Introducción al Lenguaje Matemático

Luis M. Pardo

Universidad de Cantabria

30 de octubre de 2018

Capítulo 1.- Introducción: El Lenguaje del Cálculo Proposicional

Luis M. Pardo

* La Matemática es la consecuencia ineludible de **la innata necesidad humana de conocer la "verdad inmutable"**...

* La Matemática no es ni la resolución de problemas de concurso (Olimpiadas) ni el concurso supremo para distinguir a los más inteligentes (Napoleón). Es un edificio (un poco excesivo en nuestros días) con **algunas verdades demostradas, muchas preguntas no respondidas y una obra colectiva de intercambio de ideas**.

* Las otras Ciencias (o pseudo-ciencias) intentan simular esa inmutabilidad para paliar sus propias inseguridades usando (en ocasiones de modo muy incompleto) la herramienta matemática. **No siempre con éxito.**

* La "verdad" es esquiva y difícil de alcanzar. Por eso la Matemática se armó de una serie de **herramientas básicas** a partir de las cuales levantar esa hiper-catedral gótica.

* **Una forma estructurada de presentar sus resultados (desde Euclides, el compilador, s. III adC):**

- **Abstracción:** Por encima de la causística o la acumulación de datos sin relación (o con mera relación estadística). A veces con la consecuencia de acumular abstracción sobre abstracción hasta llegar a cumbres difíciles de alcanzar a lo largo de una vida. No conviene desesperar...
- **Nociones precisas: Definición**...ejemplos, contraejemplos
- **Afirmaciones precisas (enunciados):**Clasificados en **Lema, Proposición, Teorema, Corolario.**
- **Demostración :** La herramienta esencial es la **Deducción** que debe ser entendible por otras personas formadas y pueden verificar/reproducir su correctitud.

1.1. Lenguajes Formales

* **Uso masivo del Lenguaje Formal.**

- Los lenguajes formales se usan en Matemáticas, Computación (Java, C++, Python,...), Biología (GATCU,..ADN, ARN,...), Lingüística.
- Difieren de los Lenguajes Naturales en su estabilidad en el tiempo, su relativa independencia al uso individual, priorizando el entendimiento colectivo y, sobre todo, en la precisión de su sintaxis, semántica y reglas deductivas.

* En los años 50 del pasado siglo, el famoso matemático y lingüista Noam Chomsky intentó **modelizar los lenguajes naturales (inglés, español, ruso, etc.) mediante su estructura como lenguaje formal.** Fracasó en sus propuestas (un tanto excesivas). A cambio dejó:

- Los fundamentos de los **Lenguajes de Programación** modernos y los Compiladores e Intérpetes (con su clasificación de lenguajes).
- Un movimiento literario **Oulipo**[1] en Francia cuyos resultados son extraordinariamente estéticos.

[1] R. Queneau, F. Le Lionnais, G. Perec, I. Calvino,...

1.2. Elementos Básicos de Lenguajes Formales: Sintaxis.
$\mathbb{N}$ intuitivo, Cálculo Proposicional

A diferencia de los lenguajes naturales, los lenguajes formales tienen Sintaxis "a priori":

Sintaxis

Elementos y Reglas que definen los objetos admisibles (o bien formados) del lenguaje:

- **Alfabeto:** Una familia finita[a] de símbolos.
- **Palabras:** "Listas" de símbolos del alfabeto.
- **Reglas Sintácticas:** reglas de construcción de algunas palabras que se consideran **bien formadas** para ese lenguaje formal.

[a] Aunque aún no hayamos definido "finito", admitamos este forma de hablar

- **Alfabeto Latino:** $\{a, b, c, d, e, \ldots, z\}$
  Ejemplos de "palabras": Cualquier subtexto de *El Quijote, Les Misérables, Ulysses,..*
- **Alfabeto Griego:** $\{\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \omega\}$.
  Ejemplos de "palabras": Cualquier subtexto de *'Ιλιάς, Θεογονία,...*
- **Alfabetos Cirílico, Hebreo, Árabe, Mandarín, Jeroglífico, ...**
- **El alfabeto de la "vida":** $\{G, A, T, C, U\}$...
- **Alfabeto ASCII:** Equivalente al teclado de un ordenador...listas de ocho dígitos sobre el alfabeto $\{0, 1\}$...

***Reglas Sintácticas:** Las propias de cada una de las lenguas. Obsérvese, por ejemplo, que el inglés, el francés, el español y el alemán esencialmente coinciden en alfabeto....pero sus Reglas sintácticas son distintas... **con un mismo alfabeto y un mismo conjunto de palabras, las reglas sintácticas distinguen las palabras admisibles de un lenguaje de las de otro.**

* L. Kronecker: *"Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk."*[2]

La Humanidad Comieza su historia con el alfabeto "digital": $\Sigma := \{I\}$.

Las palabras son repeticiones del símbolo I:

$$I, II, III, IIII, ...$$

Hay una palabra especial que sería la palabra que no tiene ningún símbolo: *La palabra vacía* que denotaremos por λ.

Definición (Números Naturales Intuitivos)

Los números naturales son todas las palabras escritas sobre un alfabeto unario. Representamos por $\mathbb{N}$ ese lenguaje y viene dado por:

$$\mathbb{N} := \{\lambda, I, II, III, IIII, ...\}.$$

[2] "Los números enteros nos fueron dados por Dios, el resto es obra Humana"

* Los Romanos no avanzan mucho: hacen sus cálculos con ese alfabeto...o variaciones

$$\text{Romanos} := \{I, V, X, LC, D, M\}.$$

* El "descubrimiento" de la palabra vacía (hoy lo identificamos con el 0 en el caso $\mathbb{N}$) no fue inmediato.
Cuando Anaxágoras llega a Atenas (hacia 483 a.C.)observa que los griegos desconocen el cero !.
Alumnos suyos como Sócrates, Pericles, Demócrito... no sienten vergüenza en reconocer que no saben multiplicar.

¿Dónde está la dificultad?

Parece fácil operar con:

$$
\begin{array}{rcccccc}
 & I & I & I & I & I & I \\
+ & & & I & I & I & I \\
\hline\hline
\end{array}
$$

Qué pasaría si...

$$
\begin{array}{rcccccc}
 & I & I & I & I & I & I \\
\times & & & I & I & I & I \\
\hline\hline
\end{array}
$$

O si...

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathrm{I} & \mathrm{I} & \mathrm{I} & \mathrm{I} & \mathrm{I} & \cdots & \mathrm{I} & \mathrm{I} & \mathrm{I} \\ \times & \mathrm{I} & \mathrm{I} & \mathrm{I} & \mathrm{I} & \cdots & \mathrm{I} & \mathrm{I} & \mathrm{I} \\ \hline\hline \end{array}$$

Pongamos 98 palotes arriba y 82 palotes abajo...
Necesitaríamos una superficie próxima al metro cuadrado

No quisiera imaginar si tenemos detectar "errores de cálculo" en esa superficie de 1 m^2.

$$\begin{array}{ccc} & 9 & 8 \\ \times & 8 & 2 \\ \hline\hline \end{array}$$

En la India tenían un sistema mucho más avanzado de representación de los números naturales:
Guarismos (traídos a Europa por quien nos trajo el Álgebra):

Abu Abdallah Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi

$$\Sigma := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

De niños sabíais: Los números naturales serían palabras sobre ese alfabeto.

¿Por qué ambas formalizaciones representan el mismo objeto?
Axiomas de Peano

El Cálculo Proposicional

Alfabeto

El alfabeto del Cálculo Proposicional es la familia dada por los objetos siguientes:

- **Constantes:** $\{0, 1\}$.
- **Variables:** $\{X_0, X_1, X_2, \ldots, ...\}$[a]
- **Conectivas:** $\{\lor, \land, \neg\}$ con los nombres siguientes:
  - $\lor$ se denomina **disyunción**
  - $\land$ se denomina **conjunción**
  - $\neg$ se denomina **negación**
- **Símbolos Auxiliares (paréntesis):** $\{(,)\}$

[a] La representación X_n es una abreviatura de $X[n]$ donde n es la lista unaria de n símbolos I y necesitamos los símbolos auxiliares [y].

A priori, se admite cualquier palabra sobre ese alfabeto:

$$)10X_3X_0 \lor \land)X_2($$

Reglas Sintácticas

- **Átomos:** Son átomos las constantes y las variables.
- **Fórmulas del Cálculo Proposicional:** Son fórmulas todos los átomos y todas aquellas fórmulas generables por las reglas siguientes:
  - Si α y β son fórmulas, también es fórmula:
  $$(\alpha \vee \beta).$$
  - Si α y β son fórmulas, también es fórmula:
  $$(\alpha \wedge \beta).$$
  - Si α es fórmula, también es fórmula:
  $$(\neg \alpha).$$

Para describir cualquier fórmula del Cálculo Proposicional bastan los símbolos del alfabeto ya descrito.
Pero a veces se usan abreviaturas como las siguientes:

Algunas Abreviaturas

Podemos usar las siguientes abreviaturas:

- **Implicación:** Se escribe $(\alpha \rightarrow \beta)$ en lugar de $((\neg\alpha) \vee \beta)$, para fórmulas α y β.
- **Equivalencia:** Se escribe $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ en lugar de $(((\neg\alpha) \vee \beta) \wedge (\alpha \vee (\neg\beta)))$, para fórmulas α y β[a].
- **Disyunción exclusiva (XOR):** Se escribe $(\alpha \oplus \beta)$ en lugar de $((\alpha \wedge (\neg\beta)) \vee (\beta \wedge (\neg\alpha)))$ para fórmulas α y β.
- **(Puerta) NAND:** (En Electrónica Digital) se escribe $NAND(\alpha, \beta)$ en lugar de $(\neg(\alpha \wedge \beta))$, para fórmulas α y β.
- **(Puerta) NOR:**(En Electrónica Digital) se escribe $NOR(\alpha, \beta)$ en ugar de $(\neg(\alpha \vee \beta))$ para fórmulas α y β.

[a]Nótese que equivalencia es una abreviatura de $((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\alpha \rightarrow \beta))$.

No todas las palabras sobre nuestro alfabeto son fórmulas.

* **Observación:** Las fórmulas del Cálculo Proposicional han sido definidas mediante la forma en que se generan. Debemos analizarlas...

Análisis Sintáctico del Cálculo Proposicional

1.2.3. Cálculo Proposicional, Árboles de Generación de Fórmulas (i)

* **Árbol (sintáctico) de Generación de fórmulas** Sea define mediante la siguiente regla recursiva:

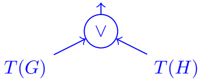
Sea Φ una fórmula y $T(\Phi)$ su árbol de formación.
– Si Φ es una constante $\Phi = C$ con C en $\{0, 1\}$, entonces su árbol $T(\Phi)$ tiene la forma:

$$T(\Phi) = C$$

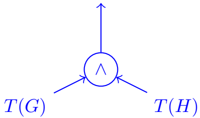
– Si Φ es una variable $\Phi = X_i$, entonces su árbol $T(\Phi)$ tiene la forma:

$$T(\Phi) = X_i.$$

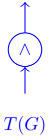
– Si $\Phi = (G \vee H)$ con G y H fórmulas, entonces su árbol $T(\Phi)$ tiene la forma:



– Si $\Phi = (G \wedge H)$ con G y H fórmulas, entonces su árbol $T(\Phi)$ tiene la forma:



– Si $\Phi = (\neg G)$ con G fórmula, entonces su árbol $T(\Phi)$ tiene la forma:



Definición (**Fórmula Bien Formada del Cálculo Proposicional**)

Una palabra sobre el alfabeto del Cálculo Proposicional es una fórmula bien formada si posee un árbol de generación como fórmula.

Problema (**Análisis Sintáctico**)

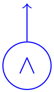
Diseña un algoritmo que realice la tarea siguiente:
Dada una palabra sobre el alfabeto del Cálculo Proposicional, decidir si la palabra es una fórmula o no[a] *construyendo su Árbol Sintáctico de Generación.*

[a] ¡La clave está en los paréntesis!

*** Ejemplo 1.-**

$$(X_1 \wedge (X_2 \vee (\neg X_3))).$$

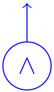
Tiene buena pinta como fómula bien formada. Y el árbol sería el siguiente:



*** Ejemplo 1.-**

$$(X_1 \wedge (X_2 \vee (\neg X_3))).$$

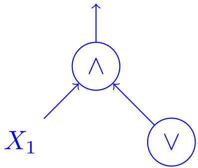
Tiene buena pinta como fómula bien formada. Y el árbol sería el siguiente:



* **Ejemplo 1.-**

$$(X_1 \wedge (X_2 \vee (\neg X_3))).$$

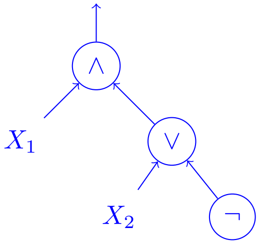
Tiene buena pinta como fómula bien formada. Y el árbol sería el siguiente:



* **Ejemplo 1.-**

$$(X_1 \wedge (X_2 \vee (\neg X_3))).$$

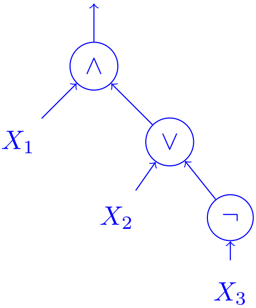
Tiene buena pinta como fómula bien formada. Y el árbol sería el siguiente:



* **Ejemplo 1.-**

$$(X_1 \wedge (X_2 \vee (\neg X_3))).$$

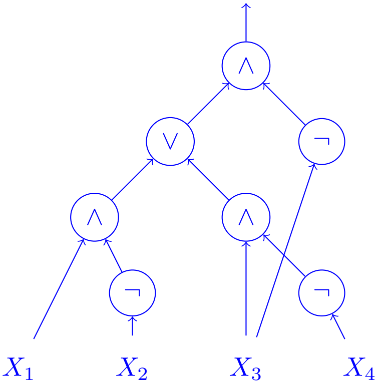
Tiene buena pinta como fómula bien formada. Y el árbol sería el siguiente:



* **Ejemplo 2.-** Elijamos un ejemplo un poco más lioso

$$(((X_1 \wedge (\neg X_2)) \vee (X_3 \wedge (\neg X_4))) \wedge (\neg X_3))$$

El árbol sería:



¡Los Paréntesis son esenciales!

Profundidad, Alcance, Antecesores y Sucesores

Definición (**Profundidad de una Conectiva**)

Sea Φ una fórmula del Cálculo Proposicional. Sea ν una concetiva que aparece en Φ (i.e. un objeto de la familia $\{\neg, \vee, \wedge\}$). Se denomina profundidad de la conectiva ν en Φ a la diferencia:

$$N_1 - N_2,$$

donde N_1 es el número de paréntesis abiertos ("izquierdos" o ( ) y N_2 es el número de paréntesis cerrados ("derechos" o)) que aperecen leyendo de izquierda a derecha en Φ hasta llegar a leer ν.

***Etapa 1 del Análisis Sintáctico en CP:** Hallar la profundidad de cada conectiva de las fórmulas.

* **Ejemplo 1.-**

$$(X_1 \wedge (X_2 \vee (\neg X_3))).$$

$$(X_1 \wedge\ ^{(1)}(X_2 \vee\ ^{(2)}(\neg\ ^{(3)} X_3))).$$

* **Ejemplo 2.-**

$$(((X_1 \wedge (\neg X_2)) \vee (X_3 \wedge (\neg X_4))) \wedge (\neg X_3))$$

$$(((X_1 \wedge\ ^{(3)}(\neg\ ^{(4)} X_2)) \vee\ ^{(2)}(X_3 \wedge\ ^{(3)}(\neg\ ^{(4)} X_4))) \wedge\ ^{(1)}(\neg\ ^{(2)} X_3))$$

Definición (Profundidad de una Fórmula)

Llamamos profundidad de una fórmula al máximo de las profundidades de sus conectivas. Decimos que los átomos tienen profundidad cero.

Alcance de una Conectiva

Sea Φ una fórmula y ν una conectiva que aparece en Φ. llamaremos alcance a las subfórmulas de Φ comprendidas entre los dos paréntesis determinados por ν. Es decir,

- Si $\nu = \vee$ y Φ tiene la forma

$$\Phi := (\ldots(\alpha \vee \beta)\ldots),$$

  decimos que el alcance son las subfórmulas α y β.

- Si $\nu = \wedge$ y Φ tiene la forma

$$\Phi := (\ldots(\alpha \wedge \beta)\ldots),$$

  decimos que el alcance son las subfórmulas α y β.

- Si $\nu = \neg$ y Φ tiene la forma

$$\Phi := (\ldots(\neg\alpha)\ldots),$$

  decimos que el alcance es la subfórmula α.

*** Ejemplo 1.-**

$$(X_1 \wedge (X_2 \vee (\neg X_3))).$$

Destaco sus paréntesis asociados:

$$(X_1 \wedge (X_2 \vee (\neg X_3))).$$

El alcance de $\vee$ son las subfórmulas:

$$X_2, (\neg X_3).$$

Si elijo otra conectiva y sus paréntesis:

$$(X_1 \wedge (X_2 \vee (\neg X_3))).$$

El alcance de $\neg$ es la subfórmula:

$$X_3.$$

* **Ejemplo 2.-** Si elijo la conectiva

$$(((X_1 \wedge (\neg X_2)) \vee (X_3 \wedge (\neg X_4))) \wedge (\neg X_3))$$

Destaquemos sus paréntesis:

$$(((X_1 \wedge (\neg X_2)) \vee (X_3 \wedge (\neg X_4))) \wedge (\neg X_3))$$

Luego el alcance de $\vee$ son las subfórmulas:

$$(X_1 \wedge (\neg X_2)), (X_3 \wedge (\neg X_4)).$$

Definición (**Antecesor de una conectiva en su alcance**)

Sea ν una conectiva en una fórmula Φ del Cálculo Proposicional. Sean α una fórmula en su alcance. Llamaremos antecesor de ν en α a:

- *Si $\alpha = C$ es un átomo, el antecesor de ν en α es el propio átomo:*

$$Ant(\nu, \alpha) = C.$$

- *Si α no es un átomo, el antecesor de ν en α es la conectiva de menor profundidad μ en α:*

$$Ant(\nu, \alpha) = \mu.$$

Diremos que ν es el sucesor de cada uno de sus antecesores.

***Observación:** Si α no es un átomo, y si ν tiene profundidad i en la fórmula original Φ, entonces su antecesor en α $Ant(\nu, \alpha)$ tiene que tener profundidad $i + 1$.

Algoritmo[3] de Análisis Sintáctico en C.P.[4]

INPUT: Una palabra Φ sobre el alfabeto del Cálculo Proposicional.

Calcular (y guardar) la Profundidad de cada una de las conectivas en Φ.

Hallar $\ell :=$ profundidad de Φ.

if $\ell = 0$, Φ es átomo o no es fórmula. OUTPUT: Φ o "NO ES Fórmula"

else asignar profundidad $\ell + 1$ a todas variables y constantes en Φ.

fi

$i := 1$

Para **la** conectiva ν de profundidad 1, **introducir un nodo** de la forma:

$\nu(1)$

Continua

[3]La palabra Algoritmo := Abu Abdallah Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi

[4]**Comentario:** Omitimos describir los casos de OUTPUT: ERROR para no oscurecer el algoritmo: Casos en los que un paso enfrenta una **inconsistencia**.

1.2.3. Cálculo Proposicional, Análisis Sintáctico, Algoritmo (ii)

while $i \leq \ell$ **do**

  Para cada nodo determinado por una conectiva $\nu(i)$ **do**

    Hallar su alcance y sus antecesores.

    Para cada antecesor μ de una conectiva $\nu(i)$ **do**:

      if μ es una conectiva, **introducir un nodo** de la forma:

$$\mu(i+1)$$

        else if $\mu := X$ es una variable o una constante, revisar si ya existe un nodo de la forma $X(\ell+1)$. **Si no existe añadirlo**.

      fi

    Añadir todas las aristas orientadas $\rightarrow$ conectando cada nodo antecesor con su sucesor.

  od

$i := i + 1$

return

Borrar las profunidades de todos los nodos.
OUTPUT: El Árbol de Generación de la Fórmula.

Analizar los Ejemplos:

* **Ejemplo 1.-** Con profundidades

$$(X_1 \wedge^{(1)} (X_2 \vee^{(2)} (\neg^{(3)} X_3))).$$

* **Ejemplo 2.-** Con profundidades

$$(((X_1 \wedge^{(3)} (\neg^{(4)} X_2)) \vee^{(2)} (X_3 \wedge^{(3)} (\neg^{(4)} X_4))) \wedge^{(1)} (\neg^{(2)} X_3))$$

1.3. Elementos Básicos de Lenguajes Formales: Semántica

* **Semántica:** Los mecanismos de asignación de significados a fin de determinar la **Verdad**.

* **Verdad:** La verdad es un valor **subjetivo**. No es admisible que la interpretación (y, por ende, la verdad o falsedad de una aseveración) carezca de reglas...En ese caso, caemos en las **Fake News**[5] y en la **Post-Truth**[6]. En Ciencia, y en especial en Matemáticas, ni Noticias Falsas ni Post-verdad son aceptables.

* **Interpretación Válida :** Reglas, normalmente recursivas o algorítmicas, que permiten interpretar aseveraciones escritas en un Lenguaje Formal, con orientación a la asignación de valores de Verdad o Falsedad.

* **Dominio:** La "clase" (como sinónimo de conjunto) que contiene a las constantes y donde las variables de una fórmula toman significado.

* **Tautología:** Fórmula de un lenguaje formal que es verdad para cualquier Intrepretación Válida.

---

[5] Afirmaciones falsas que, repetidas "1.000" veces, pretenden transformarse en verdaderas.

[6] Alteración o interpretación de los hechos que transforman un hecho cierto en un hecho dudoso o, inclus, directamente falso.

1.3.2. Semántica del Cálculo Proposicional

* **Dominio:** en el que serán interpretadas las variables es el formado por los símbolos **V** (Verdad) y **F** (Falsedad): $\{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$.
* Por simplicidad de la notación, se prefiere el uso de 1 en lugar de **V** y 0 en lugar de **F**.

* **Variables involucradas de una fórmula del C.P.:** Dada una fórmula Φ, llamaremos variables involucradas en Φ a cualesquiera de las variables X_k usadas para escribir Φ.
***Notación:** Escibiremos $\Phi(X_0, \ldots, X_n)$ para denotar una fórmula del Cálculo Proposicional Φ tal que en su escritura no se usa ninguna variable que no esté en la lista siguiente:

$$X_0, \ldots, X_n.$$

* **Observación:** Nótese que dadas dos fórmulas Φ y Θ, siempre podemos encontrar una lista de variables admisibles para ambas. Es decir, siempre hay un número natural $n \in \mathbb{N}$ tal que podemos escribir $\Phi(X_0, \ldots, X_n)$ y $\Theta(X_0, \ldots, X_n)$.

* **Interpretaciones Admisibles para una Fórmula del C. P.:** Dada una fórmula $\Phi(X_0, \ldots, X_n)$ llamaremos interpretación admisible a cualquier lista

$$\varepsilon := (\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n),$$

Interpretación de las constantes

Dada una interpretación cualquiera ε (de cualquier longitud) y dada una constante C, la interpretación de la constante en ε, que escribiremos como $C(\varepsilon)$, viene dada por las reglas siguientes:

- $1(\varepsilon) := 1$
- $0(\varepsilon) := 0$

Interpretación de las variables

Dada una interpretación cualquiera $\varepsilon = (\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n)$ y dada una variable X_k, diremos que

- Si $k > n$, entonces X_k no tiene interpretación en ε
- Si $0 \leq k \leq n$, entonces X_k posee interpretación en ε, que denotaremos mediante $X_k(\varepsilon)$ y viene dada mediante:

$$X_k(\varepsilon) := \varepsilon_k.$$

Interpretación a partir de disyunción

Dada una fórmula del C.P. $\Phi(X_0, \ldots, X_n)$ y una interpretación admisible cualquiera $\varepsilon := (\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n)$, supongamos que la conectiva de menor profundidad es una disyunción $\vee$. Es decir, supongamos que Φ tiene la forma:

$$\Phi(X_0, \ldots, X_n) := (\alpha(X_0, \ldots, X_n) \vee \beta(X_0, \ldots, X_n)) .$$

Entonces $\Phi(\varepsilon)$ queda determinado mediante la regla expuesta en la tabla:

$\alpha(\varepsilon)$	$\beta(\varepsilon)$	$\Phi(\varepsilon)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Es decir, si cualquiera de las interpretaciones $\alpha(\varepsilon)$ o $\beta(\varepsilon)$ es 1 (sin exlcusión entre ellas), entonces $\Phi(\varepsilon) = 1$[a]. En otro caso, $\Phi(\varepsilon) = 0$.

[a] De ahí la costumbre de "interpretar" $\vee$ como "o no exclusivo".

Interpretación a partir de conjunción

Dada una fórmula del C.P. $\Phi(X_0, \ldots, X_n)$ y una interpretación admisible cualquiera $\varepsilon := (\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n)$, supongamos que la conectiva de menor profundidad es una conjunción $\wedge$. Es decir, supongamos que Φ tiene la forma:

$$\Phi(X_0, \ldots, X_n) := (\alpha(X_0, \ldots, X_n) \wedge \beta(X_0, \ldots, X_n)).$$

Entonces $\Phi(\varepsilon)$ queda determinado mediante la regla expuesta en la tabla:

$\alpha(\varepsilon)$	$\beta(\varepsilon)$	$\Phi(\varepsilon)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Es decir, se necesita que tanto $\alpha(\varepsilon)$ como $\beta(\varepsilon)$ sean 1 (ambas), para tener $\Phi(\varepsilon) = 1$[a]. En otro caso, $\Phi(\varepsilon) = 0$.

[a]De ahí la costumbre de "interpretar" $\wedge$ como la conjunción copulativa "y".

Interpretación a partir de negación

Dada una fórmula del C.P. $\Phi(X_0, \ldots, X_n)$ y una interpretación admisible cualquiera $\varepsilon := (\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n)$, supongamos que la conectiva de menor profundidad es una negación $\neg$. Es decir, supongamos que Φ tiene la forma:

$$\Phi(X_0, \ldots, X_n) := (\neg\alpha(X_0, \ldots, X_n)).$$

Entonces $\Phi(\varepsilon)$ queda determinado mediante la regla expuesta en la tabla:

$\alpha(\varepsilon)$	$\Phi(\varepsilon)$
0	1
1	0

Es decir, $\Phi(\varepsilon) = 1$ cuando $\alpha(\varepsilon) = 0$ y $\Phi(\varepsilon) = 0$ cuando $\alpha(\varepsilon) = 1$[a].

[a]Veremos el significado de esta operación cuando identifiquemos $\{0, 1\}$ con el cuerpo primo $\mathbb{F}_2$.

Definición (**Tautología**)

Una fórmula del Cálculo Proposicional $\Phi(X_0, \ldots, X_n)$ *se dice tautología si para cualquier interpretación admisible* ε*, se tiene* $\Phi(\varepsilon) = 1$*.*

***Obs.-** Es verdadera para cualquier interpretación posible. La expresión "para cualquier interpretación" conduce a introducir el símbolo $\forall$, del que hablaremos más adelante como "para todo".

Definición (**Fórmula Satisfactible**)

Una fórmula del Cálculo Proposicional $\Phi(X_0, \ldots, X_n)$ *se dice satisfactible si para hay al menos una interpretación admisible* ε*, para la cual* $\Phi(\varepsilon) = 1$*.*

***Obs.-** Es verdadera para algunas interpretación posible. La expresión "hay al menos una interpretación" conduce a introducir el símbolo $\exists$, del que hablaremos más adelante como "existe (al menos uno)".
* **Obs.-** Nótese que las tautologías son satisfactibles, pero no se da el recíproco.

Definición (**Equivalencia Semántica**)

Dados dos fórmulas del Cálculo Proposicional Φ *y* Θ*, diremos que son semánticamente equivalentes si satisfacen la siguiente propiedad: Supongamos* $(X_0, \ldots, X_n)$ *una lista común de variables involucradas (i.e. supongamos* $\Phi(X_0, \ldots, X_n)$ *y* $\Theta(X_0, \ldots, X_n)$*), entonces para cualquier interpretación amdisible para ambas* $\varepsilon = (\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n)$ *se tiene:*

$$\Phi(\varepsilon) = \Theta(\varepsilon).$$

Escribiremos $\Phi \equiv \Theta$ *cuando* Φ *y* Θ *sean semánticamente equivalentes*[a]*.*

[a] Obsérvese que el símbolo $\equiv$ no es un símbolo del alfabeto (propio) del Cálculo Proposicional sino de su semántica.

1.3.3. Algoritmo de Tablas de Verdad de Fórmulas del Cálculo Proposicional

Tabla de Verdad de Una Fórmula del C.P.

Dada una fórmula del C.P. $\Phi(X_0, \ldots, X_n)$ llamaremos Tabla de Verdad de la fórmula Φ a una tabla con $n+2$ columnas, en la que las primeras $n+1$ columnas describen todas las posibles interpretaciones y la última columna expresa en valor $\Phi(\varepsilon)$ asociado a la interpretación indicada.

X_0	X_1	$\cdots$	X_n	$\Phi(\varepsilon)$
0	0	$\cdots$	0	$\Phi(0, \ldots, 0)$
0	0	$\cdots$	1	$\Phi(0, \ldots, 1)$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\Phi(\ldots)$
1	1	$\cdots$	1	$\Phi(1, \ldots, 1)$

Problema

¿Cómo rellenar una Tabla de Verdad?

Algoritmo de Evaluación de Fórmulas del C.P.

INPUT: Una fórmula $\Phi(X_0, \ldots, X_n)$ y una interpretación admisible $\varepsilon := (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$

Hallar el Árbol de generación de la Fórmula Φ. Sea ℓ su profundidad.

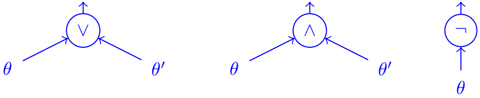
Intialize

- Reemplazar cada nodo de profundidad $\ell + 1$ por su interpretación a través de ε. (Es decir, si el nodo contiene la variable X_k reemplazar por $X_k(\varepsilon) = \varepsilon_k$. Si contiene una constante, dejarla tal y como esté.)
- $i := \ell$.

while $i \geq 1$ **do**

Para cada nodo de profundidad i proceder del modo siguiente:

Hallar sus antecesores, que serán de profundidad $i+1$, que tendrán alguna de las formas siguientes:



donde θ y θ' son valores en $\{0,1\}$.

Reemplazar las conectivas en los nodos (i.e. $\vee$, $\wedge$ o $\neg$) por el valor en $\{0,1\}$ que les corresponda conforme a las reglas descritas en la definición de valor semántico.

$i := i - 1$

return

OUTPUT: El valor semántico (en $\{0,1\}$) contenido en el nodo final de profundidad 1.

* **Disyunción:** $(X_i \vee X_j)$

X_i	X_j	$(X_i \vee X_j)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

* **Conjunción:** $(X_i \wedge X_j)$

X_i	X_j	$(X_i \wedge X_j)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

* **Negación:** $(\neg X_i)$

X_i	$(\neg X_i)$
0	1
1	0

* **Implicación:** $(X_i \rightarrow X_j)$ (recuérdese que es abreviatura de $((\neg X_i) \vee X_j)$

X_i	X_j	$(X_i \rightarrow X_j)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

* **Obs.-** Si la "hipótesis" (X_i) es falsa, cualquiera que sea la "tesis" (X_j), la implicación $(X_i \rightarrow X_j)$ es cierta (cosa distinta es que, en ese caso, el asunto tenga "sentido semático").

* **Equivalencia:** $(X_i \leftrightarrow X_j)$ (abreviatura de $((X_i \to X_j) \wedge (X_j \to X_i))$)

X_i	X_j	$(X_i \leftrightarrow X_j)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

* **Obs.-** Toma valor 1 sólo si ambas variables coinciden.

* **XOR:** $(X_i \oplus X_j)$ (abreviatura de $((X_i \wedge (\neg X_j)) \vee (X_j \wedge (\neg X_i)))$)

X_i	X_j	$(X_i \oplus X_j)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

* **Obs.-** Toma valor 1 cuando alguna de ellas los toma, pero no ambas...es el uso más común del languaje natural Español. **No es la disyunción**

* **Puerta NAND:** $NAND(X_i, X_j)$ (abreviatura de $(\neg(X_i \wedge X_j))$)

X_i	X_j	$NAND(X_i, X_j)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

* **Puerta NOR**(X_i, X_j) **:** $NOR(X_i, X_j)$ (abreviatura de $(\neg(X_i \vee X_j))$)

X_i	X_j	$NOR(X_i, X_j)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Hallar las Tablas de Verdad de las siguientes dos fórmulas:

1. $$(X_1 \wedge (X_2 \vee (\neg X_3))).$$

2. $$(((X_1 \wedge (\neg X_2)) \vee (X_3 \wedge (\neg X_4))) \wedge (\neg X_3)).$$

* **Ejemplo:** $(X_i \vee (\neg X_i))$ es tautología

X_i	$(X_i \vee (\neg X_i))$
0	1
1	1

* **Ejemplo:** $(X_i \wedge (\neg X_i))$ no es satisfactible.

X_i	$(X_i \wedge (\neg X_i))$
0	0
1	0

Proposición

Dadas dos fórmulas del Cálculo Proposicional Φ y Θ entonces Φ es semáticamente equivalente a Θ si y solamente si $(\Phi \leftrightarrow \Theta)$ es Tautología.

* **Contrarrecíproco:** La siguiente es una tautología:

$$((X_i \to X_j) \leftrightarrow ((\neg X_j) \to (\neg X_i)))$$

X_i	X_j	$((X_i \to X_j) \leftrightarrow ((\neg X_j) \to (\neg X_i)x))$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

1.4. Elementos Básicos de Lenguajes Formales: Deducción

Teoría Formal

Una Teoría Formal es la combinación de tres ingredientes:

1. **Un Lenguaje Formal:** Que contiene una definición de las fórmulas bien formadas (aseveraciones) a través de un Alfabeto y unas Reglas Sintánticas.
2. **Una Semántica:** Reglas que permiten asignar interpretaciones y valores de verdad o falsedad a sus aseveraciones (fórmulas).
3. **Unas Reglas de Inferencia (o Deducción):** Que permiten transformar unas fórmulas en otras usando Axiomas o Reglas Deductivas.

Cada campo de las Matemáticas (Álgebra, Geometría, Análisis Matemático, Topología,...) y sus subcampos, pretenden ajustarse a este modelo de Teoría. Y escribo "pretenden" porque, a veces, se "abusa del lenguaje" o se introducen teorías "incompletas" o "inseguras" para avanzar en el conocimiento.

Axiomas o Esquemas de Axiomas

Lista de Axiomas: Es una familia formada por algunas fórmulas de la Teoría Formal. Esas fórulas suelen ser presentadas en forma de esquemas de axiomas. Usaremos letras griegas $\alpha, \beta, \gamma, ..$ como variables de fórmulas.

- Un esquema de axiomas de un Lenguaje Formal $\mathscr{L}$ es una expresión $R(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ usando símbolos del alfabeto del lenguaje y "variables de fórmulas" $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de tal modo que para cada lista $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ de fórmulas bien formadas de $\mathscr{L}$, la expresión $R(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ obtenida sustituyendo las "variables de fórmula" α_i por las fórmulas Φ_i son fórmulas bien formadas del lenguaje.
- Un axioma es cada una de las fórmulas $R(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ obtenida de un esquema de axiomas.

Por ejemplo, en Cálculo Proposicional el siguiente es un Esquema de Axiomas, llamado **Eliminar Conjunción**:

$$((\alpha_1 \wedge \alpha_2) \rightarrow \alpha_1)$$

Se interpreta diciendo que si sustituyo α_1 y α_2 por cualquier fórmula del Cálculo Proposicional, la expresión resultante sigue siendo una fórmula que se llamará axioma. Por ejemplo,

- Sustituyendo α_1 por $(X_1 \wedge (\neg X_1))$ y α_2 por $(X_1 \vee (\neg X_2))$ obtengo u axioma del Cálculo Proposicional.

$$(((X_1 \wedge (\neg X_1)) \wedge (X_1 \vee (\neg X_2))) \rightarrow (X_1 \wedge (\neg X_1))),$$

- Haciendo otra sustitución α_1 por $(X_1 \wedge X_2)$ y α_2 por X_3 obtengo otro axioma del Cálculo Proposicional:

$$(((X_1 \wedge X_2) \wedge X_3) \rightarrow (X_1 \wedge X_2)).$$

Nótese que aunque las Teorías Formales suelen tener un número finito de esquemas de axiomas, la cantidad de posibles axiomas puede no ser finita.

Tomado de `http://en.wikipedia.org/wiki/Propositional_calculus`

Axioms

Name	Axiom Schema	Description
THEN-1	$\phi \to (\chi \to \phi)$	Add hypothesis χ, implication introduction
THEN-2	$(\phi \to (\chi \to \psi)) \to ((\phi \to \chi) \to (\phi \to \psi))$	Distribute hypothesis φ over implication
AND-1	$\phi \land \chi \to \phi$	Eliminate conjunction
AND-2	$\phi \land \chi \to \chi$	
AND-3	$\phi \to (\chi \to (\phi \land \chi))$	Introduce conjunction
OR-1	$\phi \to \phi \lor \chi$	Introduce disjunction
OR-2	$\chi \to \phi \lor \chi$	
OR-3	$(\phi \to \psi) \to ((\chi \to \psi) \to (\phi \lor \chi \to \psi))$	Eliminate disjunction
NOT-1	$(\phi \to \chi) \to ((\phi \to \neg\chi) \to \neg\phi)$	Introduce negation
NOT-2	$\phi \to (\neg\phi \to \chi)$	Eliminate negation
NOT-3	$\phi \lor \neg\phi$	Excluded middle, classical logic
IFF-1	$(\phi \leftrightarrow \chi) \to (\phi \to \chi)$	Eliminate equivalence
IFF-2	$(\phi \leftrightarrow \chi) \to (\chi \to \phi)$	
IFF-3	$(\phi \to \chi) \to ((\chi \to \phi) \to (\phi \leftrightarrow \chi))$	Introduce equivalence

* **Forma usual de las Reglas Deductivas:** La forma habitual es algo como lo siguiente:

$$\mathscr{R}(P_1, \ldots, P_t, Q) := \textbf{Si } P_1, P_2, \ldots, P_t, \textbf{ entonces } Q$$

Notacionalmente se usa una de las formas siguientes:

$$\mathscr{R}(P_1, \ldots, P_t, Q) := R_1, R_2, \ldots, R_t \vdash Q,$$

el símbolo $\vdash$ se lee como "se deduce" o "es alcanzable".
Usualmente, en Matemáticas, se prefiere la formulación siguiente de la misma regla:

$$\mathscr{R}(P_1, \ldots, P_t, Q) := (R_1 \wedge R_2 \wedge \cdots \wedge R_t) \Longrightarrow Q,$$

y el símbolo $\Longrightarrow$ se lee "implica".

Un ejemplo de Regla Deductiva es la siguiente:

Modus Ponens

Sea $\mathscr{T}$ una teoría formal que admite el símbolo $\rightarrow$. Entonces, para cualesquiera fórmulas de la teoría $\mathscr{T}$ Φ y Θ,

$$\textbf{Si } \Phi \text{ y } (\Phi \rightarrow \Theta), \textbf{ entonces } \Theta.$$

También lo podemos escribir como:

$$(\Phi \wedge (\Phi \rightarrow \Theta)) \Rightarrow \Theta.$$

Deducción o Demostración de una Teoría

Una deducción en una teoría formal $\mathscr{T}$ es una sucesión de fórmulas:

$$\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m.$$

de tal manera que cada fórmula Φ_k, $1 \leq k \leq m$ satisface:

- O bien Φ_k es un axioma de $\mathscr{T}$,
- O bien existe una Regla Deductiva e índices $i_1, \ldots, i_t \leq k-1$ tales que

$$\Phi_{i_1}, \ldots, \Phi_{i_t} \vdash \Phi_k.$$

Definición

Teorema *Un Teorema*[a] *de una teoría* $\mathscr{T}$ *es una fórmula sintácticamente correcta* Φ *tal que existe una demostración en la teoría* $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m$, *con* $\Phi_m = \Phi$.

[a] Los lemas, proposiciones y corolarios son “teoremas” de menor relevancia subjetiva.

Definición (**Implicación**)

Dada una teoría formal $\mathscr{T}$, y dadas dos fórmulas Φ y Θ, se dice que Θ es deducible desde Φ o que Φ implica Θ si existe una sucesión de fórmulas:

$$\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m.$$

verificando:

- $\Phi_0 = \Phi$,
- $\Phi_m = \Theta$,
- *Para cada k, con $1 \leq k \leq m$ se verifica:*
    - *O bien Φ_k es un axioma de $\mathscr{T}$,*
    - *O bien existe una Regla Deductiva e índices $i_1, \ldots, i_t \leq k-1$ tales que*

$$\Phi_{i_1}, \ldots, \Phi_{i_t} \vdash \Phi_k.$$

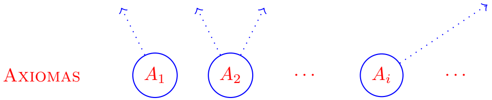
La expresión "Φ implica Θ" se denota mediante:

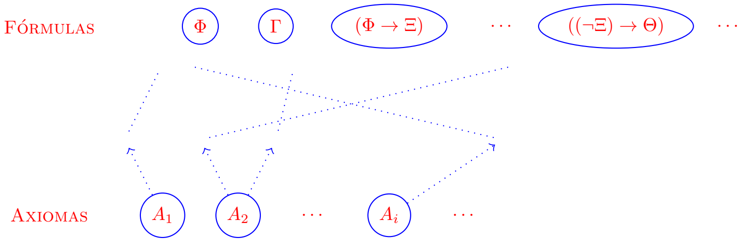
$$\Phi \Rightarrow \Theta$$

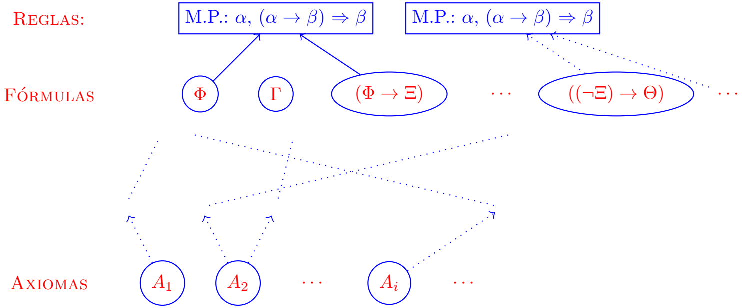
1.4.3. Una mala imagen, que vale menos que 1.000 palabras

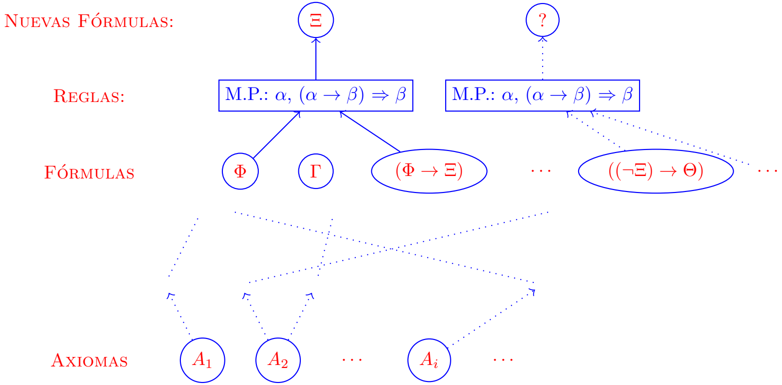
AXIOMAS A_1 A_2 $\cdots$ A_i $\cdots$

1.4.3. Una mala imagen, que vale menos que 1.000 palabras




FÓRMULAS
Φ
Γ
(Φ → Ξ)
· · ·
((¬Ξ) → Θ)
· · ·
AXIOMAS
A1
A2
· · ·
Ai
· · ·


REGLAS:
M.P.: α, $(\alpha \to \beta) \Rightarrow \beta$
M.P.: α, $(\alpha \to \beta) \Rightarrow \beta$
FÓRMULAS
Φ
Γ
$(\Phi \to \Xi)$
$\cdots$
$((\neg\Xi) \to \Theta)$
$\cdots$
AXIOMAS
A_1
A_2
$\cdots$
A_i
$\cdots$


NUEVAS FÓRMULAS:
Ξ
?
REGLAS:
M.P.: α, (α → β) ⇒ β
M.P.: α, (α → β) ⇒ β
FÓRMULAS
Φ
Γ
(Φ → Ξ)
· · ·
((¬Ξ) → Θ)
· · ·
AXIOMAS
A1
A2
· · ·
Ai
· · ·

Interpretaciones Válidas de una Teoría Formal

Dada una Teoría Formal $\mathscr{T}$ con Sintaxis y Reglas Deductivas, diremos que una interpretación semántica es válida si todos los Axiomas y todas las reglas deductivas son tautológicas en esa interpretación.

Proposición

El modelo de interpretación para el Cálculo Proposicional (basado en variables que toman valores en $\{0,1\}$ y las Tablas de Verdad exhibidas) satisface que:

- *Todos los Axiomas son tautologías.*
- *La Regla deductiva Modus Ponens genera tautologías.*

DEM.- Se trata de revisar uno a uno los esquemas de axiomas y Modus Ponens. Lo dejamos como ejercicio (un poco pesado, pero factible). QED

*__Teoría Inconsistente:__ Es una teoría $\mathscr{T}$ que contiene los símbolos $\{\vee, \wedge, \neg\}$ y los esquemas de axiomas y Reglas de Inferencia del Cálculo Proposicional, en la cual existe una fórmula Φ tal que

$$(\Phi \wedge (\neg\Phi)),$$

es Teorema. Se dice que es consistente si no existe tal fórmula.

* **Semántica de Alfred Tarski y continuadores:** Dada una Teoría Formal $\mathscr{T}$ un modelo o interpretación de Tarski es un conjunto a partir del cual se asignan valores de verdad (**V**) o falsedad (**F**), donde

- las variables toman valores,
- los símbolos no variables se corresponden con correspondencias sobre el dominio,
- los axiomas toman siempre el valor **T**,
- las reglas de inferencia toman el valor **T**

Tautologías en Teorías Formales

Una tautología de una teoría formal $\mathscr{T}$ es una fórmula Φ de esa teoría que toma el valor **T** para cualquier interpretación.

* **Ejemplo:** El mecanismo de asignación de significados para el Cálculo Proposicional es de Tarski, con dominio universal $\{0, 1\}$ y símbolos $\{\wedge, \vee, \neg\}$ y sus abreviaturas.
* **Teorías Sólidas:** Todo Teorema es Tautología.
* **Teorías Completas:** Toda Tautología es Teorema. **Incompleta** en caso contrario.

Teorema

El Cálculo Proposicional es una teoría consistente, sólida, completa y decidible[a].

[a] Existe un algoritmo que decide si una fórmula es o no Teorema. El término se escapa del contenido del curso

Corolario

En el Cálculo Proposicional, los Teoremas coinciden con las Tautologías. En particular, decidir si una fórmula posee demostración puede hacerse simplemente calculando su tabla de verdad y verificando que es tautología.

Corolario

En el Cálculo Proposicional, y dadas dos fórmulas Φ *y* Θ *son equivalentes:*

1. $(\Phi \to \Theta)$ *es una tautología,*
2. $(\Phi \to \Theta)$ *es un Teorema del C.P.,*
3. $\Phi \Rightarrow \Theta$ *(i.e.* Θ *es deducible desde* Φ *o,* Φ *implica* Θ*).*

Este último Corolario es esencial. De ahí que se use de modo intercambiable en Matemáticas bien el símbolo $\to$ o el símbolo $\Rightarrow$ (de hecho se usa solamente este último). Por la misma razón usaremos de manera intercambiable $\leftrightarrow$ y $\Leftrightarrow$.

* **Cláusulas:** A partir de la propiedad asociativa se pueden "olvidar" los paréntesis siempre que haya una cierta repetición de la misma conectiva. Hablamos de cláusulas como una fórmula que escribimos mediante:

$$(\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \alpha_3 \vee \cdots \vee \alpha_n),$$

en lugar de

$$((\cdots(\alpha_1 \vee \alpha_2) \vee \alpha_3) \vee \cdots \vee \alpha_n),$$

donde cada α_i es o bien una variable ($\alpha_i = X_{k(i)}$) o bien su negación ($\alpha_i = (\neg X_{k(i)})$).
Una situación similar se tiene al escribir:

$$(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \cdots \wedge \alpha_n),$$

en lugar de

$$((\cdots(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \wedge \alpha_3) \wedge \cdots \wedge \alpha_n),$$

Problema (**SAT**)

Dar un algoritmo[a] *que realice la siguiente tarea:*
Dada una lista finita de cláusulas $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, *decidir si la conjunión siguiente es satisfactible:*

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n.$$

[a]Si el algoritmo obtenido es eficiente, el premio es de 10^6 dólares US y la Gloria.

Problema (**TAUT**)

Dar un algoritmo[a] *que realice la siguiente tarea:*
Dada una fórmula φ, *decidir si es tautología.*

[a]Mismo premio y misma Gloria.