

Ampliación de Matemáticas

2º Curso, Grado en Ingeniería Civil
(Mención en Construcciones Civiles)

ETSI Caminos, Canales y Puertos,
Universidad de Cantabria

M^a Eugenia Pérez Martínez
meperez@unican.es

Sobre la Transformada de Laplace.

- Herramienta útil para la resolución de ecuaciones diferenciales / integrales / integro-diferenciales, y de sistemas diferenciales lineales.
- Transforma ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes en ecuaciones algebraicas.

- **Definiciones:**

-Se dice que la función f es **continua por segmentos en $[0, \infty)$** , cuando lo es en cada intervalo $[0, N]$ para cualquier $N > 0$.

-La función $f, f : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, es de **orden exponencial α** si existen constantes positivas T y M tales que:

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}, \quad \forall t \geq T.$$

-Para $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, la **transformada de Laplace de f en el punto λ** es:

$$\mathcal{L}[f](\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} f(t) dt,$$

$$\text{si } \exists \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-\lambda t} f(t) dt$$

- Si la función f es continua a trozos en $[0, \infty)$ y de orden exponencial α , la integral converge para $\lambda > \alpha$ (también para $\text{Re}(\lambda) > \alpha$).

Algunas propiedades de la T. de Laplace para su aplicación en ED

- 1 Sean f y g funciones tales que su transformada de Laplace existe para $\lambda > \alpha$, y c_1, c_2 constantes cualesquiera. Entonces,

$$\mathcal{L}[c_1 f + c_2 g](\lambda) = c_1 \mathcal{L}[f](\lambda) + c_2 \mathcal{L}[g](\lambda), \quad \forall \lambda > \alpha.$$

- 2 Si f es continua en $[0, \infty)$ y f' es continua a trozos en $[0, \infty)$, y ambas son de orden exponencial α , entonces:

$$\mathcal{L}[f'](\lambda) = \lambda \mathcal{L}[f](\lambda) - f(0), \quad \forall \lambda > \alpha.$$

- 3 Si $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ son continuas en $[0, \infty)$ y $f^{(n)}$ es continua a trozos en $[0, \infty)$, y todas ellas son de orden exponencial α , entonces, $\forall \lambda > \alpha$:

$$\mathcal{L}[f^{(n)}](\lambda) = \lambda^n \mathcal{L}[f](\lambda) - \lambda^{n-1} f(0) - \lambda^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

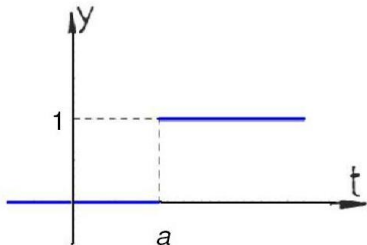
- 4 **Teorema de inversión:** Sean f y g dos funciones continuas a trozos en $[0, \infty)$, de orden exponencial α , y tales que $\mathcal{L}[f](\lambda) = \mathcal{L}[g](\lambda)$, $\forall \lambda > \alpha$.
Entonces: $f(t) = g(t)$ salvo, a lo sumo, en los puntos de discontinuidad de f y g .

- Se llama **transformada inversa de Laplace** de una función $F(\lambda)$, a la función $f(t)$ continua a trozos en $[0, \infty)$ que verifica:

$$\mathcal{L}[f](\lambda) = F(\lambda).$$

- **De utilidad en ED**, por ejemplo, cuando aparecen funciones continuas a trozos, de Heaviside, Deltas de Dirac,...:funciones útiles en Ingeniería!
- **FUNCIÓN “escalón”** (“escalón unitario”, “de Heaviside”): continua a trozos/

$$u(t - a) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ 1 & \text{si } t \geq a. \end{cases}$$



- A partir de u se define $s_N(t - a) = -\frac{N}{2}(u(t - a - \frac{1}{N}) - u(t - a + \frac{1}{N}))$
y, $\delta(t - a) = \lim_{N \rightarrow \infty} s_N(t - a)$ en el sentido...

- DELTA de DIRAC: "función" $\delta(t - a)$, tal que:

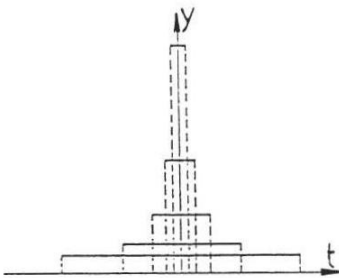
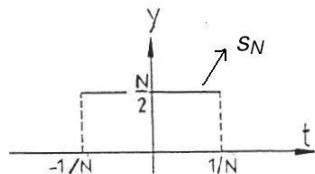
$$\delta(t - a) = \begin{cases} \infty & \text{si } t = a \\ 0 & \text{si } t \neq a. \end{cases}$$

y

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - a) dt = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - a) \phi(t) dt = \phi(a),$$

para cualquier función ϕ continua en \mathbf{R} ,

donde
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - a) \phi(t) dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s_N(t - a) \phi(t) dt (\equiv \phi(a))$$



EJEMPLO: APLICACIÓN A UN PROBLEMA DE CONTORNO

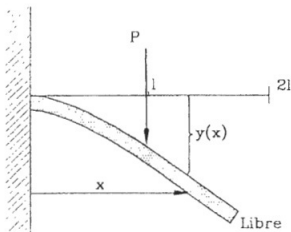
Modelo de viga de longitud $2l$, empotrada en un soporte del lado izquierdo y libre en el derecho, y sometida a una carga $p(x)$:

$$EIy^{(4)} = p(x), \quad x \in (0, l)$$

$$y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(2l) = y'''(2l) = 0,$$

donde E e I son constantes. E es el módulo de Young; I es un momento de inercia. Se supone que los esfuerzos horizontales son nulos y que la viga tiene una carga concentrada P que actúa sobre su centro $x = l$.

$$EIy^{(4)} = P\delta(x - l), \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(2l) = y'''(2l) = 0$$



Sobre la Transformada de Fourier: esquema

Para f continua a trozos en $(-\infty, \infty)$ y tal que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty,$$

la transformada de Fourier de f en ζ es la integral

$$\mathcal{F}[f](\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\zeta} f(x) dx.$$

Denotando por $F(\zeta) = \mathcal{F}[f](\zeta)$, F es una función de la variable $\zeta \in \mathbf{R}$, con valores en \mathbf{C} .

La transformada inversa de Fourier de F se define como:

$$\mathcal{F}^{-1}[F](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\zeta} F(\zeta) d\zeta,$$

Resultado de inversión: $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}](x) = f(x)$.

Algunas propiedades de la T. de Fourier para su aplicación en EDP

- 1 $\mathcal{F}[c_1 f + c_2 g](\zeta) = c_1 \mathcal{F}[f](\zeta) + c_2 \mathcal{F}[g](\zeta),$
- 2 $\mathcal{F}[f'](\zeta) = -i\zeta \mathcal{F}[f](\zeta), \mathcal{F}[f^{(n)}](\zeta) = (-i\zeta)^n \mathcal{F}[f](\zeta),$
- 3 $\mathcal{F}[f * g](\zeta) = \mathcal{F}[f](\zeta) \mathcal{F}[g](\zeta),$

Prácticas con MATLAB: Transformadas Integrales

Algunas “funciones” especiales: *Dirac*; *Heaviside*

Comandos útiles para T. de Laplace:

laplace(f), *ilaplace(F)*,
laplace(sym('Heaviside(t)')), *laplace(sym('Dirac(t)'))*,
o *laplace(heaviside(t))*, *laplace(dirac(t))*

Para f una función de la variable simbólica t , $F = \text{laplace}(f)$ es una función dada en términos de la variable simbólica s .

Comandos útiles para T. de Fourier:

fourier(f), *ifourier(F)*,
fourier(sym('Heaviside(x)')), *fourier(sym('Dirac(x)'))*,
o *fourier(heaviside(x))*, *fourier(dirac(x))*.

Para f una función de la variable simbólica x , $F = \text{fourier}(f)$ es una función dada en términos de la variable simbólica w .