Cónicas y cuádricas

Una de las más importantes aplicaciones de la clasificación ortogonal de matrices simétricas, es la obtención de ecuaciones canónicas de cuádricas.

La cuestión se plantea de forma sencilla: Es claro para el lector que

$$\{(x,y,z)|\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1\}$$

es un elipsoide de centro el origen de coordenadas y semiejes de longitudes $2,3,4$.

Sin embargo, ¿cuál es el lugar geométrico

$$\{(x,y,z)|3x^2-2xy+4xz=5\}?$$

Puede comprobar el lector que la dificultad no reside en el número de *indeterminadas*, examinando el siguiente lugar geométrico:

$$\{(x,y)|3x^2+5y^2-4xy+2x-8y=7\}$$

En el presente párrafo se pretende dar cumplida respuesta a esta cuestión, a partir del análisis exclusivo de las matrices:

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -7 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

El resultado clave es:

Teorema. *Sea $X^tAX=0$ la ecuación de una cuádrica C del espacio afín real n-dimensional, en el sistema de referencia canónico $(O;e_1,\ldots,e_n)$; sea r el rango de (A_{00}) y $(d_1\geq\ldots\geq d_r)$ la familia de valores propios no nulos de A_{00}. Existe un sistema de referencia ortonormal en el que la ecuación de C es :*

- *Si $r=n$,*
$$d_1x_1^2+\cdots+d_nx_n^2=-\det(A)/\det(A_{00})$$
- *Si* $\operatorname{rang}(A)-2<r<n$
$$d_1x_1^2+\cdots+d_rx_r^2=-\frac{t}{d_1\cdots d_r}$$
donde t es el coeficiente de x^{n-r} en el polinomio característico de A, afectado del signo $-$ si r es par.
- *Si* $\operatorname{rang}(A)-2=r$,
$$d_1x_1^2+\cdots+d_rx_r^2=2\left(+\sqrt{\frac{-t}{d_1\cdots d_r}}\right)x_{r+1}$$
donde t es el coeficiente de x^{n-r-1} en el polinomio característico de A, afectado del signo $-$ si r es impar.

Su demostración es constructiva lo que da lugar al último porcedimiento del libro, proporcionando la ecuación canónica métrica de una cuádrica y, por supuesto, el nuevo sistema de referencia.

A partír de ésta, la ecuación reducida afín es sencilla de obtener, detallándose los 9 y 17 tipos afines de cónicas y cuádricas (tridimensionales).