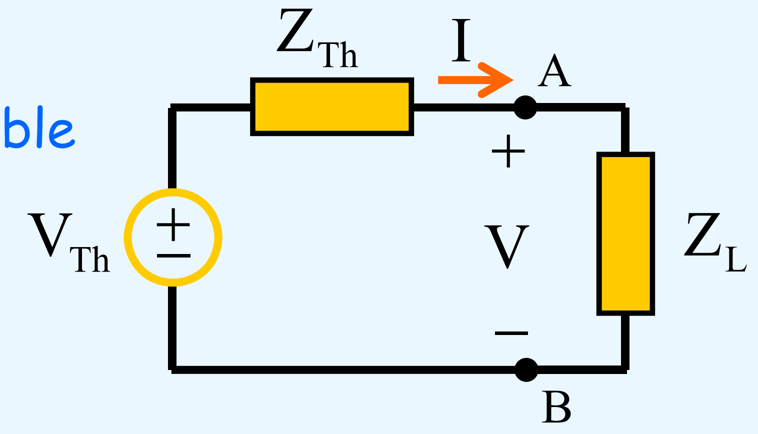
Tema 6. Análisis de Circuitos en Régimen Sinusoidal Permanente



Bibliografía Básica para este Tema:

[1] C. K. Alexander, M. N. O. Sadiku, "Fundamentos de circuitos eléctricos", McGraw-Hill.

[2] R. C. Dorf, J. A. Svoboda, "Introduction to electric circuits", John Wiley & Sons.

Sadiku → Temas 9, 10 y 11

Dorf → Tema 10 y 11

- Esta presentación se encuentra, temporalmente, en:

http://personales.unican.es/peredaj/AC.htm

6.1 Introducción

- En este tema estudiaremos la respuesta de circuitos con fuentes sinusoidales
- Una señal sinusoidal es aquella que se expresa matemáticamente mediante una función seno o coseno
- Las fuentes de tensión/corriente sinusoidales también se denominan fuentes de tensión/corriente alterna
- Los circuitos excitados por fuentes sinusoidales se denominan circuitos de corriente alterna (circuitos de AC)
- En el mundo de la electrónica y las telecomunicaciones las señales sinusoidales son muy importantes, ya que son señales fáciles de generar y transmitir
- Además, mediante el Análisis de Fourier, una señal periódica puede expresarse mediante una suma de señales sinusoidales.

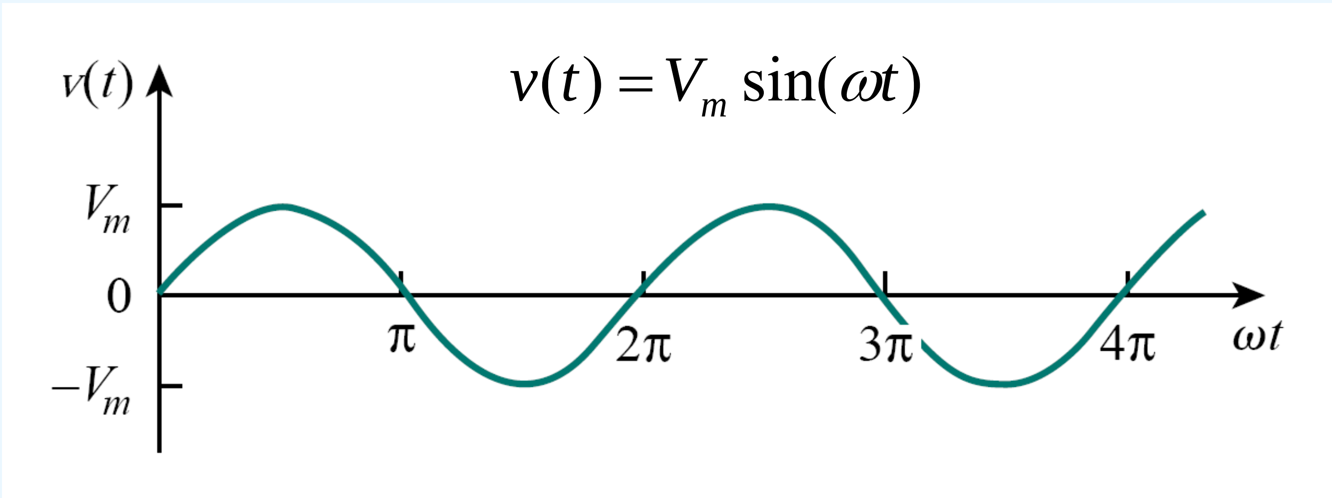
6.1 Introducción

- Una fuente sinusoidal produce tanto respuesta transitoria como estacionaria
- La respuesta transitoria se extingue con el tiempo. En consecuencia, un tiempo después de haber encendido las fuentes, sólo tenemos en el circuito la respuesta estacionaria.
- En este tema abordaremos sólo el estudio del estado estacionario (respuesta permanente)

6.2 Fuentes sinusoidales

- Consideramos la tensión: $v(t) = V_m \sin(\omega t)$

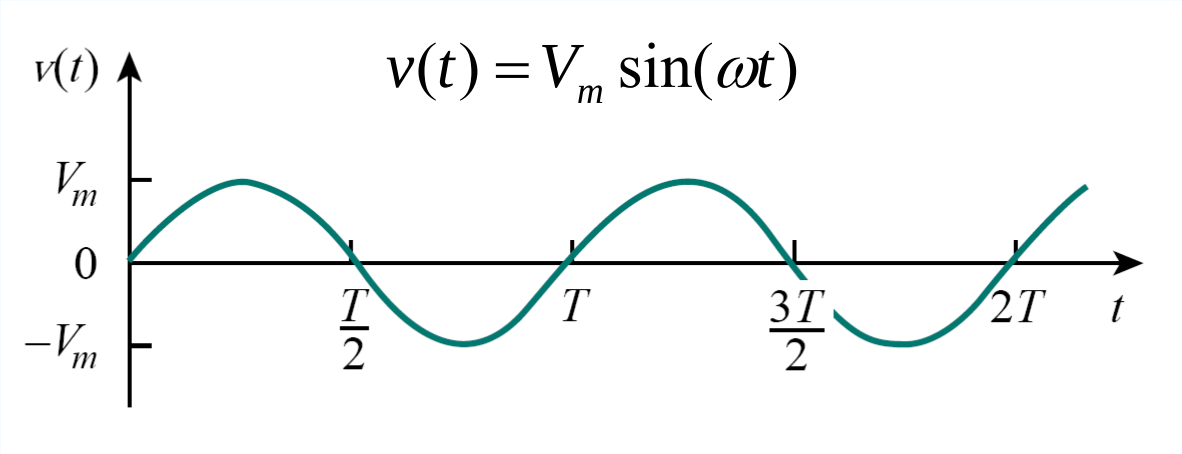
  - V_m : amplitud de pico
  - ωt : argumento o fase [rad] o [grados]
  - ω : frecuencia angular [rad/s]



- Son funciones que se repiten cada $\phi = 2\pi n$ con n entero

6.2 Fuentes sinusoidales

- Si representamos v(t) frente a t:



- La señal se repite cada $t = nT$ con n entero

- El intervalo de tiempo T se denomina periodo y vale $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$

$$v(t+nT) = V_m \sin(\omega(t+nT)) = V_m \sin(\omega(t+n\tfrac{2\pi}{\omega}))$$
$$= V_m \sin(\omega t + 2\pi n) = V_m \sin(\omega t) = v(t)$$

$$\boxed{v(t+nT) = v(t)}$$

6.2 Fuentes sinusoidales

- El inverso del periodo se denomina frecuencia, f:

$$\boxed{f = \frac{1}{T}}$$

- Entonces:

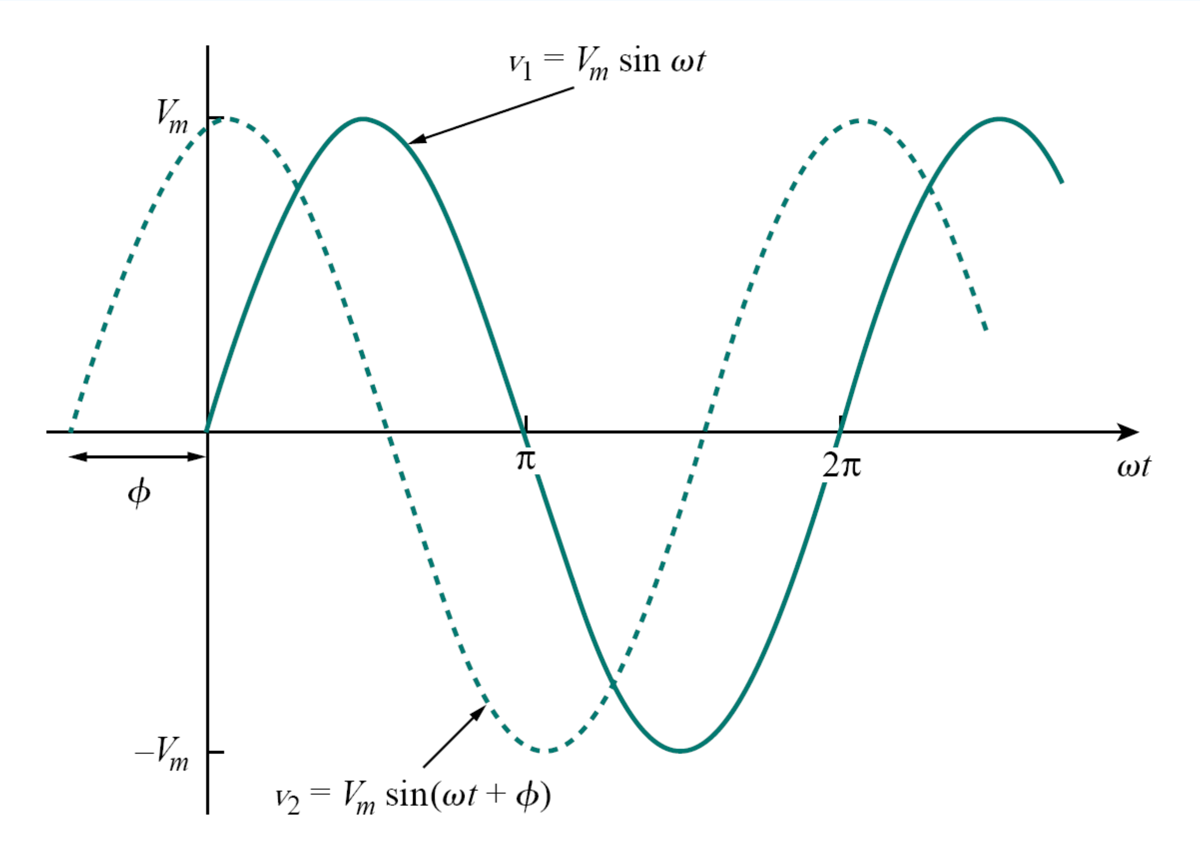
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

- Normalmente la frecuencia angular se mide en rad/s
  y la frecuencia en hercios -> Hz

- La forma más general de la senoide es: $v(t) = V_m \sin(\omega t + \phi_0)$
  siendo ϕ_0 la fase inicial [rad]

6.2 Fuentes sinusoidales

- Comparando las señales $v_1(t) = V_m \sin(\omega t)$ y $v_2(t) = V_m \sin(\omega t + \phi_0)$
    - Si $\phi_0 \neq 0$ las señales están desfasadas
        1. $\phi_0 > 0$ --> $v_2(t)$ está adelantada (ver dibujo)
        2. $\phi_0 < 0$ --> $v_2(t)$ está atrasada



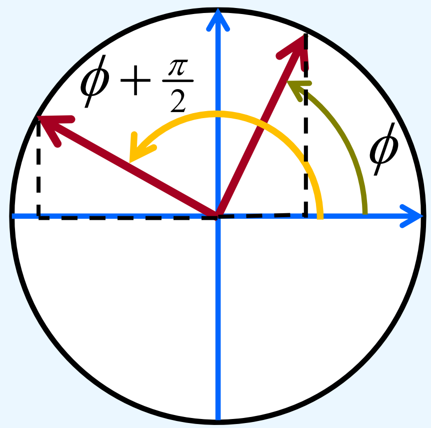
6.2 Fuentes sinusoidales

- Una sinusoide puede expresarse empleando tanto las funciones seno como coseno

- Basta tener en cuenta las identidades:

$$\sin(\phi) = -\cos(\phi + \tfrac{\pi}{2}) = \cos(\phi - \tfrac{\pi}{2})$$

$$\cos(\phi) = \sin(\phi + \tfrac{\pi}{2}) = -\sin(\phi - \tfrac{\pi}{2})$$



- También son de interés las siguientes igualdades:

$$\sin(A \pm B) = \sin(A)\cos(B) \pm \cos(B)\sin(A)$$

$$\cos(A \pm B) = \cos(A)\cos(B) \mp \sin(A)\sin(B)$$

-Ejemplo 1: Determinar la amplitud, fase inicial, periodo y frecuencia de la sinusoide $v(t) = 12\cos(50t + 10^{\circ})$

Solución:

- Comparamos la sinusoide del enunciado con la forma general

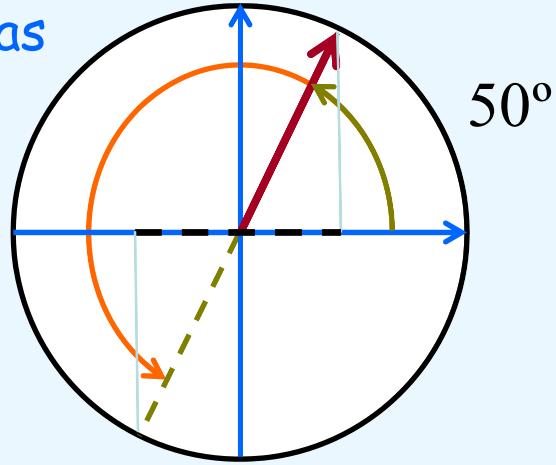
$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi_0)$$

- Amplitud: $V_m = 12\ \mathrm{V}$
- Fase inicial: $\phi_0 = 10^{\circ}$
- Frecuencia angular: $\omega = 50\ \mathrm{rad/s}$
- Periodo: $$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{50} = 0.126\ \mathrm{s}$$
- Frecuencia: $$f = \frac{\omega}{2\pi} = 7.958\ \mathrm{Hz}$$

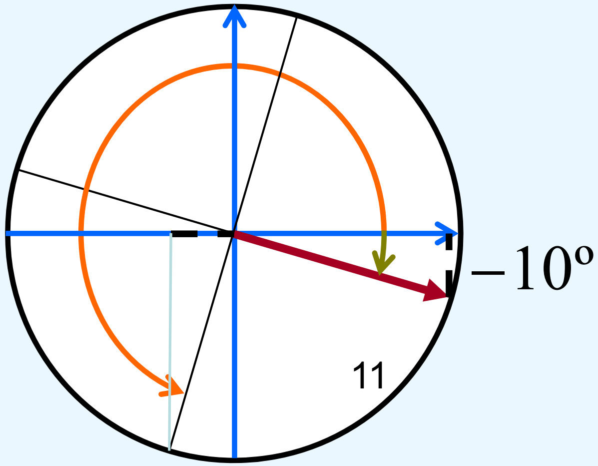
-Ejemplo 2: Calcular el ángulo de desfase entre las tensiones $v_1(t) = -10\cos(\omega t + 50^o)$ y $v_2(t) = 12\sin(\omega t - 10^o)$

Solución:

- Para comparar 2 sinusoides debemos expresarlas mediante la misma función matemática (por ejemplo el coseno) y ambas con amplitud positiva



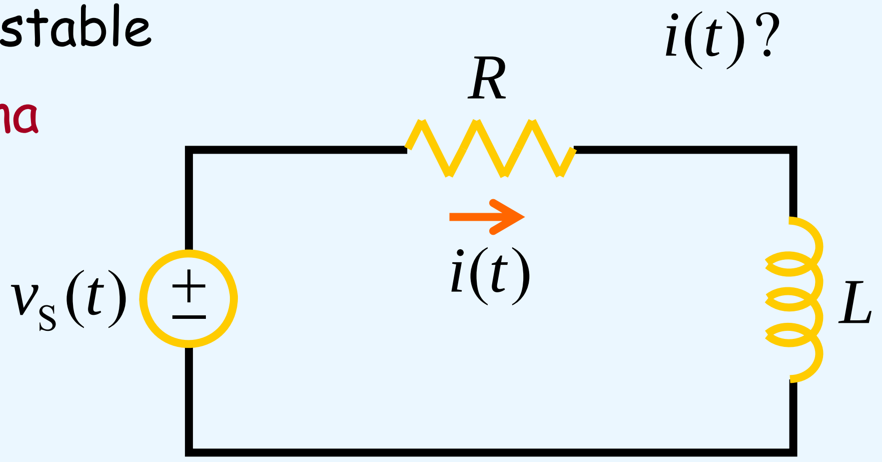
$$v_1(t) = -10\cos(\omega t + 50^o)$$
$$= 10\cos(\omega t + 50^o + 180^o)$$
$$= 10\cos(\omega t + 230^o)$$



$$v_2(t) = 12\sin(\omega t - 10^o)$$
$$= 12\cos(\omega t - 10^o + 270^o)$$
$$= 12\cos(\omega t + 260^o)$$

- $v_2(t)$ se adelanta 30°

6.3 Respuesta sinusoidal en estado estable



- Consideramos un circuito RL con una fuente de tensión sinusoidal:

$$v_S(t) = V_m \cos(\omega t)$$

- Aplicamos la KVL a la malla:

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = V_m \cos(\omega t)$$

- En un circuito lineal todas las tensiones y corrientes en estado estable tienen la misma frecuencia que la fuente, por tanto:

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi_0)$$

(con I_m y ϕ_0 ctes a determinar)

- Conviene expresar i(t) en la forma:

$$i(t) = I_m[\cos(\omega t)\underbrace{\cos(\phi_0)}_{A} - \sin(\omega t)\underbrace{\sin(\phi_0)}_{B}] = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

(con A y B ctes a determinar)

6.3 Respuesta sinusoidal en estado estable

- La relación entre los dos conjuntos de incógnitas es:

$$\left.\begin{aligned} A &= I_m \cos(\phi_0) \\ B &= -I_m \sin(\phi_0) \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad \begin{aligned} \phi_0 &= -\tan^{-1}(B/A) \\ I_m &= \sqrt{A^2 + B^2} \end{aligned}$$

- Para calcular A y B, sustituimos $i(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ en la ec. diferencial:

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = V_m \cos(\omega t)$$

- Resulta:

$$L[-\omega A\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)] + R[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)] = V_m \cos(\omega t)$$

$$[\omega LB + RA]\cos(\omega t) + [-\omega LA + RB]\sin(\omega t) = V_m \cos(\omega t)$$

- Igualamos los coefs. en coseno: $\omega LB + RA = V_m$
- Igualamos los coefs. en seno: $-\omega LA + RB = 0$

- Resolviendo para A y B: $$A = \frac{RV_m}{R^2 + (\omega L)^2} \qquad B = \frac{\omega LV_m}{R^2 + (\omega L)^2}$$

6.3 Respuesta sinusoidal en estado estable

- La solución para I_m y ϕ_0 es:

$$\phi_0 = -\tan^{-1}(B/A) \rightarrow \phi_0 = -\tan^{-1}(\omega L/R)$$

$$I_m = \sqrt{A^2 + B^2} \rightarrow I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

- En este problema hemos calculado la respuesta en estado estacionario de un circuito con un único elemento de almacenaje (la autoinducción)

- Para circuitos con varios elementos de almacenaje, el método de cálculo empleado (solución directa en el dominio del tiempo) se complica mucho

- Una alternativa más sencilla pasa por introducir el concepto de fasor que veremos en el apartado siguiente

6.4 Fasores

- Las señales sinusoidales pueden representarse fácilmente mediante fasores

> "Un fasor es un número complejo que representa la amplitud y la fase de una señal sinusoidal"

- Los fasores permiten analizar de forma sencilla circuitos lineales excitados por fuentes sinusoidales
- La idea de la representación fasorial se basa en la fórmula de Euler:

$$\boxed{e^{\pm j\theta} = \cos\theta \pm j\sin\theta} \qquad \text{con} \quad j = \sqrt{-1}$$

- Se observa que:

$$\cos\theta = \mathrm{Re}\left[e^{\pm j\theta}\right]$$

$$\pm\sin\theta = \mathrm{Im}\left[e^{\pm j\theta}\right]$$

6.4 Fasores

- Dada una señal sinusoidal $v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$

- Se observa que $v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi) = \mathrm{Re}\left[V_m e^{j(\omega t + \phi)}\right]$

- luego $v(t) = \mathrm{Re}\left[V_m e^{j\phi} e^{j\omega t}\right]$

- alternativamente $v(t) = \mathrm{Re}\left[\mathrm{V} e^{j\omega t}\right]$

- donde $\boxed{\mathrm{V} = V_m e^{j\phi}}$ $\mathrm{V} = V_m \underline{|\phi}$

- V es la representación fasorial de la señal sinusoidal v(t)

- Un fasor es una representación compleja de la magnitud y fase de una señal sinusoidal de frecuencia conocida ω

- Cuando expresamos una señal sinusoidal mediante un fasor, el término $e^{j\omega t}$ está implícitamente presente

6.4 Fasores

- Entonces, tenemos dos formas de representar una señal sinusoidal:

Dominio del tiempo	Dominio de fasorial (o dominio de la frecuencia)
$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$	$\mathrm{V} = V_m e^{j\phi}$

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi) \longleftrightarrow \mathrm{V} = V_m e^{j\phi}$$

- Cálculo de v(t) conocido V: se multiplica el fasor V por el factor de tiempo $e^{j\omega t}$ y se toma la parte real

$$v(t) = \mathrm{Re}\left[\mathrm{V} e^{j\omega t}\right]$$

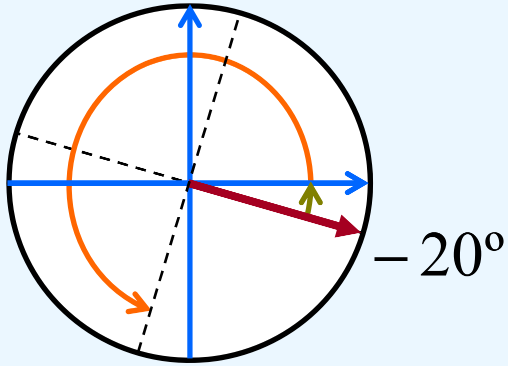
- Cálculo de V conocido v(t): se expresa v(t) como un coseno y se forma el fasor a partir de la amplitud y la fase de la senoide

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi) \longrightarrow \mathrm{V} = V_m e^{j\phi}$$

-Ejemplo 3: Calcular la suma de las corrientes $i_1(t) = 4\cos(\omega t + 30^o)$ e $i_2(t) = 5\sin(\omega t - 20^o)$

Solución:

- Realizaremos la suma en el dominio de la frecuencia



$$i_1(t) = 4\cos(\omega t + 30^o) \longrightarrow \mathrm{I}_1 = 4e^{j30^o}$$

$$i_2(t) = 5\sin(\omega t - 20^o) = 5\cos(\omega t - 20^o + 270^o) \longrightarrow \mathrm{I}_2 = 5e^{j250^o}$$

$$\mathrm{I} = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 = 4e^{j30^o} + 5e^{j250^o} = 1.754 - \mathrm{j}2.699 = 3.218e^{-j56.98^o} \text{ A}$$

- En el dominio del tiempo resulta

$$\mathrm{I} = 3.218e^{-j56.98^o} \text{ A} \longrightarrow i(t) = \mathrm{Re}[\mathrm{I}e^{j\omega t}] = \mathrm{Re}[3.218e^{j(\omega t - 56.98^o)}]$$

$$= 3.218\cos(\omega t - 56.98^o) \text{ A}$$

6.4 Fasores

- Suponemos $v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{V} = V_m e^{j\phi}$

- Derivación:

- En el dominio del tiempo

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\omega V_m \sin(\omega t + \phi) = \omega V_m \cos(\omega t + \phi + \tfrac{\pi}{2})$$

- Representación fasorial del resultado: $\omega V_m e^{j\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right)} = j\omega \underbrace{V_m e^{j\phi}}_{\mathrm{V}} = j\omega \mathrm{V}$

- Luego

dominio del tiempo $\quad \boxed{\dfrac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} \leftrightarrow j\omega \mathrm{V}} \quad$ dominio de la frecuencia

- Integración:

- Análogamente

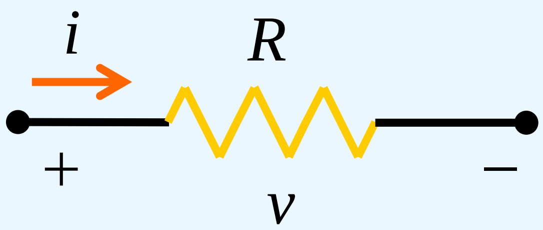
dominio del tiempo $\quad \boxed{\int v(t)\mathrm{d}t \leftrightarrow \dfrac{\mathrm{V}}{j\omega}} \quad$ dominio de la frecuencia

6.5 Relaciones fasoriales para R, L y C

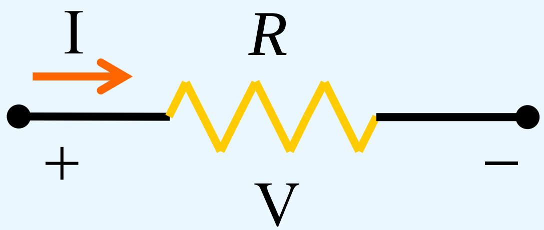
- En este apartado veremos como expresar la relación V-I de los elementos R, L y C en el dominio de la frecuencia

- Resistencia:

Dominio temporal



Dominio frecuencial



- Suponemos

$$i = I_m \cos(\omega t + \phi) \longrightarrow \mathrm{I} = I_m e^{j\phi}$$

- Ley de Ohm: $v = Ri$

$$v = Ri = RI_m \cos(\omega t + \phi) \longrightarrow \mathrm{V} = RI_m e^{j\phi}$$

$$\boxed{\mathrm{V} = R\mathrm{I}}$$

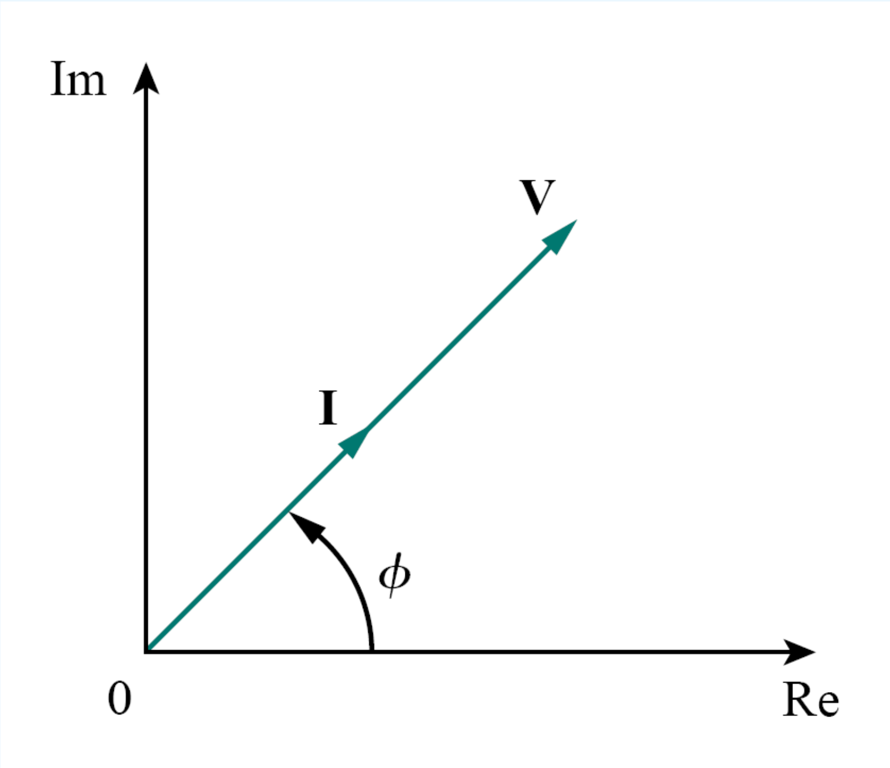
Ley de Ohm

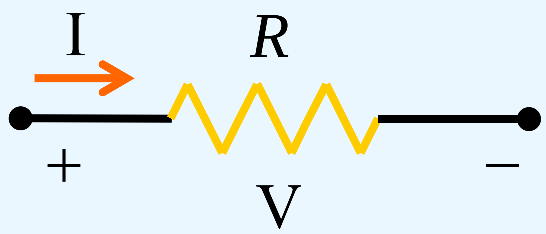
- En una resistencia, la tensión y la corriente están en fase!

6.5 Relaciones fasoriales para R, L y C

- Resistencia:

  - Diagrama fasorial para la resistencia





$$\mathrm{I} = I_m e^{j\phi}$$

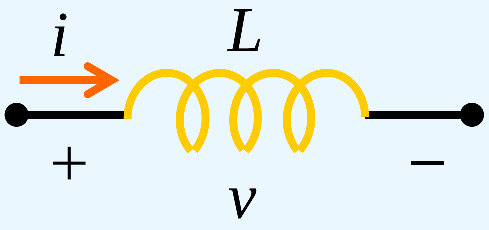
$$\mathrm{V} = R I_m e^{j\phi}$$

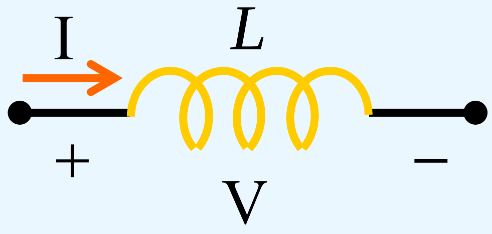
- En una resistencia, la tensión y la corriente están en fase!

6.5 Relaciones fasoriales para R, L y C

- Bobina:

Dominio temporal	Dominio frecuencial





- Suponemos

$$i = I_m \cos(\omega t + \phi) \longrightarrow \mathrm{I} = I_m e^{j\phi}$$

- Relación v-i: $v = L\dfrac{\mathrm{di}}{\mathrm{dt}}$

$$v = L\frac{\mathrm{di}}{\mathrm{dt}} = -\omega L I_m \sin(\omega t + \phi)$$

$$v = \omega L I_m \cos(\omega t + \phi + \tfrac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathrm{V} = \omega L I_m e^{j(\phi + \frac{\pi}{2})}$$

$$\downarrow$$

$$\mathrm{V} = j\omega L I_m e^{j\phi}$$

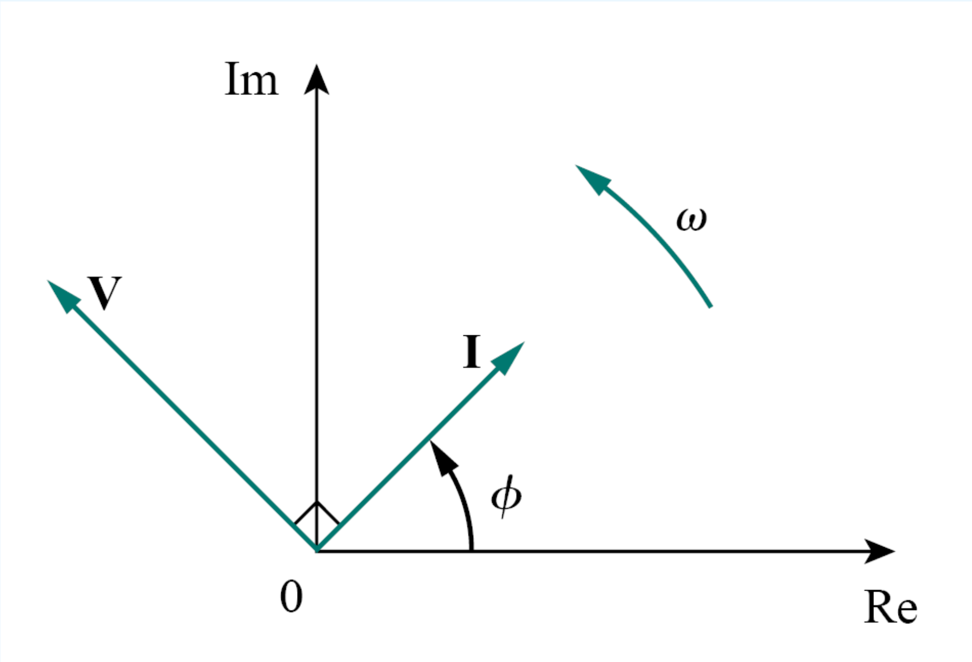
$$\boxed{\mathrm{V} = j\omega L\mathrm{I}}$$

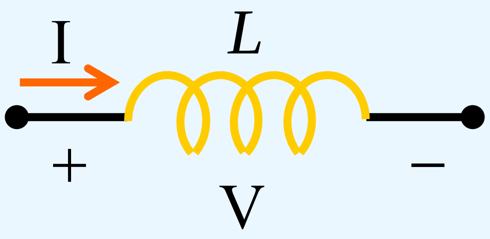
- La tensión está adelantada respecto de la corriente en 90°

6.5 Relaciones fasoriales para R, L y C

- Bobina:

  - Diagrama fasorial para la bobina





$$I = I_m e^{j\phi}$$

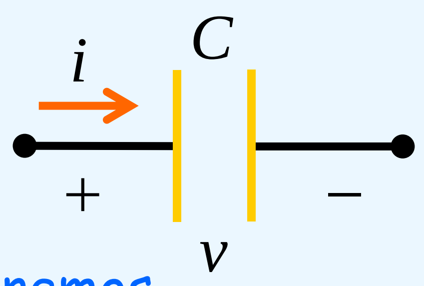
$$V = \omega L I_m e^{j(\phi + \frac{\pi}{2})}$$

- La tensión está adelantada respecto de la corriente en 90°

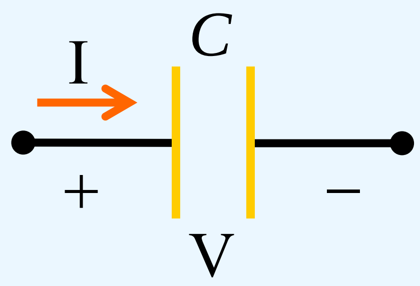
6.5 Relaciones fasoriales para R, L y C

- <u>Condensador</u>:

Dominio temporal



Dominio frecuencial



- Suponemos

$$v = V_m \cos(\omega t + \phi) \longrightarrow \mathrm{V} = V_m e^{j\phi}$$

- Relación v-i: $i = C\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$

$$i = C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\omega C V_m \sin(\omega t + \phi)$$

$$i = \omega C V_m \cos(\omega t + \phi + \tfrac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathrm{I} = \omega C V_m e^{j(\phi + \frac{\pi}{2})}$$

$$\downarrow$$

$$\mathrm{I} = j\omega C V_m e^{j\phi}$$

$$\mathrm{I} = j\omega C \mathrm{V}$$

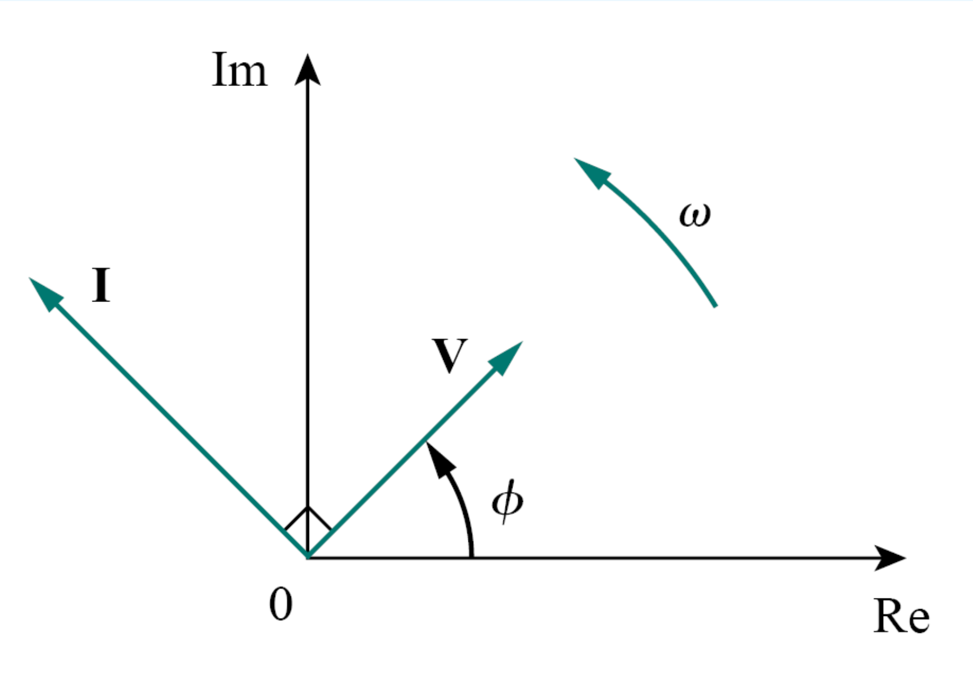
$$\boxed{\mathrm{V} = \frac{1}{j\omega C}\mathrm{I}}$$

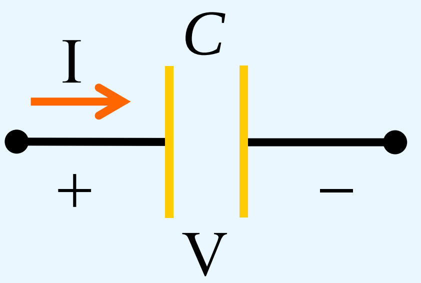
- La tensión está retrasada respecto de la corriente en 90°

6.5 Relaciones fasoriales para R, L y C

- Condensador:

  - Diagrama fasorial para el condensador





$$V = V_m e^{j\phi}$$

$$I = \omega C V_m e^{j(\phi + \frac{\pi}{2})}$$

- La tensión está retrasada respecto de la corriente en 90°

6.6 Impedancia y admitancia

- En el apartado anterior hemos obtenido la relación tensión-corriente en el dominio de la frecuencia para los elementos R, L y C:

$$\mathrm{V} = R\mathrm{I} \qquad \mathrm{V} = j\omega L\mathrm{I} \qquad \mathrm{V} = \frac{1}{j\omega C}\mathrm{I}$$

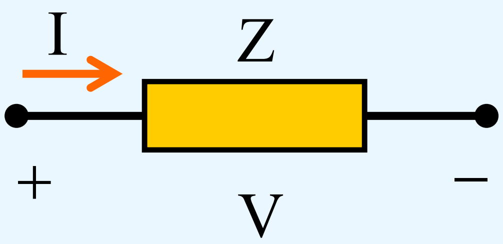
- Estas expresiones recuerdan a la ley de Ohm
(son relaciones V/I algebraicas)

- <u>Definición de impedancia:</u>

> "La impedancia Z de un elemento de circuito es el cociente entre la tensión fasorial V y la corriente fasorial I"

- Matemáticamente:

$$\boxed{\mathrm{Z} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{I}}}$$



- Se mide en Ohmios
- La impedancia NO es un fasor!

6.6 Impedancia y admitancia

- Impedancia para los elementos R, L y C vale:

$$Z_R = R \qquad Z_L = j\omega L \qquad Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}$$

- La impedancia es una función compleja de la frecuencia.
- En general:

$$\mathrm{Z} = \mathrm{R} + j\mathrm{X} \qquad (\mathrm{R}, \mathrm{X} \text{ son reales})$$

- La parte real de la impedancia se denomina resistencia R
- La parte imaginaria de la impedancia se denomina reactancia X
    - Si X > 0 se dice que la reactancia es inductiva
    - Si X < 0 se dice que la reactancia es capacitiva

- En los circuitos de AC la impedancia juega un papel análogo a la resistencia en los circuitos de DC

6.6 Impedancia y admitancia

- A veces resulta útil trabajar con el inverso de la impedancia, conocido como admitancia Y:

$$\boxed{Y = \frac{1}{Z}}$$

- Se mide en Siemens (S) o mhos

TABLE 9.3 Impedances and admittances of passive elements.

Element	Impedance	Admittance
R	$\mathbf{Z} = R$	$\mathbf{Y} = \dfrac{1}{R}$
L	$\mathbf{Z} = j\omega L$	$\mathbf{Y} = \dfrac{1}{j\omega L}$
C	$\mathbf{Z} = \dfrac{1}{j\omega C}$	$\mathbf{Y} = j\omega C$

- En general, la admitancia es una función compleja de la frecuencia:

$$Y = G + jB \qquad (G, B \text{ son reales})$$

- La parte real de Y se denomina conductancia G
- La parte imaginaria de Y se denomina susceptancia B

6.7 Análisis de circuitos mediante fasores

6.7.1 Leyes de Kirchhoff en el dominio frecuencial

"Las leyes de Kirchhoff son válidas en el dominio de la frecuencia, donde deben expresarse en forma fasorial"

KCL

$$\boxed{\sum_{n=1}^{N} \mathrm{I}_n = 0}$$

KVL

$$\boxed{\sum_{m=1}^{M} \mathrm{V}_m = 0}$$

- En consecuencia, todas las técnicas de análisis estudiadas para circuitos de continua pueden extenderse directamente al caso de circuitos de alterna simplemente empleando fasores.

- Como ejemplo consideramos el circuito RL analizado previamente en el dominio del tiempo

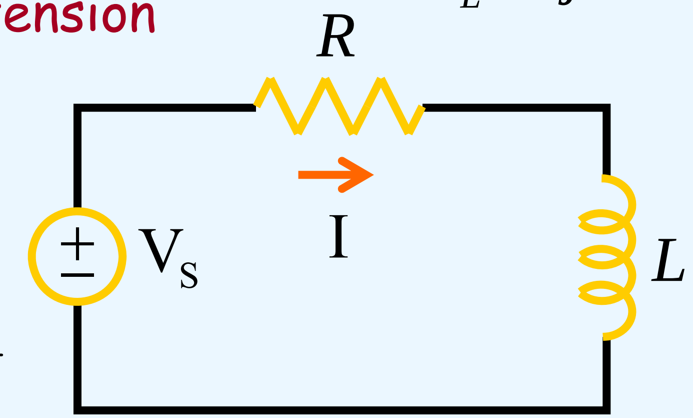
6.7 Análisis de circuitos mediante fasores

6.7.1 Leyes de Kirchhoff en el dominio frecuencial

$$Z_R = R$$
$$Z_L = j\omega L$$

- Volvemos al circuito RL con una fuente de tensión sinusoidal:

$$v_S(t) = V_m \cos(\omega t) \longleftrightarrow \mathrm{V}_S = V_m e^{j0}$$



- Aplicamos la KVL a la malla y resolvemos:

$$\mathrm{V}_S = Z_R \mathrm{I} + Z_L \mathrm{I} \rightarrow \mathrm{I} = \frac{V_m}{R + j\omega L} = \frac{V_m}{|Z| e^{j\beta}}$$

$$\mathrm{I} = \frac{V_m}{|Z|} e^{j\phi_0} \quad \text{con} \ \ \phi_0 = -\beta$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$$
$$\beta = \tan^{-1}(\omega L / R)$$

- En el dominio del tiempo:

$$i(t) = \mathrm{Re}[\mathrm{I} e^{j\omega t}] = \mathrm{Re}\left[\frac{V_m}{|Z|} e^{j\phi_0} e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{V_m}{|Z|} e^{j(\omega t + \phi_0)}\right]$$

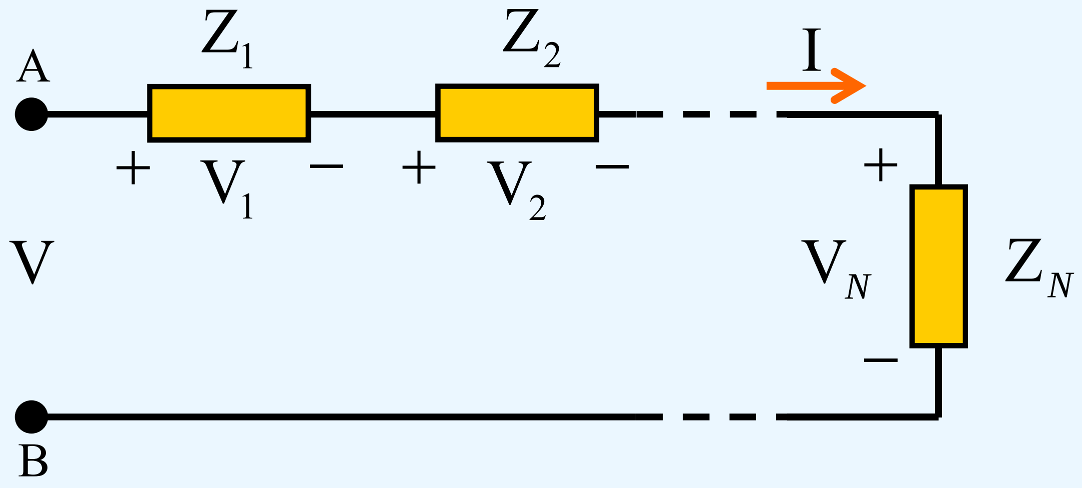
$$i(t) = \frac{V_m}{|Z|} \cos(\omega t + \phi_0)$$

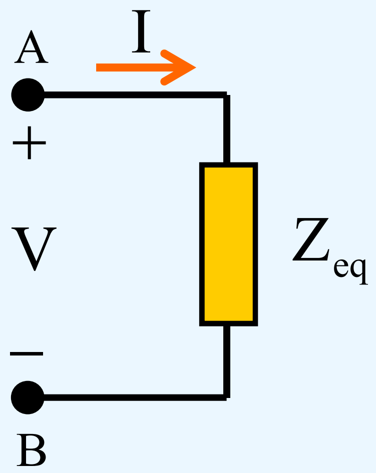
- Hemos obtenido i(t) de forma mucho más sencilla que resolviendo directamente en el dominio del tiempo !!

6.7 Análisis de circuitos mediante fasores

6.7.2 Asociación de impedancias

- Asociación de impedancias en serie:





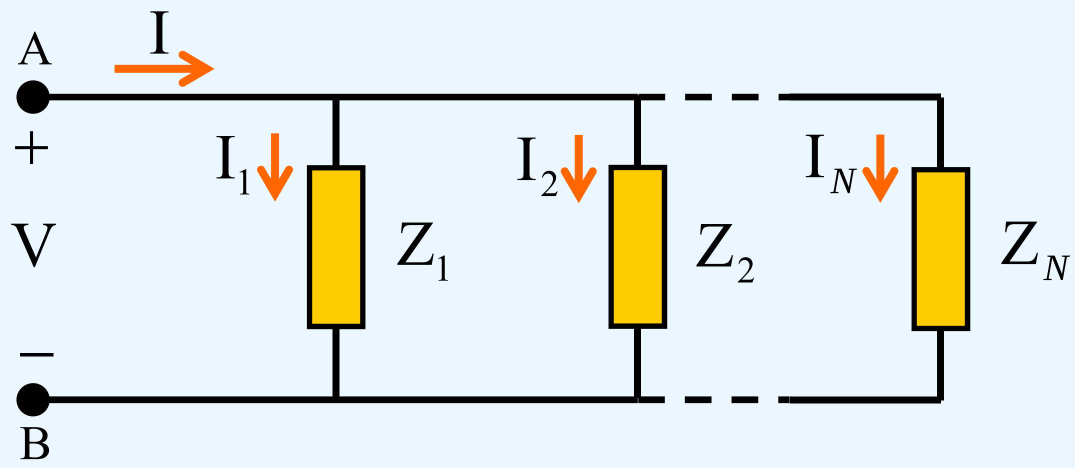
$$\boxed{Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_N = \sum_{n=1}^{N} Z_n}$$

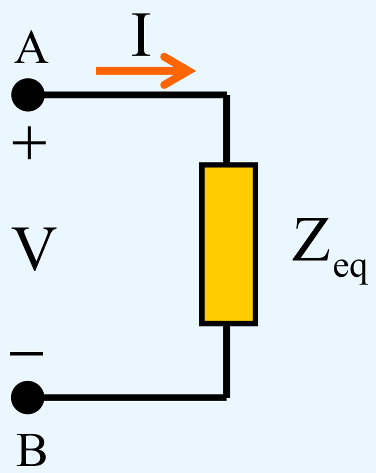
6.7 Análisis de circuitos mediante fasores

6.7.2 Asociación de impedancias

- Asociación de impedancias en paralelo:

$$\mathrm{Y}_n = \frac{1}{\mathrm{Z}_n}$$

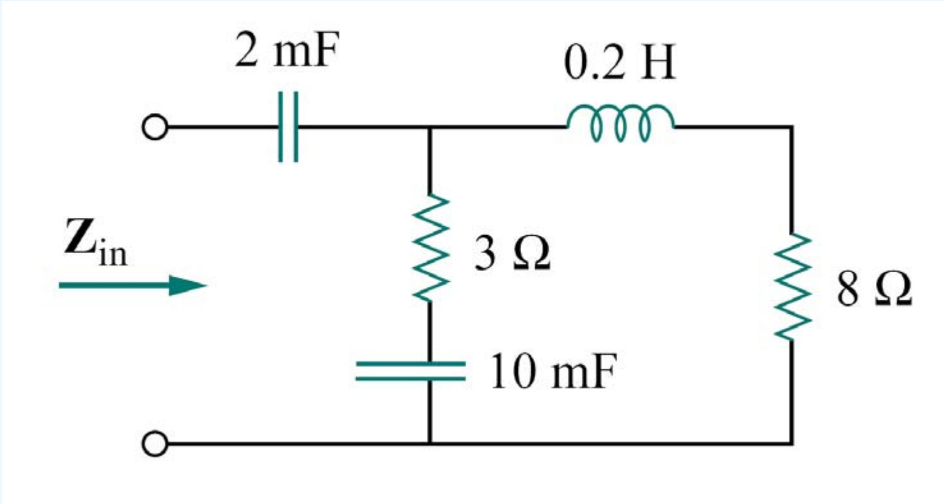




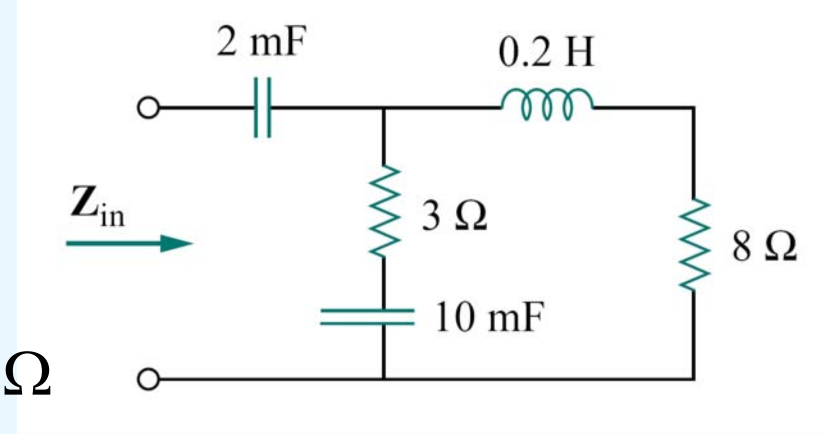
$$\boxed{\frac{1}{\mathrm{Z}_{\mathrm{eq}}} = \frac{1}{\mathrm{Z}_1} + \frac{1}{\mathrm{Z}_2} + \cdots + \frac{1}{\mathrm{Z}_N} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\mathrm{Z}_n}}$$

$$\boxed{\mathrm{Y}_{\mathrm{eq}} = \mathrm{Y}_1 + \mathrm{Y}_2 + \cdots + \mathrm{Y}_N = \sum_{n=1}^{N} \mathrm{Y}_n}$$

-Ejemplo 4: Calcular la impedancia de entrada del circuito de la figura suponiendo que funciona a ω = 50 rad/s



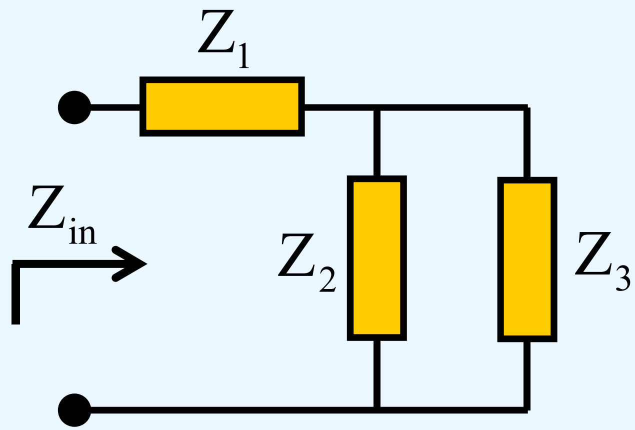
Solución:



$$Z_1 = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{50\times 2\times 10^{-3}} = -j10\,\Omega$$

$$Z_2 = R_1 + \frac{1}{j\omega C} = 3 - \frac{j}{50\times 10^{-2}} = 3 - j2\ \ \Omega$$

$$Z_3 = R_2 + j\omega L = 8 + j50\times 0.2 = 8 + j10\ \ \Omega$$

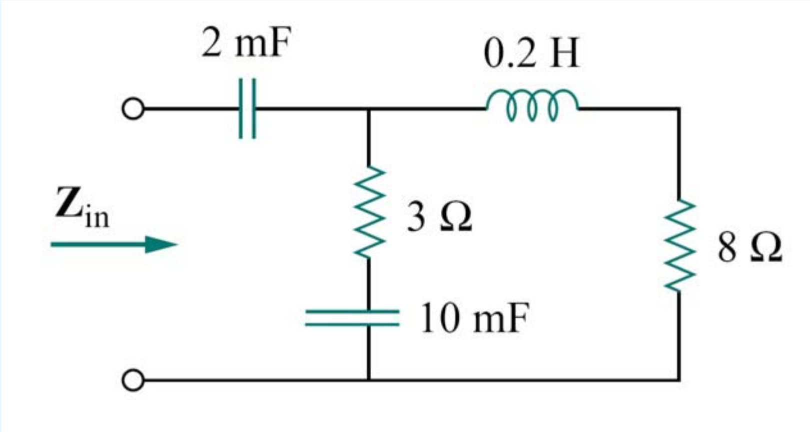


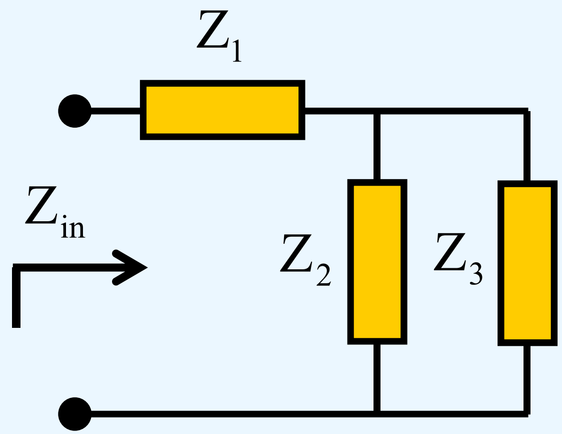
$$Z_{\text{in}} = Z_1 + (Z_2 \parallel Z_3) = Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}$$

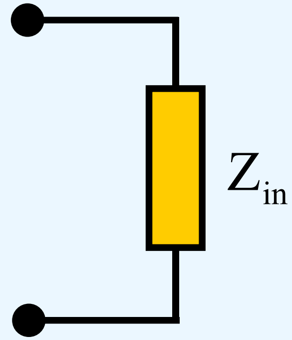
$$= -j10 + \frac{(3 - j2)\times(8 + j10)}{11 + j8}$$

- Operando

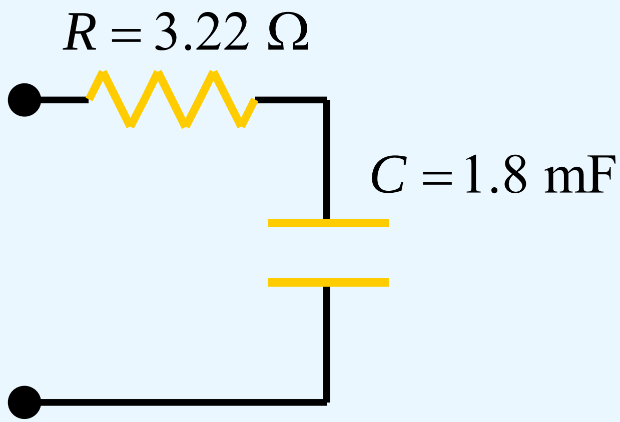
$$\boxed{Z_{\text{in}} = 3.22 - j11.07\ \ \Omega}$$





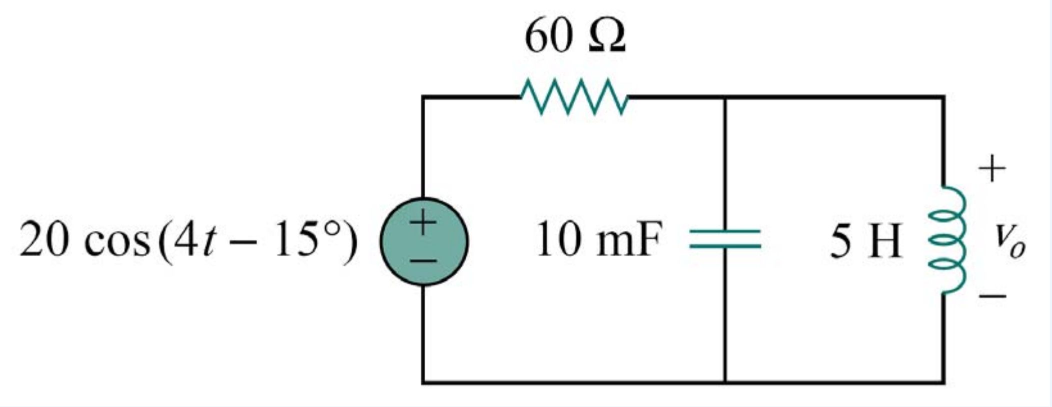


$$Z_{\text{in}} = 3.22 - j11.07\ \Omega$$



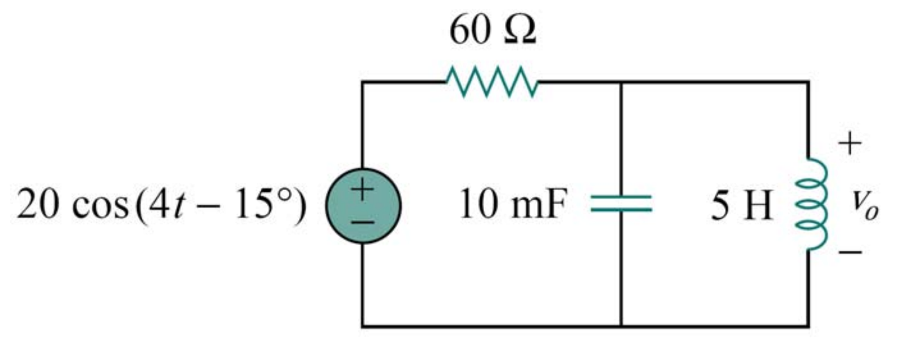
$$X = \frac{1}{\omega C} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{\omega X} = \frac{1}{50 \times 11.07} = 1.8\ \text{mF}$$

-Ejemplo 5: Determinar $v_0(t)$ en circuito de la figura.



Solución:

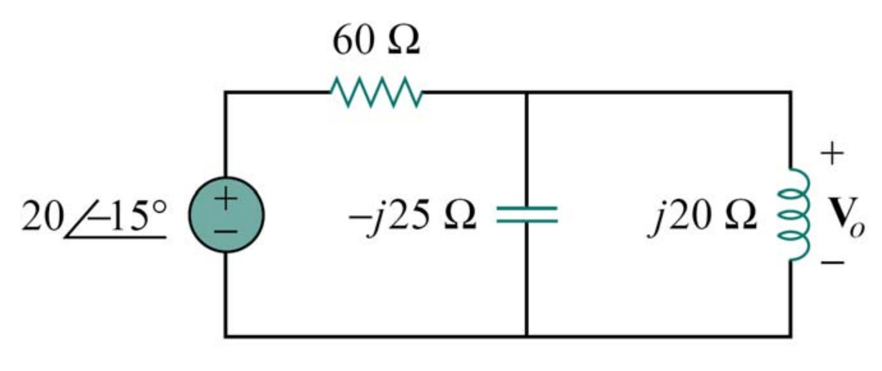
- En primer lugar transformamos el circuito al dominio de la frecuencia



- Fuente:

$$v_S(t) = 20\cos(4t - 15^{\text{o}}) \rightarrow \mathrm{V}_S = 20\,|\underline{-15^{\text{o}}}$$

$$\omega = 4 \text{ rad/s}$$



- Condensador:

$$10\text{ mF} \rightarrow Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{4\times 10\times 10^{-3}}$$

$$= -j25\,\Omega$$

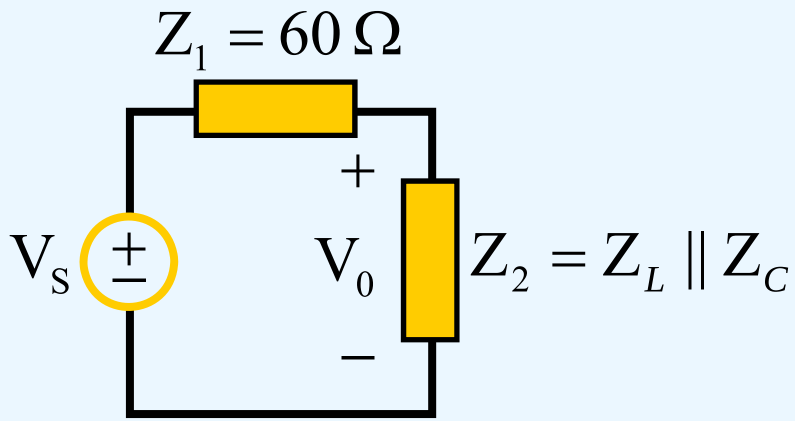
- Bobina:

$$5\text{ H} \rightarrow Z_L = j\omega L = j4\times 5 = j20\ \Omega$$

- Asociamos las impedancias en paralelo:

$$Z_2 = Z_L \parallel Z_C = \frac{Z_L Z_C}{Z_L + Z_C}$$

$$= \frac{-j25 \times j20}{-j25 + j20} = j100\,\Omega$$



- Aplicando la fórmula del divisor de tensión:

$$V_0 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} V_S = \frac{j100}{60 + j100} \times (20e^{-j15^\circ}) = \frac{100e^{j90^\circ}}{116.62e^{j59.04^\circ}} \times (20e^{-j15^\circ})$$

$$= \frac{100 \times 20}{116.62} e^{j(90^\circ - 15^\circ - 59.04^\circ)} = 17.15e^{j15.96^\circ} \text{ V}$$

$$v_0(t) = \mathrm{Re}\left[V_0 e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[17.15e^{j15.96^\circ} e^{j4t}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{v_0(t) = 17.15\cos(4t + 15.96^\circ) \text{ V}}$$

6.7 Análisis de circuitos mediante fasores

6.7.3 Análisis de nudos y de mallas

- La resolución de circuitos de alterna puede hacerse según los siguientes pasos:

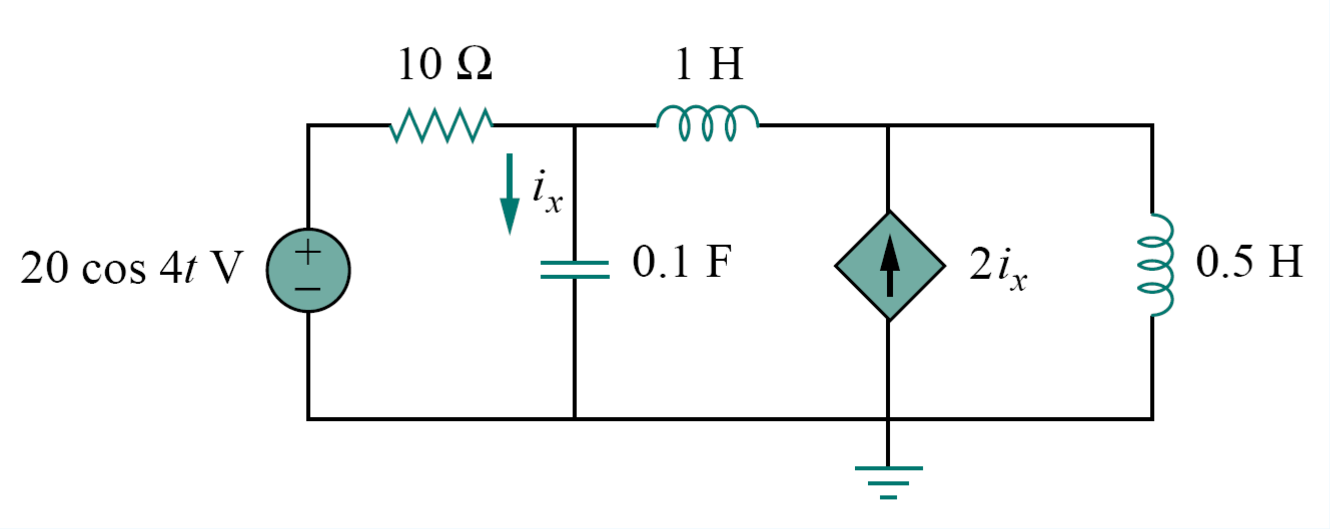
1- Se transforma el circuito del dominio del tiempo al dominio fasorial (o de la frecuencia)

2- Se resuelve el circuito aplicando las técnicas estudiadas en los temas 1-3 (análisis de nudos, análisis de mallas, superposición, etc…)

3- Se transforma la solución obtenida al dominio del tiempo

- A continuación veremos algún ejemplo de análisis nodal y de mallas.

- Ejemplo 5: Determinar i_x en el circuito de la figura utilizando análisis nodal.



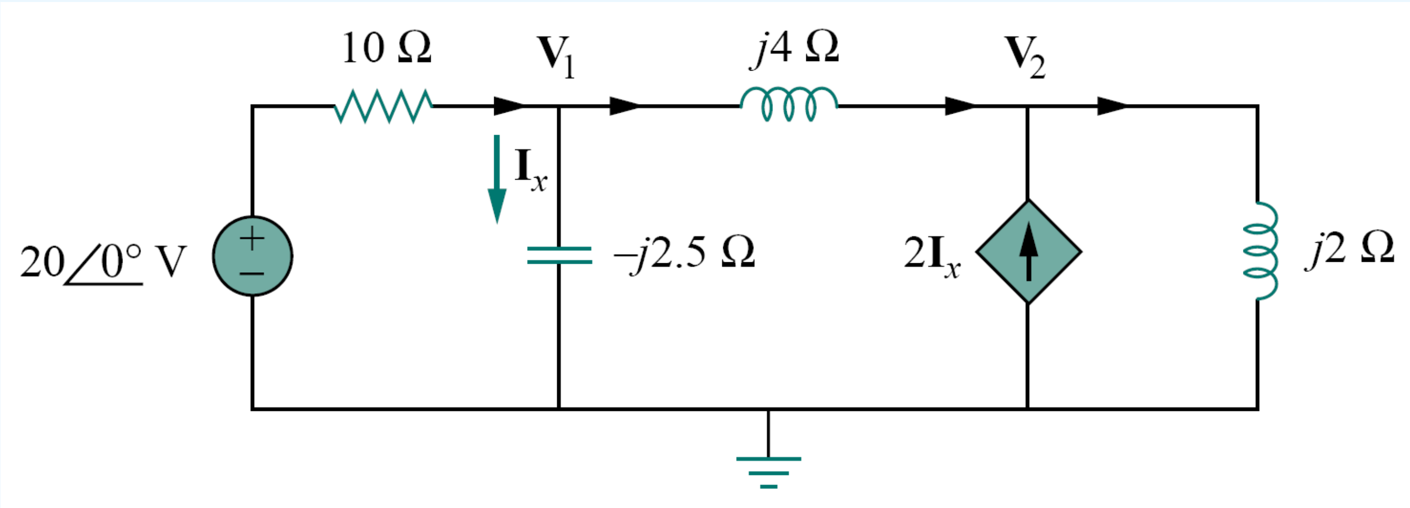
Solución:

- En primer lugar transformamos el circuito al dominio de la frecuencia

$$20\cos(4t+0^{o}) \rightarrow 20\,|\,\underline{0^{o}} \qquad \omega = 4\ \text{rad/s}$$

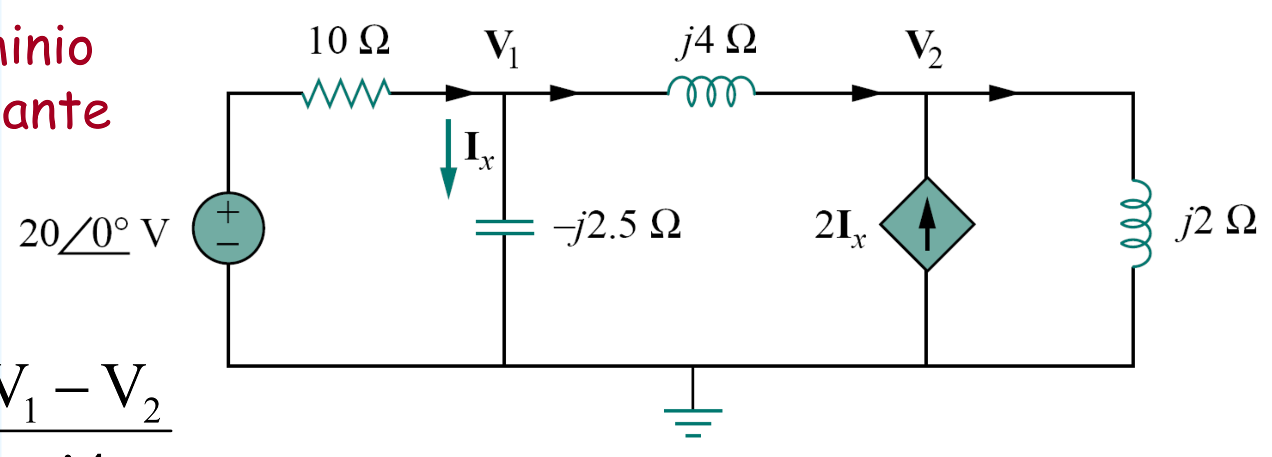
$$1\,\text{H} \rightarrow j\omega L = j4\times 1 = j4\ \Omega \qquad 0.5\,\text{H} \rightarrow j\omega L = j4\times 0.5 = j2\ \Omega$$

$$0.1\,\text{F} \rightarrow \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{4\times 0.1} = -j2.5\,\Omega$$



Circuito problema en el dominio de la frecuencia

- Resolvemos en el dominio de la frecuencia mediante análisis de nudos



- Nudo 1:

$$\frac{20-V_1}{10}=\frac{V_1}{-j2.5}+\frac{V_1-V_2}{j4}$$

- Nudo 2:

$$2I_x+\frac{V_1-V_2}{j4}=\frac{V_2}{j2}$$

$$I_x=\frac{V_1}{-j2.5}$$

- Se obtiene el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned}(1+j1.5)V_1+j2.5V_2&=20\\ 11V_1+15V_2&=0\end{aligned}\right\}$$

- Cuya solución es:

$$V_1=18+j6=18.97e^{j18.43^{o}}\ \mathrm{V}$$

$$V_2=-13.2-j4.4=13.91e^{j198.3^{o}}\ \mathrm{V}$$

- Entonces:

$$I_x=\frac{V_1}{-j2.5}=-2.4+j7.2=7.59e^{j108.4^{o}}\ \mathrm{A}$$

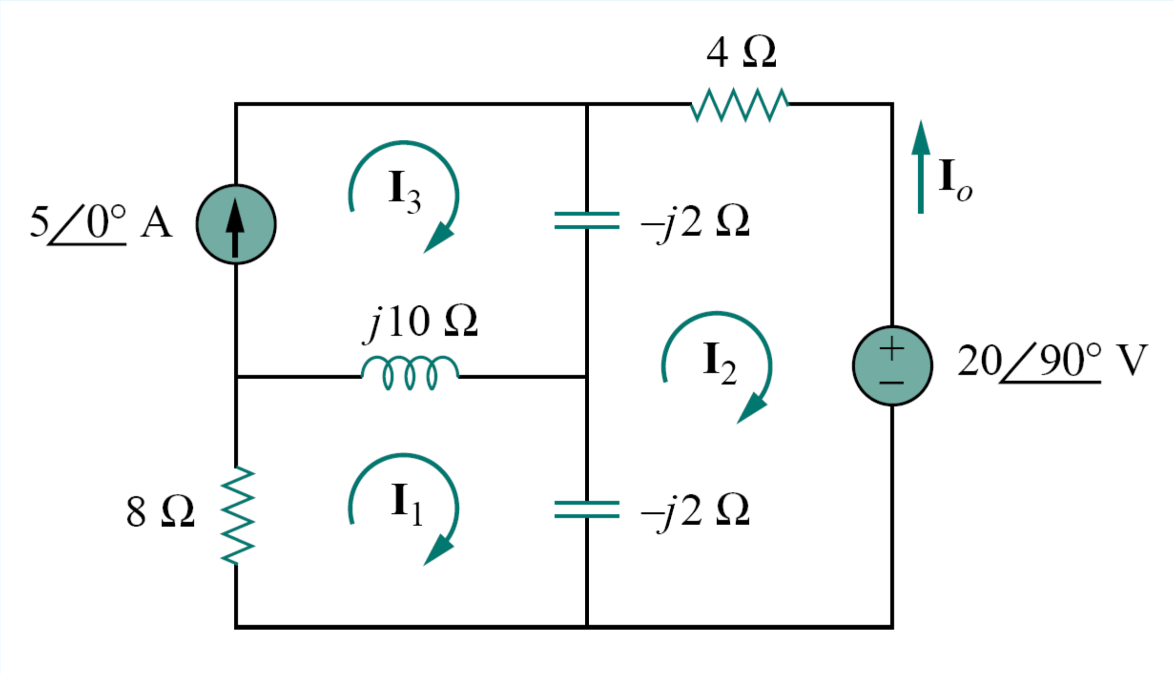
- En el dominio temporal:

$$i_x(t)=\mathrm{Re}\left[I_x e^{j\omega t}\right]$$

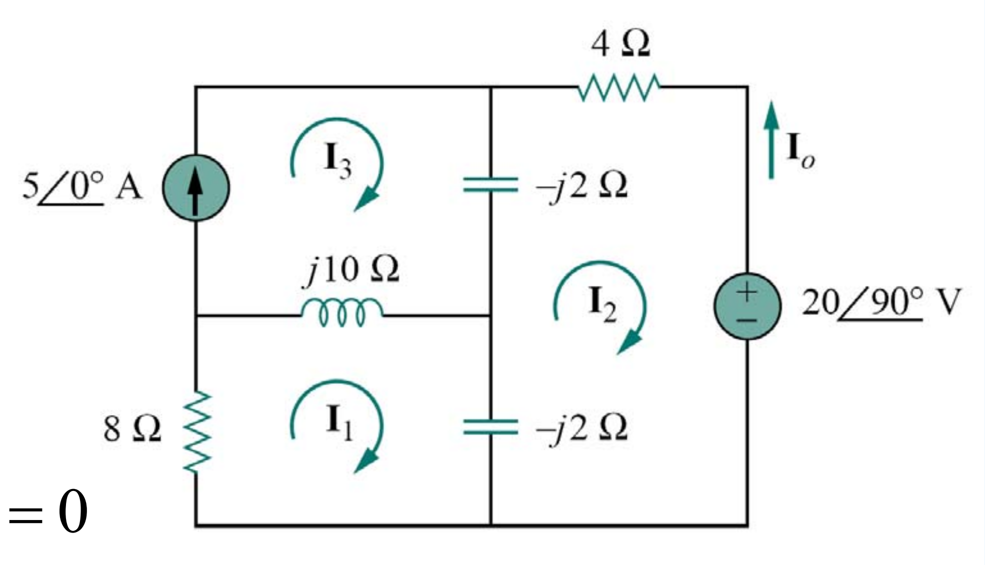
$$\boxed{i_x(t)=7.59\cos(4t+108.4^{o})\ \mathrm{A}}$$

- Ejemplo 6: Calcular I_0 en el circuito de la figura aplicando análisis de mallas.

A&S-3ª Ej 10.3



Solución:



- Malla 1:

$$8I_1+(I_1-I_3)\,j10+(I_1-I_2)(-j2)=0$$

- Malla 2:

$$(I_2-I_1)(-j2)+(I_2-I_3)(-j2)+I_2 4+20e^{j90^\circ}=0$$

- Malla 3:

$$I_3=5\text{ A}$$

- Se obtiene el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned}(8+j8)I_1+j2I_2&=j50\\ j2I_1+(4-j4)I_2&=-j30\end{aligned}\right\}$$

- Resolviendo:

$$I_2=6.12e^{-j35.22^\circ}\text{ A}$$

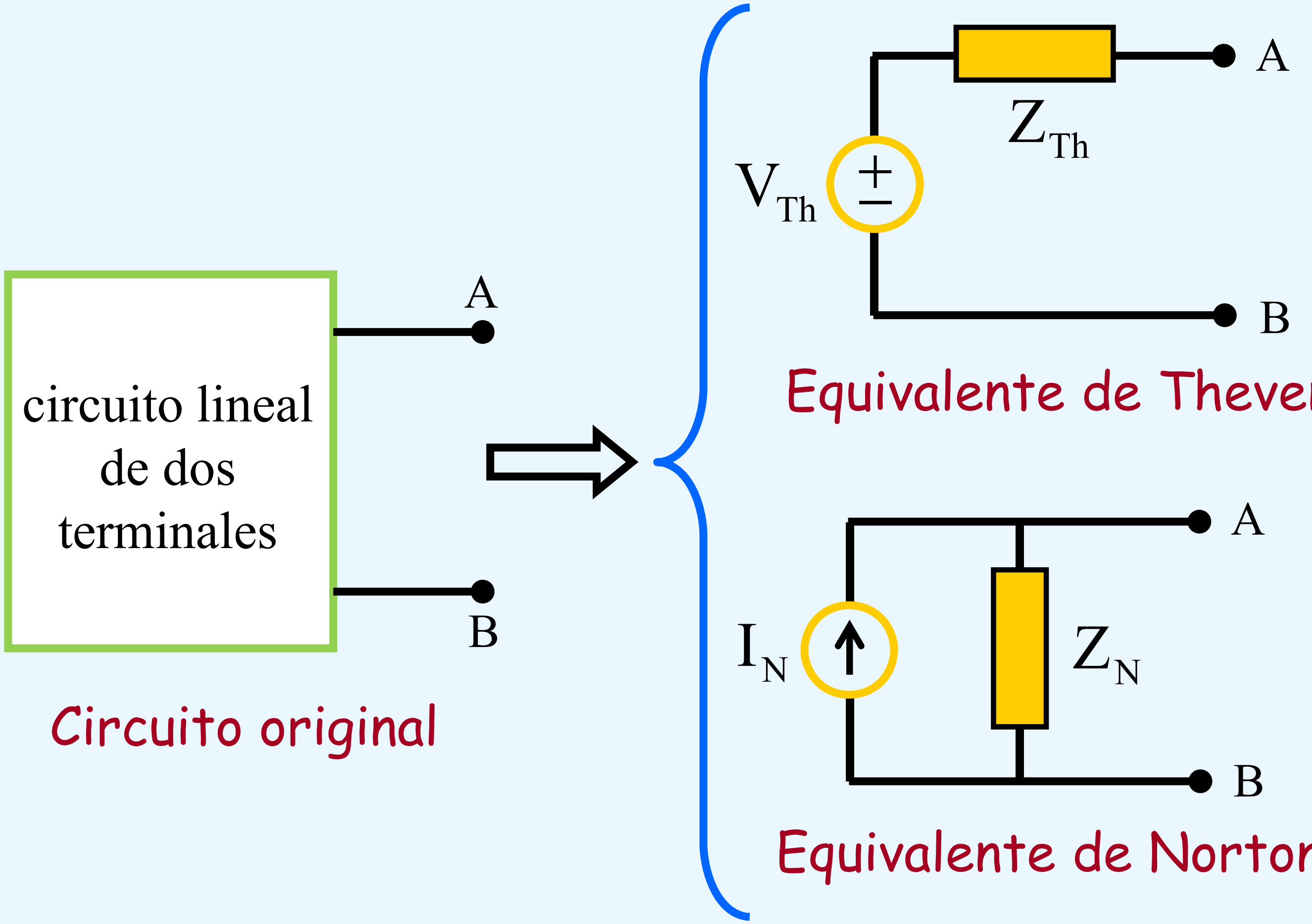
- Luego,

$$\begin{aligned}I_0=-I_2&=-6.12e^{-j35.22^\circ}\\ &=6.12e^{j(-35.22^\circ+180^\circ)}\\ &=6.12e^{j144.38^\circ}\text{A}\end{aligned}$$

6.7 Análisis de circuitos mediante fasores

6.7.4 Circuitos equivalentes de Thevenin y de Norton

- Los teoremas de Thevenin y Norton se aplican a los circuitos de alterna de forma análoga a como se hace en los de continua



Circuito original

Equivalente de Thevenin

Equivalente de Norton

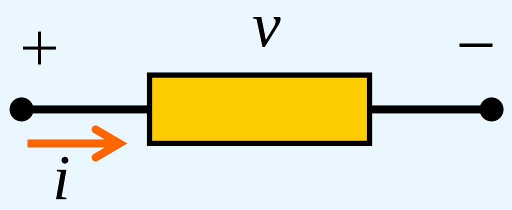
$$\boxed{V_{Th} = Z_{Th} I_N}$$

$$\boxed{Z_N = Z_{Th}}$$

6.8 Potencia instantánea y potencia media

- Potencia instantánea:
- Según se definió en el Tema 1, la potencia absorbida o suministrada por un elemento es el producto de la tensión entre los extremos del elemento por la corriente que pasa a través de él

$$p(t) = v(t)i(t)$$

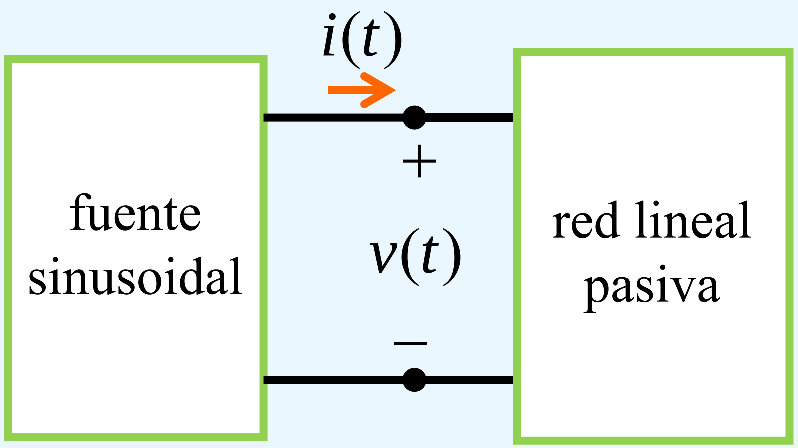


- La potencia instantánea $p(t)$ representa la potencia para cualquier instante de tiempo t
- Supongamos un circuito en estado sinusoidal permanente.

6.8 Potencia instantánea y potencia media

- Potencia instantánea en estado sinusoidal permanente:

- Supongamos un circuito en estado sinusoidal permanente
- La tensión y la corriente en los terminales del circuito serán de la forma:



$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi_v)$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi_i)$$

- La potencia instantánea vale

$$p(t) = v(t) i(t) = V_m I_m \cos(\omega t + \phi_v) \cos(\omega t + \phi_i)$$

- Aplicando la identidad: $\cos(A)\cos(B) = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B) + \cos(A+B)\right]$

- resulta

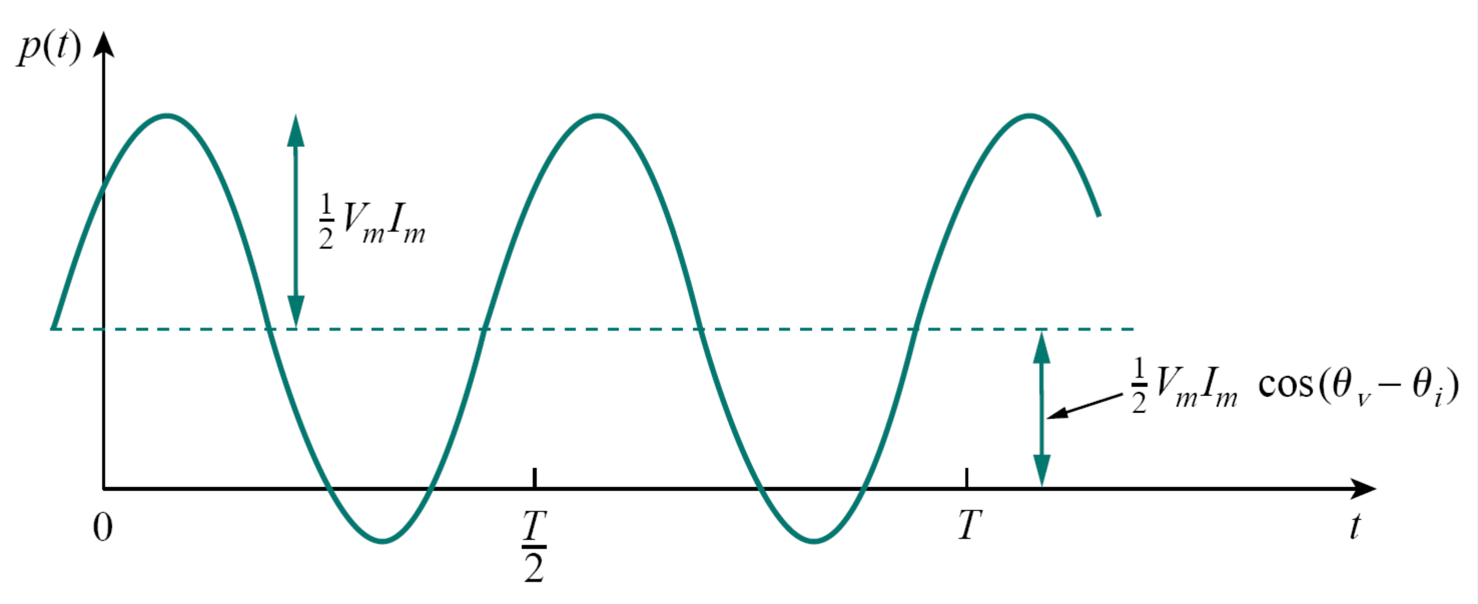
$$p(t) = \tfrac{1}{2} V_m I_m \cos(\phi_v - \phi_i) + \tfrac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \phi_v + \phi_i)$$

6.8 Potencia instantánea y potencia media

- La potencia instantánea tiene dos partes:

$$p(t) = \underbrace{\tfrac{1}{2} V_m I_m \cos(\phi_v - \phi_i)}_{\text{parte constante}} + \underbrace{\tfrac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \phi_v + \phi_i)}_{\text{parte dependiente del tiempo}}$$

- La parte constante depende de la diferencia de fases
- La parte temporal tiene frecuencia doble, 2ω
- $p(t)$ es positiva parte del ciclo y negativa la otra parte
  - Si $p(t) > 0$, el circuito absorbe potencia
  - Si $p(t) < 0$, la fuente absorbe potencia



6.8 Potencia instantánea y potencia media

- Potencia media:

- La potencia instantánea cambia con el tiempo, por tanto es difícil de medir.
- Definición de potencia media

"Es el promedio de la potencia instantánea a lo largo de un periodo"

- Matemáticamente:

$$\boxed{P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\mathrm{d}t}$$

- En el laboratorio la potencia media se mide con el vatímetro
- Recordando que la potencia instantánea vale

$$p(t) = \tfrac{1}{2}V_m I_m \cos(\phi_v - \phi_i) + \tfrac{1}{2}V_m I_m \cos(2\omega t + \phi_v + \phi_i)$$

- y sustituyendo en la definición de P, se obtiene

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T \tfrac{1}{2}V_m I_m \cos(\phi_v - \phi_i)\mathrm{d}t + \frac{1}{T}\int_0^T \tfrac{1}{2}V_m I_m \cos(2\omega t + \phi_v + \phi_i)\mathrm{d}t$$

6.8 Potencia instantánea y potencia media

- Integrando

$$P = \tfrac{1}{2} V_m I_m \cos(\phi_v - \phi_i) \underbrace{\tfrac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t}_{=1} + \tfrac{1}{2} V_m I_m \underbrace{\tfrac{1}{T}\int_0^T \cos(2\omega t + \phi_v + \phi_i)\mathrm{d}t}_{=0}$$

- queda $P = \tfrac{1}{2} V_m I_m \cos(\phi_v - \phi_i)$

- expresión que no depende del tiempo

-También se puede calcular la potencia media a partir de los fasores tensión y corriente

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi_v) \rightarrow \mathrm{V} = V_m e^{j\phi_v}$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi_i) \rightarrow \mathrm{I} = I_m e^{j\phi_i}$$

- Se observa que

$$\tfrac{1}{2}\mathrm{V}\mathrm{I}^* = \tfrac{1}{2} V_m e^{j\phi_v} I_m e^{-j\phi_i} = \tfrac{1}{2} V_m I_m e^{j(\phi_v - \phi_i)}$$

$$= \tfrac{1}{2} V_m I_m \left[\cos(\phi_v - \phi_i) + j\sin(\phi_v - \phi_i)\right]$$

- Entonces

$$\boxed{P = \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\mathrm{V}\mathrm{I}^*\right] = \tfrac{1}{2} V_m I_m \cos(\phi_v - \phi_i)}$$

6.8 Potencia instantánea y potencia media

- Consideramos 2 casos particulares de interés:

1. Circuito puramente resistivo (R): $\phi_v = \phi_i$

$$P = \tfrac{1}{2} V_m I_m \cos(\phi_v - \phi_i) = \tfrac{1}{2} V_m I_m = \tfrac{1}{2} I_m^2 R = \tfrac{1}{2} |\,\mathrm{I}\,|^2 \; R \geq 0$$

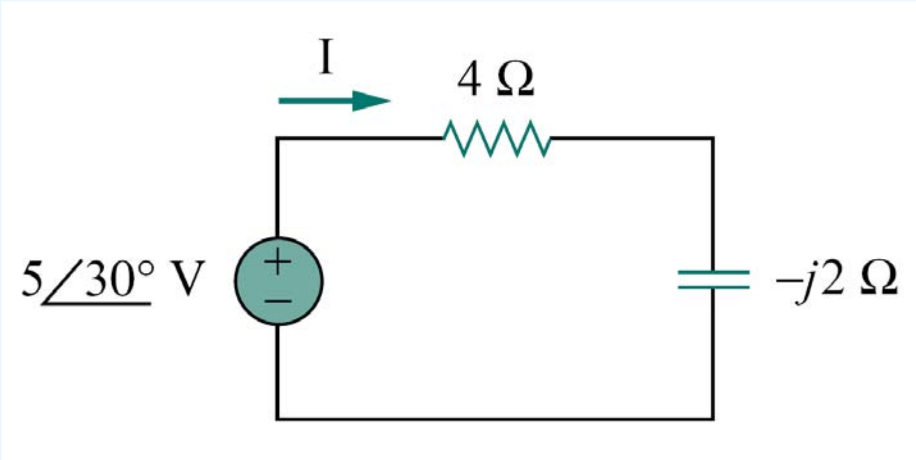
- La potencia media para un circuito resistivo es siempre positiva (absorbe energía)

2. Circuito puramente reactivo (L o C): $\phi_v = \phi_i \pm \frac{\pi}{2}$

$$P = \tfrac{1}{2} V_m I_m \cos(\phi_v - \phi_i) = \tfrac{1}{2} V_m I_m \cos(\pm \tfrac{\pi}{2}) = 0$$

- La potencia media para un circuito puramente reactivo es siempre nula (no absorbe energía)

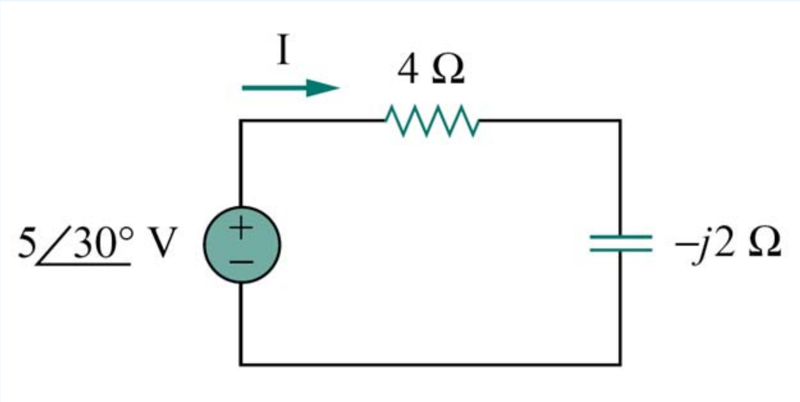
- Ejemplo 7: En el circuito de la figura, calcular las potencias medias suministrada por la fuente y disipada por la resistencia



Solución:

- Para calcular las potencias medias emplearemos las fórmulas fasoriales:

$$P_\mathrm{f} = \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\mathrm{V_f I_f^*}\right] \qquad P_\mathrm{R} = \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\mathrm{V_R I_R^*}\right]$$



- Comenzamos calculando la corriente:

$$\mathrm{V_f} = 5e^{j30^\circ}\ \mathrm{V}$$

$$\mathrm{I_f} = \mathrm{I_R} = \mathrm{I} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{Z}} = \frac{5e^{j30}}{4-j2} = ?? = 1.118e^{j56.57^\circ}\ \ \mathrm{A}$$

- La potencia media suministrada por la fuente vale:

$$P_\mathrm{f} = \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\mathrm{V_f I_f^*}\right] = \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left[5e^{j30^\circ} \times 1.118e^{-j56.57^\circ}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left[5.59e^{-j26.57^\circ}\right] = 2.795\cos(-26.57^\circ) = 2.5\ \mathrm{W}$$

- La tensión en la resistencia vale:

$$\mathrm{V_R} = R\mathrm{I_f} = 4 \times 1.118e^{j56.57^\circ} = 4.472e^{j56.57^\circ}\ \mathrm{V}$$

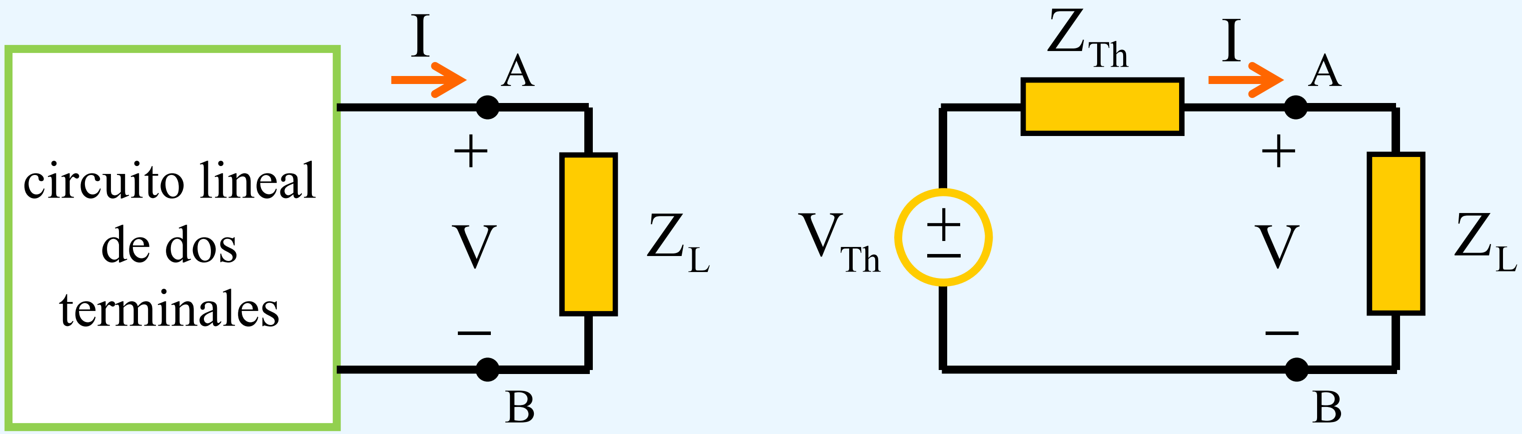
- La potencia media disipada en la resistencia es:

$$P_\mathrm{R} = \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\mathrm{V_R I_R^*}\right] = \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left[4.472e^{j56.57^\circ} \times 1.118e^{-j56.57^\circ}\right] = 2.5\ \mathrm{W}$$

6.9 Máxima transferencia de potencia media. Adaptación conjugada

- En este apartado vamos a generalizar al caso de circuitos de alterna, el teorema de máxima transferencia de potencia visto en el tema 3:

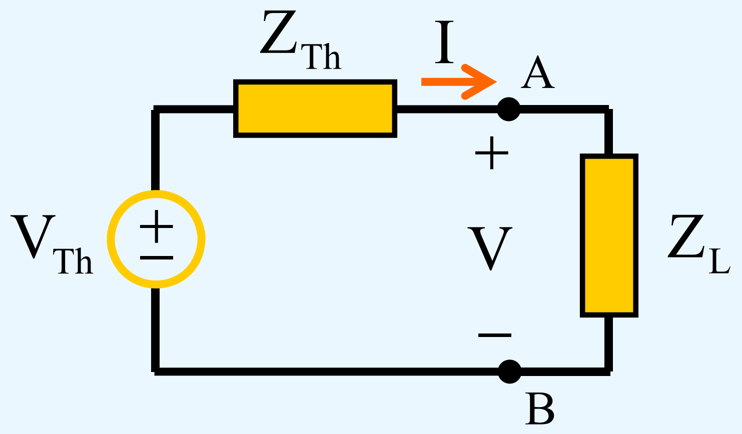
> En condiciones de circuito fuente fijo y carga variable, la transferencia de potencia media a la carga es máxima cuando la impedancia de carga Z_L es igual al complejo conjugado de la impedancia del equivalente Thevenin del circuito fuente Z_{Th}



$$P = P_{max} \Rightarrow Z_L = Z_{Th}^*$$

6.9 Máxima transferencia de potencia media. Adaptación conjugada

- Demostración
  - Partimos del equivalente Thevenin del circuito fuente



$$\mathrm{I} = \frac{\mathrm{V_{Th}}}{\mathrm{Z_{Th}} + \mathrm{Z}_L}$$

$$P = \tfrac{1}{2}|\,\mathrm{I}\,|^2 R_L = \frac{|\,\mathrm{V_{Th}}\,|^2 R_L/2}{(R_{\mathrm{Th}} + R_L)^2 + (X_{\mathrm{Th}} + X_L)^2}$$

$$\mathrm{Z_{Th}} = R_{\mathrm{Th}} + j\mathrm{X_{Th}}$$

$$\mathrm{Z}_L = R_L + j\mathrm{X}_L$$

- Para encontrar el máximo derivamos e igualamos a cero:

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial X_L} = 0 \Rightarrow X_L = -X_{\mathrm{Th}}; \qquad \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial R_L} = 0 \Rightarrow R_L = \sqrt{R_{\mathrm{Th}}^2 + (X_{\mathrm{Th}} + X_L)^2}$$

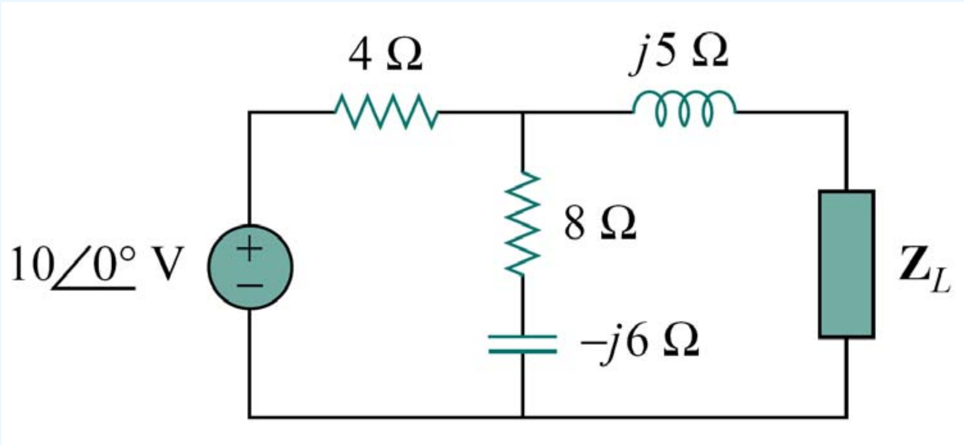
- Resulta:

$$\left.\begin{array}{l} R_L = R_{\mathrm{Th}} \\ X_L = -X_{\mathrm{Th}} \end{array}\right\} \boxed{Z_L = Z_{\mathrm{Th}}^*}$$ (Adaptación Conjugada)

- La potencia media máxima resulta:

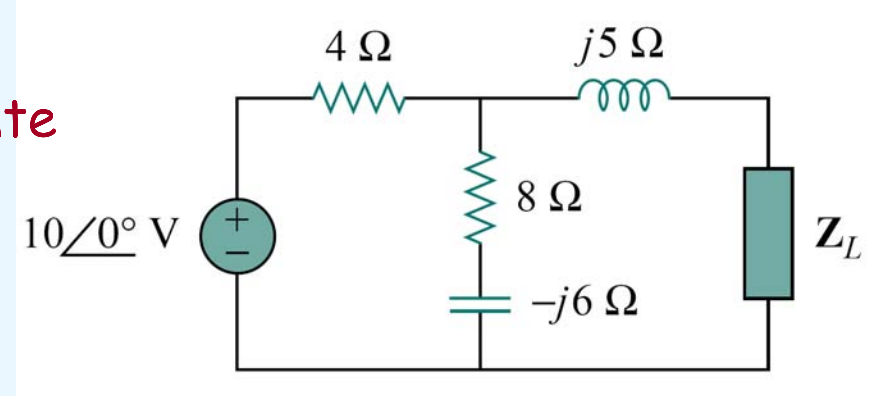
$$\boxed{P_{\max} = \frac{|\,\mathrm{V_{Th}}\,|^2}{8R_{\mathrm{Th}}}}$$

-Ejemplo 8: Determinar la impedancia de carga Z_L que maximiza la potencia media absorbida del circuito. ¿Cuánto vale dicha potencia máxima?

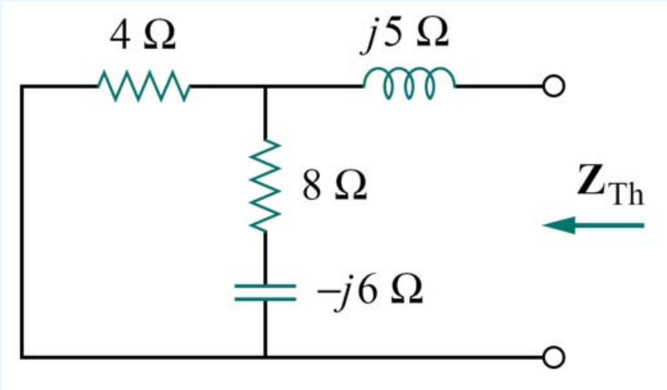


Solución:

- Comenzaremos calculando el equivalente de Thevenin del circuito fuente



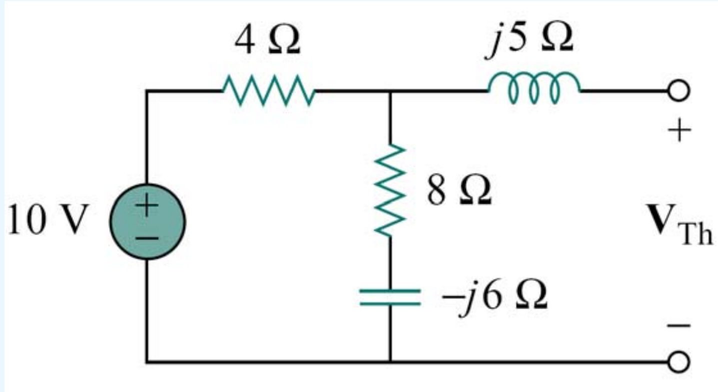
- Impedancia de entrada:



$$
\begin{aligned}
Z_{Th} &= [4 \parallel (8 - j6)] + j5 \\
&= \frac{4 \times (8 - j6)}{4 + 8 - j6} + j5 \\
&= \frac{40e^{-j36.87^{o}}}{13.416e^{-j26.57^{o}}} + j5 \\
&= 2.983e^{-j10.31^{o}} + j5 \\
&= 2.983\left[\cos(10.31^{o}) - j\sin(10.31^{o})\right] + j5 \\
&= 2.933 + j4.467\ \Omega
\end{aligned}
$$

- Tensión de Thevenin:

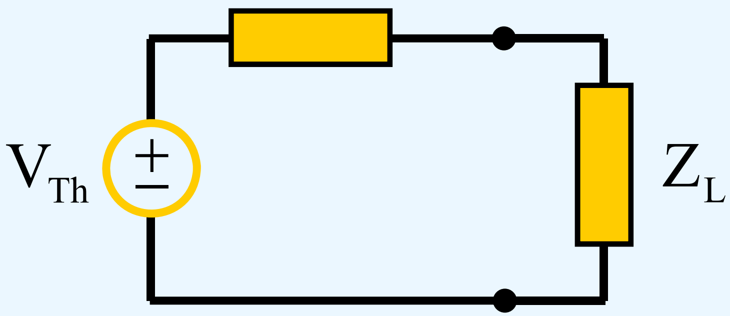
  - Por división de tensión



$$\mathrm{V_{Th}} = \frac{8 - j6}{4 + 8 - j6} \times 10$$

$$= \frac{100 e^{-j36.87^{o}}}{13.416 e^{-j26.57^{o}}} = 7.45 e^{-j10.31^{o}} \ \mathrm{V}$$

$$\mathrm{Z_{Th}} = 2.99 + j4.47\,\Omega$$



- La impedancia de carga deberá ser:

$$\mathrm{Z}_L = \mathrm{Z_{Th}^{*}} = 2.93 - j4.47\,\Omega$$

- Para esta impedancia de carga, la potencia media disipada es:

$$P_{\mathrm{max}} = \frac{|\,\mathrm{V_{Th}}\,|^2}{8R_{\mathrm{Th}}} = \frac{(7.45)^2}{8 \times 2.93} = 2.37 \ \mathrm{W}$$