NOMBRE.. **Número**.........
DNI..............................

2^0 Curso - Grado I. CIVIL - Curso 2020/21
Ampliación de Matemáticas (EDO/EDP)
Examen extraordinario, 2^o parcial: 18- Febrero - 2021

Observación: No utilizar calculadora ni apuntes. Todas las respuestas deben ser debidamente razonadas en el examen. Escribir de forma precisa la solución donde se pida, e indicar si se cambia de hoja en una resolución.

EJERCICIO 1
Resolver el problema de valores iniciales

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y_1' &=& y_1 - 2y_2 + e^{2x} \\ y_2' &=& y_1 + 3y_2 \end{array} \right.$$

$$y_1(0) = 0, \;\; y_2(0) = 0.$$

SOLUCIÓN GENERAL
SISTEMA HOMOGÉNEO

SOLUCIÓN GENERAL
SISTEMA NO HOMOGENÉO

SOLUCIÓN DEL PROBLEMA

NOMBRE.. **Número**.........
DNI..............................

2^0 Curso - Grado I. CIVIL - Curso 2020/21
Ampliación de Matemáticas (EDO/EDP)
Examen extraordinario, 2^o parcial: 18- Febrero - 2021

Observación: No utilizar calculadora ni apuntes. Todas las respuestas deben ser debidamente razonadas en el examen. Escribir de forma precisa la solución donde se pida, e indicar si se cambia de hoja en una resolución.

EJERCICIO 1 (2.5p.)
Resolver el problema de valores iniciales

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_1' & = & y_1 + 2y_2 + e^{-x} \\ y_2' & = & 2y_1 + y_2 + e^{-x} \end{array}\right.$$

$$y_1(0) = 0, \ \ y_2(0) = 0.$$

SOLUCIÓN GENERAL
SISTEMA HOMOGÉNEO

SOLUCIÓN GENERAL
SISTEMA NO HOMOGENÉO

SOLUCIÓN DEL PROBLEMA

EJERCICIO 2 (1.5p)
Utilizar el método de separación de variables para encontrar soluciones de la ecuación

$$u_t - t^2 x^2 u_{xx} = 0$$

POSIBLES SOLUCIONES

SOLUCIONES en la variable t

SOLUCIONES en la variable x

RESOLUCIÓN y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 3(1.5p)
Resolver si se puede los siguientes problemas de contorno: explicar/razonar la respuesta indicando si los problemas están relacionado con la solución del ejericio 4.

3.a).

$$y'' + 4y = 0, \quad x \in (0, 3\pi)$$
$$y(0) = 0, \quad y(3\pi) = 1$$

SOLUCIONES:

3. b).

$$y'' + 4y = \sin(x), \quad x \in (0, 3\pi)$$
$$y(0) = 0, \quad y(3\pi) = 0$$

SOLUCIONES:

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS:

EJERCICIO 4(2p)
Encontrar los valores propios y las funciones propias del problema

$$y'' + \lambda y = 0, \quad x \in (0, 3\pi)$$

$$y(0) = 0, \quad y(3\pi) = 0$$

Escribir el desarrollo en serie de Fourier de la función $f(x) = 1$, en términos de las funciones propias encontradas, en el intervalo $(0, 3\pi)$. Escribir los coeficientes de Fourier no nulos

VALORES PROPIOS y FUNCIONES PROPIAS

Coef. de Fourier no nulos:... Coef. de Fourier nulos...................

DESARROLLO DE $f(x)$.

RESOLUCIÓN Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 5(2.5p.)
Resolver el problema mixto para la ecuación de ondas

$$\begin{cases} u_{tt} - 5^2 u_{xx} = 0\,, & x \in (0, 3\pi), \quad t > 0\,, \\ u(x,0) = 1\,, & x \in (0, 3\pi)\,, \\ u_t(x,0) = \sin(3x), & x \in (0, 3\pi)\,, \\ u(0,t) = 0, & t > 0\,, \\ u(3\pi, t) = 0, & t > 0\,. \end{cases}$$

Usar la separación de variables y los resultados del ejercicio 4 si se precisa. Escribir claramente el problema de valores propios al que se llega y las ecuaciones en la variable t que se resuelven.

PROBLEMA DE VALORES PROPIOS

ECUACIONESo o SOLUCIONES en la variable t:

SOLUCION del problema

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

Ecuaciones Diferenciales: Formulario

-Método de variación de parámetros: cálculo de soluciones particulares

- E.D.O. de primer orden $y' + p(x)y = q(x)$: $\quad k(x) = \int q(x)\, \exp(\int p(x)\,dx)\,dx$
- E.D.O. de segundo orden $\quad y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$:

$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1,y_2](x)}\,dx \quad , \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1,y_2](x)}\,dx.$$

- Sistemas de E.D.O. $\bar{y}' = A(x)\bar{y} + \bar{b}(x)$: $\quad \bar{k}(x) = \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)\,dx$

-Reducción de orden para E.D.O. de segundo orden:

$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)\,dx)}{(y_1(x))^2}\,dx$$

- Método de coeficientes indeterminados cálculo de soluciones particulares:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}$
- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ ó $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$,
  se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + x^s Q_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

donde p_k, P_k, Q_k son polinomios de grado k,
$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico, $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad n_i.

-Método de Euler para el problema $\bar{y}' = \bar{F}(t,\bar{y})$, $\bar{y}(t_0) = \bar{y}_0$:

$$t_{i+1} = t_i + h\,, \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{F}(t_i,\bar{y}_i)$$

- Funciones "escalón" (" Heaviside") y "Delta de Dirac"

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & si \quad t < a \\ 1 & si \quad t \geq a. \end{cases}$$

$$\delta(t-a) = \begin{cases} \infty & si \quad t = a \\ 0 & si \quad t \neq a. \end{cases} \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a)dt = 1$$

-Coeficientes de Fourier:

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\phi_k(x)s(x)\,dx}{\int_a^b (\phi_k(x))^2 s(x)\,dx}$$

- Algunas relaciones trigonométricas:

$$2\sin a\,\sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$$
$$2\sin a\,\cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)$$
$$2\cos a\,\cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$
$$(\sin a)^2 = \frac{1-\cos(2a)}{2}, \quad (\cos a)^2 = \frac{1+\cos(2a)}{2}$$