Problema de contorno: Formulación variacional

Dado un problema de contorno regular:

$$\textbf{(PC)} \left\{ \begin{array}{rcl} (p(x)y')' + q(x)y & = & r(x)\,, \quad x \in (a,b), \\ y(a) = 0 & , & y(b) = 0\,, \end{array} \right.$$

$p(x), p'(x), q(x), r(x)$ funciones continuas en $[a,b]$,
$p(x) > 0\,, \forall x \in [a,b]$, $-\infty < a < b < \infty$,

Admite una **formulación variacional** o **formulación débil** equivalente:

Encontrar $y(x)$ verificando $y(a) = y(b) = 0$ y

$$\textbf{(FV)} \quad -\int_a^b p(x)y'(x)\varphi'(x)dx + \int_a^b q(x)y(x)\varphi(x)dx = \int_a^b r(x)\varphi(x)dx$$

$\forall\varphi$ continua en $[a,b]$/ φ' continua a trozos en $[a,b]$, $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$.

- La solución de (PC) es solución de (FV)

- La solución de (FV) regular es solución de (PC)

- Para condiciones de contorno más generales:

$$y'(a) = \alpha y(a), \quad y'(b) = \beta y(b)$$

cambia (FV):

$$-\int_a^b p(x)y'(x)\varphi'(x)dx - p(a)y'(a)\varphi(a) + p(b)y'(b)\varphi(b) +$$

$$\int_a^b q(x)y(x)\varphi(x)dx = \int_a^b r(x)\varphi(x)dx$$

$\forall\varphi$ continua en $[a,b]$/ φ' continua a trozos en $[a,b]$.

Método de Galerkin:

Dadas las funciones $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^N$ suficientemente regulares tal que $\varphi_i(a) = \varphi_i(b) = 0$,

Buscar la aproximación de la solución $y(x)$ de (PC):

$$y_N(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i \varphi_i(x)$$

para ciertas constantes c_i a determinar tales que

$$\int_a^b [(p(x)y_N')' + q(x)y_N - r(x)]\varphi_i(x)\, dx = 0,\ \forall i = 1, 2, \cdots, N$$

La determinación de los coeficientes c_i nos lleva a la resolución de un sistema de ecuaciones para una matriz simétrica:

$$A\bar{c} = \bar{f}$$

$$A = (a_{i,j})_{i,j=1,2,\cdots,N},\ \bar{c} = (c_1, c_2, \cdots, c_N)^T,\ \bar{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_N)^T$$

$$a_{i,j} = -\int_a^b p(x)\varphi_i'(x)\varphi_j'(x)\, dx + \int_a^b q(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\, dx$$

$$f_i = \int_a^b r(x)\varphi_i(x)\, dx$$

- Necesidad de estimar el error $|y(x) - y_N(x)|$ para N grande

- Necesidad de integraciones numéricas

- Necesidad de resolver numéricamente un sistema con muchas ecuaciones

- Necesidad de una base $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ adecuada de funciones para reducir cálculos numéricos

Método de los Elementos Finitos:

Tomar como funciones de base las funciones lineales a trozos, $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$, asociadas a los nodos de la partición en $[a,b]$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots x_N < x_{N+1} = b$$

$$x_i = i * h + a, \quad h = \frac{b-a}{N+1}$$

$\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ **funciones de base de elementos finitos**

$\{\varphi_i\}_{i=1}^N$, φ_i polinomio de grado 1 en $[x_j, x_{j+1}]$

$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$, $i = 1, 2, \cdots, N$, $j = 0, 1, 2, \cdots, N+1$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{h} & si \quad x \in [x_{i-1}, x_i] \\ -\frac{x-x_{i+1}}{h} & si \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & si \quad x > x_{i+1} \text{ o } x < x_{i-1} \end{cases}$$

- La matriz A es tridiagonal: $a_{i,j} = 0$ si $|i-j| > 1$

- La matriz A es simétrica: $a_{i,j} = a_{j,i}$

- Integraciones sobre cada segemento $[x_j, x_{j+1}]$

- Integrales afectando a φ_i no nulas en $[x_{i-1}, x_{i+1}]$.

- La resolución del sistema $A\bar{c} = \bar{f}$ nos da $c_i = y_N(x_i)$: la aproximación de la solución exacta de (PC) en los puntos de la partición $y(x_i)$.

- - Error, supuesto $q(x)$; $r(x)$ continuas en $[0,1]$, para la ecuación $y'' + q(x)y = r(x)$, $x \in (0,1)$:

$$|y(x_i) - c_i| \leq Ch \,, \forall i = 1, 2, \cdots, N$$

Método de los Elementos Finitos: fórmulas

Para $q(x) \leq 0$, se considera el problema:

$$y'' + q(x)y = r(x), \quad x \in (0,1),$$

$$y(0) = 0,\, y(1) = 0,$$

$$\textbf{(FV)} \quad -\int_0^1 y'(x)\varphi'(x)dx + \int_0^1 q(x)y(x)\varphi(x)dx = \int_0^1 r(x)\varphi(x)dx$$

φ continua en $[0,1]$/ φ' continua a trozos en $[0,1]$, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$

El método de elementos finitos:

$$y(x) \approx y_N(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i\varphi_i(x)\,, \varphi_i(0) = \varphi_i(1) = 0$$

$$\text{Resolución del sistema:} \qquad A\bar{c} = \bar{f}$$

$$A = (a_{i,j})_{i,j=1,2,\cdots,N},\; \bar{c} = (c_1, c_2, \cdots, c_N)^T\,, \bar{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_N)^T$$

$$a_{i,j} = -\int_a^b \varphi_i'(x)\varphi_j'(x)\,dx + \int_a^b q(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx$$

$$f_i = \int_a^b r(x)\varphi_i(x)\,dx$$

Las integraciones nos llevan a

$$a_{i,i} = \frac{1}{h^2}(-2h + Q_i + R_i), \quad i = 1, 2, \cdots, N\,,$$

$$a_{i,i+1} = \frac{1}{h^2}(h - S_{i+1}), \quad i = 1, 2, \cdots, N-1\,,$$

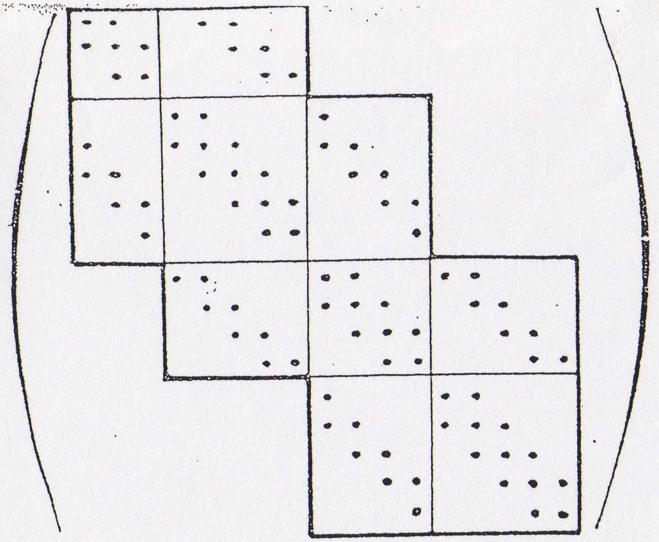
$$a_{i,i-1} = \frac{1}{h^2}(h - S_i), \quad i = 2, 3, \cdots, N\,,$$

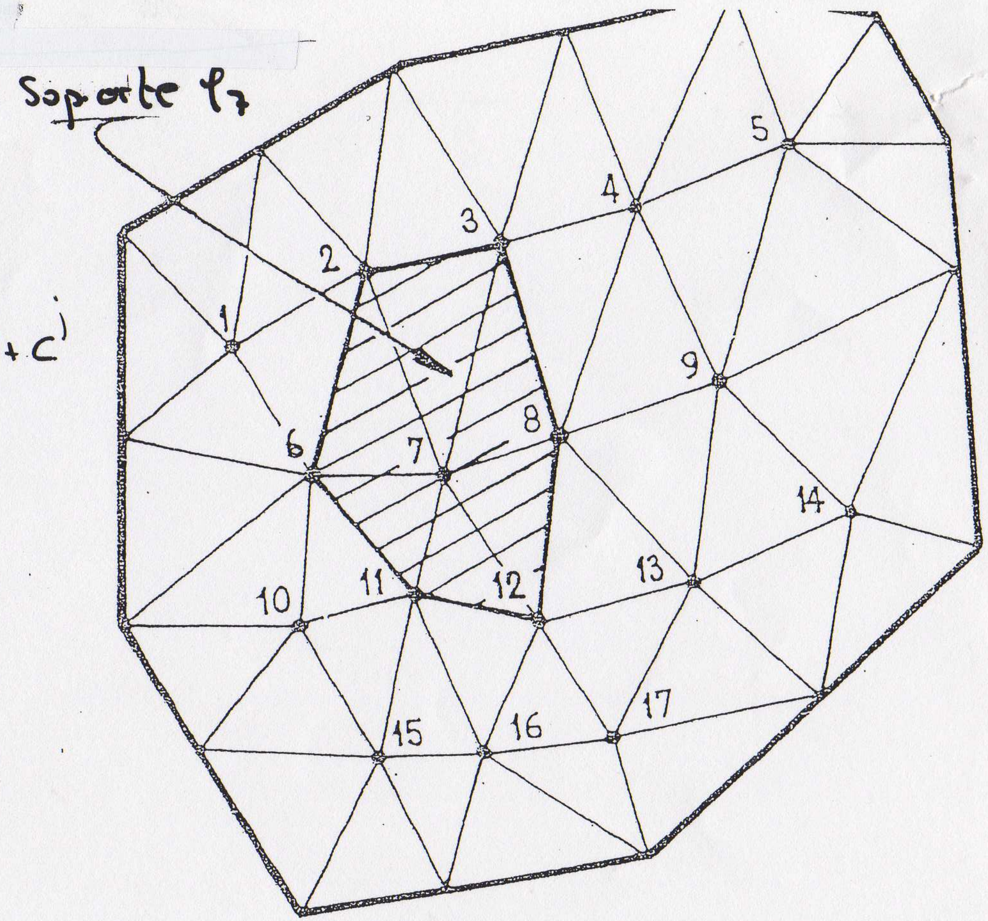
donde

$$R_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} q(x)(x - x_{i+1})^2\,dx\,, \quad Q_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x)(x - x_{i-1})^2\,dx\,,$$

$$S_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x)(x - x_{i-1})(x - x_i)\,dx\,,$$

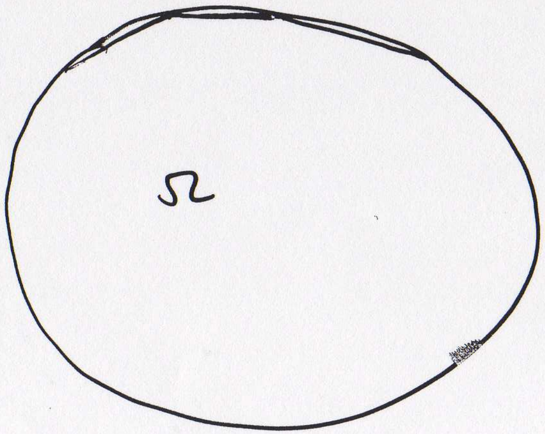
$$f_i = \frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i} r(x)(x - x_{i-1})\,dx + \frac{1}{h}\int_{x_i}^{x_{i+1}} r(x)(-x + x_{i+1})\,dx\,,$$





$$\varphi_j(x,y) = a^j x + b^j y + c^j$$

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$



$$u \simeq \sum_{j=1}^{N} c_j \varphi_j(x,y)$$

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx\,dy = \int_\Omega f \cdot \varphi \cdot dx\,dy \longrightarrow A\bar{c} = \bar{f}$$

$$f_i = \int f \varphi_i \, dx \; ; \quad a_{ij} = \int \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j \, dx\,dy$$