ILM, Capítulo 3: Correspondencias, Relaciones, Aplicaciones (dentro de NST).

Luis M. Pardo

Universidad de Cantabria

14 de noviembre de 2018

Para poder entender cualquier teoría matemática es fundamental entender no solamente unos objetos de estudio (por ejemplo los conjuntos) sino también la forma en que se relacionan. La forma de relacionarse elementos y conjunto pasan por las nociones de **correspondencia, relación, aplicación,...** que tratamos en esta Lección.

3.2. Correspondencias, relaciones

3.2.1. Correspondencias, relaciones: Nociones y Primeros Ejemplos

Definición (**Correspondencia**)

Sean A y B dos conjuntos. Una correspondencia entre A y B es cualquier subcnjunto $R \subseteq A \times B$. Dos elementos $a \in A$ y $b \in B$ se dicen en correspondencia por R si $(a, b) \in R$.

Definición (**Relación**)

Una relación R sobre un conjunto A es una correspondencia entre A y A o, equivalentemente, un subconjnto $R \subseteq A \times A$. Dos elementos $a, b \in A$ se dicen relacionados por R si $(a, b) \in R$.
En ocasiones se escribe aRb en lugar de $(a, b) \in R$[a].

[a] Otras notaciones se irán introduciendo a lo largo del Curso y en otras asignaturas.

Example (Divisibilidad en $\mathbb{N}$)

Supondremos que los alumnos disponen en su bagaje cultural de los números naturales $\mathbb{N}$ y que conocen, al menos a nivel operativo, el producto de números naturales.

Definición (Divisible en $\mathbb{N}$)

Dados $a, b \in \mathbb{N}$ diremos que a divide a b y lo escribiremos $a \mid b$ si se satisface:

$$a \mid b \equiv \left[\exists c \in \mathbb{N};\ b = c \cdot a\right].$$

A partir de la divisibilidad podemos definir:

Definición (Número Primo)

El conjunto $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{N}$ de los números naturales primos:

$$\mathbb{P} := \{p \in \mathbb{N} \ :\ (p \neq 1) \wedge (\forall a \in \mathbb{N},\ \forall b \in \mathbb{N},\ ((p \mid ab) \Rightarrow ((p \mid a) \vee (p \mid b))))\}.$$

Un número $p \in \mathbb{N}$ se dice primo si $p \in \mathbb{P}$.

Example (Divisibilidad en $\mathbb{N}$ (Continuación))

Dado un cierto n los alumnos disponen de un algoritmo (poco eficiente) que permite calcular n (Criba de Eratóstenes).

Naturales y primos

Definimos la siguiente correspondencia $\mathscr{F} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{P}_{1000}$, dada mediante:

$$\mathscr{F} := \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{P}_{1000} \ : \ b \mid a\}.$$

Para la relación $\mathscr{F}$ precedente, observamos que no todo elemento a de $\mathbb{N}$ está relacionado con alguno de $\mathbb{P}_{1000}$. De hecho, observamos que

$$\forall k \in \mathbb{N}, (k \geq 1001) \Rightarrow (\exists a \in \mathbb{N}, (a \geq k) \wedge (\forall b \in \mathbb{P}_{1000}, \ \neg(a \mathscr{F} b)))\,.$$

Luego

$$\{a \in \mathbb{N} \ : \ \exists b \in \mathbb{P}_{1000}, \ a \mathscr{F} b\} \subsetneq \mathbb{N}.$$

Es decir, no es verdad que $\forall a \in \mathbb{N}, \ \exists b \in \mathbb{P}_{1000}, \ a \mathscr{F} b.$

Hay elementos de $\mathbb{N}$ que están relacionados con más de un elemento de $\mathbb{P}_{1000}$. Por ejemplo, $77 = 7 \cdot 11$, luego también es falso que:

$$\forall a \in \mathbb{N},\ (\exists b \in \mathbb{P}_{1000},\ a\mathscr{F}b) \Rightarrow (\exists! b \in \mathbb{P}_{1000},\ a\mathscr{F}b).$$

Primos e Irreducibles

Definamos otra correspondencia, esta vez entre $\mathbb{P}_{1000}$ y $\mathbb{N}$:

$$\mathscr{G} := \{(a,b) \in \mathbb{P}_{1000} \times \mathbb{N} \ :\ b \mid a\}.$$

Esta vez es fácil ver que

$$\forall a \in \mathbb{P}_{1000}, \forall b \in \mathbb{N},\ (a\mathscr{G}b) \Rightarrow ((a = b) \vee (b = 1)).$$

De hecho, la fórmula es un caso particular de la definición de número natural irreducible. Un número $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ se dice irreducible[a] si verifica:

$$\forall b \in \mathbb{N},\ (b \mid n) \Rightarrow ((b = n) \vee (b = 1)).$$

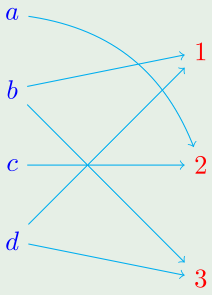
[a]Veremos que en $\mathbb{N}$ "primo $\Leftrightarrow$ irreducible", que no es cierta en cualquier anillo.

Example

Una correspondencia también se puede llamar "grafo bipartito". Por ejemplo, $A := \{a, b, c, d\}$, $B := \{1, 2, 3\}$ y una relación como $R \subseteq A \times B$:

$$R := \{(a, 2), (b, 1), (b, 3), (c, 2), (d, 1), (d, 3)\},$$

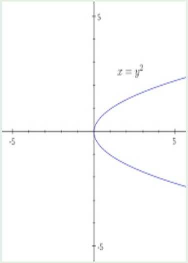
cuyo grafo sería:



Example (Relaciones, correspondencias, grafos y gráficas)

Tomando $A = B = \mathbb{R}$, podemos definir la relación $R_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ mediante:

$$R_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = y^2\}.$$



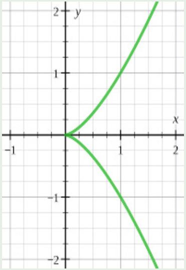
Número reales con sus raíces cuadrados: Los elementos x con $x < 0$ no están relacionados con nadie. El 0 se relaciona consigo mismo. Y si $x > 0$ se relaciona con dos elementos. No es una reación simétrica.

Example (Relaciones, correspondencias, grafos y gráficas)

Con $A = B = \mathbb{R}$, podemos también definir la relación $R_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ mediante:

$$R_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y^2 = x^3\}.$$

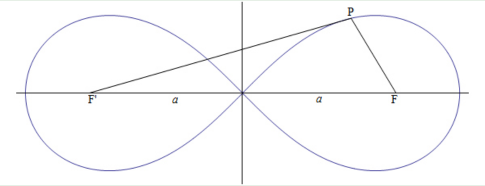
Podemos hacer otro tipo de análisis de la casuística de las relaciones:



Example (Relaciones, correspondencias, grafos y gráficas)

Y, en la siguiente, ya no podemos "dar la vuelta" a la gráfica $R_3 \subseteq \mathbb{R}^2$ mediante:

$$R_3 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2)\}.$$



3.2.2. Relaciones de Equivalencia: Etiquetar

Definición (**Relación de Equivalencia**)

Sea X un conjunto. Una relación $R \subseteq A^2$ se denomina relación de equivalencia si satisface las siguientes propiedades:

1. **Propiedad Reflexiva:**
$$\forall x \in X, \ (x \ R \ x).$$
2. **Propiedad Simétrica:**
$$\forall x \in X, \forall y \in X, \ (x \ R \ y) \Leftrightarrow (y \ R \ x).$$
3. **Propiedad Transitiva:**
$$\forall x \in X, \forall y \in X, \forall z \in X, \ ((x \ R \ y) \wedge (y \ R \ x)) \Rightarrow (x \ R \ y).$$

Obs.- A modo de abreviatura, para no introducir largísimas repeticiones de cuantificadores, para cualquier número natural $n \in \mathbb{N}$, se suele escribir:

$$(\forall x_1 \in X, \forall x_2 \in X, \ldots, \forall x_n \in X) \equiv (\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in X).$$

Así, por ejemplo, se pueden escribir las propiedades simétrica y transitiva como siguen:

- **Propiedad Simétrica:**

$$\forall x, y \in X,\ (x\ R\ y) \Leftrightarrow (y\ R\ x).$$

- **Propiedad Transitiva:**

$$\forall x, y, z \in X,\ ((x\ R\ y) \wedge (y\ R\ x)) \Rightarrow (x\ R\ y).$$

Algo similar sucede con la escritura del cuantificador existencial:

$$(\exists x_1 \in X, \exists x_2 \in X, \ldots, \exists x_n \in X) \equiv (\exists x_1, x_2, \ldots, x_n \in X).$$

No se puede hacer con $\exists!$ y, por supuesto, tampoco cuando haya alternancia de cuantificadores:

$$\forall x \in X, \exists y \in Y, \forall z \in X,\ \Phi(x, y, z)...$$

Un símbolo común para las relaciones de equivalencia es $\sim$. Se usan expresiones como *"$\sim\subseteq X^2$ una relación de equivalencia sobre X"*. También *"$a \sim b$* por *"a es equivalente a b con respecto a la relación de equivalencia $\sim$"*.

Definición (Clase de Equivalencia)

Sea X un conjunto y sea $\sim\subseteq X^2$ una relación de equivalencia. Para cada elemento $x \in X$, denotaremos mediante $[x]_\sim$ su clase de equivalencia con respecto a $\sim$ al conjunto formado por todos los elementos de X equivalentes a x, es decir, el subconjunto de X dado mediante:

$$[x]_\sim := \{y \in X \ : \ y \sim x\}.$$

Definición (Conjunto Cociente)

Sea X un conjunto y sea $\sim\subseteq X^2$ una relación de equivalencia. Llamaremos conjunto cociente de X por $\sim$ al conjunto formado por las clases de equivalencia determinadas por $\sim$. Es decir,

$$X/\sim := \{[x]_\sim \ : \ x \in X\}.$$

Example (La circunferencia unidad)

Es un grafo infinito cuyos vértices son los números reales $V = \mathbb{R}$ y cuyas aristas son dadas mediante:

$$\sim := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x - y \in \mathbb{Z}\}.$$

Es una relación de equivalencia. Las clase de equivalencia son fácilmente identificables:

$$[x]_\sim := \{x + k \in \mathbb{R} \ : \ k \in \mathbb{Z}\} = \{y \in \mathbb{R} \ : \ y - \lfloor y \rfloor = x - \lfloor x \rfloor\}.$$

A veces se usa la notación $x + \mathbb{Z}$. El conjunto cociente se identifica[a] con la circunferencia unidad

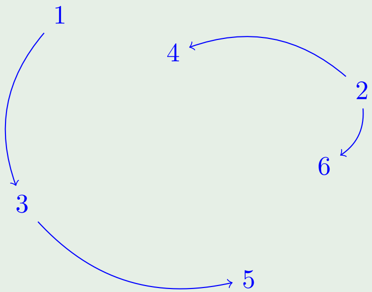
$$(\mathbb{R}/ \sim) = S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 - 1 = 0\}.$$

[a]Veremos más adelante que esa "indeiticación" se llama biyección.

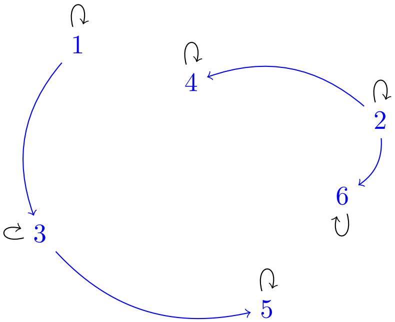
Example

Consideremos el conjunto $V := \{1,2,3,4,5,6\}$ y la relación $E \subseteq V^2$:

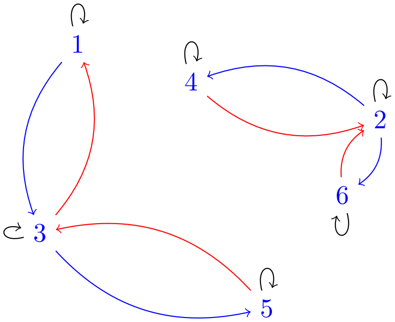
$$E := \{(1,3),(3,5),(2,4),(2,6)\}.$$



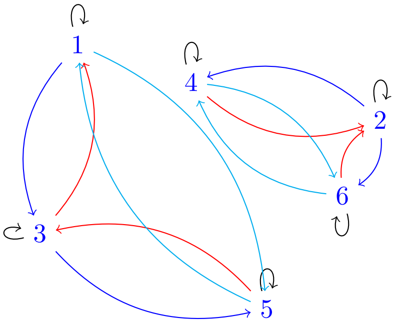
Para la **Propiedad Reflexiva** tenemos que añadir todas las conexiones de cada vértice consigo mismo:



Para la **Propiedad Simétrica** tenemos que añadir las conexiones de la arista en sentido inverso:



Para la **Propiedad Transitiva** tenemos que añadir las conexiones generadas por dos concatenadas:



Nótese que las conexiones entre los nodos 4 y 6 se han añadido “a posterior” de completar las relaciones simétricas.

Tendemos dos clases de equivalencia:

- La clase $[1]_E := \{1, 3, 5\}$ cuyos elementos están todos conectados con todos. Y se tiene: $[1]_E = [3]_E = [5]_E$.
- La clase $[2]_E := \{2, 4, 6\}$ cuyos elementos están todos conectados con todos. Y se tiene: $[2]_E = [4]_E = [6]_E$.

En ocasiones se les denomina **componentes conexas** por estar todos conectados entres sí. En otros casos se usa la expresión **clausura transitiva**, que me parece más apropiada. El conjunto cociente está formado por dos elementos que, por casualidad, están identificados con el conjunto cociente de la relación siguiente:

$$\sim := \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \ : \ 2 \mid x - y\} \subseteq \mathbb{Z}^2,$$

cuyo conjunto cociente suele denotarse mediante $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (o mediante $\mathbb{GF}_2$ o $\mathbb{F}_2$). Es decir,

$$V/E \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Example

Equivalencia de Matrices Sea $X = \mathscr{M}_n(K)$ las matrices $n \times n$ sobre un cuerpo K y definamos:

$$\sim := \{(M, N) \in \mathscr{M}_n(K)^2 \ : \ \mathrm{rank}(M) = \mathrm{rank}(N)\}.$$

Sea $GL(n, K) := \{M \in \mathscr{M}_n(K) \ : \ \mathrm{rank}(M) = n\}$.
C.F. Gauss: Se verifica:

$$\forall M, N \in \mathscr{M}_n(K), \ M \sim N \Leftrightarrow [\exists P, Q \in GL(n, K), \ PMQ = N].$$

Las clases

$$[M]_\sim := \left[\begin{pmatrix} Id_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_\sim ,$$

donde $R = \mathrm{rank}(M)$. El conjunto cociente es finito y toma la forma:

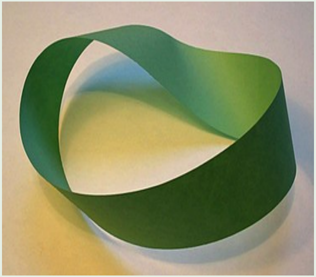
$$(\mathscr{M}_n(K)/\sim) \cong \{0, 1, 2, \ldots, n\}.$$

Example (Cinta de Möbius)

Consideramos como conjunto $X = [0,1]^2$ (el intervalo $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ consigo mismo. Y consideramos la relación:

$$\sim_M := \{(x,y) \in X^2 \ : \ x = y\} \bigcup \{((0,y),(1,1-y)) \in X^2 = ([0,1]^2)^2 \ : \ y \in [0,1]\}.$$

El conjunto cociente $X/\sim_M$ es la famosa cinta (o banda) de Möbius, que se puede "sumergir" en $\mathbb{R}^3$:

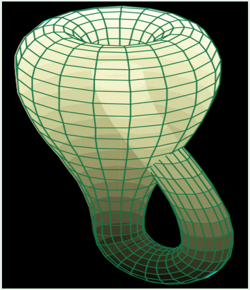


Example (Botella de Klein)

Consideramos como conjunto $X = [0,1]^2$ (el intervalo $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ consigo mismo. Y consideramos la relación:

$$\sim_K := \sim_M \bigcup \{((x,0),(1-x,1)) \in X^2 = ([0,1]^2)^2 \ : \ x \in [0,1]\}.$$

El conjunto cociente $X/\sim_K$ es la famosa botella de Klein que no se puede "sumergir" en $\mathbb{R}^3$:



3.2.3. Relaciones de Equivalencia y Particiones

Definición (Partición de un Conjunto)

Una partición de un conjunto X es una familia de subconjuntos $\{A_i \,:\, i \in I\} \subseteq \mathscr{P}(X)$ que verifica las siguiente dos propiedades:

1. *Su unión "recubre" todo X:*

$$X = \bigcup_{i \in I} A_i.$$

2. *Son "dos a dos disjuntos":* $\forall i, j \in I,\ (i \neq j) \Rightarrow ((A_i \cap A_j) = \emptyset)$.

Obs.- Nótese que, para una partición, si $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, entonces $A_i = A_j$.

Proposición

Sea X un conjunto y sea $\sim \subseteq X^2$ una relación de equivalencia. Entonces, la siguiente familia es una partición de X:

$$\{[x]_\sim \,:\, x \in X\}.$$

DEM.– Pizarra. QED

Observación (Índices de la partición asociada a las clases de equivalencia)

Una precisión sobre la prueba: "elegir" representantes de la clase de equivalencia: el conjunto cociente es quien determina los índces que descrien la partición.

- $I := X/\sim$
- $A_i = [x]_\sim$, *donde* $i = [x]_\sim$.
- *Tendremos la partición* $\{A_i \ : \ i \in I\}$

Lo "habitual", si embargo será elegir los llamados "representantes canónicos" de la clase de equivalencia, siempre que se disponga de una mecanismo para "elegir".

* **Ejercicio:** Busca representantes "canónicos" de las clase de equivalencia descritas entre los ejemplos. Explica cómo los has elegido.

Proposición

Sea X un conjunto. Toda partición $\mathcal{P} = \{A_i \, : \, i \in I\} \subseteq \mathscr{P}(X)$ define una única relación de equivalencia tal que:

1. *Las clases de equivalencia son los subconjuntos A_i de la partición.*
2. *El conjunto cociente $X/\sim_{\mathcal{P}}$ es identificable al conjunto de índices I.*

De hecho, esa relación de equivalencia es la siguiente:

$$\forall x, y \in X, \; (x \sim_{\mathcal{P}} y) \Leftrightarrow (\exists i \in I, x, y \in A_i) \, . \tag{1}$$

DEM.–La relación definida en (1) es una relación de equivalencia que satisface 1) y 2). Pizarra. QED

Observación (Etiquetar, clasificar)

El proceso de "paso al conjunto cociente": el etiquetado. Objetos distintos "a priori", si comparten unos rasgos, pasan a verse como "similares" por una relación y se les etiqueta con un representante: la marca comercial. Esto es una "clasificación" porque se "particiona" el conjunto de dichos elementos de un conjunto (smartphones, procesadores, Teoremas, pinturas, poemas, ropa,...) en "cajones" disjuntos, sin olvidar a ninguno. Y a todos los del mismo "cajón" se les identifica con la misma etiqueta...

Ejercicio

Cada alumno deberá identificar las etiquetas que lleva encima, anotárselas en un papel y redefinir las clases de equivalencia y las relaciones de equivalencia que usa a diario....Se permite evitar la descripción de su código de ADN por ser un poco largo...

Example (El conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros)

Retomamos nuestra noción de números naturales intuitivos $\mathbb{N}$ y suponemos que conocemos la operación básica $+$ entre números naturales (y sus propiedades esenciales: Asociativa, Conmutativa, existencia de Elemento Neutro).

Consideremos el conjunto $X := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Y consieremos la siguiente relación:

$$\sim := \{((a,b),(c,d)) \in \mathbb{N}^2 \ : \ a + d = b + c\}.$$

Proposición

La relación $\sim$ sobre $\mathbb{N}^2$ es una relación de equivalencia. Al conjunto cociente se le denomina conjunto de números enteros y se le denota por $\mathbb{Z} := \mathbb{N}^2 / \sim$.
Las clases de equivalencia son de dos tipos:

- *Tipo $[(a,0)]_\sim$, con $a \in \mathbb{N}$, que se denotan como $a := [(a,0)]_\sim$. En particular, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$.*
- *Tipo $[(0,a)]_\sim$, con $a \in \mathbb{N}$, $a > 0$ que se denotan como $-a := [(0,a)]_\sim$.*

3.2. Relaciones de Orden

Definición (**Relación de Orden**)

Sea X un conjunto. Una relación $R \subseteq A^2$ se denomina relación de orde si satisface las siguientes propiedades:

1. **Propiedad Reflexiva:**

$$\forall x \in X, \ (x \, R \, x).$$

2. **Propiedad Anti-Simétrica:**

$$\forall x, y \in X, \ (((x \, R \, y) \wedge (y \, R \, x)) \Rightarrow (x = y)) \, .$$

3. **Propiedad Transitiva:**

$$\forall x, y, z \in X, \ ((x \, R \, y) \wedge (y \, R \, x)) \Rightarrow (x \, R \, y).$$

Dado un conjunto X y una relación de orden $R \subseteq X^2$ sobre X, diremos que (X, R) es un conjunto ordenado.

El símbolo más común para expresar las relaciones de orden es $\leq$ o $\leq_R$ que podríamos interpretar como "menor o igual", aunque siempre hay que hacer referencia a la reación indicada.

Usualmente se introduce también el símbolo $<$ o $<_R$ que se lee como "menor estricto" y se define con respecto a un conjunto ordenado $(X, \leq_R)$ mediante:

$$(x <_R y) \equiv (x \leq_R y) \wedge (x \neq y).$$

Observación

Nótese que la diferencia esencial entre relaciones de equivalencia y relaciones de orden están en reemplazar la propiedad simétrica de las relaciones de equivalencia por la propiedad anti-simétrica en las relaciones de orden.

Example

El ejemplo más inmediato de relación de orden es el siguiente:
Dado un conjunto X y la clase de sus subconjuntos $\mathscr{P}(X)$, la relación de inclusión $\subseteq$ es una relación de orden sobre $\mathscr{P}(X)$ y $(\mathscr{P}(X), \subseteq)$ es un conjunto ordenado. El menor estricto coincide con el contendo estricto que se denota $\subsetneq$.

Definición (Términos usuales)

Sea $(X, \leq_R)$ un conjunto ordenado. Se usan los términos siguientes:

1. **Relación de orden Total:** *La relación $\leq_R \subseteq X^2$ se dice reación de orden total si*[a]

$$\forall x, y \in X,\ (x \leq_R y) \vee (y \leq_R x).$$

2. **Cota Superior:** *Sea $S \subseteq X$ un subconjunto, llamamos cota superior de S a cualquier elemento $c \in X$ (no necesariamente en S) tal que:*

$$\forall x \in S,\ x \leq_R c.$$

3. **Cota Inferior:** *Sea $S \subseteq X$ un subconjunto, llamamos cota inferior de S a cualquier elemento $c \in X$ (no necesariamente en S) tal que:*

$$\forall x \in S,\ c \leq_R x.$$

[a] En contraposición a las relaciones de orden totales, algunos autores prefieren usar la expresión "relación de orden parcial", que nosotros simplificamos diciendo solamente "relación de orden".

Definición (Más Términos usuales)

Sea $(X, \leq_R)$ un conjunto ordenado. Se usan los términos siguientes:

1. **Elemento Máximo (o simplemente Máximo):** *Sea $S \subseteq X$ un subconjunto, llamamos máximo de S a cualquier elemento $c \in S$ que sea cota Superior de S.*
2. **Elemento Mínimo (o simplemente Mínimo):** *Sea $S \subseteq X$ un subconjunto, llamamos mínimo de S a cualquier elemento $c \in S$ que sea cota inferior de S.*
3. **Elemento Maximal:** *Sea $S \subseteq X$ un subconjunto, llamaremos elemento maximal de S a todo elemento $c \in S$ ue verifica:*
$$\forall x \in S, \ (c \leq_R x) \Rightarrow (c = x).$$
4. **Elemento Minimal:** *Sea $S \subseteq X$ un subconjunto, llamaremos elemento minimal de S a todo elemento $c \in S$ que verifica:*
$$\forall x \in S, \ (x \leq_R c) \Rightarrow (c = x).$$

Proposición

Sea $(X, \leq_R)$ *un conjunto ordenado y* S *un subconjunto. Se tiene:*

1. *Todo máximo (respectivamente mínimo) de* S*, si existe es único. Por ello, escribimos* $\max(S)$ *(resp.* $\min(S)$*) al máximo (resp. mínimo) de* S *si existiera.*
2. *Todo máximo (resp. mínimo) es elemento maximal (resp. minimal). Por tanto, si un conjunto* S *posee máximo (resp. mínimo), entonces posee un único elemento maximal (resp. minimal).*
3. *Si la relación* $\leq_R$ *es una relación de orden total, todo elemento maximal (resp. minimal) es máximo (resp. mínimo).*
4. *En general, no es cierto que un elemento maximal sea máximo (resp. ni que un elemento minimal sea mínimo). Tampoco es cierta, en general, la unicidad de elementos maximales o elementos minimales.*

DEM.– Para las propiedades 1 a 3, pizarra. Para la afirmación 4, ver ejemplo siguiente:

Example

Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales y sea $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ la clase de sus subconjuntos. Consideremos el conjunto

$$X := \mathscr{P}_2(\mathbb{N}) := \{X \subseteq \mathbb{N} \,:\, \exists a, b \in \mathbb{N}, X = \{a, b\}\}.$$

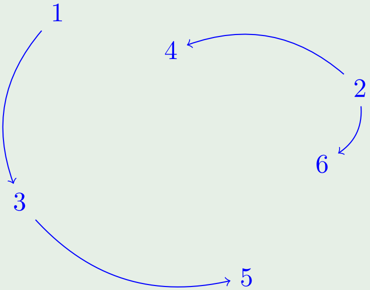
Son los subconjuntos no vacíos de los naturales que tienen, a lo sumo 2 elementos. Ordenamos X con la inclusión: $(X, \subseteq)$. Observamos:

1. El conjunto vacío $\emptyset$ es mínimo de $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, es cota inferior de $X = \mathscr{P}_2(\mathbb{N})$, pero no es mínimo ni elemento minimal de X (porque $\emptyset \notin X$).
2. El total $\mathbb{N}$ es máximo y elemento maximal de $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, es cota superior de $X = \mathscr{P}_2(\mathbb{N})$, pero no es máximo ni elemento maximal de X ($\mathbb{N} \notin X$).
3. El conjunto $\{I\}$ es un elemento minimal de $\mathscr{P}_2(\mathbb{N})$ pero no es mínimo (porque no es cota inferior, i.e. $\{I\} \not\subseteq \{II\} \in \mathscr{P}_2(\mathbb{N})$)).
4. El conjunto $\{I, II\}$ es un elemento maximal de $\mathscr{P}_2(\mathbb{N})$ que no es máximo ni cota superior.

El conjunto $\mathscr{P}_2(\mathbb{N})$ no posee ni máximo ni mínimo.

Example

Un ejemplo gráfico Retomemos el ejemplo usado en las relaciones de equivalencia y que gráfcamente tiene el aspecto siguiente:

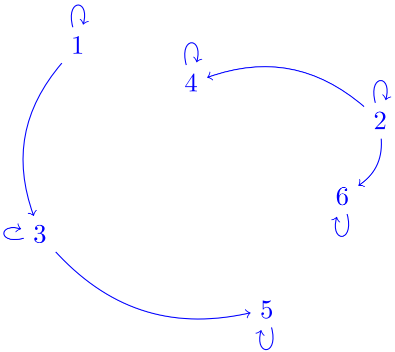


Es decir,

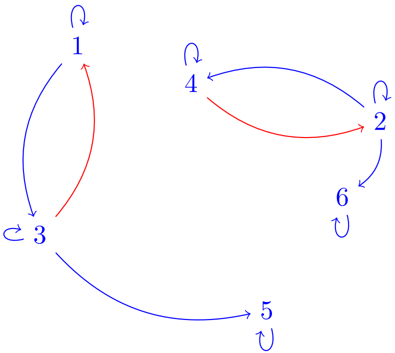
$$1 \leq 3 \leq 5, \;\; 2 \leq 4, \;\; 2 \leq 6.$$

Y no hay más objetos relacionados. No es relación de orden porque faltan las reflexivas.

Añadimos las condiciones para poseer la propiedad reflexiva:

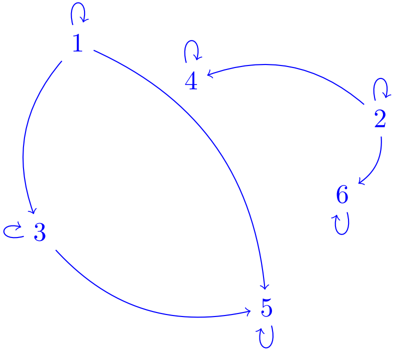


No podemos añadir ninguna arista en sentido inverso sin romper la propiedad antisimétrica (en rojo):



Cualquiera de las dos aristas $\rightarrow$ "rompe" la Propiedad antisimétrica. Bsta con una para romperla.

Añadimos las aristas necesarias para la propiedad transitiva:



Elementos minimales $\{1, 2\}$, Elementos maximales $\{4, 5, 6\}$. No hay mínimo ni máximo.
El subconjunto $S_1 := \{1, 3, 5\}$ posee mínimo (el 1) y máximo (el 5). El subconjunto $S_2 := \{2, 4, 6\}$ no posee máximo, aunque sí posee mínimo (el 2).

Definición (Buen Orden)

Una relación de orden $\leq \subseteq X^2$ *definida sobre un conjunto* X *se denomina un buen orden si todo subconjunto* $S \subseteq X$ *no vacío posee mínimo.*

Proposición

Todo buen orden es un orden total, aunque hay órdenes totales que no son un buen orden.

DEM. Para ver que es un orden total, sean dados $a, b \in X$ y soncideremos $S := \{a, b\}$. Como S es un subconjunto no vacío, posee mínimo. Si a es el mínimo de S, entonces $a \leq b$ y si, en el otro caso, el mínimo de S es b, entontonces $b \leq a$. Un contraejemplo de un orden total que no es un buen orden es el orden total $\leq$ sobre los números enteros. QED.

Example (Orden Lexicográfico)

(Admitimos el conocimiento de $\mathbb{N}$ y su orden). Se trata del orden "del diccionario". Supongamos que tenemos un alfabeto Σ y suponemos que tenemos un orden total sobre Σ. Supongamos $\leq$ un orden toal sobre Σ entonces podemos definir un orden sobre el conjunto Σ^* de todas las palabras expresables sobre Σ: a modo de ejemplo, el orden "lexicográfico" se define del modo siguiente:

Dadas $x := (x_1, \ldots, x_n) \in \Sigma^*$ e $y := (y_1, \ldots, y_m) \in \Sigma^*$, diremos que x es menor que y en el orden lexicográfico inducido por $(\Sigma, \leq)$ si:

$$[x = \lambda] \ \vee [(1 \leq n \leq m) \wedge (\forall i, \ 1 \leq i \leq n, \ x_i = y_i)] \ \vee$$

$$[\exists k, \ , 0 \leq k \leq \min\{n-1, m-1\}, [(\forall i, \ 1 \leq i \leq k, \ x_i \leq y_i) \wedge (x_{k+1} < y_{k+1})]] \, .$$

Lo denotamos $x \leq_{\text{lex}} y$. $(\Sigma^*, \leq_{\text{lex}})$ es un conjunto totalmente ordenado. No es un buen orden incluso si Σ es finito. Por ejemplo, si $\Sigma = \{0, 1\}$, y elegimos $0 \leq 1$, el siguiente conjunto no posee mínimo para $\leq_{\text{lex}}$:

$$L := \{0^n 1 \ : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Definición (Orden Inducido en un subconjunto)

Dado un conjunto ordenado $(X, \leq)$ y un subconjunto $Y \subseteq X$, podemos inducir una relación de orden sobre Y mediante:

$$\leq_Y := \{(x, y) \in Y^2 \ : \ x \leq y\}.$$

Proposición

Dado un conjunto ordenado $(X, \leq)$ y un subconjunto $Y \subseteq X$, se tiene:

1. *La relación de ser orden total es hereditaria, pero no es, en general, ascendente. Es decir, si el orden $(X, \leq)$ es total, también lo es $(Y, \leq_Y)$. Pero puede ser que $(Y, \leq_Y)$ sea una relación de orden total y no provenga de una relación de orden total $\leq$ sobre todo X.*
2. *La relación ser un buen orden es hereditaria.*

DEM.– Para probar que las condiciones "total" y "buen orden" son hereditarias, pizarra. Contraejemplos de que no son ascendentes: $R_0 := \{(0, 0)\}$ define una relación de orden total en $\{0\}$, pero $R_1 := \{(0, 0), (1, 1)\}$ es una relación de orden sobre $\{0, 1\}$ que no es total, aunque induce R_0. QED

Example (El orden de $\mathbb{R}$)

El cuerpo $\mathbb{R}$ es un tipo especial de cuerpo ordenado por ser realmente cerrado (y, en particular, $\mathbb{C} = \mathbb{R}[i]$ ser algebraicamente cerrado) y por ser conexo. Pero estas nociones se nos escapan un poco del propósito de este curso. Así que nos conformamos con observar que la relación de orden sobre $\mathbb{R}$ es definible en primer orden mediante la expresión siguiente:

$$x \leq y \equiv \exists z \in \mathbb{R}, y - x = z^2. \tag{2}$$

Así el cono positivo $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \geq 0\}$ verifica las siguientes propiedades:

$$\mathbb{R}_+ + \mathbb{R}_+ \subseteq \mathbb{R}_+, \ \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \subseteq \mathbb{R}_+, \ \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_+ = \{0\}, \ \mathbb{R}_+ \cup (-\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}.$$

Estas propiedades son la clave para disponer de una métrica en $\mathbb{R}$ basada en su valor absoluto:

$$|x| := \begin{cases} \text{x}, & \text{si } x \in \mathbb{R}_+, \\ \text{-x}, & \text{en otro caso (i.e. si } x \notin \mathbb{R}_+) \end{cases}$$

Example (El orden de $\mathbb{R}$ (Continuación))

Los órdenes inducidos sobre $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ o $\mathbb{Q}$ no consisten simplemente en restringir la fórmula (2) a cada uno de ellos.
Es decir, **no** es cierta en $\mathbb{Q}$ la siguiente reescritura de (2) para el orden inducido por el de $\mathbb{R}$:

$$x \leq_{\mathbb{Q}} y \equiv \exists z \in \mathbb{Q}, y - x = z^2.$$

Si intentamos definir el orden de $\mathbb{Q}$ usando sólo cuantificadores que afectan a valores en $\mathbb{Q}$ fallamos. Necesitamos combinar cuantificadores que afectan a variables que se "mueven" en $\mathbb{Q}$ y en $\mathbb{R}$:

$$\forall x, y \in \mathbb{Q},\ x \leq_{\mathbb{Q}} y \Leftrightarrow \exists z \in \mathbb{R},\ y - x = z^2.$$

Obviamente los órdenes inducidos en $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ por el orden de $\mathbb{R}$ son "conocidos" por lo que omitimos el subíndice en $\leq_{\mathbb{N}}$, $\leq_{\mathbb{Z}}$, $\leq_{\mathbb{Q}}$ y escribiremos para todos ellos (y siempre que se indique bien el conjunto de referencia) simplemente por $\leq$.

Example (El orden de $\mathbb{R}$ (Continuación))

En el caso de $\mathbb{R}$ aparecen unos tipos de elementos especiales asociados al orden: los *ínfimos* y *supremos* que, de facto, caracterizan al propio cuerpo $\mathbb{R}$:

1. **Ínfimo:** Sea $S \subseteq \mathbb{R}$ un subconjunto. Un ínfimo y de S es una cota inferior (y, por tanto, S está acotado inferiormente) que satisface:
$$\forall x \in \mathbb{R}, (\forall s \in S,\ x \leq s) \Rightarrow (y \geq s).$$
2. **Supremo:** Sea $S \subseteq \mathbb{R}$ un subconjunto. Un supremo y de S es una cota superior (y, por tanto, S está acotado superiormente) que satisface:
$$\forall x \in \mathbb{R}, (\forall s \in S,\ x \geq s) \Rightarrow (y \leq s).$$

Es decir, son, respectivamente, la mayor de las cotas inferiores (ínfimo) y la menor de las cotas superiores (supremo). Con esta definición, ínfimo y/o supremo de un conjunto S, si existen, son únicos. Escribiremos $inf(S)$ o $sup(S)$ en caso de que existan.

Example (El orden de $\mathbb{R}$ (Continuación))

El milagro de la completitud de $\mathbb{R}$ se base en:
Axioma de Completitud de $\mathbb{R}$: Todo subconjunto S de $\mathbb{R}$ inferiormente (resp. superiormente) acotado posee ínfimo (resp. supremo). Además, ínfimo y supremo en $\mathbb{R}$ satisfacen:
Para cada $S \subseteq \mathbb{R}$ se satisface:

1. Si S está acotado inferiormente, se caracteriza el ínfimo mediante:
$$x = inf(S) \Leftrightarrow (\forall t \in S,\ x \leq t) \wedge (\forall \varepsilon > 0,\ \exists s \in S,\ s - \varepsilon \leq x)\,.$$
2. Si S está acotado superiormente, se caracteriza el supremo mediante:
$$x = sup(S) \Leftrightarrow (\forall t \in S,\ x \geq t) \wedge (\forall \varepsilon > 0,\ \exists s \in S,\ x \leq s + \varepsilon)\,.$$

El axioma de completitud de $\mathbb{R}$ es clave para probar que toda sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ es convergente en $\mathbb{R}$.

Proposición

Sea $(X, \leq)$ un conjunto ordenado y $S \subseteq X$ un subconjunto.

1. *Si existe $inf(S)$ y si $inf(S) \in S$, entonces S posee mínimo e $inf(S) = \min(S)$.*
2. *Si existe $\min(S)$, entonces $\min(S) = inf(S)$.*
3. *Si existe $sup(S)$ y si $sup(S) \in S$, entonces S posee máximo y $sup(S) = \max(S)$.*
4. *Si existe $\max(S)$, entonces $\max(S) = sup(S)$.*

Sin embargo, hay ejemplos en los que no hay ínfimo (resp. supremo) y ejemplos en los que existe ínfimo (resp. supremo) pero no hay mínimo (resp. máximo).

DEM.– Pizarra. QED

3.3. Aplicaciones

3.3.1. Aplicación: La noción.

Definición (Aplicación)

Una aplicación entre dos conjuntos A y B es una correspondencia $f \subseteq A \times B$, que satisface la siguiente propiedad:

$$\forall x \in A,\ \exists! y \in B,\ (x, y) \in f.$$

Diremos que A es el dominio de la aplicación f y que B es su rango (o conjunto de llegada). El único valor $y \in B$ relacionado con x (i.e. $(x, y) \in f$) se denota mediante $f(x)$.

Notaciones Básicas

Dada una aplicación $f \subseteq A \times B$, la notación habitual es $f : A \longrightarrow B$, que recuerda los conjuntos relacionados. Usuamente, añadimos el “criterio” de asignación, se suele denotar mediante:

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \longrightarrow & B \\ & x & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

Grafo de una aplicación

Se llama grafo de una aplicación $f : A \longrightarrow B$ al subconjunto de $A \times B$ que presenta f como correspondencia. Es decir:

$$Gr(f) := \{(x, y) \in A \times B \ : \ y = f(x)\} = \{(x, f(x)) \in A \times B \ : \ x \in A\}.$$

Obs.– Las "gráficas de funciones" de los estudios de Bachillerato son una "representación gráfica" de una aplicación $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$. Se daba una expresión como

$$y = \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1},$$

y se asignaba como primera tarea determinar un subconjunto $D \subseteq \mathbb{R}$ (en el ejemplo $D := \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$) de tal modo que la expresión anterior defina una aplicación (y que se llamaba "dominio"):

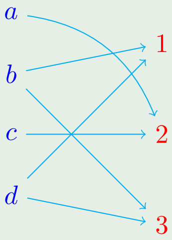
$$\begin{array}{rccc} f: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{x^3-2x+1}{x^2-1} \end{array}$$

Seguidamente se daban algunas estrategias elementales para intentar "dibujar" $Gr(f)$ como subconjunto de $D \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$.

Example (Correspondencias que no son aplicaciones)

Sean $A := \{a, b, c, d\}$, $B := \{1, 2, 3\}$ y una correspondencia dada por

$$R := \{(a, 2), (b, 1), (b, 3), (c, 2), (d, 1), (d, 3)\} \subseteq A \times B.$$



Satisface $\forall x \in A,\ \exists y \in B,\ (x, y) \in R,$ pero no satisface:

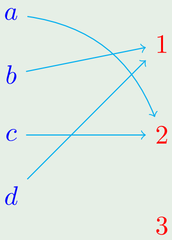
$$\forall x \in A,\ \exists! y \in B,\ (x, y) \in R,$$

porque tanto b como d tienen dos elementos con los que se relacionan.

Example (Correspondencias que no son aplicaciones (cont.))

Podemos cambiar R por f, siendo

$$f := \{(a,2),(b,1),(c,2),(d,1)\} \subseteq A \times B.$$



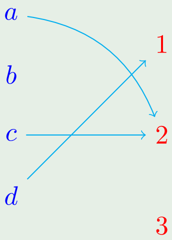
Y ahora sí se satisface:

$$\forall x \in A,\ \exists! y \in B,\ (x,y) \in f.$$

Example (Correspondencias que no son aplicaciones (cont.))

La cosa vuelva a fallar si elegimos

$$f := \{(a,2),(c,2),(d,1)\} \subseteq A \times B.$$



Porque fallaría directamente

$$\forall x \in A,\ \exists y \in B,\ (x,y) \in f.$$

Example (Identidad)

Dado un conjunto A, tenemos una aplicación $Id_A : A \longrightarrow A$ conocida como aplicación identidad y definida mediante:

$$\begin{array}{rccc} Id_A : & A & \longrightarrow & A \\ & x & \longmapsto & x. \end{array}$$

Example (Aplicación constante)

Dados dos conjuntos A y B y un elemento $b \in B$, tenemos una aplicación (que denotamoes usualmente con el elemento b señalado) que se denomina aplicación constantemente ingual a b (o, simplemente, constante) y que viene definida mediante:

$$\begin{array}{rccc} b : & A & \longrightarrow & B \\ & x & \longmapsto & b. \end{array}$$

Consideremos dos conjuntos A y B, denotaremos mediante B^A al conjunto de todas las aplcaciones de A en B. Es decir:

$$B^A := \{f : A \longrightarrow B \ : \ f \text{ es aplicación}\}.$$

Example (Potencia (finita) de un conjunto)

Consideremos el conjunto $A := \{1, 2, \ldots, n\} \subseteq \mathbb{N}$ de números naturales. Consideremos el conjunto

$$X^{\{1,2,\ldots,n\}} := \{f : \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow X \ : \ f \text{ es aplicación}\}.$$

Dada $f \in X^{\{1,2\ldots,n\}}$, podemos identificar su grafo $Gr(f)$ con una lista del modo siguiente:

$$Gr(f) := \{(x, f(x)) \ : \ x \in \{1, 2, \ldots, n\}\} \leftrightarrow (f(1), f(2), \ldots, f(n)) .$$

A veces usamos los valores y escribimos $f(i) = a_i \in X$ y tendremos la notación $Gr(f) \leftrightarrow (a_1, \ldots, a_n) \in X^n$. Por lo que $X^{\{1,2,\ldots,n\}}$ se suele denotar mediante X^n. Se aplica a $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, etc.

Example (Matrices)

Consideremos los conjuntos $\{1, 2, \ldots, m\}$ y $\{1, 2, \ldots n\}$. Sea K un cuerpo[a]. Las matrices con m filas y n columnas y coordenadas en K sse definen:

$$\mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) := \{A : \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \longrightarrow K \ : \ A \text{ es aplicación}\}.$$

La costumbre y la comodidad de su uso, hacen que las matrices A se representen bien con la notación $A := (a_{i,j})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$, donde $a_{i,j} = A((i, j))^b$ o bien como una "caja":

$$A := \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,n} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

[a]Los alumnos han visto la noción en Álgebra Lineal, aunque podemos aceptar que $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R} \ \vee \ \mathbb{C}$.

[b]En la mayoría de los lenguajes de programación el tipo `array` determina sus "coordenadas" $A((i, j))$ mediante $A[i, j]$.

Example (Matrices (cont.))

A su vez, una matriz $A := (a_{i,j})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$, define una aplicación:

$$\begin{array}{cccc} A: & K^n & \longrightarrow & K^m \\ & (x_1,\ldots,x_n) & \longmapsto & A(x_1,\ldots,x_n) := (y_1,\ldots,y_m), \end{array}$$

dada por la relación:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,n} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

donde $\cdot$ es el producto de matrices [a] , i.e. $\forall k,\ 1 \leq k \leq m$, se tiene:

$$y_k := \sum_{i=1}^{n} a_{k,i} x_i.$$

[a] En "Álgebra Lineal" se probará que es aplicación entre K^n y K^m, llamada *aplicación lineal determinada por A.*

Example (Sucesiones y series)

Consideremos el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales "intuitivos". Sea X un conjunto y consideremos el conjunto siguiente:

$$X^{\mathbb{N}} := \{f : \mathbb{N} \longrightarrow X \ : \ f \text{ es aplicación}\}.$$

Es el conjunto de todas las sucesiones de elementos de X. Si $X = \mathbb{Q}$, entonces $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ son las sucesiones de números raciones. Si $X = \mathbb{R}$, entonces $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ son las sucesiones de números reales. Dada $f \in X^{\mathbb{N}}$ podemos repreentar f mediante su grafo $Gr(f)$. En Análisis pero es costumbre "sobre-entender" la presencia de $\mathbb{N}$ y escribirlo como subíndice. Es decir, las representaciones:

$$f \leftrightarrow \{(n, f(n)) \ : \ n \in \mathbb{N}\} \leftrightarrow (f(n))_{n \in \mathbb{N}}.$$

A veces, se usa n como sub-índice y el valor de la aplicación y se escribe $f(n) = a_n \in X$, por lo que la preentación más habitual en Análisis será:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}.$$

Example (Funciones Booleanas)

Se llaman funciones Booleanas con n parámetros a las siguientes:

$$\mathscr{B}_n := \{f : \{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\} \ : \ f \text{ es aplicación}\}.$$

Prueba para $n = 1, 2, 3, 4$ que si $f \in \mathscr{B}_n$ entonces existe una fórmula Booleana del Cálculo Proposicional Φ tal que $Gr(f)$ es la Tabla de Verdad de Φ. Supuesto que dado $n \geq 2$, toda $f \in \mathscr{B}_n$ satiface que su grafo es la Tabla de Verdad de una fórmula $\Phi(X_1, \ldots, X_n)$ del Cálculo Proposicional. Deduce que, para $n + 1$ se tendrá:

$$\forall f \in \mathscr{B}_{n+1}, \ \exists \Theta(X_1, \ldots, X_n) \ \ Gr(f) \text{ es la Tabla de Verdad de } \Theta\}.$$

Definición (Composición de Aplicaciones)

Sean $f : A \longrightarrow B$ *y* $g : B \longrightarrow C$ *dos aplicaciones. Definimos la aplicación composición*

$$g \circ f : A \longrightarrow C,$$

definida mediante:
dado $x \in A$*, definimos* $g \circ f(x) \in C$ *como el único elemento* $z \in C$ *tal que*

$$z := g(f(x)).$$

Obs.– La idea es que el elemento $y \in B$ tal que $y = f(x)$ existe y es único para cada $x \in A$. Por tanto, también existe y es único el elemento $z = g(y) = g(f(x)) \in C$. Pizarra.

Proposición (Propiedades Elementales de la Composición)

Se verifican:

1. *La composición de aplicaciones es asociativa. Es decir, dadas*
$$f : A \longrightarrow B, \;\; g : B \longrightarrow C, \;\; h : C \longrightarrow D,$$
entonces
$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$
2. *Las aplicaciones identidad se comportan como elementos neutros. Es decir, dada $f : A \longrightarrow B$ una aplicación, se tiene:*
$$f \circ Id_A = f, \;\; Id_B \circ f = f.$$

Example (Aplicación inclusión)

Sea A un conjunto, $X \in \mathscr{P}(A)$ un subconjunto no vacío. Llamamos aplicación inclusión de X en A y la denotamos por ι_X a la correspondencia:

$$\begin{array}{cccc} \iota_X : & X & \longrightarrow & A \\ & x & \longmapsto & x \end{array}$$

Definición (Restricción de una aplicación)

Sea $f : A \longrightarrow B$ una aplicación y sea $X \subseteq A$ un subconjunto no vacío del dominio. Llamaremos restricción de f al subconjunto X a la correspondencia siguiente:

$$\begin{array}{cccc} f\mid_X : & X & \longrightarrow & B \\ & x & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

Proposición

Con las notaciones precedentes, la inclusión ι_X es aplicación y se verifica $f\mid_X := f \circ \iota_X$, con lo que la correspondencia $f\mid_X$ es aplicación.

Observación (inclusión del vacío)

Dado un conjunto X y el subconjunto $\emptyset \in \mathscr{P}(X)$, tenemos una única aplicación $\iota_\emptyset : \emptyset \longrightarrow X$. Se la suele denotar mediante "palabra vacía" λ y tendremos que

$$X^\emptyset = X^0 = \{\lambda\}.$$

Example (Proyecciones Canónicas)

Sea A y B dos conjuntos no vacíos y $A \times B$ su producto cartesiano. Llamaos proyecciones canónicas a las siguientes correspondencias:

$$\begin{array}{rccc} \pi_1 : & A \times B & \longrightarrow & A \\ & (x, y) & \longmapsto & x \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \pi_2 : & A \times B & \longrightarrow & B \\ & (x, y) & \longmapsto & y \end{array}$$

Proposición

Las proyecciones canónicas π_1 y π_2 son aplicaciones.

Proposición (Aplicaciones inducidas entre subconjuntos)

Sea $f : A \longrightarrow B$ una aplicación entre los conjuntos A y B y consideremos las siguientes correspondencias entre $\mathscr{P}(A)$ y $\mathscr{P}(B)$ son aplicaciones:

$$\begin{array}{rccl} f^* : & \mathscr{P}(A) & \longrightarrow & \mathscr{P}(B) \\ & X & \longmapsto & f^*(X) := f(X) = \{y \ : \ \exists x \in X, \ f(x) = y\} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} f_* : & \mathscr{P}(B) & \longrightarrow & \mathscr{P}(A) \\ & Y & \longmapsto & f_*(Y) := f^{-1}(Y) = \{x \in X \ : \ f(x) \in Y\}. \end{array}$$

Dem.– Pizarra Qed

Obs.– Las notaciones f^* y f_* son auxiliares. La forma común de presentarlas es mediante $f(X)$ y $f^{-1}(Y)$. Insistir a los alumnos en:

- Para cada $X \subseteq A$, $f(X) \subseteq B$ NO es la imagen de un elemento, sino la imagen de un subconjunto y, por tanto, no es un elemento sino un subconjunto.
- Para cada $Y \subseteq B$, $f^{-1}(Y)$ NO indica la existencia de aplicación inversa y tampoco es una aplicación, sino la imagen inversa de un subconjunto y, por tanto, un subconjunto de A.

Proposición

Sea $f : A \longrightarrow B$ una aplicación y sean $X \subseteq A$ e $Y \subseteq B$ subconjuntos de los respectivos dominio y rango de f. Se tiene:

1. $X \subseteq f^{-1}(f(X))$,
2. $f(f^{-1}(T)) \subseteq T$.

DEM.– Pizarra QED

Proposición

Sea $f : A \longrightarrow B$ una aplicación y sean $Y_1 \subseteq B$ y $Y_2 \subseteq B$ subconjuntos de B. Se tiene:

1. *Si* $Y_1 \subseteq Y_2$, *entonces* $f^{-1}(Y_1) \subseteq f^{-1}(Y_2)$.
2. $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$.
3. $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$.
4. $f^{-1}(Y_1 \setminus Y_2) = f^{-1}(Y_1) \setminus f^{-1}(Y_2)$.

DEM.– Pizarra QED

Proposición

Sea $f : A \longrightarrow B$ una aplicación y sean $X_1 \subseteq A$ y $X_2 \subseteq A$ subconjuntos de A. Se tiene:

1. *Si $X_1 \subseteq X_2$, entonces $f(X_1) \subseteq f(X_2)$.*
2. *$f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$.*
3. *$f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2)$.*
4. *$f(X_1 \setminus X_2) \supseteq f(X_1) \setminus f(X_2)$.*

DEM.– Pizarra QED

Definición (Igualdad de Aplicaciones)

Sean $f : A \longrightarrow B$ *y* $g : C \longrightarrow D$ *dos aplicaciones. Decimos que* f *y* g *son iguales si se satisface:*

1. $A = C$, $B = D$,
2. $Gr(f) = Gr(g)$.

Proposición

Sean $f : A \longrightarrow B$ *y* $g : C \longrightarrow D$ *dos aplicaciones. Entonces, ambas aplicaciones son iguales si y solamente si* $A = C$, $B = D$ *y se satisface:*

$$\forall x \in A,\ f(x) = g(x).$$

3.3.2. Inyectivas, Suprayectivas, Biyectivas.

Definición (Aplicación Inyectiva)

Sean A *y* B *dos conjuntos y* $f : A \longrightarrow B$ *una aplicación. Decimos que* f *es inyectiva si verifica:*

$$\forall x, y \in A, \ (f(x) = f(y)) \Rightarrow (x = y).$$

Definición (Aplicación Suprayectiva)

Sean A *y* B *dos conjuntos y* $f : A \longrightarrow B$ *una aplicación. Decimos que* f *es suprayectiva si verifica:*

$$\forall z \in B, \ \exists x \in A, \ f(x) = z.$$

Definición (Aplicación Suprayectiva)

Sean A *y* B *dos conjuntos y* $f : A \longrightarrow B$ *una aplicación. Decimos que* f *es biyectiva si es inyectiva y suptrayectiva.*

Proposición

Sean $f : A \longrightarrow B$ *y* $g : B \longrightarrow C$ *dos aplicaciones. Se verifican las siguientes propiedadees:*

1. *Si* f *y* g *son inyectivas, entonces* $g \circ f$ *es inyectiva. Además, si* $g \circ f$ *es inyectiva, entonces* f *es inyectiva.*
2. *Si* f *y* g *son suprayectivas, entonces* $g \circ f$ *es suprayectiva. Además, si* $g \circ f$ *es suprayectiva, entonces* f *es suprayectiva.*
3. *Finalmente, si* f *y* g *son biyectivas, entonces* $g \circ f$ *es biyectiva. Y si* $g \circ f$ *es biyectiva, entonces,* f *es inyectiva y* g *es suprayetiva, pero no necesariamente son ambas biyectivas.*

Proposición

Sea $f : A \longrightarrow B$ una aplicación entre los conjuntos A y B y consideremos las aplicaciones que inducen entre $\mathscr{P}(A)$ y $\mathscr{P}(B)$:

$$f^* : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(A) & \longrightarrow & \mathscr{P}(B) \\ X & \longmapsto & f^*(X) := f(X) \end{array} \quad f_* : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(B) & \longrightarrow & \mathscr{P}(A) \\ Y & \longmapsto & f_*(Y) := f^{-1}(Y). \end{array}$$

Se verifica:

1. *f es inyectiva si y solamente si, para cada átomo $Y = \{y\} \in \mathscr{P}(B)$, $f_*(Y) = f^{-1}(Y)$ es un átomo o es el conjunto vacío, i.e.*

$$\forall y \in B, (f^{-1}(\{y\}) = \emptyset) \vee (\exists x \in X,\ f^{-1}(\{y\}) = \{x\}).$$

2. *f es suprayectiva si y solamente si para cada $y \in Y$ y el subconjunto atómico que define $\{y\} \in \mathscr{P}(B)$ satisface $f_*(\{y\}) \neq \emptyset$.*

$$\forall y \in B,\ f_*(\{y\}) = f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset.$$

Dem.– Pizarra

Qed

Corolario

Sea $f : A \longrightarrow B$ una aplicación entre los conjuntos A y B. Entonces, f es biyectiva si y solamente si existe una aplicación $g : B \longrightarrow A$ tal que:

$$g \circ f = Id_A, \;\; f \circ g = Id_B.$$

Además, si tal aplicación g existe, entonces es única para cada f, se denota $g = f^{-1}$ y se denomina aplicación inversa de f.

DEM.– $\Rightarrow$: Usaremos la Proposición precedente. Definamos la correspondencia $g \subseteq B \times A$ dada mediante:

$$g := \{(y, x) \in B \times A \; : \; (x, y) \in f\}.$$

Probemos que g es aplicación (Pizarra). Probemos (Pizarra) que satisface:

$$g \circ f = Id_A, \;\; f \circ g = Id_B.$$

$\Rightarrow$: Como $g \circ f = Id_A$ e Id_A es inyectiva, entonces f ha de ser inyectiva (Pizarra). Como $f \circ g = Id_B$ e Id_B es suprayectiva, entonces f ha de ser suprayectiva (Pizarra).

DEM.– (Cont.) Queda por ver la unicidad de g para cada f biyectiva (Pizarra). QED

3.3.3. Cardinales, equi-cardinalidad.

Definición

Dos conjuntos A y B se dice que tienen el mismo cardinal si existe una biyección $f : A \longrightarrow B$.

Proposición

La relación "tener el mismo cardinal" entre conjuntos satisface las propiedades Reflexiva, Simétrica y Transitiva.

DEM.- Pizarra QED

Definición (Conjuntos Finitos)

Un conjunto A se dice finito (o de cardinal finito) si existe un número natural $n \in \mathbb{N}$ tal que A es biyectuable (tiene el mismo cardinal) con $\{1, 2, \ldots, n\}$. Se dice que A es infinito (o de cardinal infinito) si no verifica la anterior propiedad.
Si A es finito y si A es biyectable con $\{1, 2, \ldots, n\}$ se dice simplemente que A tiene cardinal n y se escribe:

$$\sharp(A) = n.$$

Definición (Conjuntos Numerables y Contables)

Los conjuntos biyectables con $\mathbb{N}$, *se denominan* **conjuntos numerables** *y se denota mediante*[a]*:*

$$\sharp(A) = \aleph_0 \Leftrightarrow A \text{ es biyectable con } \mathbb{N}.$$

Los **conjuntos contables** *son los conjuntos que o bien son finitos o bien son numerables.*

[a] El símbolo $\aleph$ es el símbolo "Alef" del alfabeto hebreo.

Definición (Conjuntos Numerables y Contables)

Los conjuntos biyectables con $\mathbb{N}$, *se denominan* **conjuntos numerables** *y se denota mediante*[a]*:*

$$\sharp(A) = \aleph_0 \Leftrightarrow A \text{ es biyectable con } \mathbb{N}.$$

Los **conjuntos contables** *son los conjuntos que o bien son finitos o bien son numerables.*

[a] El símbolo $\aleph$ es el símbolo "Alef" del alfabeto hebreo.

Para poder profundizar más, necesitamos comprender mejor... $\mathbb{N}$