ILM, Capítulo 2: Teoría Naïve de Conjuntos

Luis M. Pardo

Universidad de Cantabria

6 de noviembre de 2018

Contenidos

David Hilbert: " Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können"[1].

[1] "Nadie podrá explusarnos del Paraíso que Cantor ha creado".

[2] G. Cantor, *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen (Sobre una propiedad de la colección de los números reales algebraicos)*. J. für die Reine und Angewandte Mathematik **77** (1874), 258–262.

David Hilbert: “ Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können”[1].

En el último cuarto del siglo XIX, Georg Cantor estaba interesado en comprender la difícil propiedad de **contar**. Contar conjuntos finitos es tarea relativamente intuitiva, pero contar cardinales de objetos infinitos tenía grandes dificultades. Cantor sorpendió con su “método de diagonalización” probando que la cantidad de números reales algebraicos sobre los racionales es la misma que la cantidad de números naturales [2].

[1] “Nadie podrá explusarnos del Paraíso que Cantor ha creado”.

[2] G. Cantor, *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen (Sobre una propiedad de la colección de los números reales algebraicos)*. J. für die Reine und Angewandte Mathematik **77** (1874), 258–262.

Cantor observó entonces que necesitaba una buena fundamentación para sus argumentos. Entre 1879 y 1883, publicó una serie de 5 trabajos en la revista Math. Annalen genéricamente titulados *Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten*[3]. Posteriormente publicarán en artículo (5) como *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre* (Fundamentos de una Teoría de Agregados), que será la fuente de la **Teoría de Conjuntos**.

[3] G. Cantor, *Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten*. Math. Annalen: (1) M.A. **15** (1979) 1–7. (2) M.A. **17** (1880), 355–358. (3) M.A. **20** (1882), 113–121. (4) M.A. **21** (1883), 51–58. (5) M.A. **21** (1883), 545–591.

Cantor observó entonces que necesitaba una buena fundamentación para sus argumentos. Entre 1879 y 1883, publicó una serie de 5 trabajos en la revista Math. Annalen genéricamente titulados *Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten*[3]. Posteriormente publicarán en artículo (5) como *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre* (Fundamentos de una Teoría de Agregados), que será la fuente de la **Teoría de Conjuntos**.

Desde el primer momento se bservó que Cantor aportaba **un nuevo lenguaje de gran utilidad para la escritura de Matemáticas**, siendo fuertemente apoyado por los defensores de la Teoría Axiomátca (con D.Hilbert a la cabeza).

[3] G. Cantor, *Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten*. Math. Annalen: (1) M.A. **15** (1979) 1–7. (2) M.A. **17** (1880), 355–358. (3) M.A. **20** (1882), 113–121. (4) M.A. **21** (1883), 51–58. (5) M.A. **21** (1883), 545–591.

Cantor observó entonces que necesitaba una buena fundamentación para sus argumentos. Entre 1879 y 1883, publicó una serie de 5 trabajos en la revista Math. Annalen genéricamente titulados *Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten*[3]. Posteriormente publicarán en artículo (5) como *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre* (Fundamentos de una Teoría de Agregados), que será la fuente de la **Teoría de Conjuntos**.

Desde el primer momento se bservó que Cantor aportaba **un nuevo lenguaje de gran utilidad para la escritura de Matemáticas**, siendo fuertemente apoyado por los defensores de la Teoría Axiomátca (con D.Hilbert a la cabeza).

Muy pronto se observaron dificultades en la precisa fundamentación de la creación de Cantor (**Paradojas** de Peano, Russell, Cantor,...)

[3] G. Cantor, *Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten*. Math. Annalen: (1) M.A. **15** (1979) 1–7. (2) M.A. **17** (1880), 355–358. (3) M.A. **20** (1882), 113–121. (4) M.A. **21** (1883), 51–58. (5) M.A. **21** (1883), 545–591.

Habrá que esperar al primer tercio del siglo XX para disponer de fundamentaciones libres de las paradojas clásicas de las ideas de Cantor **Teoría Axiomática de Conjuntos**, con la obra de grandes matemático como Kurt Gödel, Ernst Zermelo, Abraham Fraenkel, P. Barnays,...
Esto dió lugar a las introducción formal de las **Teoría de Conjuntos de Zermelo-Fraenkel** o la de **Gödel-Bernays**.

La introducción de cualquiera de estas teorías formales (de la que ni siquiera se sabe si es consistente) supera con mucho las expectativas de un curso como éste.

[4] P. Halmos, *"Naïve Set Theory"*. D. Van Nostrand Company, 1960. Reprinted by Springer–Verlag, New York, 1974.

Habrá que esperar al primer tercio del siglo XX para disponer de fundamentaciones libres de las paradojas clásicas de las ideas de Cantor **Teoría Axiomática de Conjuntos**, con la obra de grandes matemático como Kurt Gödel, Ernst Zermelo, Abraham Fraenkel, P. Barnays,...
Esto dió lugar a las introducción formal de las **Teoría de Conjuntos de Zermelo-Fraenkel** o la de **Gödel-Bernays**.

La introducción de cualquiera de estas teorías formales (de la que ni siquiera se sabe si es consistente) supera con mucho las expectativas de un curso como éste.

Así que, desde hace tiempo, se acepta comúnmente que los alumnos reciban un "adiestramiento rudimentario" en una variación de la versión original de Cantor, con algunas precisiones, que se ha dado en llamar **Teoría de Conjuntos Naïve**, suficiente para seguir avanzando en otros campos de la fomación matemática.
Aquí seguiremos una aproximación a la forma tradicional de P. Halmos [4].
Evitaremos, en lo posible, el uso del término "Axioma" en Halmos.

[4] P. Halmos, *"Naïve Set Theory"*. D. Van Nostrand Company, 1960. Reprinted by Springer–Verlag, New York, 1974.

2.2. Teoría de Conjuntos Naïve

2.2.1. NST: Inclusión, Extensionalidad y Cuantificadores.

* **Conjunto:** (familia, colección, agrupación...) Intuitivamente es una "agrupación" de objetos. Sin embargo, no es una noción definida en esta Teoría. Suele denotarse con letras mayúsculas como

$$A, B, C, D, ...$$

* **Elemento:** Objeto susceptible de estar en un cierto conjunto. Se denotan con letras minúsculas $(a, b, c, \ldots, x, y, z)$ se usan expresiones como *"el elemento x están en el conjunto A"*. Aunque deberá precisarse más adelante (relación de equivalencia), supondremos que dados dos elementos $a, b \in A$ satisfacen $a = b$ o $a \neq b$.

Pertenencia

La noción primitiva de la Teoría de Conjuntos "à la Halmos" es la noción de pertenencia. Así, escribiremos:

$$x \in A$$

para denotar que x es un elemento del conjunto A (o, equivalentemente, que x pertenece a A).

A diferencia del caso del Cálculo Proposicional, iremos compaginando Sintaxis y Semática.
Así, ante una expresión de la forma $x \in A$ tendremos solamente dos posible interpretaciones:

- O bien el elemento x es un elemento de A en cuyo caso $x \in A$ se interpreta como **V**,
- O bien el elemento x no es un elemento de A en cuyo caso $x \in A$ se interpreta como **F**,

A diferencia del caso del Cálculo Proposicional, iremos compaginando Sintaxis y Semática.
Así, ante una expresión de la forma $x \in A$ tendremos solamente dos posible interpretaciones:

- O bien el elemento x es un elemento de A en cuyo caso $x \in A$ se interpreta como **V**,
- O bien el elemento x no es un elemento de A en cuyo caso $x \in A$ se interpreta como **F**,

* **Negación de pertenencia:** Notacionalmente, la negación se expresa con un símbolo especial, así escribiremos $x \notin A$ en lugar de $\neg(x \in A)$.

Inclusión

Dados dos conjuntos A y B, diremos que A están incluido en B (o, equivalentemente, que A es un subconjunto de B) si todo elemento de A es también elemento de B. Es decir, A es subconjunto de B si para cualquier elemento, se tiene

$$(x \in A) \Rightarrow (x \in B).$$

Escribiremos $A \subseteq B$ cuando A esté incluido en B y escribiremos $A \not\subseteq B$ cuando A no esté incluido en B.

Inclusión

Dados dos conjuntos A y B, diremos que A están incluido en B (o, equivalentemente, que A es un subconjunto de B) si todo elemento de A es también elemento de B. Es decir, A es subconjunto de B si para cualquier elemento, se tiene

$$(x \in A) \Rightarrow (x \in B).$$

Escribiremos $A \subseteq B$ cuando A esté incluido en B y escribiremos $A \not\subseteq B$ cuando A no esté incluido en B.

* **Obs 1.-** Nótese que hemos incluido el símbolo $\Rightarrow$ que, recordamos, era un equivalente semántico del símbolo $\rightarrow$, ambos del Cálculo Proposicional.

Inclusión

Dados dos conjuntos A y B, diremos que A están incluido en B (o, equivalentemente, que A es un subconjunto de B) si todo elemento de A es también elemento de B. Es decir, A es subconjunto de B si para cualquier elemento, se tiene

$$(x \in A) \Rightarrow (x \in B).$$

Escribiremos $A \subseteq B$ cuando A esté incluido en B y escribiremos $A \not\subseteq B$ cuando A no esté incluido en B.

* **Obs 1.-** Nótese que hemos incluido el símbolo $\Rightarrow$ que, recordamos, era un equivalente semántico del símbolo $\rightarrow$, ambos del Cálculo Proposicional. *
Cuantificador Universal.-Introduzcamos un primer cuantificador: el cuantificador universal $\forall$ cuya lectura sería "para todo" o "para cualquiera" o "para cualquier". Así, la inclusión de conjuntos puede expresarse del modo siguiente:

$$[A \subseteq B] \equiv [\forall x, \ ((x \in A) \Rightarrow (x \in B))] \, .$$

Cuantificador Existencial.- Se define a partir del cuantificador universal, se representa mediante $\exists$ y es una abreviatura dada por la siguiente identidad:

$$\exists x, P(x) \equiv (\neg (\forall (\neg P(x)))) \, .$$

Cuantificador Existencial.- Se define a partir del cuantificador universal, se representa mediante $\exists$ y es una abreviatura dada por la siguiente identidad:

$$\exists x, P(x) \equiv (\neg (\forall (\neg P(x)))) .$$

En las expresiones $\forall x, \ldots$ o $\exists x, \ldots$ diremos que x está afectada por el cuantificador x. Si en una expresión aparece una variable x no afectada por ningún cuantificador, diremos que es una variable libre.

Cuantificador Existencial.- Se define a partir del cuantificador universal, se representa mediante $\exists$ y es una abreviatura dada por la siguiente identidad:

$$\exists x, P(x) \equiv (\neg (\forall (\neg P(x)))) .$$

En las expresiones $\forall x, \ldots$ o $\exists x, \ldots$ diremos que x está afectada por el cuantificador x. Si en una expresión aparece una variable x no afectada por ningún cuantificador, diremos que es una variable libre.

Proposición

Existencia e Inclusión *Dados A y B dos conjuntos, entonces $A \not\subseteq B$ si y solamente si se tiene:*

$$\exists x, ((x \in A) \wedge (x \notin B)) .$$

Dem.- Usaremos solamente el comportamiento de alguna de las tautologías introducidas en el Cálculo Proposicional. Así, la implicación $\alpha \Rightarrow \beta$ era una abreviatura de $((\neg\alpha) \vee \beta)$. Luego, tenemos que $((x \in A) \Rightarrow (x \in B))$ es otra forma de escribir

$$((x \notin A) \vee (x \in B)).$$

Gracias a las "Leyes" de Morgan, tendremos

$$(\neg((x \notin A) \vee (x \in B))) \Leftrightarrow ((\neg(x \notin A)) \wedge (\neg(x \in B)))\,.$$

Por la doble negación, tendremos

$$(\neg((x \notin A) \vee (x \in B))) \Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \notin B))\,.$$

Y, de nuevo por doble negación, tendremos

$$((x \in A) \Rightarrow (x \in B)) \Leftrightarrow (\neg(\neg((x \in A) \Rightarrow (x \in B)))) \Leftrightarrow (\neg((x \in A) \wedge (x \notin B)))\,.$$

Finalmente,

$$A \not\subseteq B \equiv (\neg\forall x,\ ((x \in A) \Rightarrow (x \in B))) \Leftrightarrow (\neg\forall x, \neg((x \in A) \wedge (x \notin B)))\,.$$

Es decir,

$$A \not\subseteq B \equiv\Leftrightarrow (\neg\forall x, \neg\,((x \in A) \wedge (x \notin B))) \Leftrightarrow \exists x, ((x \in A) \wedge (x \notin B))\,.$$

QED

Definición (**Existe un único**)

Se usa un cuantificador de la forma $\exists!$ *(algunos autores prefieren* $\exists \,|$*), que se traduce al lenguaje natural por "existe un único", y que se define mediante*

$$\exists! x \in X,\ \mathcal{P}(x) \equiv \left[(\exists x \in X,\ \mathcal{P}(x)) \wedge \beta \right],$$

donde[a]

$$\beta := (\forall x_1 \in X,\ \forall x_2 \in X,\ ((\mathcal{P}(x_1) \wedge \mathcal{P}(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2)).$$

[a] La necesidad de introducir β es artificial: la fórmula completa no cabe en una línea de beamer con este tamaño de letra.

Definición (**Contenido estricto**)

Dados dos conjuntos A *y* B *diremos que* A *está estrictamente contenido en* V *y lo respresentaremos mediante* $A \subsetneq B$ *si:*

$$(A \subsetneq B) \equiv (A \subseteq B) \wedge (A \neq B).$$

* Algunos autores usan $\subset$ en ese caso, y para no confundirse, se debe preguntar si $\subset$ es lo mismo que $\subseteq$ o que $\subsetneq$, en evitación de confusiones.

* Nótese que $\subsetneq$ no es lo mismo que $\not\subseteq$.

* Si $A \subsetneq B$ se suele decir que A es un subconjunto propio de B.

Contraejemplo

Dada una propiedad $\mathcal{P}$ que afecta a diversos tipos de objetos, dar un ejemplo en el que esa propiedad **no** se verifica suele denominarse dar un **Contraejemplo**. La existencia de un contraejemplo se expresa, en ocasiones, mediante *"En general no es cierto..."* y la demostración de esa frase es, precisamente, mostrar un contraejemplo.
Así, por ejemplo, el valor $(0,1)$ es un "contraejemplo" de la propiedad *La fórmula $X_1 \vee (\neg X_2)$ es una tautología"*.
Del mismo modo, admitiendo la prueba que vimos en clase, $\sqrt{2}$ es un contraejemplo para la propiedad:

$$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{Q},$$

que se vuelve falsa y se convierte en $\mathbb{R} \not\subseteq \mathbb{Q}$ por la existencia de $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$.

La siguiente noción a definir sería la "igualdad entre conjuntos". Así surge el

Extensionalidad (Igualdad de Conjuntos)

Dos conjuntos A y B se dicen iguales si tienen los mismos elementos. enotaremos la igualdad de conjuntos mediante $A = B$ y escribiremos $A \neq B$ si son distintos. Es decir, A y B son iguales si y solamente si se satisface:

$$[A = B] \equiv [\forall x, \; (x \in A) \Leftrightarrow (x \in B)] \, .$$

Mientras que

$$[A \neq B] \equiv [\exists x, \; (x \in A) \oplus (x \in B)] \, .$$

Sin usar cuantificadores, también podemos escribir la noción diciendo

$$(A = B) \equiv ((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)).$$

Se verifica:
* **Propiedad Reflexiva:** Para cada conjunto A se tiene $A \subseteq A$.

También es cierta para la igualdad: Para cada conjunto A se tiene $A = A$.

Se verifica:
* **Propiedad Reflexiva:** Para cada conjunto A se tiene $A \subseteq A$.

También es cierta para la igualdad: Para cada conjunto A se tiene $A = A$.

* **Propiedad Transitiva:** Dados tres conjuntos A, B y C se tiene que

$$(((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)) \Rightarrow (A \subseteq C)).$$

También es cierta para la igualdad:

$$(((A = B) \wedge (B = C)) \Rightarrow (A = C)).$$

Se verifica:

* **Propiedad Reflexiva:** Para cada conjunto A se tiene $A \subseteq A$.

También es cierta para la igualdad: Para cada conjunto A se tiene $A = A$.

* **Propiedad Transitiva:** Dados tres conjuntos A, B y C se tiene que

$$(((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)) \Rightarrow (A \subseteq C)).$$

También es cierta para la igualdad:

$$(((A = B) \wedge (B = C)) \Rightarrow (A = C)).$$

* **Propiedad Anti-simétrica de la Inclusión:**

$$(((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)) \Rightarrow (A = B)).$$

Se verifica:

* **Propiedad Reflexiva:** Para cada conjunto A se tiene $A \subseteq A$.

También es cierta para la igualdad: Para cada conjunto A se tiene $A = A$.

* **Propiedad Transitiva:** Dados tres conjuntos A, B y C se tiene que

$$(((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)) \Rightarrow (A \subseteq C)).$$

También es cierta para la igualdad:

$$(((A = B) \wedge (B = C)) \Rightarrow (A = C)).$$

* **Propiedad Anti-simétrica de la Inclusión:**

$$(((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)) \Rightarrow (A = B)).$$

* **Propiedad Simétrica de la Igualdad:**

$$((A = B) \Leftrightarrow (B = A)).$$

2.2.2. NST: Existencia del Conjunto Vacío.

Axioma de Existencia del Conjunto Vacío

Existe un conjunto que no posee ningún elemento. Formalmente,

$$\exists X,\ \forall x, (x \notin X).$$

Axioma de Existencia del Conjunto Vacío

Existe un conjunto que no posee ningún elemento. Formalmente,

$$\exists X,\ \forall x, (x \notin X).$$

Proposición (**Unicidad del Conjunto Vacío**)

Hay un único conjunto vacío y es subconjunto de todo otro conjunto.

Dem.- Sea X un conjunto que satisface

$$\forall x,\ (x \notin X).$$

Entonces, para cualquier otro conjunto A, la siguiente implicación es cierta:

$$(x \in X) \Rightarrow (x \in A).$$

(Recordemos que si la hipótesis es falsa, la implicación es cierta) Por tanto

$$\forall x,\ ((x \in X) \Rightarrow (x \in A)) \equiv [X \subseteq A].$$

Por tanto, se tiene que para todo conjunto A X es subconjunto de A.
Dados X e Y cualesquiera dos conjuntos que satisfacen la fórmula que los define como conjuntos vacíos.
Entonces, $X \subseteq Y$ (por ser X vacío e Y conjunto) y $Y \subseteq X$ (por ser Y vacío y X conjunto).
Por Extensionalidad, tendremos $X = Y$ y hay un único conjunto vacío.

QED

* **Notación:** Por tradición se usa la notación $\emptyset$ para denotar ese único conjunto vacío y se tiene que, para cualquier conjunto A:

$$\emptyset \subseteq A.$$

y, por tanto,

$$\forall A,\ A \text{ conjunto},\ (A \subseteq \emptyset) \Rightarrow (A = \emptyset).$$

Por el Axioma, también se tiene:

$$\forall x,\ (x \notin \emptyset).$$

2.3. NST: Especificación de Conjuntos

2.3.1. Especificación por “Extensión”

Aunque se separarán en distintos axiomas, resumamos los elementos de especificación de la Teoría de Conjuntos "naïve" en los siguientes:

- **Existencia de átomos:** Dado un elemento b, denotamos por $\{b\}$ el conjunto que contiene a b como único elemento. Es decir, se verifica:
  - $b \in \{b\}$,
  - $\forall x, (x \in \{b\}) \Leftrightarrow (x = b)$.

  Nótese que este axioma de NST presupone que podemos interpretar la igualdad de elementos de un conjunto dado o, equivalentemente, que admitimos la especificación del conjunto $\{b\}$ formado por el elemento b. Es decir, tendremos que dos objetos a y b son iguales si y solamente si se tiene $(b \in \{a\}) \wedge (a \in \{b\})$ que se denotará por $a = b$.
- **Existencia de Unión de Átomos:** Dados dos elementos a y b, denotamos por $\{a, b\}$ el conjunto que contiene a los elementos a y b. Se verifica:
  - $a \in \{a, b\}$, $b \in \{a, b\}$,
  - $\forall x, (x \in \{a, b\}) \Leftrightarrow ((x = a) \vee (x = b))$.

Definición de conjuntos por extensión

Se trata de la descripción de un conjunto por la escritura de todos sus elementos, separados por "," y entre paréntesis. A modo de ejemplo:

$$A := \{a, e, i, o, u\},\ S := \{0, 1\},\ D := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

$$T := \{\triangle, \square, \bigcirc, \Diamond\},\ \Sigma := \{\alpha, \beta, \epsilon, \eta, \iota, \omega\}.$$

$$[a = b] \equiv ((a \in \{b\}) \wedge (b \in \{a\})).$$

$$\{a, a\} = \{a\}.$$

2.3.2. Especificación por “Comprensión”

Obviamente, no todos los conjuntos se pueden "descibir" mediante el simple listado de sus elementos. Cuando hablamos de $\mathbb{N}$ escribimos

$$\mathbb{N} := \{\lambda, I, II, III, ...\}.$$

Se sobre-entiende, pero no es muy correcto. Por eso se introduce la especificación de conjuntos **por comprensión** o por "condición satisfecha" o por "fórmula"...

Admitiremos fórmulas o expresiones de la forma $\mathscr{S}(x)$ que se pueden interpretar en elementos, descritos con una "variable" x que no está afectada por ningún cuantificador. Pero no entraremos en detalles precisos sobre las "cualidades" exigibles a $\mathscr{S}$ (por eso es "naïve"). Nos conformamos con que se pueden escribir...

Especificación, Axioma de Especificación

Sea A un conjunto y $\mathscr{S}(x)$ una condición (o fórmula) que contiene una variable x no afectada por cuantificadores y interpretable en elementos de A. Entonces, el conjunto de los elementos de A que hacen que $\mathscr{S}$ sea cierta es un conjunto, subconjunto de A:

$$B := \{x \in A \ : \ \mathscr{S}(x)\}.$$

Diremos que B es descrito por comprensión a partir de los elementos de A.

* **Ejemplos:**

$$B := \{x \in \{0,1\} \ : \ (x \neq 1)\} = \{0\}.$$

Si A es el alfabeto latino,

$$B := \{x \in A \ : \ x \text{ es vocal}\} = \{a, e, i, o, u\}.$$

2.3.3. Operaciones Clásicas: Unión, Intersección, Complementario, etc.

Otros ejemplos de Especificación sencilla:

***Unión de subconjuntos:** Dado un conjunto A y dos subconjuntos B y C, el siguiente también es conjunto:

$$B \cup C := \{x \in A \;:\; (x \in B) \vee (x \in C)\}.$$

Otros ejemplos de Especificación sencilla:

***Unión de subconjuntos:** Dado un conjunto A y dos subconjuntos B y C, el siguiente también es conjunto:

$$B \cup C := \{x \in A \ : \ (x \in B) \vee (x \in C)\}.$$

$$\{a, b\} = \{a\} \cup \{b\}.$$

Otros ejemplos de Especificación sencilla:

***Unión de subconjuntos:** Dado un conjunto A y dos subconjuntos B y C, el siguiente también es conjunto:

$$B \cup C := \{x \in A \ : \ (x \in B) \vee (x \in C)\}.$$

$$\{a, b\} = \{a\} \cup \{b\}.$$

***Intersección de subconjuntos:** Dado un conjunto A y dos subconjuntos B y C, el siguiente también es conjunto:

$$B \cap C := \{x \in A \ : \ (x \in B) \wedge (x \in C)\}.$$

Otros ejemplos de Especificación sencilla:

***Unión de subconjuntos:** Dado un conjunto A y dos subconjuntos B y C, el siguiente también es conjunto:

$$B \cup C := \{x \in A \ : \ (x \in B) \vee (x \in C)\}.$$

$$\{a, b\} = \{a\} \cup \{b\}.$$

***Intersección de subconjuntos:** Dado un conjunto A y dos subconjuntos B y C, el siguiente también es conjunto:

$$B \cap C := \{x \in A \ : \ (x \in B) \wedge (x \in C)\}.$$

$$\{0\} \cap \{1\} = \emptyset.$$

Otros ejemplos de Especificación sencilla:

***Unión de subconjuntos:** Dado un conjunto A y dos subconjuntos B y C, el siguiente también es conjunto:

$$B \cup C := \{x \in A \ : \ (x \in B) \vee (x \in C)\}.$$

$$\{a, b\} = \{a\} \cup \{b\}.$$

***Intersección de subconjuntos:** Dado un conjunto A y dos subconjuntos B y C, el siguiente también es conjunto:

$$B \cap C := \{x \in A \ : \ (x \in B) \wedge (x \in C)\}.$$

$$\{0\} \cap \{1\} = \emptyset.$$

***Diferencia Simétrica de subconjuntos:** Dado un conjunto A y dos subconjuntos B y C, el siguiente también es conjunto:

$$B \triangle C := \{x \in A \ : \ (x \in B) \oplus (x \in C)\}.$$

***Diferencia de subconjuntos:** Dado un conjunto A y dos subconjuntos B y C, el siguiente también es conjunto:

$$B \setminus C := \{x \in A \ : \ (x \in B) \wedge (x \notin C)\}.$$

***Diferencia de subconjuntos:** Dado un conjunto A y dos subconjuntos B y C, el siguiente también es conjunto:

$$B \setminus C := \{x \in A \ : \ (x \in B) \wedge (x \notin C)\}.$$

$$B \triangle C = (B \setminus C) \cup (C \setminus B) = (B \cup C) \setminus (B \cap C).$$

* **Complementario:** En el caso en que tengamos fijado el conjunto "ambiente" A, dado un subconjunto B, llamamos complementario de B al conjunto

$$B^c := A \setminus B = \{x \in A \ : \ (x \notin B)\}.$$

Dados A, B, C subconjuntos de un conjunto X se tiene:

Dados A, B, C subconjuntos de un conjunto X se tiene:

* **Unión, Intersección y diferencia simétrica son Asociativas:**

$$(A \cup (B \cup C)) = ((A \cup B) \cup C), \;\; (A \cap (B \cap C)) = ((A \cap B) \cap C),$$

$$(A \triangle (B \triangle C)) = ((A \triangle B) \triangle C).$$

* **Unión, Intersección y diferencia simétrica son Conmutativas:**

$$(A \cup B) = (B \cup A), \; (A \cap B) = (B \cap A), \; (A \triangle B) = (B \triangle A).$$

* **Idempotencia de $\cup$ y $\cap$, característica 2 de $\triangle$ y doble complementario:**

$$(A \cup A) = A, \; (A \cap A) = A, \; (A \triangle A) = \emptyset, (A^c)^c = A.$$

* **Elementos Universales:**

$$(A \cup X) = X, \; (A \cap \emptyset) = \emptyset.$$

Dados A, B, C subconjuntos de un conjunto X se tiene:

Dados A, B, C subconjuntos de un conjunto X se tiene:

* **Elementos Neutros:**

$$(A \cap X) = A,\ (A \cup \emptyset) = A,\ (A \bigtriangleup \emptyset) = A.$$

* **Propiedades Distributivas:**

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

$$A \cap (B \bigtriangleup C) = (A \cap B) \bigtriangleup (A \cap C).$$

* **Recuperando los Universales:**

$$(A \cap A^c) = \emptyset, (A \cup A^c) = X, (A \bigtriangleup A^c) = X.$$

* **"Leyes" de Morgan:**

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c,\ (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

2.3.4. Límites de la Especificación: Paradoja de Russell

Aunque no los detallaremos, puesto que estamos en el caso "naïve", debe asumirse que hay limitaciones en las fórmulas $\mathscr{S}$ usadas para especificar conjuntos. Una de las famosas paradojas muestra un sencillo ejemplo de especificación que no sirve.

Paradoja de Russell

Consideremos la clase Universal siguiente:

$$\mathscr{U} := \{x \ : \ x \text{ es conjunto}\},$$

es decir, la familia de todos los conjuntos. Entonces, $\mathscr{U}$ no es un conjunto.

DEM.– (Ejemplo de "reducción al absurdo) Siguiendo Especificación, el siguiente debería ser un conjunto:

$$\mathscr{V} := \{x \in \mathscr{U} \ : \ x \notin x\}.$$

Supogamos que $\mathscr{V}$ es un conjunto. Entonces, $\mathscr{V} \in \mathscr{U}$ (porque $\mathscr{U}$ contiene a todos los conjuntos) y quedaría dos opciones:

- Si $\mathscr{V} \notin \mathscr{V}$, entonces $\mathscr{V}$ satisface la especificación y tendríamos que $\mathscr{V} \in \mathscr{V}$.
- Si $\mathscr{V} \in \mathscr{V}$, entonces ha de satisfacer la condición descrita al especificar $\mathscr{V}$. Peroeso significa que $\mathscr{V} \notin \mathscr{V}$.

En conclusión la expresión ($\mathscr{V} \in \mathscr{V}$ no puede ser ni **V** ni **F**, contrariamente a la hipótesis sobre interpretación de que $x \in A$ ha de ser cierta o falsa. La única salida a esta interpretación es que $\mathscr{U}$ no sea conjunto. QED

- Si $\mathscr{V} \notin \mathscr{V}$, entonces $\mathscr{V}$ satisface la especificación y tendríamos que $\mathscr{V} \in \mathscr{V}$.
- Si $\mathscr{V} \in \mathscr{V}$, entonces ha de satisfacer la condición descrita al especificar $\mathscr{V}$. Peroeso significa que $\mathscr{V} \notin \mathscr{V}$.

En conclusión la expresión ($\mathscr{V} \in \mathscr{V}$ no puede ser ni **V** ni **F**, contrariamente a la hipótesis sobre interpretación de que $x \in A$ ha de ser cierta o falsa. La única salida a esta interpretación es que $\mathscr{U}$ no sea conjunto. QED

* **Obs 1.-** El argumento usado es un ejemplo primitivo de "reducción al absurdo" que no es otra cosa que el uso del contrarrecíproco.

- Si $\mathscr{V} \notin \mathscr{V}$, entonces $\mathscr{V}$ satisface la especificación y tendríamos que $\mathscr{V} \in \mathscr{V}$.
- Si $\mathscr{V} \in \mathscr{V}$, entonces ha de satisfacer la condición descrita al especificar $\mathscr{V}$. Peroeso significa que $\mathscr{V} \notin \mathscr{V}$.

En conclusión la expresión ($\mathscr{V} \in \mathscr{V}$ no puede ser ni **V** ni **F**, contrariamente a la hipótesis sobre interpretación de que $x \in A$ ha de ser cierta o falsa. La única salida a esta interpretación es que $\mathscr{U}$ no sea conjunto. QED

* **Obs 1.-** El argumento usado es un ejemplo primitivo de “reducción al absurdo” que no es otra cosa que el uso del contrarrecíproco.

* **Obs. 2.-** La “salida” a la Paradoja de Russell consistirá en poner más cuidado en las especificaciones $\mathscr{S}(x)$ que admitimos. En *Teoría de Conjuntos Naïve*, supondremos la validez de Especificación, bajo la frase de “poniendo cuidado con las especificaciones $\mathscr{S}(x)$ admisibles porque no todas valen”....

2.4. Partes de un Conjunto.

2.4.1. Existencia de Partes de un Conjunto.

Axioma de "Potencia".

Dada un conjunto X existe una clase $\mathscr{P}$ que contiene a todos los subconjuntos de X.

Axioma de "Potencia".

Dada un conjunto X existe una clase $\mathscr{P}$ que contiene a todos los subconjuntos de X.

Definición (**Partes de un Conjunto**)

Dado un conjunto X definiremos la clase de las partes de X como

$$\mathscr{P}(X) := \{A \in \mathscr{P} \ : \ A \subseteq X\}.$$

Axioma de "Potencia".

Dada un conjunto X existe una clase $\mathscr{P}$ que contiene a todos los subconjuntos de X.

Definición (**Partes de un Conjunto**)

Dado un conjunto X definiremos la clase de las partes de X como

$$\mathscr{P}(X) := \{A \in \mathscr{P} \ : \ A \subseteq X\}.$$

Proposición

Dado un conjunto X, la lase $\mathscr{P}(X)$ es estable por uniones, intersecciones, diferencia simétrica, o complementación. Es decir,dados $A, B \in \mathscr{P}(X)$ se tiene que:

$$A \cup B, A \cap B, A \triangle B, A \setminus B, A^c \in \mathscr{P}(X).$$

Dem.- Basta con observar que dados $A, B \in \mathscr{P}(X)$ los conjuntos descritos siguen siendo subconjuntos de X. QED

2.4.2. Familias de Subconjuntos.

Definición (**Familias de Subconjuntos**)

Se llama familia de subconjuntos de un conjunto X a todo subconjunto $\mathcal{F} \subseteq \mathscr{P}(X)$.

La especificación habitual de una familia de subconjuntos de un conjunto dado suele hacerse mediante subíndices y así suele escribirse

$$\{A_i \ : \ i \in I\} \subseteq \mathscr{P}(X),$$

para denotar la familia de subconjuntos de X indiciada por I.
A modo de ejemplo, uno podría elegir distintos tipos de conjuntos de índices como:

- $I := \{0, 1, \ldots, n\}$ y en este caso se admite escribir $\{A_0, A_1, \ldots, A_n\}$ en lugar de $\{A_i \ : \ i \in \{0, 1, \ldots n\}\}$.
- $I := \mathbb{N}$ en este caso conviene usar la notación estándar $\{A_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$, aunque se podría aceptar el abuso de lenguaje bajo la forma:

$$\{A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\}.$$

- ...

- En general se puede usar como conjunto de índices I a cualquier conjunto que se conzoca o se haya definido en algún lugar. Por ejemplo $I = \mathbb{R}$, $I = \mathbb{Z}$, $I = \mathbb{C}$, $I = \mathscr{M}_r(\mathbb{C})$,....

Definición (**Operaciones con familias de subconjuntos**)

- **Unión de familias:** *Dada una familia de subconjuntos de* X $\{A_i \ : \ i \in I\}$ *definimos su unión mediante:*

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \in X \ : \ \exists i \in I, \ x \in A_i\}.$$

- **Intersección de familias:** *Dada una familia de subconjuntos de* X $\{A_i \ : \ i \in I\}$ *definimos su intersección mediante:*

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x \in X \ : \ \forall i \in I, \ x \in A_i\}.$$

Nótese la "cercanía" entre $\vee$, $\cup$, $\exists$ de una parte, mientras que $\wedge$, $\cap$, $\forall$ formando otra "parte".

Nótese la "cercanía" entre $\vee$, $\cup$, $\exists$ de una parte, mientras que $\wedge$, $\cap$, $\forall$ formando otra "parte".

Proposición (**"Leyes" de Morgan generalizadas**)

Dada una familia de subconjuntos de X $\{A_i \,:\, i \in I\}$ *se verifica:*

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c, \quad \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c.$$

Dem.- Ejercicio para los alumnos. Qed

2.5. Producto Cartesiano.

Par ordenado frente a conjunto dado por extensión:

Definición (**Par ordenado**, Kuratowski)

Sean A y B dos conjuntos y sean $a \in A$ y $b \in B$. Llamaremos par ordenado al conjunto definido del modo siguiente:

$$(a, b) := \{a, \{a, b\}\}.$$

Obsérvense las diferencias entre $\{a, b\}$ y (a, b). Por ejemplo, $\{a, b\} = \{b, a\}$, mientras que $(a, b) = (b, a)$ si y solamente si $a = b$. De ahí la noción de "ordenado".

Definición (**Producto Cartesiano**)

Dados dos conjuntos A y B llamaremos producto cartesiano de ambos conjuntos al conjunto formado por los pares ordenados de elementos de A y B. Es decir, el conjunto siguiente:

$$A \times B := \{(a, b) \ : \ (a \in A) \wedge (b \in B)\}.$$

Proposición

Saen A, B, C, D conjuntos. Se tienen las igualdades y desigualdades siguientes:

1. *El producto cartesiano no es conmutativo. Es decir si $A \not B$ son dos conjuntos distintos*
$$A \times B \neq B \times A.$$
2. $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.
3. *No siempre es cierto que* $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$.
4. *Se verifica:*
$$(A \times C) \cup (B \times D) = ((A \setminus B) \times C) \cup ((B \setminus A) \times D) \cup ((A \cap B) \times (C \cup D)).$$
5. *Distributivas:*
$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C),$$
$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C),$$
$$A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C).$$

Proposición

Al Producto cartesiano es asociativo salvo la identificación siguiente(que forma parte de la clase de lo que llamaremos biyección más adelante):

$$\begin{array}{ccc} A \times (B \times C) & \longleftrightarrow & (A \times B) \times C \\ (a,(b,c)) := \{a,\{a,\{b,\{b,c\}\}\}\} & \longmapsto & ((a,b),c) = \{\{a,\{a,b\}\},\{\{a,\{a,b\}\},c\}\}. \end{array}$$

* **Notación:** Por ello, nos permitiremos escribir (a,b,c) en lugar de $((a.b),c)$ o $(a,(b,c))$.

Proposición

Al Producto cartesiano es asociativo salvo la identificación siguiente(que forma parte de la clase de lo que llamaremos biyección más adelante):

$$\begin{array}{ccc} A \times (B \times C) & \longleftrightarrow & (A \times B) \times C \\ (a,(b,c)) := \{a,\{a,\{b,\{b,c\}\}\}\} & \longmapsto & ((a,b),c) = \{\{a,\{a,b\}\},\{\{a,\{a,b\}\},c\}\}. \end{array}$$

* **Notación:** Por ello, nos permitiremos escribir (a,b,c) en lugar de $((a.b),c)$ o $(a,(b,c))$.

Definición (**Producto Cartesiano de una familia numerable de conjuntos**)

Dada una familia numerable de conjuntos $\{A_i \ : \ i \in \mathbb{N}\}$*, definimos:*

- $\prod_{i=0}^{0} A_i := A_0$
- $\prod_{i=0}^{1} A_i := A_0 \times A_1$ *(el porducto cartesiano formado por los pares ordenados)*
- *Para* $n \geq 2$, $\prod_{i=0}^{n} A_i := \left(\prod_{i=0}^{n-1} A_i\right) \times A_n$.

Para no hacer una notación compleja innecesariamente (con los muchos paréntesis) escribiremos los elementos de $\prod_{i=0}^{n} A_i$ mediante

$$(a_0, \ldots, a_n) := (\ldots((a_0, a_1), \ldots, a_{n-1}), a_n) \in \prod_{i=0}^{n} A_i.$$

Definición (Producto Cartesiano de un conjunto consigo mismo)

Dado un conjunto A, definimos:

- $A^0 := \{\lambda\}$, *donde λ es la "palabra vacía" y es la misma para cualquier conjunto.*
- $A^1 := A$ *que se denominan "palabras de longitud 1 sobre el alfabeto A.*
- *Para $n \geq 2$, $A^n := \left(A^{n-1}\right) \times A$, cuyos elementos se denominan palabras de longitud n sobre el alfabeto A.*

Definición (**Palabras, Lenguajes**)

Llamaremos conjunto de palabras sobre el alfabeto A al conjunto:

$$A^* := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n.$$

Y llamaremos lenguaje sobre el alfabeto A a cualquier $L \in \mathscr{P}(A^*)$ (es decir a cualquier subconjunto $L \subseteq A^*$.

***Ejemplos:**

- Uniendo al alfabeto latino $A := \{a, b, c, d, ...\}$ los acentos, definamos $A_1 := A \cup \{\hat{}, \grave{}, \acute{}\}$. Entonces, los siguientes son lenguajes

$$L_1 := \{x \in A_1^* \ : \ x \text{ es un texto de la gramática española}\} \subseteq A_1^*.$$

$$L_2 := \{x \in A_1^* \ : \ x \text{ es un texto de la gramática francesa}\} \subseteq A_1^*.$$

$$L_3 := \{x \in A_1^* \ : \ x \text{ es un texto de la gramática inglesa}\} \subseteq A_1^*.$$

Pero el siguiente no será un lenguaje sobre A_1:

$$L_4 := \{x \in A_1^* \ : \ x \text{ es un texto de la gramática alemana}\} \not\subseteq A_1^*.$$

*__Ejemplos (cont.):__

- Si Σ es el alfabeto del Cálculo Proposicional el lenguaje $\mathcal{F}$ de las fórmulas bien formadas es un lenguaje $L \subseteq \Sigma^*$, pero $L \neq \Sigma^*$.
- Cada número natural se puede representar mediante una palabra en $\{0,1\}^*$. Pero un número natural podrían tener muchas representaciones. Inventa un lenguaje que permita una representación única de los naturales y que permita escribir $\mathbb{N} \subseteq \{0,1\}^*$, con $\mathbb{N} \neq \{0,1\}^*$.

*__Terminología:__ Tomando $A = \mathbb{Z}$, $A = \mathbb{Q}$, $A = \mathbb{R}$ o $A = \mathbb{C}$,los alumnos están habituados a manejar palabras de longitud n en cada uno de esos alfabetos. En estos casos, la tradición mantiene el término "vector" (o lista de coordenadas) en lugar de "palabra" para designar a los objetos de $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$. En estos casos, cuando $n = 0$ la palabra vacía se representa mediante 0, escribiendo $\mathbb{Z}^0 = \mathbb{Q}^0 = \mathbb{R}^0 = \mathbb{C}^0 = \{0\}$. Tendremos que profundizar en grupos abelianos para entender de dónde viene.

*__Ejemplos (cont.):__

- Si Σ es el alfabeto del Cálculo Proposicional el lenguaje $\mathcal{F}$ de las fórmulas bien formadas es un lenguaje $L \subseteq \Sigma^*$, pero $L \neq \Sigma^*$.
- Cada número natural se puede representar mediante una palabra en $\{0,1\}^*$. Pero un número natural podrían tener muchas representaciones. Inventa un lenguaje que permita una representación única de los naturales y que permita escribir $\mathbb{N} \subseteq \{0,1\}^*$, con $\mathbb{N} \neq \{0,1\}^*$.

*__Terminología:__ Tomando $A = \mathbb{Z}$, $A = \mathbb{Q}$, $A = \mathbb{R}$ o $A = \mathbb{C}$,los alumnos están habituados a manejar palabras de longitud n en cada uno de esos alfabetos. En estos casos, la tradición mantiene el término "vector" (o lista de coordenadas) en lugar de "palabra" para designar a los objetos de $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$. En estos casos, cuando $n = 0$ la palabra vacía se representa mediante 0, escribiendo $\mathbb{Z}^0 = \mathbb{Q}^0 = \mathbb{R}^0 = \mathbb{C}^0 = \{0\}$. Tendremos que profundizar en grupos abelianos para entender de dónde viene.
En informática se llaman simplemente listas (y se corresponde al tipo abstracto de datos `list`).