NOMBRE... **Número**.........
DNI..............................

2^0 Curso - Grado I. CIVIL - Curso 2022/23
Ampliación de Matemáticas (EDO/EDP)
Examen final: segundo parcial: 22- Diciembre - 2022

Observación: No utilizar calculadora, ni apuntes, ni dispositivos electrónicos (antes de comenzar el examen deben de situarse fuera del alcance). Todas las respuestas deben ser debidamente razonadas en el examen. Escribir de forma precisa la solución donde se pida, e indicar si se cambia de hoja en una resolución.

EJERCICIO 1
Resolver el problema de valores iniciales para un sistema:

$$\begin{cases} y_1' &= y_1 + y_2 + 2 \\ y_2' &= 4y_1 + y_2 + 1 \end{cases}$$

$$y_1(0) = 0, \ \ y_2(0) = 0.$$

SOLUCIÓN GENERAL
SISTEMA HOMOGÉNEO

SOLUCIÓN GENERAL
SISTEMA NO HOMOGENÉO

SOLUCIÓN DEL PROBLEMA dado

RESOLUCIÓN Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 2

EJERCICIO 2.1 Encontrar los valores propios y funciones propias del problema

$$y'' + \lambda y = 0, \quad x \in (0,5)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(5) = 0$$

Escribir el desarrollo en serie de Fourier de la función $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{10}x\right)$, en términos de las funciones propias encontradas, en el intervalo $(0,5)$. Escribir explícitamente el primer coeficiente de Fourier no nulo. Hacer lo mismo con la función $f(x) = 1$.

VALORES PROPIOS y FUNCIONES PROPIAS

DESARROLLO DE $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{10}x\right)$:

1^{er} coef. de Fourier no nulo:

DESARROLLO DE $f(x) = 1$.

1^{er} coef. de Fourier no nulo:

Los otros coeficientes

RESOLUCIÓN Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 2.2

a). Resolver el problema mixto para la ecuación de ondas:

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_{tt}-2u_{xx} & = & 0\,, \quad x\in(0,5), \quad t>0\,, \\ u(x,0) & = & \sin\left(\frac{\pi}{10}x\right), \quad x\in(0,5)\,, \\ u_t(x,0) & = & 1, \quad x\in(0,5)\,, \\ u(0,t) & = & 0\,, \quad t>0\,. \\ u_x(5,t) & = & 0\,, \quad t>0\,. \end{array}\right.$$

b). Indicar las ecuaciones en la variable t y sus soluciones si la EDP se cambia por

$$u_{tt}-2u_{xx}+u=0$$

Problema de VALORES PROPIOS

ECUACIONES EN la variable t
y las SOLUCIONES en t:

SOLUCION del problema:

b). ECUACIONES EN la variable t
y las SOLUCIONES en t:
Razonamiento breve.

EJERCICIO 3
Escribir el desarrollo clásico de Fourier de la función $f(x) = |\sin(x)|$ en $[-\pi, \pi]$ (desarrollo en serie de Fourier en $[-\pi, \pi]$ en términos de las funciones $\{1, \cos(kx), \sin(kx)\}_{k=1,2,3,\cdots}$). Escribir claramente el primer coeficiente de Fourier no nulo y los coeficientes que se anulan.

DESARROLLO..

1^{er} coeficiente no nulo.......................................

Coeficientes nulos..

los coeficientes no nulos............

RESOLUCIÓN Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 4

Indicar valores posibles de las constantes A,B, C, D, E y F para que

$$u(x,y) = Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F$$

sea solución de la ecuación de Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Encontrar, si se puede, dichas soluciones usando el método separación de variables. Razonar la respuesta. Hacer lo mismo para la ecuaci'on de Tricomi (de utilidad, por ejemplo, en aeródinamica)

$$u_{xx} + xu_{yy} = 0$$

VALORES o SOLUCIONES
Ec. de Laplace

VALORES o SOLUCIONES
Ec. de Tricomi

Ec. diferenciales ordinarias
que se resuelven

SOLUCIONES
por separación de variables

RESOLUCIÓN Y RAZONAMIENTOS

Ecuaciones Diferenciales: Formulario

-Método de variación de parámetros: cálculo de soluciones particulares

- E.D.O. de primer orden $y' + p(x)y = q(x)$: $\quad k(x) = \int q(x)\, \exp(\int p(x)\, dx)\, dx$
- E.D.O. de segundo orden $\; y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$:

$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)}\, dx \quad , \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)}\, dx.$$

- Sistemas de E.D.O. $\bar{y}' = A(x)\bar{y} + \bar{b}(x)$: $\quad \bar{k}(x) = \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)\, dx$

-Reducción de orden para E.D.O. de segundo orden:

$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)\, dx)}{(y_1(x))^2}\, dx$$

- Método de coeficientes indeterminados cálculo de soluciones particulares:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}$
- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ ó $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$,
  se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + x^s Q_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

donde p_k, P_k, Q_k son polinomios de grado k,
$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico, $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad n_i.

-Método de Euler para el problema $\; \bar{y}' = \bar{F}(t, \bar{y}),\ \bar{y}(t_0) = \bar{y}_0$:

$$t_{i+1} = t_i + h\,, \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{F}(t_i, \bar{y}_i)$$

- Funciones "escalón" (" Heaviside") y "Delta de Dirac"

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & si \quad t < a \\ 1 & si \quad t \geq a. \end{cases}$$

$$\delta(t-a) = \begin{cases} \infty & si \quad t = a \\ 0 & si \quad t \neq a. \end{cases} \quad , \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a)dt = 1$$

-Coeficientes de Fourier:

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\phi_k(x)s(x)\, dx}{\int_a^b (\phi_k(x))^2 s(x)\, dx}$$

- Algunas relaciones trigonométricas:

$$2\sin a\, \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$$

$$2\sin a\, \cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)$$

$$2\cos a\, \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$

$$(\sin a)^2 = \frac{1 - \cos(2a)}{2}, \quad (\cos a)^2 = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$$