NOMBRE.. Número.........
DNI.............................

2^0 Curso - Grado I. CIVIL - Curso 2021/22
Ampliación de Matemáticas (EDO/EDP)
Examen final: segundo parcial: 18- Enero - 2022

Observación: No utilizar calculadora ni apuntes. Todas las respuestas deben ser debidamente razonadas en el examen. Escribir de forma precisa la solución donde se pida, e indicar si se cambia de hoja en una resolución.

EJERCICIO 1
Resolver el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y_1' &= y_1 - 2y_2 + e^x \\ y_2' &= 2y_1 + y_2 + e^x \end{cases}$$

$$y_1(0) = 0, \;\; y_2(0) = 1/2.$$

SOLUCIÓN GENERAL
SISTEMA HOMOGÉNEO

SOLUCIÓN GENERAL
SISTEMA NO HOMOGENÉO

SOLUCIÓN DEL PROBLEMA

EJERCICIO 2

Demostrar que los dos problemas de contorno dados tienen solución única y resolver si se puede. Razonar la respuesta.

2.a)

$$y'' - 4y = e^x, \quad x \in (0, \pi)$$
$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$$

2.b)

$$x^2y'' + xy' - 4y = x, \quad x \in (1, e^\pi)$$
$$y(1) = 0, \quad y(e^\pi) = 0$$

2.a). SOLUCION o razonamiento breve

2.b). SOLUCION o razonamiento breve

RESOLUCIÓN Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 3
Resolver los siguientes problemas de valores iniciales para las ecuaciones de ondas, razonando la respuesta.

3.a).

$$u_t - 4u_x = 0, \quad x \in (-\infty, \infty),\ t > 0$$
$$u(x,0) = \sin(3x), \quad x \in (-\infty, \infty).$$

SOLUCIÓN
RAZONAMIENTOS

3.b).

$$u_{tt} - 4u_{xx} = 0, \quad x \in (-\infty, \infty),\ t > 0$$
$$u(x,0) = \sin(3x), \quad x \in (-\infty, \infty).$$
$$u_t(x,0) = 0, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

SOLUCIÓN

EJERCICIO 4

Encontrar los valores propios y funciones propias del problema

$$y'' + \lambda y = 0, \quad x \in (0, \pi)$$
$$y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0$$

Escribir el desarrollo en serie de Fourier de la función $f(x) = \sin(4x)$, en términos de las funciones propias encontradas, en el intervalo $(0, \pi)$. Escribir explícitamente el primer coeficiente de Fourier no nulo. Hacer lo mismo con la función $f(x)$ definida como

$$f(x) = \sin(4x) \text{ si } x \in [0, \pi/4], \quad f(x) = 0 \text{ si } x \in [\pi/4, \pi].$$

indicando las principales diferencias en el cálculo de los coeficientes.

VALORES PROPIOS y FUNCIONES PROPIAS

4.a). Para $f(x) = \sin(4x)$:

1^{er} coef. de Fourier no nulo:

DESARROLLO DE $f(x) = \sin(4x)$.

4.b). Para $f(x) = \sin(4x)$ si $x \in [0, \pi/4]$ y $f(x) = 0$ si $x \in [\pi/4, \pi]$,

1^{er} coef. de Fourier no nulo:

DESARROLLO de $f(x)$.

EJERCICIO 5

Resolver el problema mixto para la ecuación del calor:

$$\begin{cases} u_t - 5u_{xx} &= 0\,, \quad x \in (0,\pi), \quad t > 0\,, \\ u(x,0) &= f(x)\,, \quad x \in (0,\pi)\,, \\ u_x(0,t) &= 0, \quad t \geq 0\,, \\ u_x(\pi,t) &= 0, \quad t \geq 0\,. \end{cases}$$

con $f(x) = \sin(4x)$. Escribir claramente el problema de valores propios al que se llega y las ecuaciones en la variable t que se resuelven. Escribir la solución cuando $f(x) = 1$. Razonar la respuesta.

PROBLEMA DE VALORES PROPIOS

ECUACIONES en la variable t:

SOLUCION para $f(x) = \sin(4x)$:

SOLUCION para $f(x) = 1$:

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

Ecuaciones Diferenciales: Formulario

-Método de variación de parámetros: cálculo de soluciones particulares

- E.D.O. de primer orden $y' + p(x)y = q(x)$: $\quad k(x) = \int q(x)\, \exp(\int p(x)\,dx)\,dx$

- E.D.O. de segundo orden $\; y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$:
$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1,y_2](x)}\,dx \quad , \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1,y_2](x)}\,dx.$$

- Sistemas de E.D.O. $\bar{y}' = A(x)\bar{y} + \bar{b}(x)$: $\quad \bar{k}(x) = \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)\,dx$

-Reducción de orden para E.D.O. de segundo orden:
$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)\,dx)}{(y_1(x))^2}\,dx$$

- Método de coeficientes indeterminados cálculo de soluciones particulares:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}$
- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ ó $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$,
  se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + x^s Q_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

donde p_k, P_k, Q_k son polinomios de grado k,
$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico, $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad n_i.

-Método de Euler para el problema $\bar{y}' = \bar{F}(t,\bar{y})$, $\bar{y}(t_0) = \bar{y}_0$:
$$t_{i+1} = t_i + h\,, \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{F}(t_i,\bar{y}_i)$$

- Funciones "escalón" (" Heaviside") y "Delta de Dirac"
$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & si \quad t < a \\ 1 & si \quad t \geq a. \end{cases}$$
$$\delta(t-a) = \begin{cases} \infty & si \quad t = a \\ 0 & si \quad t \neq a. \end{cases} \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a)dt = 1$$

-Coeficientes de Fourier:
$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\phi_k(x)s(x)\,dx}{\int_a^b (\phi_k(x))^2 s(x)\,dx}$$

- Algunas relaciones trigonométricas:
$$2\sin a\,\sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$$
$$2\sin a\,\cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)$$
$$2\cos a\,\cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$
$$(\sin a)^2 = \frac{1-\cos(2a)}{2}, \quad (\cos a)^2 = \frac{1+\cos(2a)}{2}$$