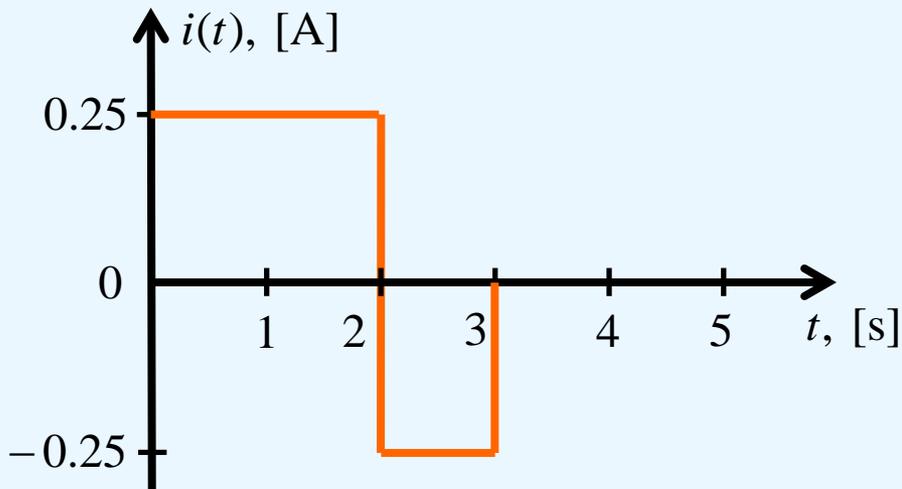
Solución:

$C = 5 \text{ mF}$



$$v(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 50t & 0 < t < 2 \\ 200 - 50t & 2 < t < 3 \\ 50 & 3 < t \end{cases}$$

$$\downarrow i = C \frac{dv}{dt}$$



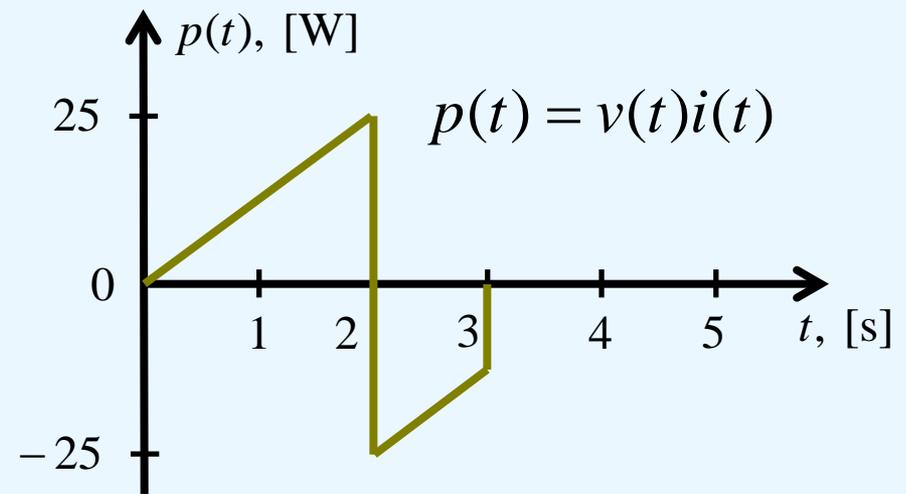
$$i(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 0.25 & 0 < t < 2 \\ -0.25 & 2 < t < 3 \\ 0 & 3 < t \end{cases}$$

- Potencia: $p = vi$

$$v(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 50t & 0 < t < 2 \\ 200 - 50t & 2 < t < 3 \\ 50 & 3 < t \end{cases}$$

$$i(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 0.25 & 0 < t < 2 \\ -0.25 & 2 < t < 3 \\ 0 & 3 < t \end{cases}$$

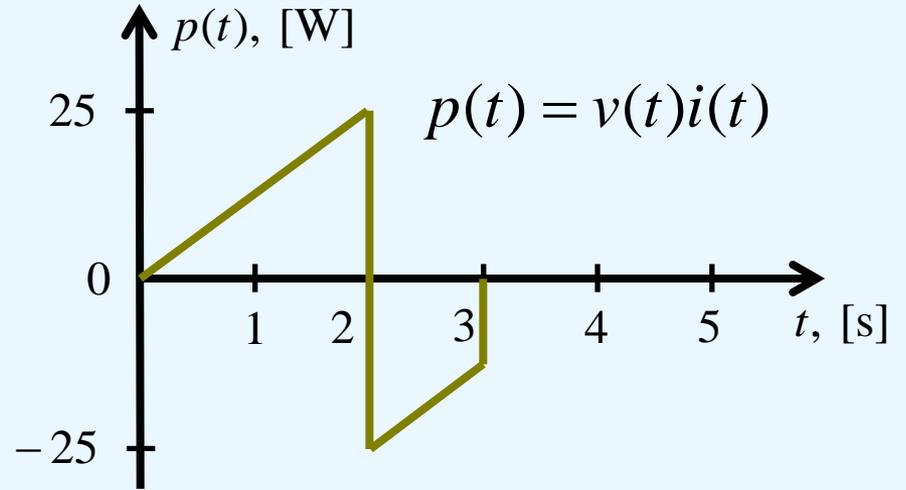
$$p(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 12.5t & 0 < t < 2 \\ -50 + 12.5t & 2 < t < 3 \\ 0 & 3 < t \end{cases}$$



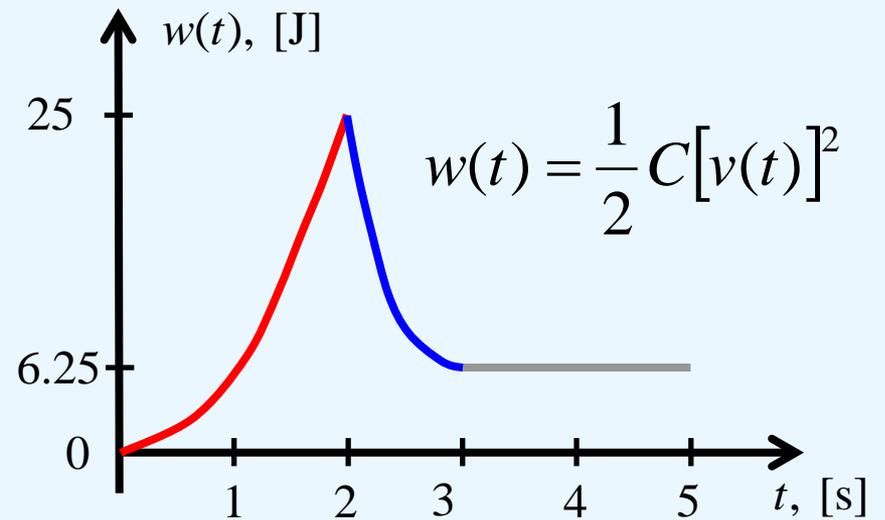
- Energía:

$$w = \frac{1}{2} C v^2$$

$$v(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 50t & 0 < t < 2 \\ 200 - 50t & 2 < t < 3 \\ 50 & 3 < t \end{cases}$$

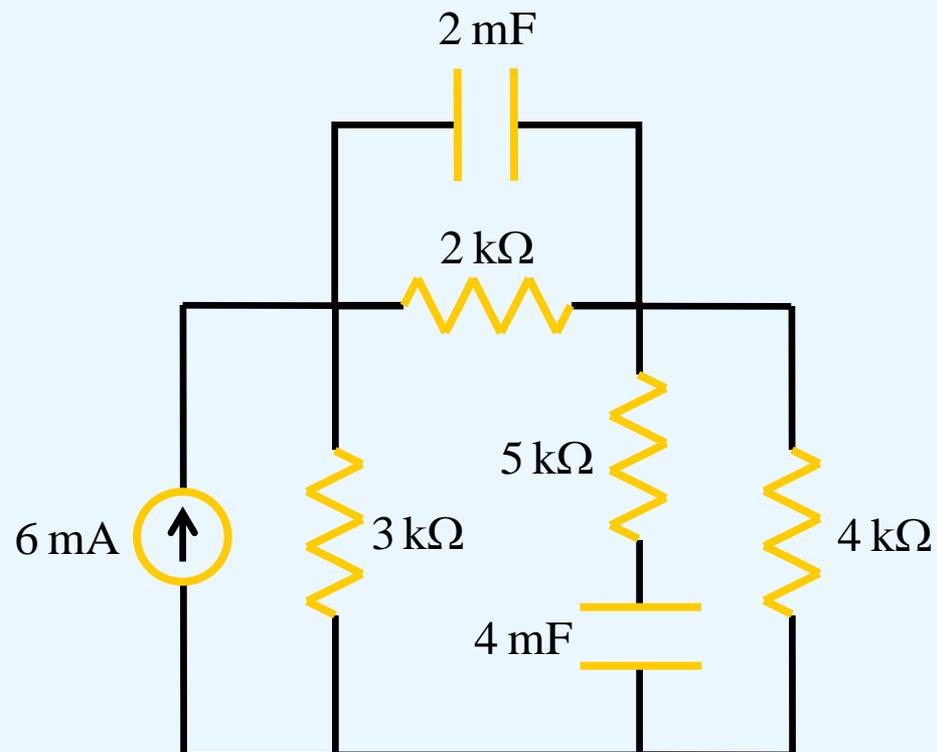


$$w(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 6.125t^2 & 0 < t < 2 \\ 0.25(20 - 5t)^2 & 2 < t < 3 \\ 6.25 & 3 < t \end{cases}$$



-Ejemplo 4: Calcular la energía almacenada en cada condensador de la figura en régimen de continua.

A&S-3º Ej 6.5



Solución:

- La energía en un condensador vale:

$$w = \frac{1}{2} C v^2$$

- Tenemos que calcular las tensiones en los condensadores

- Para ello sustituimos los condensadores por circuitos abiertos

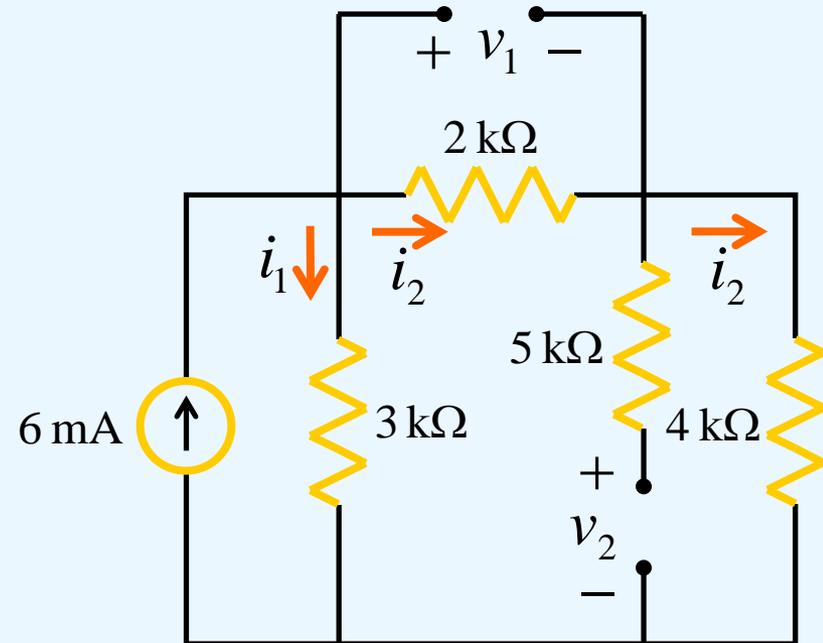
- Queda un divisor de corriente

$$i_2 = \frac{3}{3 + 2 + 4} \times 6 \times 10^{-3} = 2 \text{ mA}$$

- Aplicando la ley de Ohm

$$v_1 = (2 \times 10^3) \times (2 \times 10^{-3}) = 4 \text{ V}$$

$$v_2 = (4 \times 10^3) \times (2 \times 10^{-3}) = 8 \text{ V}$$



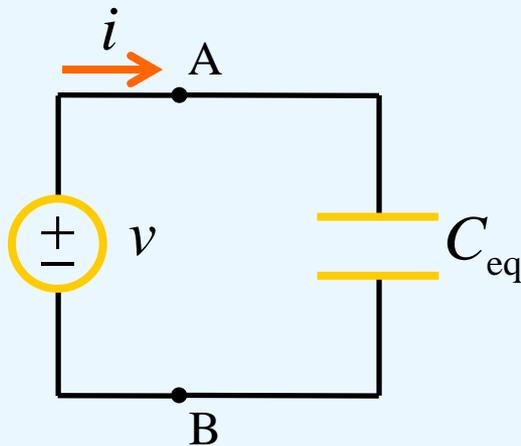
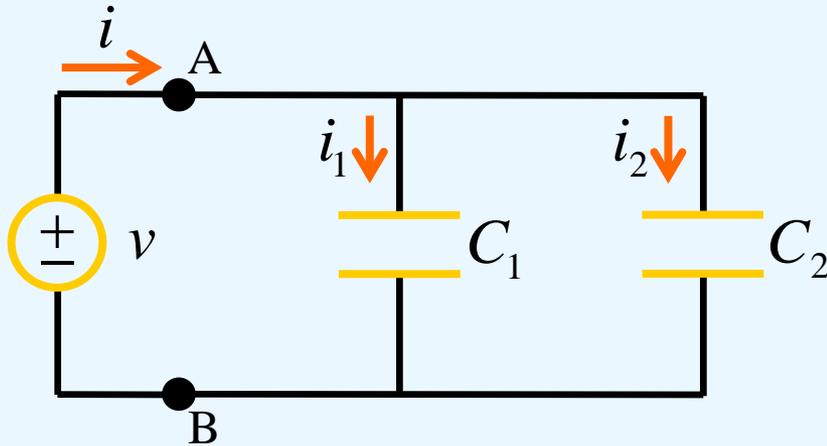
- La energía resulta:

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{1}{2} C_1 v_1^2 \\ &= \frac{1}{2} \times (2 \times 10^{-3}) \times 4^2 = 16 \text{ mJ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_2 &= \frac{1}{2} C_2 v_2^2 \\ &= \frac{1}{2} \times (4 \times 10^{-3}) \times 8^2 = 128 \text{ mJ} \end{aligned}$$

4.4 Asociación de condensadores

- Asociación de condensadores en paralelo:



- KCL: $i = i_1 + i_2$

- Relación i-v: $i_1 = C_1 \frac{dv}{dt}$ $i_2 = C_2 \frac{dv}{dt}$

- Sustituyendo en KCL:

$$i = (C_1 + C_2) \frac{dv}{dt}$$

- Luego: $i = C_{eq} \frac{dv}{dt}$

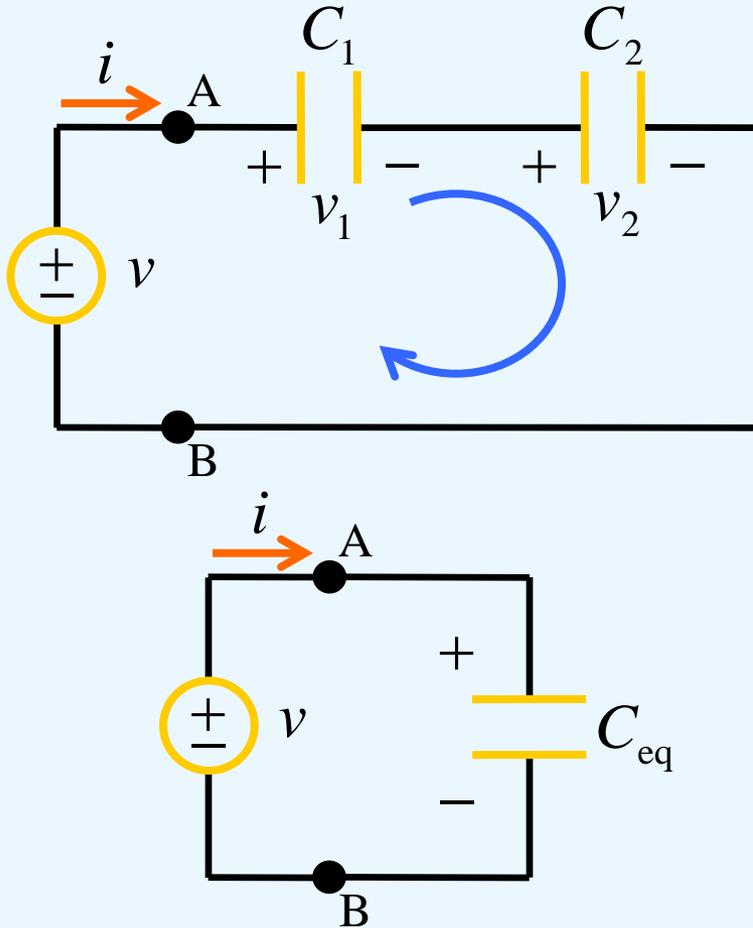
$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

- Para N condensadores en paralelo:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots + C_N = \sum_{n=1}^N C_n$$

4.4 Asociación de condensadores

- Asociación de condensadores en serie:



- KVL: $v = v_1 + v_2$

- Relación v-i:

$$v_1 = \frac{1}{C_1} \int_{t_0}^t i dt + v_1(t_0) \quad v_2 = \frac{1}{C_2} \int_{t_0}^t i dt + v_2(t_0)$$

- Sustituyendo en KVL:

$$v = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \int_{t_0}^t i dt + v_1(t_0) + v_2(t_0)$$

- Luego: $v = \frac{1}{C_{eq}} \int_{t_0}^t i dt + v(t_0)$

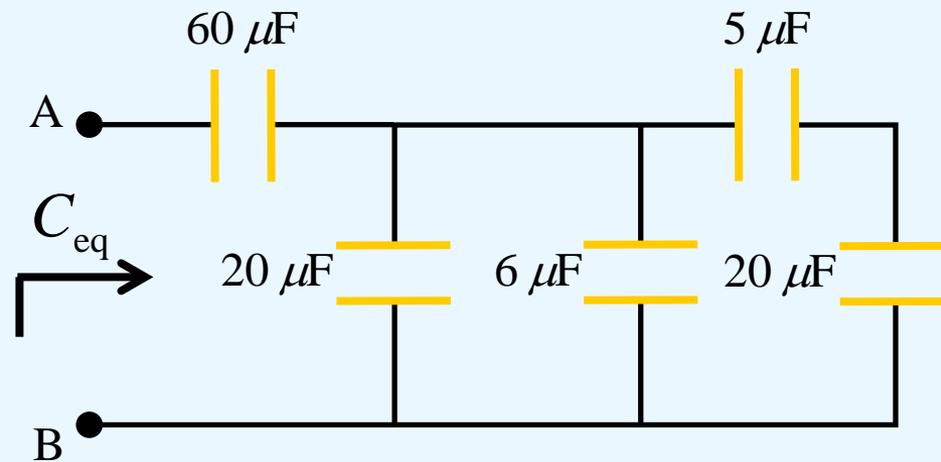
$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

- Para N resistencias en serie:

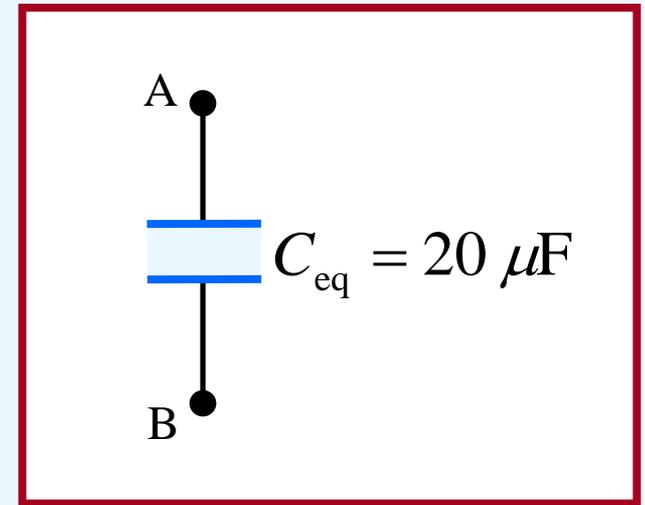
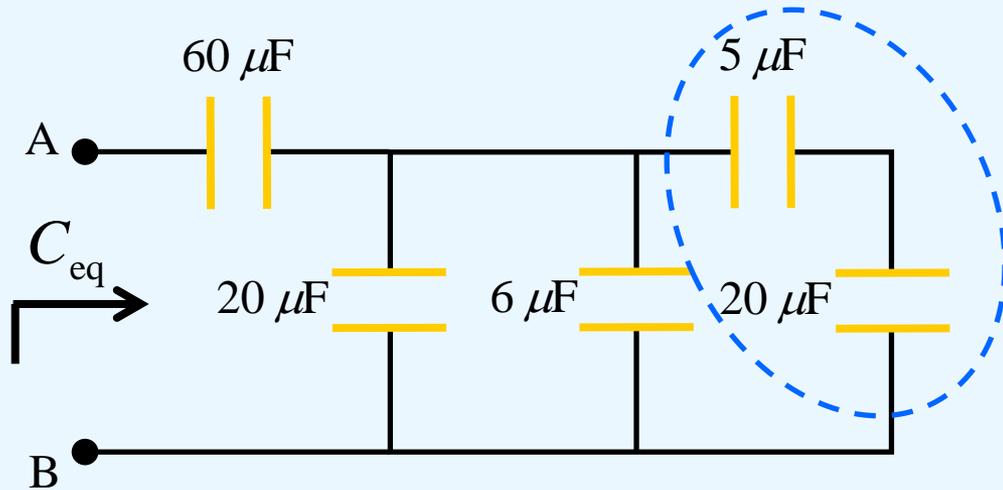
$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{C_n}$$

-Ejemplo 5: Calcular la capacidad equivalente vista desde los terminales A-B del circuito de la figura

A&S-3ª Ej. 6.6

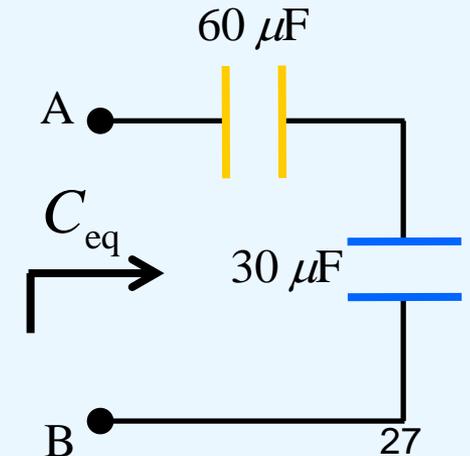
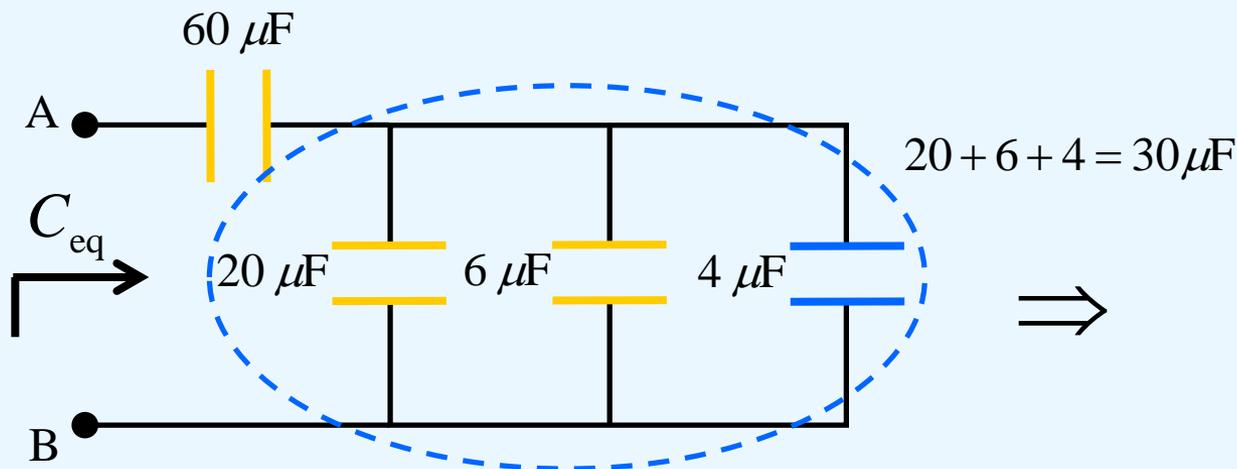


Solución:



$$5 \mu\text{F} - \text{Serie} - 20 \mu\text{F} = \frac{5 \times 20}{5 + 20} = 4 \mu\text{F} \quad \Downarrow$$

$$60 \mu\text{F} - \text{Serie} - 30 \mu\text{F} = \frac{60 \times 30}{60 + 30} = 20 \mu\text{F} \quad \Uparrow$$

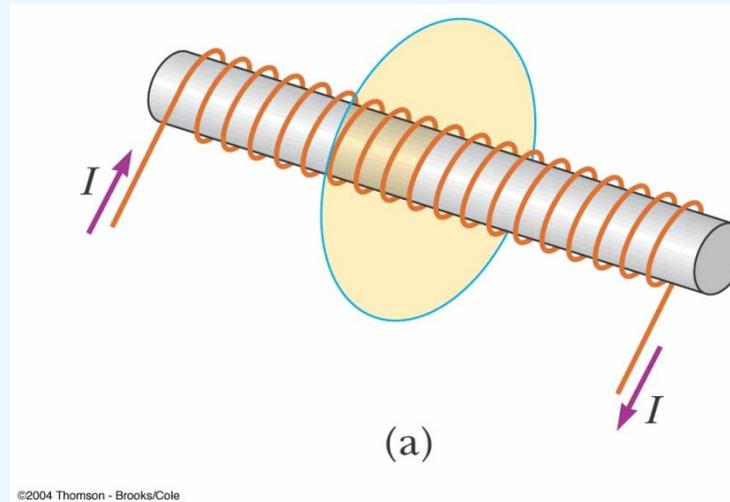


4.5 Bobinas

- Definición de bobina:

* Una bobina es un elemento pasivo capaz de almacenar energía magnética

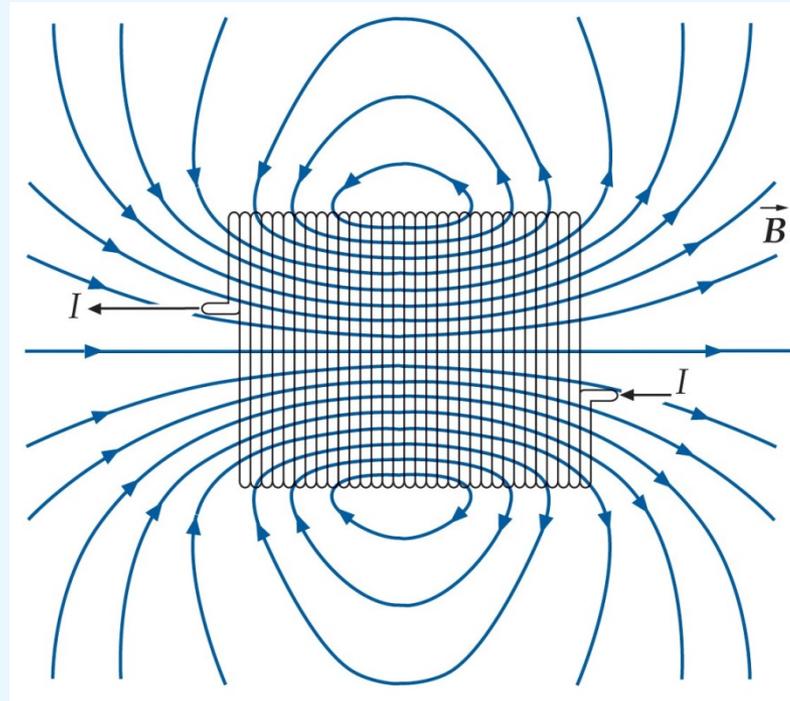
- **Solenoides rectos:** la configuración más sencilla de bobina es el solenoide recto. Consiste en un arrollamiento de cable en forma de espiral. En interior (núcleo) puede estar relleno de algún material magnético



©2004 Thomson - Brooks/Cole

4.5 Bobinas

- Cuando circula corriente eléctrica por una bobina se produce un campo magnético como el mostrado en la figura

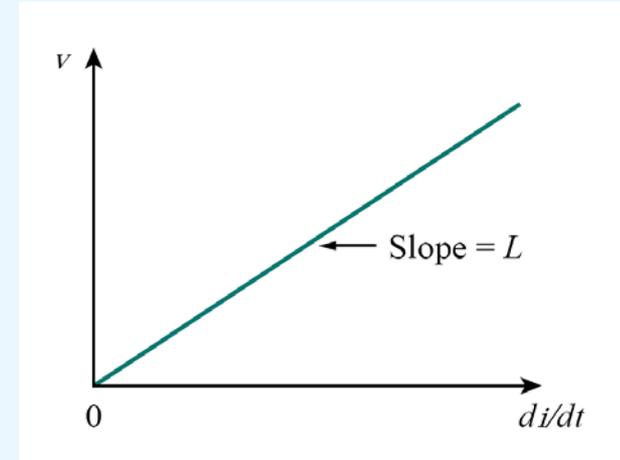
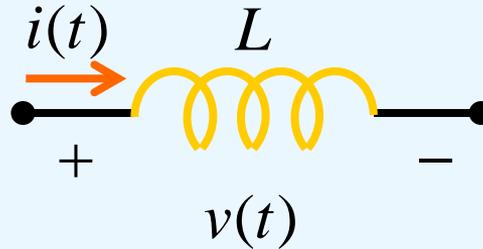


4.5 Bobinas

- Relación v - i para una bobina. Autoinducción:

- La relación v - i para una bobina es:

$$v = L \frac{di}{dt}$$



siendo L una constante denominada inductancia o coeficiente de autoinducción

- Unidades de la inductancia: henrio (H)

- Si $\frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow v = 0$, luego

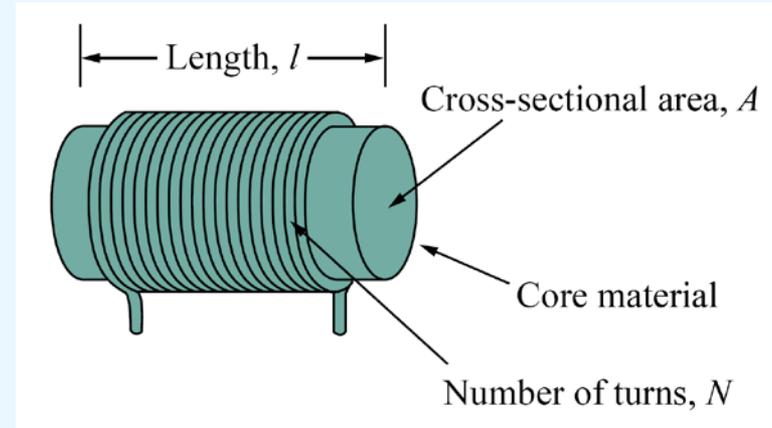
En régimen de corriente continua el circuito equivalente de una bobina es un cortocircuito

4.5 Bobinas

- Inductancia de una bobina recta:

$$L = \frac{N^2 \mu A}{\ell}$$

- N : número de espiras
- A : área de las espiras
- ℓ : longitud
- μ : permeabilidad del núcleo



- **Bobina lineal:** la inductancia de una bobina lineal es un valor positivo que no depende de la tensión ni de la corriente, sólo depende de la geometría y de los materiales

4.5 Bobinas

- Relación i - v para una bobina:

- Partimos del resultado anterior: $v = L \frac{di}{dt} \longrightarrow di = \frac{1}{L} v dt$

- Integrando: $\int_{t_0}^t di = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v dt \longrightarrow i(t) = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(t) dt + i(t_0)$

- donde $i(t_0)$ es la corriente en el instante inicial $t = t_0$

- La bobina es un elemento con memoria

La corriente que atraviesa una bobina depende de la historia pasada de la tensión y del valor inicial de corriente.

-Ejemplo 6: Determinar la corriente que circula a través de una bobina de 5 H si la tensión entre sus terminales es:

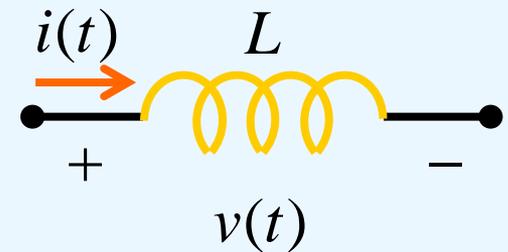
$$v(t) = \begin{cases} 30t^2 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

A&S-3ª Ej. 6.9

Solución:

- La corriente vale:

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(t) dt + i(t_0)$$



- En nuestro caso $t_0 = 0$ $L = 5 \text{ H}$ y $i(t_0) = i(0) = 0$

- Luego

$$i(t) = \frac{1}{5} \int_0^t 30t^2 dt = 2t^3 \quad \Rightarrow \quad i(t) = \begin{cases} 2t^3 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

4.5 Bobinas

- Condición de continuidad para la corriente en una bobina:
- Cálculo de la corriente en $t = t_0^+$:

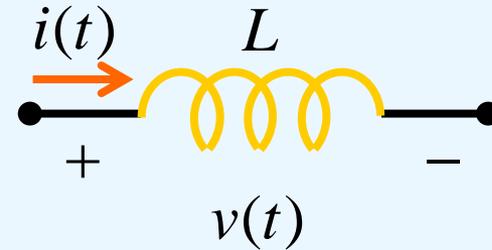
$$i(t_0^+) = \frac{1}{L} \underbrace{\int_{t_0}^{t_0^+} v dt}_{=0} + i(t_0) \quad \Rightarrow \quad i(t_0^+) = i(t_0)$$

La corriente que circula por una bobina NO puede cambiar instantáneamente.

4.6 Energía almacenada en una bobina

- Potencia en una bobina:

$$\left. \begin{aligned} p &= vi \\ v &= L \frac{di}{dt} \end{aligned} \right\} p = Li \frac{di}{dt}$$



- La potencia puede ser positiva o negativa:

1. Si $i \frac{di}{dt} > 0 \Rightarrow p > 0$ la bobina está almacenando energía
2. Si $i \frac{di}{dt} < 0 \Rightarrow p < 0$ la bobina está suministrando energía

- La bobina ideal no disipa energía

4.6 Energía almacenada en una bobina

- Energía almacenada en una bobina:

$$p = \frac{dw}{dt} \Rightarrow dw = p dt$$

- Integrando

$$\int_{-\infty}^t dw = \int_{-\infty}^t p dt$$

$$w(t) - w(-\infty) = \int_{-\infty}^t p dt = \int_{-\infty}^t Li \frac{di}{dt} dt = L \int_{-\infty}^t i di = \frac{1}{2} Li^2 \Big|_{-\infty}^t$$

- Considerando que en $t = -\infty$ la corriente en la bobina era nula:

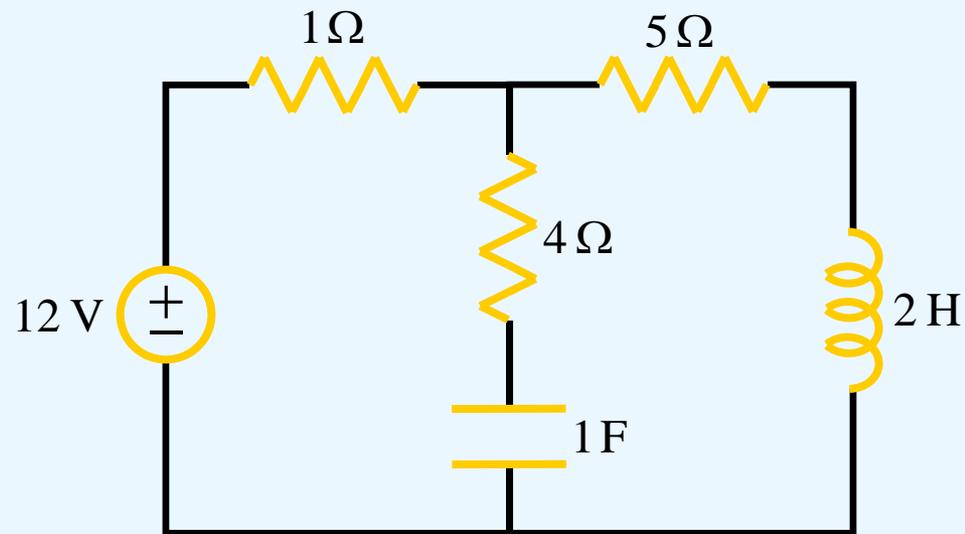
$$i(-\infty) = 0 \quad \text{y} \quad w(-\infty) = 0$$

- Entonces

$$w(t) = \frac{1}{2} L[i(t)]^2$$

-Ejemplo 7: Calcular la energía almacenada en el condensador y en la bobina de la figura en régimen de continua.

A&S-3º Ej 6.10



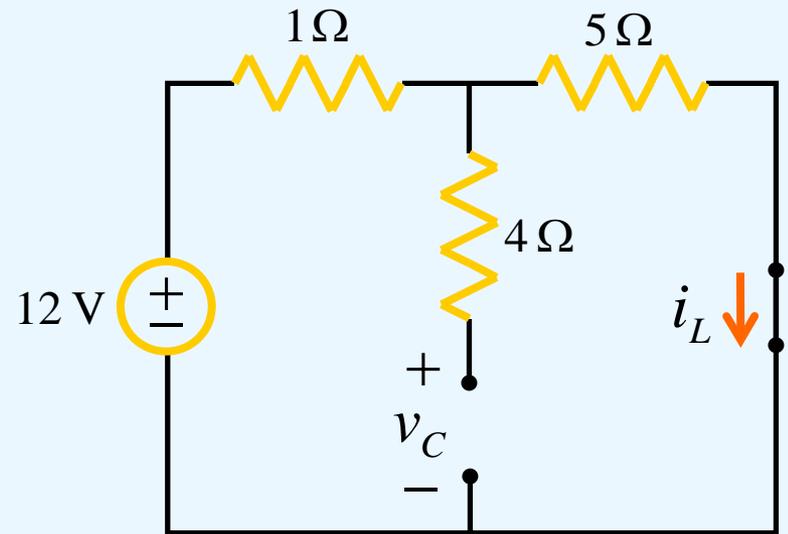
Solución:

- Las energías pedidas valen:

$$w_C = \frac{1}{2} C v_C^2 \quad w_L = \frac{1}{2} L i_L^2$$

siendo v_C la tensión en el condensador e i_L la corriente en la bobina.

- Para calcular v_C e i_L sustituimos el condensador y la bobina por su equivalente en DC



- Queda un divisor de tensión:

$$v_C = \frac{5}{1+5} \times 12 = 10 \text{ V}$$

- Según la ley de Ohm:

$$i_L = \frac{v_C}{5} = \frac{10}{5} = 2 \text{ A}$$

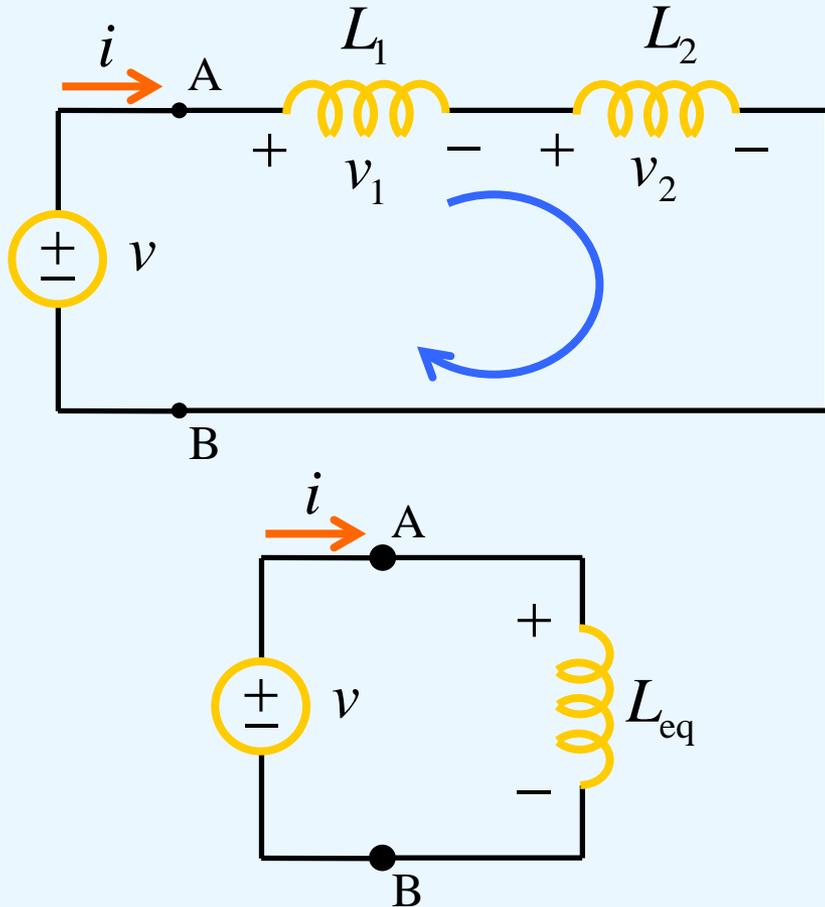
- Las energías resultan:

$$w_C = \frac{1}{2} C v_C^2 = \frac{1}{2} \times 1 \times 10^2 = 50 \text{ J}$$

$$w_L = \frac{1}{2} L i_L^2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 2^2 = 4 \text{ J}$$

4.7 Asociación de bobinas

- Asociación de bobinas es serie:



- Para N bobinas en serie:

- KVL: $v = v_1 + v_2$

- Relación v-i: $v_1 = L_1 \frac{di}{dt}$ $v_2 = L_2 \frac{di}{dt}$

- Sustituyendo en KVL:

$$v = (L_1 + L_2) \frac{di}{dt}$$

- Luego:

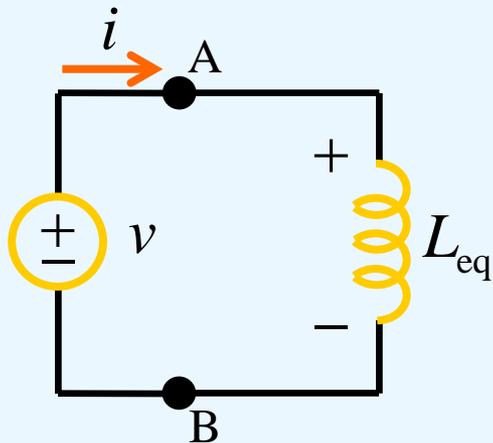
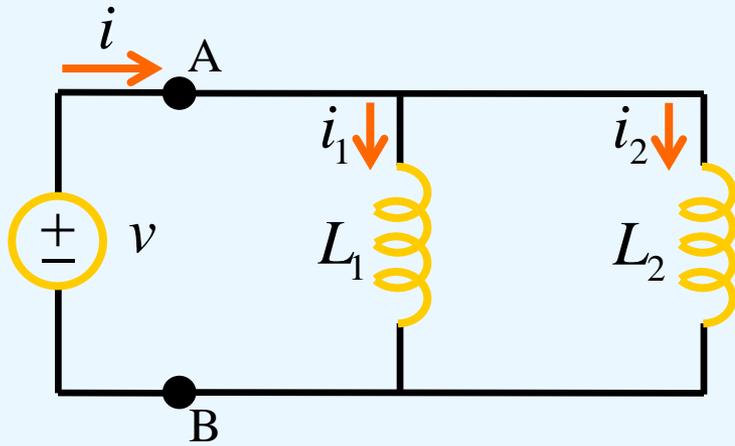
$$v = L_{eq} \frac{di}{dt}$$

$$L_{eq} = L_1 + L_2$$

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + \dots + L_N = \sum_{n=1}^N L_n$$

4.7 Asociación de bobinas

- Asociación de bobinas en paralelo:



$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$

$$i = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) \int_{t_0}^t v dt + i(t_0)$$

- KCL: $i = i_1 + i_2$

- Relación i-v:

$$i_1 = \frac{1}{L_1} \int_{t_0}^t v dt + i_1(t_0); i_2 = \frac{1}{L_2} \int_{t_0}^t v dt + i_2(t_0)$$

- Sustituyendo en KCL:

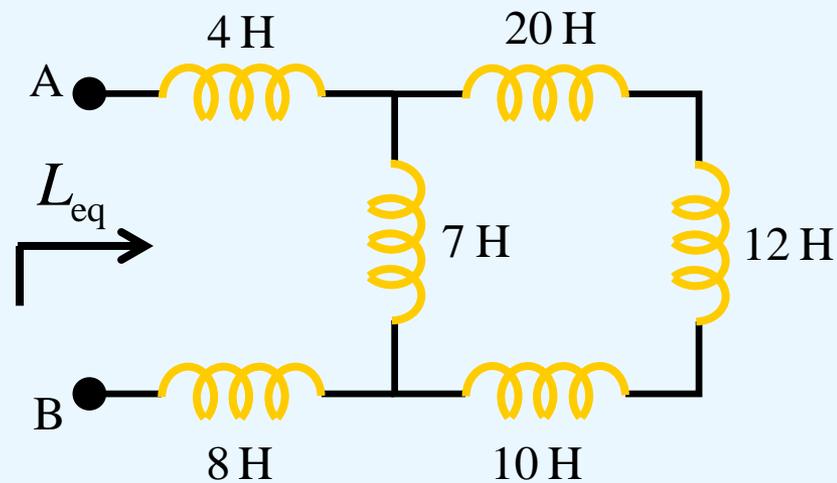
- Luego: $i = \frac{1}{L_{eq}} \int_{t_0}^t v dt + i(t_0)$

- Para N bobinas en paralelo:

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_N} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{L_n}$$

-Ejemplo 8: Calcular la autoinducción equivalente vista desde los terminales A-B del circuito de la figura

A&S-3ª Ej. 6.11



Solución:

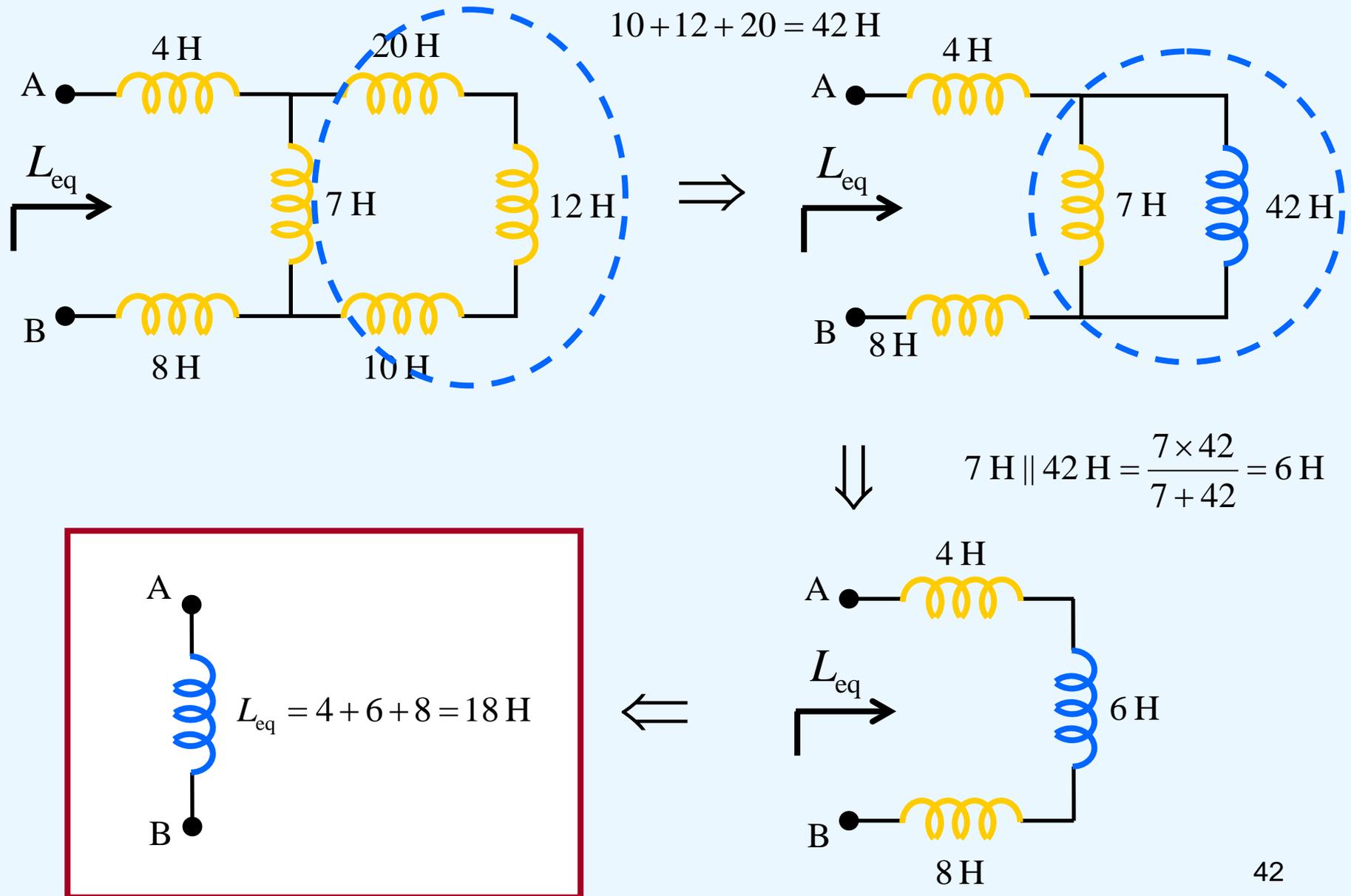


TABLE 6.1 Important characteristics of the basic elements.[†]

Relation	Resistor (R)	Capacitor (C)	Inductor (L)
v - i :	$v = iR$	$v = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i dt + v(t_0)$	$v = L \frac{di}{dt}$
i - v :	$i = v/R$	$i = C \frac{dv}{dt}$	$i = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v dt + i(t_0)$
p or w :	$p = i^2 R = \frac{v^2}{R}$	$w = \frac{1}{2} C v^2$	$w = \frac{1}{2} L i^2$
Series:	$R_{\text{eq}} = R_1 + R_2$	$C_{\text{eq}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$	$L_{\text{eq}} = L_1 + L_2$
Parallel:	$R_{\text{eq}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$	$C_{\text{eq}} = C_1 + C_2$	$L_{\text{eq}} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$
At dc:	Same	Open circuit	Short circuit
Circuit variable that cannot change abruptly:	Not applicable	v	i

[†]Passive sign convention is assumed.