NOMBRE...Número.........

Ecuaciones Diferenciales y Métodos Numéricos
3^{er} Curso I$_\blacktriangledown$ Caminos. Ecuaciones Diferenciales
Examen de Febrero. Curso 09-10

Observaciones: Escribir exactamente la solución donde se pide. Toda respuesta debe estar debidamente razonada en las hojas adjuntas. Indicar claramente si se cambia de hoja en una demostración. No utilizar calculadora ni apuntes.

EJERCICIO 1
Se considera la ecuación en derivadas parciales

$$u_{xx} + \frac{1}{x}u_x + \frac{1}{x^2}u_{yy} = 0$$

Encontrar las ecuaciones diferenciales ordinarias a las que se llega por separación de variables. Resolverlas para el valor de la constante que aparezca $\lambda = 2$. Para este valor de λ, indicar las soluciones de la ecuación en derivadas parciales que están acotadas para x tendiendo a cero, $x \neq 0$.

ECUACION en x y su SOLUCION para $\lambda = 2$

ECUACION en y y su SOLUCION para $\lambda = 2$

SOLUCIONES ACOTADAS

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 2

Se considera el problema que modela las vibraciones de una cuerda de longitud infinita

$$u_{tt} - 25u_{xx} = 0, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad t > 0$$

$$u(x,0) = f(x), \quad x \in (-\infty, \infty)$$

$$u_t(x,0) = g(x), \quad x \in (-\infty, \infty)$$

Tomando $g = 0$ y $f(x)$ definida como $f(x) = x^2 - \pi^2$, si $x \in (-\pi, \pi)$, $f(x) = 0$ fuera de este intervalo, encontrar el tiempo t^* en el que el punto $x^* = 1/2$ deja de vibrar. Dar t^* en función de π

$t^* =$...........

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 3

Resolver el problema de contorno mixto para la ecuación de Laplace:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad x \in (0,2), \quad y \in (0,2)$$

$$u(0,y) = 0, \quad u_x(2,y) = 0, \quad y \in (0,2)$$

$$u_y(x,0) = 1, \quad u(x,2) = sin(\frac{\pi x}{4}), \qquad x \in (0,2)$$

Escribir claramente el problema de valores propios al que se llega, los valores propios y las funciones propias encontrados, los desarrollos en serie de Fourier utilizados y la solución. En particular escribir los valores de los coeficientes quintos de los desarrollos en serie de Fourier de los datos y los de la solución (relativos al quinto valor propio).

PROBLEMA DE VALORES PROPIOS

VALORES PROPIOS Y FUNCIONES PROPIAS

DESARROLLOS EN SERIE

SOLUCION

COEFICIENTES correspondientes al quinto valor propio:

Ecuaciones Diferenciales
Formulario

-Método de variación de parámetros: cálculo de soluciones particulares

- E.D.O. de primer orden: $k(x) = \int q(x)\ \exp(\int p(x)dx)\, dx$

- E.D.O. de segundo orden:

$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx \quad , \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx.$$

- Sistemas de E.D.O.: $\bar{k}(x) = \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)dx)$

-Reducción de orden para E.D.O. de segundo orden:

$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)dx)}{y_1(x)^2} dx$$

- Método de coeficientes indeterminados cálculo de soluciones particulares:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}$
- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ ó $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$,
  se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + x^s Q_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

donde p_k, P_k, Q_k son polinomios de grado k,
$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico, $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad n_i.
-Método de Euler para el problema $\bar{y}' = \bar{F}(t, \bar{y})$, $\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0$:

$$x_{i+1} = x_i + h\,, \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{F}(t_i, \bar{y}_i)$$

-Método de Elementos Finitos:

$$a_{ij} = -\int_a^b p(x)\varphi_i'(x)\varphi_j'(x)\, dx + \int_a^b q(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\, dx$$

-Coeficientes de Fourier:

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\phi_k(x)s(x)\, dx}{\int_a^b \phi_k(x)^2 s(x)\, dx}$$

Relaciones trigonométricas: $2\sin a\ \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$

$$2\sin a\ \cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)\,, \quad 2\cos a\ \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$

NOMBRE..Número.........

Ecuaciones Diferenciales y Métodos Numéricos
3^{er} Curso I$_\blacktriangledown$ Caminos. Ecuaciones Diferenciales
Examen de Septiembre. Curso 09-10

Observaciones: Escribir exactamente la solución donde se pide. Toda respuesta debe estar debidamente razonada en las hojas adjuntas. Indicar claramente si se cambia de hoja en una demostración. No utilizar calculadora ni apuntes.

Se considera el problema de valores propios

$$(PVP) \quad y'' + \lambda y = 0, \quad x \in (0, \pi)$$
$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$$

resuelto en clase, con valores propios $\{k^2\}_{k=1}^{\infty}$ y funciones propias $\{sin(kx)\}_{k=1}^{\infty}$.

EJERCICIO 1

Escribir qué problemas de los planteados a continuación tienen solución única y encontrarla si se puede.

1.1).

$$y'' - 7^2 y = 2, \quad x \in (0, \pi)$$
$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$$

SOLUCION O SOLUCIONES (táchese lo que no proceda)

1.2).

$$y'' + 8^2 y = 2, \quad x \in (0, \pi)$$
$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$$

SOLUCION O SOLUCIONES(táchese lo que no proceda)

1.3).

$$y'' + 7^2 y = 2, \quad x \in (0, \pi)$$
$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$$

SOLUCION O SOLUCIONES (táchese lo que no proceda)

EJERCICIO 2

Supuesto que ν es una constante que no es un valor propio del problema (PVP), se considera

$$y'' + \nu y = 2, \quad x \in (0, \pi)$$
$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$$

Escribir el desarrollo en serie de Fourier de la función $f(x) = 2$ en términos de las funciones propias dadas y en encontrar el desarrollo en serie de la solución $y(x)$ ($y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k sin(kx)$ ó $y(x) \approx \sum_{k=1}^{N} c_k sin(kx)$, para cualquier N) dependiendo del parámetro ν. En particular, desarrollo de $f(x) = 2$ y los coeficientes que se piden
de y(x)

$f(x) \approx$ ....

$y(x) =$ ....

$c_7 =$ .... $c_8 =$ ....

Supuesto que $\nu = 7^2$, escribir el desarrollo en serie de la solución si existe

$y(x) =$ ....

Supuesto que $\nu = 8^2$, escribir el desarrollo en serie de la solución si existe

$y(x) =$ ....

EJERCICIO 3

Supuesto que ν es una constante que no es un valor propio del problema (PVP), se considera

$$y'' + \nu y = 2, \quad x \in (0, \pi)$$
$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$$

considerar la aproximación de la solución mediante los N primeros términos de la base de funciones dada: $y_N(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k \sin(kx)$ (se puede tomar $N = 10$). Encontrar la matriz del sistema (dependiendo de ν), el término independiente y resolver. En particular, escribir claramente

$a_{7,7} =$ .... $a_{7,8} =$ ....

$c_7 =$ .... $c_8 =$ ....

$y_{10}(x) =$ ....

Supuesto que $\nu = 7^2$ escribir c_7 si se puede encontrar

$c_7 =$ ....

Supuesto que $\nu = 8^2$, escribir c_8 si se puede encontrar

$c_8 =$ ....

EJERCICIO 4

Resolver el problema de contorno mixto para la ecuación de Laplace:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad x \in (0, \pi), \quad y \in (0, \pi)$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(\pi, y) = 0, \quad y \in (0, \pi)$$

$$u_y(x, 0) = f(x), \quad u(x, \pi) = g(x) \qquad x \in (0, \pi)$$

Resolver para $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = \sin(x)$ y para $f(x) = 2$, $g(x) = \sin(x)$

SOLUCIÓN PARA $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = \sin(x)$

SOLUCIÓN PARA $f(x) = 2$, $g(x) = \sin(x)$

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS:

Ecuaciones Diferenciales
Formulario

-Método de variación de parámetros: cálculo de soluciones particulares

- E.D.O. de primer orden: $k(x) = \int q(x)\, \exp(\int p(x)dx)\, dx$

- E.D.O. de segundo orden:

$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx \quad , \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx.$$

- Sistemas de E.D.O.: $\bar{k}(x) = \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)dx)$

-Reducción de orden para E.D.O. de segundo orden:

$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)dx)}{y_1(x)^2} dx$$

- Método de coeficientes indeterminados cálculo de soluciones particulares:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}$
- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ ó $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$,
  se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + x^s Q_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

donde p_k, P_k, Q_k son polinomios de grado k,
$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico, $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad n_i.

-Método de Euler para el problema $\bar{y}' = \bar{F}(t, \bar{y})$, $\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0$:

$$x_{i+1} = x_i + h\,, \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{F}(t_i, \bar{y}_i)$$

-Método de Elementos Finitos:

$$a_{ij} = -\int_a^b p(x)\varphi_i'(x)\varphi_j'(x)\, dx + \int_a^b q(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\, dx$$

-Coeficientes de Fourier:

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\phi_k(x)s(x)\, dx}{\int_a^b \phi_k(x)^2 s(x)\, dx}$$

Relaciones trigonométricas: $2\sin a\, \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$

$$2\sin a\, \cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)\,, \quad 2\cos a\, \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$