CUESTIONES Y PROBLEMAS DE LA ASIGNATURA "INTRODUCCIÓN AL LENGUAJE MATEMÁTICO"

LUIS M. PARDO

Índice

1. Cuestiones y Problemas sobre Cálculo Proposicional

1.1. Cuestiones Teóricas.

Cuestión 1 (**Sintaxis**). Reflexiona si son correctas o falsas las siguientes aseveraciones sobre los Lenguajes Formales. Explica tus reflexiones:

i) Los lenguajes formales y los lenguajes naturales coinciden en que ninguno de los dos dispone de Análisis Sintático.
ii) Un alfabeto es una lista se símbolos, preferiblemente finita, sobre el que podemos representar palabras.
iii) Toda palabra expresable sobre un alfabeto es una fórmula aceptable para cualquier lenguaje formal expresable sobre el mismo alfabeto.
iv) En la introducción naïve (intuitiva) de $\mathbb{N}$, todas las palabras expresables sobre el alfabeto unario son números naturales.
v) En clase no hemos visto ningún algoritmo de Análisis Sintáctico para el Cálculo Proposicional.
vi) Para analizar si una palabra expresada sobre el alfabeto del Cálculo Proposicional es o no fórmula bien formada, los paréntesis son esenciales.
vii) Sobre el alfabeto griego, las palabras, que usualmente llamamos $'I\lambda\iota\acute{\alpha}\zeta$, viene de la tradición oral y se desconoce su autor.
viii) los átomos del Cálculo Proposicional no llevan paréntesis.
ix) En el Análisis Sintáctico del Cálculo Proposicional se usan los términos *profundidad, alcance, sucvesor y antecesor.* Si crees que es cierta, define cada una de las nociones.

Cuestión 2 (**Semántica**). Reflexiona si son correctas o falsas las siguientes aseveraciones sobre los Lenguajes Formales. Explica tus reflexiones:

i) La Semántica se ocupa de analizar la verdad o falsedad de las interpretaciones de una fórmula (o aseveración) de un lenguaje formal para cualquier interpretación.
ii) Una tautología en un Lenguaje Formal es una fórmula bien formada que es cierta para cualquier interpretación válida.
iii) En la interpretación de una variable del Cálculo Proposicional con respecto a una interpretación admisible, lo que se hace tiene que ver con "leer la coordenada que indica la variable".
iv) El valor semántico de una fórmula del Cálculo Proposicional depende de la conectiva de menor profundidad y de los valores semánticos de las subfórmulas "conectadas" por ella.
v) Si Φ y Θ son dos fórmulas del Cálculo Proposicional, entonces son semánticamente equivalenes (es decir, $\Phi \equiv \Theta$) si y solamente si la fórmula $(\Phi \leftrightarrow \Theta)$ es una tautología.
vi) Es fácil saber si una fórmula del Cálculo Proposicional es satisfactible o no.
vii) En cambio, es difícil saber si una fórmula es o no tautológica.
viii) La Propiedad de sustitución siguiente es cierta:
Propiedad de Sustitución: Sea $\Phi(X_0, \ldots, X_n)$ una tautología del Cálculo Proposicional. Sean $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ fórmulas con interpretación en $\{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$. Entonces, también es tautología:
$$\Phi(\alpha_0, \ldots, \alpha_n).$$

Cuestión 3 (**Deducción**). Reflexiona si son correctas o falsas las siguientes aseveraciones sobre los Lenguajes Formales. Explica tus reflexiones:

i) Los Axiomas son las especializaciones (reemplazando variables de fórmulas por fórmulas) de los Esquemas de Axioma.

ii) Las Reglas Deductivas son las manera de enlazar una o varias fórmulas para generar una nueva.
iii) En las interpretaciones válidas "à la Tarski", los axiomas deben tener asignado un valor **V**.
iv) Una teoría es concistente si no se puede demostrar un Teorema y su negación.
v) Una teoría es sólida si hay Teoremas que no son tautologías,
vi) En una teoría incompleta, hay tautologías indemostrables.
vii) El Cálculo Proposicional es consistente, sólido, completo y decidible. Por ello no se necesita saber hallar la demostración de un Teorema del Cálculo Proposicional: basta con calcular las tablas de verdad de la fórmula para decidir si una fórmula es teorema o no.
viii) Hay Teorías Formales que son incompletas e indecidibles, aunque este curso no alcanza para demostrarlo.

1.2. **Problemas.**

Problema 1. *Probar que para cada fórmula* Φ *del Cálculo Proposicional,* $\Phi \in \mathbf{Taut}$ *si y solamente si* $(\neg\Phi) \notin \mathbf{SAT}$.

Problema 2. *Halla las Tablas de Verdad de las siguientes dos fórmulas:*

i)
$$(X_1 \wedge (X_2 \vee (\neg X_3))).$$

ii)
$$(((X_1 \wedge (\neg X_2)) \vee (X_3 \wedge (\neg X_4))) \wedge (\neg X_3)).$$

Hint: *Recuerda que hay que hallar el árbol de generación de cada fórmula y usarlo como circuito para determinar el valor de verdad o falsedad de la fórmula en cada caso.*

N.B.- Empezamos el "ahorro" de paréntesis (sabiendo de su relevancia), omitiendo el paréntesis exterior en las fórmulas cuando no sea necesario.

Problema 3. *Verifica las siguientes propiedades. Es decir, decide si son o no tautológicas, si son o no satisfactibles y si son o no Teoremas.*

i) **Doble Negación:** *Es tautología* $((\neg(\neg X_i)) \Leftrightarrow X_i)$ *y,por tanto, para cada fórmula* α*, la siguiente es tautología:*
$$((\neg(\neg\alpha)) \Leftrightarrow \alpha)).$$

ii) **Fórmulas Neutras y Universales:** *Las siguientes son tautologías:*
$$\begin{array}{cc} (X_i \vee 1) \Leftrightarrow 1, & (X_i \vee 0) \Leftrightarrow X_i, \\ (X_i \wedge 1) \Leftrightarrow X_i, & (X_i \wedge 0) \Leftrightarrow 0, \end{array}$$

Problema 4. *Verifica (como en el probelam precedente) las siguientes propiedades.*

i) **Fórmulas Neutras y Universales (II):** *Sea* α *una tautología y sea* β *una fórmula insatisfactible. Para cualquier fórmula* Θ *las siguientes son tautologías:*
$$\begin{array}{cc} (\Theta \vee \alpha) \Leftrightarrow \alpha, & (\Theta \vee \beta) \Leftrightarrow \Theta, \\ (\Theta \wedge \alpha) \Leftrightarrow \Theta, & (\Theta \wedge \beta) \Leftrightarrow \beta, \end{array}$$

ii) **Propiedades Asociativas:** *Sea* α, β, γ *tres fórmulas del Cálculo Proposicional. Probar que las siguientes propiedades son tautologías:*
$$((\alpha \vee \beta) \vee \gamma) \Leftrightarrow (\alpha \vee (\beta \vee \gamma)).$$
$$((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma) \Leftrightarrow (\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)).$$

Problema 5. *Verifica (como en problemas precedentes) si son tautotogía, satisfactible y explica si son o no son Teorema) las siguientes propiedades.*

i) **Propiedades Distributivas:** *Dadas tres fórmulas α, β, γ, las siguientes son tautologías:*

$$(\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \Leftrightarrow ((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)).$$

$$(\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)) \Leftrightarrow ((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)).$$

ii) **Contrarrecíproco:** *Dadas dos fórmulas α y β, la siguiente es una tautología:*

$$(\alpha \Rightarrow \beta) \Leftrightarrow ((\neg\beta) \Rightarrow (\neg\alpha)).$$

iii) En cambio, la siguiente **no es tautología***:*

$$(\alpha \Rightarrow \beta) \Leftrightarrow (\beta \Rightarrow \alpha).$$

Problema 6. *Verifica las siguientes propiedades.*

i) **Idempotencia:** *dada una fórmula α, las siguientes son tautologías:*

$$(\alpha \vee \alpha) \Leftrightarrow \alpha.$$

$$(\alpha \wedge \alpha) \Leftrightarrow \alpha.$$

ii) **"Leyes" de Morgan:** *Dadas α y β cualesquiera dos fórmulas, las siguientes son tautologías:*

$$(\neg(\alpha \vee \beta)) \Leftrightarrow ((\neg\alpha) \wedge (\neg\beta)).$$

$$(\neg(\alpha \wedge \beta)) \Leftrightarrow ((\neg\alpha) \vee (\neg\beta)).$$

iii) **Equivalencia y XOR:** *Dadas α y β cualesquiera dos fórmulas, la siguiente es una tautología:*

$$(\neg(\alpha \Leftrightarrow \beta)) \Leftrightarrow (\alpha \oplus \beta)).$$

Problema 7. *Sea $\mathbb{F}_2$ (también denotado como $\mathbb{GF}_2$ o $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) el cuerpo de dos elementos del que se os habla en el curso de Álgebra Lineal. Se pide:*

i) Escribe el grafo (i.e. la tabla) de la suma ($+$) y la tabla del producto ($\times$) en $\mathbb{F}_2$ y busca conectivas del Cálculo Proposcional cuyas Tablas de Verdad coincidan con las tablas de esas dos operaciones.

ii) Escribe el grafo (i.e. la tabla) de la aplicación $x \longmapsto x + 1$ de $\mathbb{F}_2$ en sí mismo. Avergüa cuál es la conectiva cuya Tabla de Verdad coincide con ella.

iii) Busca expresiones de funciones sobre $\mathbb{F}_2$ o funciones de $\mathbb{F}_2^2 \longrightarrow \mathbb{F}_2$ cuyos grafos coincidan con las Tablas de verdad de las conectivas siguientes: $\rightarrow, \vee, NAND, NOR, \leftrightarrow$.

Problema 8. *Verifica que el modelo de interpretación que nos hemos dado para el Cálculo Proposicional, satisface que todos los esquemas de axioma de las lista exhibida son tautologías para cualquier sustitución de las variables de fórmula por fórmulas bien formadas del Cálculo Proposicional.*

Hint: *Contacta con, a lo sumo, dos compañeros en los que tengas confianza, repartiros los esquemas de axiomas descritos y verifica que son tautologías.*

Problema 9. *Supongamos que tenemos una fórmula del tipo:*

$$\Phi := (\alpha \vee \beta) \rightarrow (\neg\gamma).$$

Suponiendo que Φ y α toman el valor **F** *en alguna interpretación, ¿cuáles pueden ser los valores de verdad que deben tener β y γ?.*

Problema 10. *Verifica que la fórmula siguiente no es satistactible*[1] *sean quien sean las fórmulas α y β:*

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge (\beta \rightarrow (\neg \alpha)).$$

Problema 11. *Verifica si la fórmula siguiente es tautología para cualesquiera fórmulas α, β y γ:*

$$(\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow ((\alpha \wedge (\neg \beta)) \rightarrow (\gamma \wedge (\neg \gamma))).$$

[1] Algunos autores prefieren usar el término "contradicción" para las fórmulas no satisfactibles.

2. Cuestiones y problemas sobre Teoría de Conjuntos Naïve

2.1. **Cuestiones Teóricas.**

Cuestión 4. Admitiendo el uso de los conjuntos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, escribe con cuantificadores las frases que se indican en lenguaje natural a continuación:

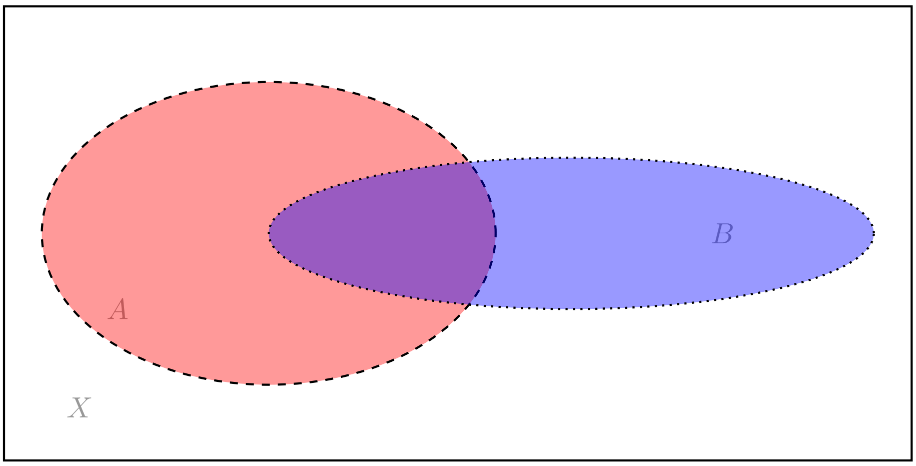
i) Todos los número naturales son números racionales.
ii) Hay números enteros que no son naturales.
iii) Hay números enteros que no son racionales.
iv) Todo número real es la suma de un número entero y un número real en el intervalo $[0, 1)$ siguiente:

$$[0, 1) := \{x \in \mathbb{R} \ : \ (0 \leq x) \wedge (x < 1)\}.$$

v) Hay números reales que no están en el intervalo $[0, 1)$ y, en ese caso, son racionales.

Cuestión 5. Toma como referente el siguiente dibujo, que muestra los conjuntos A y B (elipses coloreadas), como subconjuntos del conjunto X (rectángulo). Es decir, $A, B \in \mathscr{P}(X)$ (o, equivalenemente, $A \subseteq X$, $B \subseteq X$. Dibuja el resultado de las siguientes operaciones:

$$A \cup B,\ A \cap B,\ A \triangle B,\ A \setminus B,\ A^c,\ B^c,\ (A \cup B)^c,\ (A \cap B)^c, (A \cap B) \setminus (A \cup B).$$



Cuestión 6. Revisa las definiciones de conjuntos por comprensión, considera el conjunto

$$A := \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

Halla fórmulas $\Phi(x)$ que especifiquen os siguientes conjuntos:

i) $A_1 := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \in \mathscr{P}(A)$.
ii) $A_2 := \{0, 1, 2, 3, 4\} \in \mathscr{P}(A)$.
iii) $A_3 := \{-3, -2, -1\} \in \mathscr{P}(A)$.
iv) $A_4 := \{-3, -2, 2, 3, 5, 7\} \in \mathscr{P}(A)$.

Cuestión 7. Expresar por extensión cada uno de los conjuntos siguientes:

i) $A_1 := \{x \in \mathbb{R} \ : \ x^3 - 1 = 0\}$,
ii) $A_2 := \{x \in \mathbb{Z} \ : \ x^3 - 1 = 0\} = A_1 \cap \mathbb{Z}$,
iii) $A_3 := \{x \in \mathbb{C} \ : \ x^5 - 1 = 0\}$,
iv) $A_4 := \{x \in \mathbb{C} \ : \ x^2 + 4 = 0\}$,
v) $A_5 := A_4 \cap \mathbb{R}$.

Cuestión 8. Muestra ejemplos de conjuntos A, B, C que satisfacen las propiedades siguientes:

i) $A \subsetneq B$, $B \subsetneq C$, $A \cap C = \emptyset$.
ii) $A \in B$, $B \in C$, $A \notin C$.
iii) $A \in B$, $A \subsetneq C$.
iv) $A \subseteq B \cap C$, $A \cap (B \setminus C) \neq \emptyset$.

Cuestión 9. Halla un alfabeto Σ para el cual se tenga que todas las frases y textos en alemán formen un lenguaje:

$$L_4 \subseteq \Sigma^*.$$

Cuestión 10. Averigua por qué los números naturales son un lenguaje estrictamente contenido en

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}^*.$$

Es decir, discute si $\mathbb{N} \subsetneq \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}^*$.

2.2. **Problemas.**

Problema 12. *Prueba las siguientes propiedades para conjuntos A, B, C:*

$$A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C,$$
$$A \subseteq B \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C,$$
$$A \subseteq B \Rightarrow B^c \subseteq A^c,$$
$$A \subseteq B \Rightarrow (A \times C) \subseteq (B \times C).$$

Da ejemplos concretos de conjuntos A, B, C donde estas propiedades se satisfacen. Explica, con tus palabras, la diferencia entre demostrar y dar ejemplos.

Problema 13. *Usando tautologías del Cálculo Proposicinal y Modus Ponens, demuestra (indicando en cada caso lo que utilizas) algunas de las siguientes propiedades conjuntistas:*

i) Propiedad transitiva de la inclusión: Dados conjuntos A, B, C se tiene:

$$(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \Rightarrow (A \subseteq C).$$

ii) Diferencia simétrica, unión, intersección y complementario:

$$B \triangle C = (B \setminus C) \cup (C \setminus B) = (B \cup C) \setminus (B \cap C).$$

Problema 14. *Demuestra, con las mismas herramientas del problema anterior, las propiedades siguientes:*
Sea X un conjunto, y sean $A, B \in \mathscr{P}(X)$ dos subconjuntos. Entonces, se verifica:

$$A \cup B \in \mathscr{P}(X),\ A \cap B \in \mathscr{P}(X),\ A \triangle B \in \mathscr{P}(X), A \setminus B \in \mathscr{P}(X).$$

Problema 15. *Revisa los enunciados descritos en la Lección 2, relativos a propiedades elementales de las operaciones de conjuntos que no se hayan discutido en problemas precendentes. Verifica, usando las mismas herramientas de anteriores problemas, si son verdaderas o no.*

Problema 16. *Prueba, con las mismas herramientas del problema anterior, las distributivas con familias de subconjuntos de un conjunto dado. Es decir, Sea X un conjunto, $\{A_i : i \in I\} \subseteq \mathscr{P}(X)$ una familia de subconjuntos, $A, B \in \mathscr{P}(X)$, se tiene:*

i) Distributiva de $\cap$ con respecto a $\cup$:

$$A \bigcap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap A).$$

ii) Distributiva de $\cup$ con respecto a $\cup$:

$$A\bigcup\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I}\left(A_i\cup A\right).$$

iii) Distributiva de $\cap$ con respecto a $\triangle$:

$$A\cap\left(\triangle_{i\in I}A_i\right) = \triangle_{i\in I}\left(A_i\cap A\right).$$

Problema 17. *Demuestra, con las mismas herramientas del problema anterior, las Leyes de Morgan Generalizadas de familias de subconjuntos de un conjunto dado.*

Problema 18. *Prueba la siguiente propiedad para conjuntos A, B, C, D:*
Si $A, B \neq \emptyset$, entonces

$$A\times B\subseteq C\times D \Leftrightarrow (A\subseteq C)\wedge(B\subseteq D).$$

Problema 19. *Admitimos en conocimiento de $\mathbb{R}$, su relación de orden y $+\infty$ en sus concepciones usuales de la asignatura de Cálculo. Para cualquier número real $r\in\mathbb{R}$, definamos los siguiente conjuntos indiciados por r:*

$$A_r := \{r^2\},\ B_r := [r-1, r+1],\ C_r := (r, +\infty).$$

i) Busca expresiones Π que desciban los conjuntos A_r, B_r y C_r, admitiendo cuantificadores, la relación $\leq$, las operaciones $+, -, \times$ sobre $\mathbb{R}$, las contantes $\{-1, 0, \}\subseteq \mathbb{R}$ y, por supuesto, conectivas del Cálculo Proposicional.
ii) Describir A_2, B_3, C_r
iii) Hallar expresiones como las del apartado i) para los conjuntos:
  (a) $\cap_{r\in\mathbb{R}}A_r$, $\cup_{r\in\mathbb{R}}A_r$.
  (b) $\cap_{r\in\mathbb{R}}B_r$, $\cup_{r\in\mathbb{R}}B_r$.
  (c) $\cap_{r\in\mathbb{R}}C_r$, $\cup_{r\in\mathbb{R}}C_r$.

Problema 20. *Como en el problema precedente, consideremos los conjuntos siguientes, definidos a partir de un número real $r\in\mathbb{R}$:*

$$A_r := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x^2+y^2 = r^2\}.$$
$$B_r := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x^2+y^2 \leq r^2\}.$$
$$C_r := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x^2+y^2 > r^2\}.$$

Se pide:

i) Expresar la frase "Para cara número real r, los elementos de A_r son elementos de B_r"
ii) Expresar la frase "Para cara número real r, no hay elementos de A_r en C_r"
iii) Expresar la frase "Para cada número real r, todos los elementos de $\mathbb{R}^2$ están en B_r o en C_r".
iv) Expresar la frase "Para cada número real r, todos los elementos de $\mathbb{R}^2$ están en A_r o en C_r".

Prueba cuales son ciertas o falsas de estas afirmaciones.

Problema 21. *Como en problemas precedentes, cambiamos el conjunto de índices y para cada $n\in\mathbb{N}$ definimos:*

$$A_n := \{-n, n\},\ B_n := (-n-1, n+1)\subseteq\mathbb{R},\ C_n := [-n, +\infty).$$

Sea $S := \{k\in N\ :\ 0\leq k\leq 10\}$. Se pide:

i) Expresar por comprensión el conjunto

$$\cup_{k\in S} A_k.$$

ii) Idem con el conjunto:

$$\cap_{k\in S} B_k.$$

iii) Expresar formalmente "Para todo número natural k, cada elemento de A_k es elemento de B_k y de C_k"

iv) Definamos:

$$D_n := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le x \le n; y < n\}.$$
$$E_n := \{(x, y)\imath\mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \ge n; 0 \le x\}.$$
$$F_n := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \le n\}.$$

Se pide:

(a) Representar gráficamente D_n, E_n y F_n para $n = 0$ y $n = 5$.

(b) Decir si es verdadera o falsa la siguiente afirmación:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ (n \ne 0) \ \Rightarrow \ ((0, +\infty) \times \mathbb{R} \subseteq D_n \cup E_n \cup F_n).$$

Problema 22. *Sea $n \in \mathbb{N}$ un número natural, sean $a, b \in C$ dos números complejos. Para cada i, con $0 \le i \le n$, definemos el coeficiente binomial mediante:*

$$\binom{n}{i} := \frac{n!}{i!(n-i)!},$$

donde $k! := k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1.$ es el factorial de $k \in \mathbb{N}$, para $k \ge 1$ y $0! := 1$. Se pide:

i) Prueba la siguiente recursión de los coeficientes binomiales para cada i, $1 \le i \le n-1$:

$$\binom{n-1}{i-1} + \binom{n-1}{i} = \binom{n}{i}.$$

ii) Se llama binomio de Newton a la expresión:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$

(a) Prueba que el binomio de Newton es cierto para cualesquiera $a, b \in \mathbb{C}$ y valores de $n = 0, 1, 2, 3$.

(b) Prueba que si $n \in \mathbb{N}$ es un número natural y se satisface la identidad del binomio de Newton para cualesquiera $a, b \in \mathbb{C}$, entonces también se satisface para $n + 1$, es decir, prueba

$$\forall a, b \in \mathbb{C}, \left((a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i} \right) \Rightarrow \left((a+b)^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a^i b^{n+1-i} \right).$$

(c) Prueba que si se satisface el binomio de Newton para números complejos $a, b \in \mathbb{C}$, entonces

$$2^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}.$$

3. Cuestiones y Problemas relativos a Correspondencias, Relaciones, Aplicaciones

3.1. Cuestiones Teóricas.

Cuestión 11. Da ejemplos de correspondencias $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tales que:

- R sea aplicación.
- R no sea aplicación.
- **No entra** R sea aplicación suprayectiva, pero no inyectiva.
- **No entra** R sea biyectiva.

Cuestión 12. Cada alumno deberá identificar las etiquetas que lleva encima, anotárselas en un papel y redefinir las clases de equivalencia y las relaciones de equivalencia que usa habitualmente....Se permite parar cuando se haya llegado a las 5 relaciones de equivalencia. Se permite evitar la descripción de su código de ADN por ser un poco largo...

Cuestión 13. Describe una partición de $\mathbb{R}$ tal que el conjunto cociente de la relación de equivalencia tenga, como poco, 6 elementos. Describe otra partición de $\mathbb{R}$ tal que el conjunto cociente tenga una cantidad de elementos infinita.

Cuestión 14. Describe una partición de $\mathbb{R}^2$ tal que el conjunto cociente sea identificable con $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}$.

Cuestión 15. Construye ejemplos de subconjuntos S de un conjunto ordenado que satisfagan las siguientes propiedades:

i) S no posee ni mínimo ni ínfimo, pero está inferiormente acotado.
ii) S posee ínfimo, pero no posee mínimo.
iii) S posee mínimo e ínfimo y ambos coinciden.
iv) S no posee ni máximo ni supremo, pero está superiormente acotado.
v) S posee supremo, pero no posee máximo.
vi) S posee máximo y supremo y ambos coinciden.

Reflexiona sobre qué aspecto pueden tener los subconjuntos de $\mathbb{R}$ que son acotados superior e inferiormente y tales que supremos e ínfimos coinciden respectivamente con máximos y mínimos.

Cuestión 16. **No entra** Da ejemplos de aplicaciones $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ que satisfagan las propiedades que se indican:

i) f sea biyectiva.
ii) f sea inyectiva, pero no biyectiva.
iii) f sea suprayectiva, pero no inyectiva.
iv) f no sea ni inyectiva ni suprayectiva.

Cuestión 17. **No entra** Si existieran, da ejemplos de aplicaciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfagan las propiedades que se indican:

i) f es inyectiva, pero no es suprayectiva.
ii) f es suprayectiva, pero no es inyectiva.

Cuestión 18. A partir de la definición de $\mathbb{Z}$ como el conjnto cociente $\mathbb{N}^2/\cong$ hecha en clase, define el orden total habitual sobre $\mathbb{Z}$ a partir de la relación de orden conocida sobre $\mathbb{N}$.

3.2. Problemas.

Problema 23. *Sean $A = B = \mathbb{N}$. Definamos la correspondencia siguiente: A cada $x \in A$ le asignamos el mayor número impar en B que divida a x:*

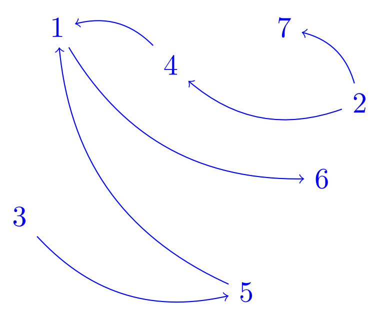
$$R := \{(x, y)\ :\ y \in 2\mathbb{N} + 1,\ y \mid x,\ \forall z \in 2\mathbb{N} + 1, (z \mid x) \Rightarrow z \leq y\}.$$

Decidir si R es o no aplicación. **No entra** *Y si es aplicación decidir si es sobreyectiva o si es inyectiva.*

Problema 24. *Considera el siguiente grafo que descirbe una relación R sobre el conjunto $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ (i.e. $R \subseteq X \times X$. Se pide:*

i) Completa R hasta conseguir que que sea una relación de equivalencia. Halla las clases de equivalencia y el conjunto cociente.

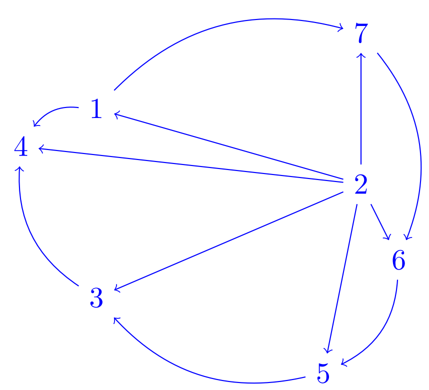
ii) Completa R hasta conseguir que sea una relación de orden. Decide si es o no un orden total. Calcula cotas superiores e inferiores, elementos minimales, maximales y, si los hubiere, mínimos y máximos para el conjunto X y, también, para el subconjunto $Y = \{2, 3, 5, 7\}$.



Problema 25. *Considera el siguiente grafo que descirbe una relación R sobre el conjunto $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ (i.e. $R \subseteq X \times X$. Se pide:*

i) Completa R hasta conseguir que que sea una relación de equivalencia. Halla las clases de equivalencia y el conjunto cociente.

ii) Completa R hasta conseguir que sea una relación de orden. Decide si es o no un orden total. Calcula cotas superiores e inferiore, elementos minimales, maximales y, si los hubiere, mínimos y máximos para el conjunto X y, también, para el subconjunto $Y = \{2, 3, 5, 7\}$.



Problema 26. *Considera el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros definido como el conjunto cociente $\mathbb{N}^2/\sim$ del ejemplo descrito en la Lección 3. Considera las siguientes correspondencias:*

$$\begin{array}{rccc} + : & \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & ([(a,b)]_\sim,[(c,d)]_\sim) & \longmapsto & [(a+c,b+d)]_\sim . \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} * : & \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & ([(a,b)]_\sim,[(c,d)]_\sim) & \longmapsto & [(ac+bd,ad+bc)]_\sim . \end{array}$$

Se pide:

i) Probar que ambas correspondencias son aplicaciones (i.e. que están "bien definidas").
ii) Probar que ambas verifican la propiedad asociativa.
iii) Probar que ambas tienen elementos neutros. Respectivamente, probar que $[(0,0)]_\sim$ es elemento nuetro para $+$ y que $[(1,0)]_\sim$ es elemento neutro para $*$.
iv) Probar que se verifica

$$\forall[(a,b)]_\sim\in\mathbb{Z},\ \exists[(c,d)]_\sim\in\mathbb{Z},\ [(a,b)]_\sim+[(c,d)]_\sim=[(0,0)]_\sim .$$

v) Probar la propiedad asociativa:

$$\forall[(a,b)]_\sim,[(c,d)]_\sim,[(e,f)]_\sim\in\mathbb{Z},\ [(a,b)]_\sim*([(c,d)]_\sim+[(e,f)]_\sim)=[(a,b)]_\sim*[(c,d)]_\sim+[(a,b)]_\sim*[(e,f)]_\sim .$$

Intenta inferir las reglas de los signos para sumas y productos de enteros, que aprendiste en tus años escolares, con las que surgen de la definición de $\mathbb{Z}$ que hemos dado en esta Lección.

Problema 27. *Prueba que si $(X,\leq)$ es un conjunto totalmente ordenado y $S\subseteq X$ es un conjunto acotado inferiormente, no siempre existe ínfimo de S(* Hint: *busca una sucesión descendente de números racionales cuyo límite no sea un número racional). Prueba, además, que si existe ínfimo, éste es único.*

Problema 28. *Realiza la misma tarea que en el problema anterior con la noción de supremo.*

Problema 29. No entra *Prueba las siguientes propiedades:*

i) Las inclusiones $\iota_X : X\hookrightarrow A$ son inyectivas para cada $X\in\mathscr{P}(A)$ no vacío.
ii) Las proyecciones canónicas $\pi_1 : A\times B\longrightarrow A$, $\pi_B : A\times B\longrightarrow B$ son suprayectivas para cualesquiera dos conjuntos A y B no vacíos.

Problema 30. *Considera el alfabeto $\Sigma=\{0,1\}$ y el conjunto de palabras que define Σ^*. Considera el orden lexicográfico $\leq_{\rm lex}$ definido sobre Σ^* a partir de $0<1$. Prueba que el siguiente subconjunto S de Σ^* no posee mínimo:*

$$S:=\{0^n1\ :\ n\in\mathbb{N}\}.$$

Problema 31. No entra *Realiza las siguientes tareas:*

i) Prueba que si $f : A\longrightarrow B$ es aplicación inyectiva, entoncespara cada conjunto no vacío $X\subseteq A$, la restricción es también inyectiva.
ii) Dada una correspondencia $f\subseteq A\times B$, trata de dar una definición de restricción $f\mid_\emptyset$. Discute si $f\mid_\emptyset$ es aplicación.
iii) Recupera la definición del producto catersiano $\emptyset\times B$ cuando B es un conjunto no vacío. Decide si, ese caso, las proyecciones canónicas π_1 y π_2 son suprayectivas.

Problema 32. *Recordemos que, para cada conjunto X, denotamos por $\mathscr{P}_2(X) \subseteq \mathscr{P}(X)$ al subconjunto formado por los subconjuntos de X con, a lo sumo, dos elementos. Es decir,*

$$\mathscr{P}_2(X) := \{S \subseteq X \times X \ : \ \exists a, b \in X,\ S = \{a, b\}\}.$$

Un grafo (o grafo no orientado) es un par (X, V) donde $V \subseteq \mathscr{P}_2(X)$. Los elementos de X se llaman nodos o vértices, los elementos de V se llaman aristas.
Supongamos que $X = \{1, \ldots, N\}$ y consideremos $\mathscr{M}_N(\mathbb{R})$ el conjunto de todas las matrices $N \times N$ con coordenadas reales. Consideremos $\mathscr{M}_N(\{0,1\})$ como la intersección:

$$\mathscr{M}_N(\{0,1\}) := \{M = (m_{i,j})_{1 \le i,j \le N} \in \mathscr{M}_N(\mathbb{R}) \ : \ m_{i,j} \in \{0,1\},\ \forall i, j \in \{1, \ldots, N\}\}.$$

Definamos el subconjunto $\mathbb{G}_N \subseteq \mathscr{M}_N(\{0,1\})$ como el conjunto de todas las matrices simétricas en $\mathscr{M}_N(\{0,1\})$:

$$\mathbb{G}_N := \{M = (m_{i,j})_{1 \le i,j \le N} \in \mathscr{M}_N(\mathbb{R}) \ : \ m_{i,j} = m_{j,i},\ \forall i, j \in \{1, \ldots, N\}\}.$$

Da una regla que identifique todos los grafos posibles sobre $\{1, \ldots, N\}$ con las matrices en $\mathbb{G}_N$.

Problema 33. *Un grafo orientado es un par (X, V) donde $V \subseteq X^2 = X \times X$ es una relación. Los elementos de X se llaman nodos o vértices, los elementos de V se llaman aristas orientadas (o, simplemente, aristas, como en el caso no orientado). Supongamos que $X = \{1, \ldots, N\}$ y consideremos $\mathscr{M}_N(\{0,1\})$ definido como en el Problema precedente.*
Prueba que hay una identificación entre el conjunto $\mathscr{M}_N(\{0,1\})$ y todos los grafos orientados sobre $\{1, \ldots, N\}$. Prueba también que la relación V satisface la propiedad simétrica si y solamente si la matriz asociada está en $\mathbb{G}_N$.

Problema 34. No entra *Sea $f : A \longrightarrow B$ una aplicación. Prueba las siguientes propiedades:*

i) *f es inyectiva si y solamente si para cada subconjunto $X \subseteq A$, $X = f^{-1}(f(X))$,*
ii) *f es inyectiva si y solamente si para cada subconjunto $Y \subseteq B$, $f(f^{-1}(T)) = T$.*

Problema 35. No entra *Dadas dos aplicaciones $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$, prueba lo siguiente:*

i) *Si $g \circ f$ es biyectiva y g es biyectiva, entonces f es biyectiva.*
ii) *Si $g \circ f$ es biyectiva y f es biyectiva, entonces g es biyectiva.*
iii) *Hay ejemplos para los que $g \circ f$ es biyectiva y f no es biyectiva (*Hint: *Da un contraejemplo).*
iv) *Hay ejemplos para los que $g \circ f$ es biyectiva y g no es biyectiva (*Hint: *Da un contraejemplo).*

Problema 36. No entra *Se considera la aplicación $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por la regla siguiente:*

$$f(x) := \begin{cases} |x|, & \text{si } x \le 0, \\ 1, & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 - x, & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

Estudiar si es inyectiva, suprayectiva o biyectiva.

Problema 37. *Considera las siguientes correpondencias:*

$$\begin{array}{rccc} gcd: & \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & (a,b) & \longmapsto & \begin{cases} 0, & \text{si } (a = 0) \vee (b = 0) \\ gcd(a,b), & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} lcm: & \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & (a,b) & \longmapsto & \begin{cases} 0, & \text{si } (a=0)\vee(b=0) \\ lcm(a,b), & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{array}$$

donde gcd y lcm significan respectivamente, máximo común divisor y mínimo común múltiplo. Considera adicionalmente la aplicación producto:

$$\begin{array}{rccc} *: & \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & (a,b) & \longmapsto & a\cdot b. \end{array}$$

Se pide:

i) Prueba que son aplicaciones.

ii) Decide si lcm y $*$ son la misma aplicación. En caso de no serlo, busca algún subconjunto $X\subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tal que

$$lcm\mid_X = *\mid_X .$$

iii) Decide si la aplicación producto (i.e. $*$) es igual a la aplicación

$$\begin{array}{rccc} gcd*lcm: & \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & (a,b) & \longmapsto & \begin{cases} 0, & \text{si } (a=0)\vee(b=0) \\ gcd(a,b)\cdot lcm(a,b), & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{array}$$

Problema 38. No entra *Prueba que $\sharp(\mathbb{Z}) = \sharp(\mathbb{N})$. (*Hint: *construye una biyección entre $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{N}$).*

Problema 39. *Como en el caso de las aplicaciones, sea $f: A\longrightarrow B$ una correspondencia y para cada $X\subseteq A$ e $Y\subseteq B$, defiamos:*

$$f(X) := \{y\in B \ : \ \exists x\in X, y=f(x)\} = \{f(x) \ : \ x\in X\}.$$
$$f^{-1}(Y) := \{x\in A \ : \ \exists y\in Y, y=f(x)\} = \{x\in A \ : \ f(x)\in Y\}.$$

Pruébese:

i) La correspondencia f es aplicación si y solamente si para cada $a\in A$, $f(\{a\})\subseteq B$ es un conjunto con un único elemento.

ii) Si f es aplicación, $f(\emptyset)\in\{f(\emptyset)\}$.

iii) Igualmente, si f es aplicación $f(\emptyset)\notin B$.