NOMBRE: Número

Ecuaciones Diferenciales
2^0 Curso I. Industrial
Examen - 1 de Febrero de 2010

PRIMERA PARTE. 8 puntos

Observaciones: No utilizar calculadora ni apuntes. Todas las respuestas deben ser debidamente razonadas en el examen. Escribir de forma precisa la solución donde se pida, e indicar si se cambia de hoja en una resolución.

EJERCICIO 1

Resolver la ecuación diferencial

$$y' - y + \frac{cos(x)}{y} = 0$$

Encontrar la solución o soluciones explícitas con gráfica pasando por $(0, 1)$, indicando el intervalo de definición de dicha solución explícita si se puede.

SOLUCION GENERAL DE LA ECUACION

SOLUCION EXPLICITA pasando por $(0, 1)$

INTERVALO DE DEFINICION

EJERCICIO 2

Resolver la ecuación diferencial:

$$y' = -\frac{2x^2y}{x^3 + 3xy^2}$$

Encontrar la solución o soluciones con gráfica pasando por $(1, 1)$. Demostrar que existe una única solución explícita con gráfica pasando por dicho punto, definida en algún intervalo que contenga a $x_0 = 1$. Encontrar esta solución explícita o una aproximación de ella utilizando los tres primeros términos del desarrollo en serie de Taylor.

SOLUCION GENERAL DE LA ECUACION

SOLUCION EXPLICITA pasando por (1,1) o APROXIMACION

RAZONAR la existencia y unicidad de solución explícita

RESOLUCION

EJERCICIO 3

Resolver el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y_1' &= 2y_1 + y_2 \\ y_2' &= -y_1 + 4y_2 + \frac{e^{3x}}{x} \end{cases}$$

$$y_1(1) = -e^3, \quad y_2(1) = -e^3$$

SOLUCION GENERAL DEL SISTEMA HOMOGENEO

SOLUCION GENERAL DEL SISTEMA NO HOMOGENEO

SOLUCION PROBLEMA DE CAUCHY

INTERVALO DE DEFINICION DE LA SOLUCION

RESOLUCION

EJERCICIO 4

Resolver los problemas de Cauchy y contorno respectivamente ecuación

$$y'' + 2y' + 2y = xe^{-x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

$$y'' + 2y' + 2y = xe^{-x}, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}), \qquad y(0) = 0, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 0$$

SOLUCION GENERAL ECUACION

SOLUCION DEL PR. de Cauchy

SOLUCION DEL PR. de Contorno

RESOLUCION

EJERCICIO 5

Se considera la ecuación diferencial

$$y'' - 2y' - sen(x)y = 0$$

Buscar la solución en serie de potencias $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, encontrando el término general a_{n+2} en función de los anteriores. Indicar el valor de n a partir del cual tiene válidez. En particular, escribir los seis primeros términos del desarrollo en serie de la solución verificando las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

SOLUCION del P. de Cauchy, $y(x) \approx$

TERMINO GENERAL a_{n+2} y n

RESOLUCION

EJERCICIO 6

2). Aproximar la solución de la ecuación

$$y'' + 2y' - sen(y) = 0$$

para valores de y cercanos a $y = -\pi$

SOLUCIÓN APROXIMADA

RESOLUCION y RAZONAMIENTOS

Ecuaciones Diferenciales
Formulario

-Método de variación de parámetros: cálculo de soluciones particulares

- E.D.O. de primer orden: $k(x) = \int q(x)\, \exp(\int p(x)dx)\, dx$

- E.D.O. de segundo orden:

$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)}dx \quad , \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)}dx.$$

- Sistemas de E.D.O.: $\bar{k}(x) = \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)dx)$

-Reducción de orden para E.D.O. de segundo orden:

$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)dx)}{y_1(x)^2}dx$$

- Método de coeficientes indeterminados cálculo de soluciones particulares:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}$
- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ ó $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$,
  se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + x^s Q_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

donde p_k, P_k, Q_k son polinomios de grado k,
$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico, $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad n_i.

-Método de Euler para el problema $\bar{y}' = \bar{F}(t, \bar{y})$, $\bar{y}(t_0) = \bar{y}_0$:

$$t_{i+1} = t_i + h\,, \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{F}(t_i, \bar{y}_i)$$

-Función de Green:

$$G(x,\zeta) = \begin{cases} C\varphi_1(x)\varphi_2(\zeta), & \text{si } x \in [a,\zeta] \\ C\varphi_1(\zeta)\varphi_2(x), & \text{si } x \in [\zeta, b] \end{cases} \quad , \text{ con } C = \frac{1}{p(x)W[\varphi_1,\varphi_2](x)}$$

-Coeficientes de Fourier:

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\phi_k(x)\,dx}{\int_a^b \phi_k(x)^2\,dx}$$

Relaciones trigonométricas: $2\sin a\,\sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$

$$2\sin a\,\cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)\,, \quad 2\cos a\,\cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$

-Angulo α de corte de dos rectas de pendientes m_1 y m_2: $\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$

NOMBRE: Número

Ecuaciones Diferenciales
2^0 Curso I. Industrial
Examen - Septiembre de 2010

EJERCICIO 1

1.1 Se considera α una constante cualquiera (en caso de dudas tomar $\alpha = 5$) la ecuación diferencial

$$y' + \frac{\alpha}{2}y + \frac{sen(x)}{y} = 0$$

1.- Resolver en función de α. Para el valor de $\alpha = 0$ escribir la solución explícita con gráfica pasando por $(0,1)$ así como el intervalo de definición de la solución.

SOLUCIÓN general en función de α

SOLUCIÓN para $\alpha = 0$

INTERVALO

RESOLUCION

1.2.- Tomando $\alpha = 0$.

a) Escribir los puntos del plano donde el campo de direcciones no está definido

b). Escribir los puntos del plano donde no se tiene garantizado que exista una solución única explícita pasando por ellos.

c). Escribir las isoclinas para las pendientes $k = 0$, $k = -2$ y $k = 1/2$, $k = \infty$. Dibujar dichas isoclinas con la correspondiente dirección del campo.

PUNTOS a)

PUNTOS b)

ISOCLINAS

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS , DIBUJO

EJERCICIO 2

Escribir la solución general que modela los desplazamientos de una viga sometida a una carga externa $p(x) = cos(x)$

$$EIy^{(4)} - Ty'' = cos(x)$$

dependiendo de las constantes de rigidez a flexión EI y esfuerzo axil $EI > 0$, $T > 0$

SOLUCION GENERAL EC. HOMOGENEA

SOLUCION GENERAL EC. NO HOMOGENEA

RESOLUCION

EJERCICIO 3
Resolver la ecuación

$$(2x+1)y'' + (2x-1)y' - 2y = (2x+1)^2$$

sabiendo que una solución de la ecuación homogénea asociada es $e^{\alpha x}$ para alguna constante α. Indicar en qué intervalo o intervalos se resuelve la ecuación diferencial

SOLUCION GENERAL EC. HOMOGENEA

SOLUCION GENERAL EC. NO HOMOGENEA

INTERVALOS

RESOLUCION

EJERCICIO 4

Resolver la ecuación

$$y'' - \frac{1}{1+x^2}y = 0$$

mediante el desarrollo en serie de potencias de la solución. Encontrar el término general en función de lo anteriores y dar los ocho primeros términos del desarrollo de la solución del problema de Cauchy $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

SOLUCION GENERAL EC.

TERMINO GENERAL

SOLUCION PROBLEMA DE CAUCHY

DEMOSTRACION

EJERCICIO 5

Resolver el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y_1' &= 4y_1 + 5y_2 + e^x \\ y_2' &= -2y_1 - 2y_2 \end{cases}$$

$$y_1(0) = 3, \quad y_2(0) = -2$$

SOLUCION GENERAL DEL SISTEMA HOMOGENEO

SOLUCION GENERAL DEL SISTEMA NO HOMOGENEO

SOLUCION PROBLEMA DE CAUCHY

--

RESOLUCION

Ecuaciones Diferenciales
Formulario

-Método de variación de parámetros: cálculo de soluciones particulares

- E.D.O. de primer orden: $k(x) = \int q(x)\, \exp(\int p(x)dx)\, dx$

- E.D.O. de segundo orden:

$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx \quad , \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx.$$

- Sistemas de E.D.O.: $\bar{k}(x) = \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)dx)$

-Reducción de orden para E.D.O. de segundo orden:

$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)dx)}{y_1(x)^2} dx$$

- Método de coeficientes indeterminados cálculo de soluciones particulares:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}$
- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ ó $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$,
  se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + x^s Q_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

donde p_k, P_k, Q_k son polinomios de grado k,
$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico, $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad n_i.

-Método de Euler para el problema $\bar{y}' = \bar{F}(t, \bar{y})$, $\bar{y}(t_0) = \bar{y}_0$:

$$t_{i+1} = t_i + h\,, \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{F}(t_i, \bar{y}_i)$$

-Función de Green:

$$G(x,\zeta) = \begin{cases} C\varphi_1(x)\varphi_2(\zeta), & \text{si } x \in [a,\zeta] \\ C\varphi_1(\zeta)\varphi_2(x), & \text{si } x \in [\zeta, b] \end{cases} \quad , \text{ con } C = \frac{1}{p(x)W[\varphi_1, \varphi_2](x)}$$

-Coeficientes de Fourier:

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\phi_k(x)\, dx}{\int_a^b \phi_k(x)^2\, dx}$$

Relaciones trigonométricas: $2\sin a\, \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$

$$2\sin a\, \cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)\,, \quad 2\cos a\, \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$

-Angulo α de corte de dos rectas de pendientes m_1 y m_2: $\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$