NOMBRE.. Número.........
DNI..............................

2^0 Curso - Grado I. CIVIL - Curso 2022/23
Ampliación de Matemáticas (EDO/EDP)
Examen extraordinario, 1^{er} parcial: 1- Febrero - 2023

Observación: No utilizar calculadora, ni apuntes, ni dispositivos electrónicos (antes de comenzar el examen deben de situarse fuera del alcance). Todas las respuestas deben ser debidamente razonadas en el examen. Escribir de forma precisa la solución donde se pida, e indicar si se cambia de hoja en una resolución. Duración (2h 15m)

EJERCICIO 1 (2.2p.)
Resolver la ecuación diferencial

$$y' + \sin(x)y = e^{\cos(x)}.$$

Encontrar la solución que pasa por $(0,0)$, indicando el intervalo de definición de dicha solución. Razonar la respuesta. Dar la aproximación de la solución mediante los tres primeros términos del desarrollo en serie de Taylor. Estudiar el comportamiento de las soluciones (crecimiento o decrecimiento) de las soluciones en la región del plano $(-\pi/2, 0) \times (0, 10)$

SOLUCIÓN GENERAL

SOLUCIÓN/ y(0)=0...INTERVALO.......................

APROXIMACIÓN...

COMPORTAMIENTO soluciones ....

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 2 (2, 2 p.)

Resolver el problema de Cauchy

$$y' = -\frac{y^2 - xy}{xy - 1}, \qquad y(2) = 1$$

(Indicación: buscar un factor integrante dependiente de y).

Hacer un dibujo aproximado de la solución en el campo de direcciones asociado; razonar la respuesta. Encontrar las curvas isoclinas para las pendientes 0 e ∞, dibujarlas en el campo de direcciones dado en $[-4,4] \times [-4,4]$ (o hacer un gráfico aparte). Rayar las regiones de crecimiento de las soluciones, razonando la respuesta.

FACTOR INTEGRANTE

SOLUCIÓN GENERAL

SOLUCIÓN/ y(2)=1

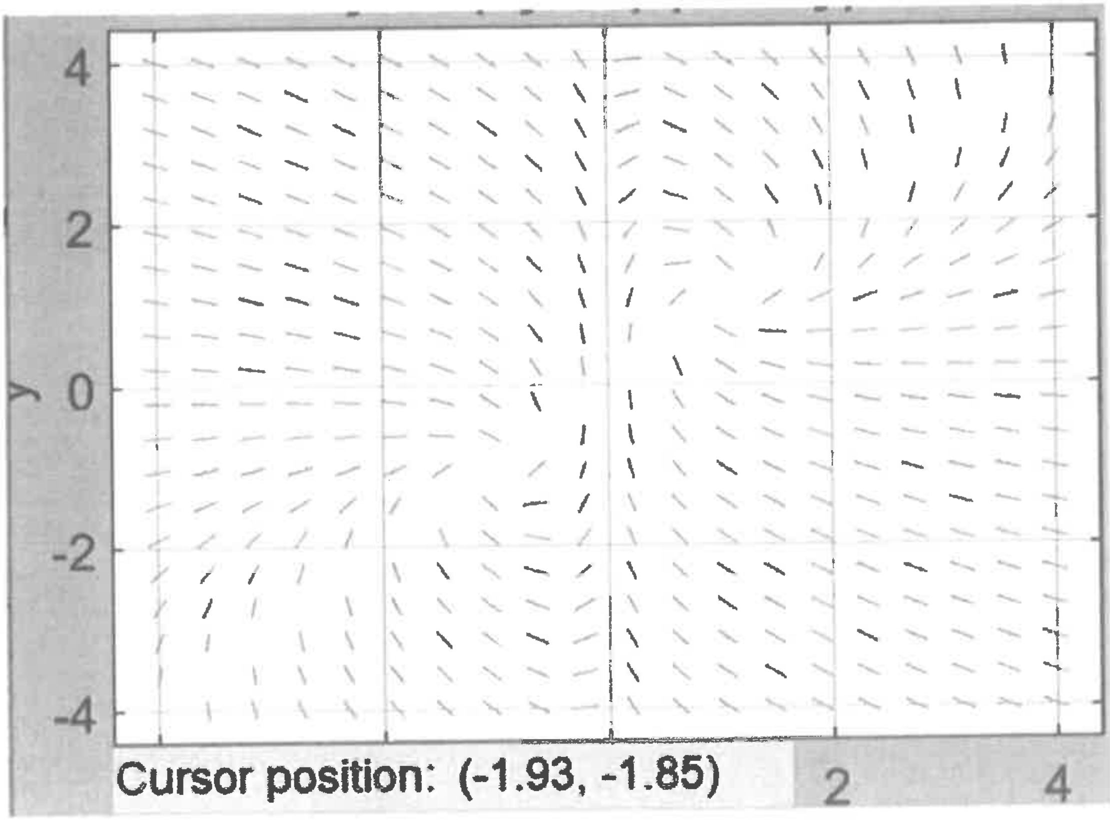
CAMPO I o II

(tachar lo que no proceda)

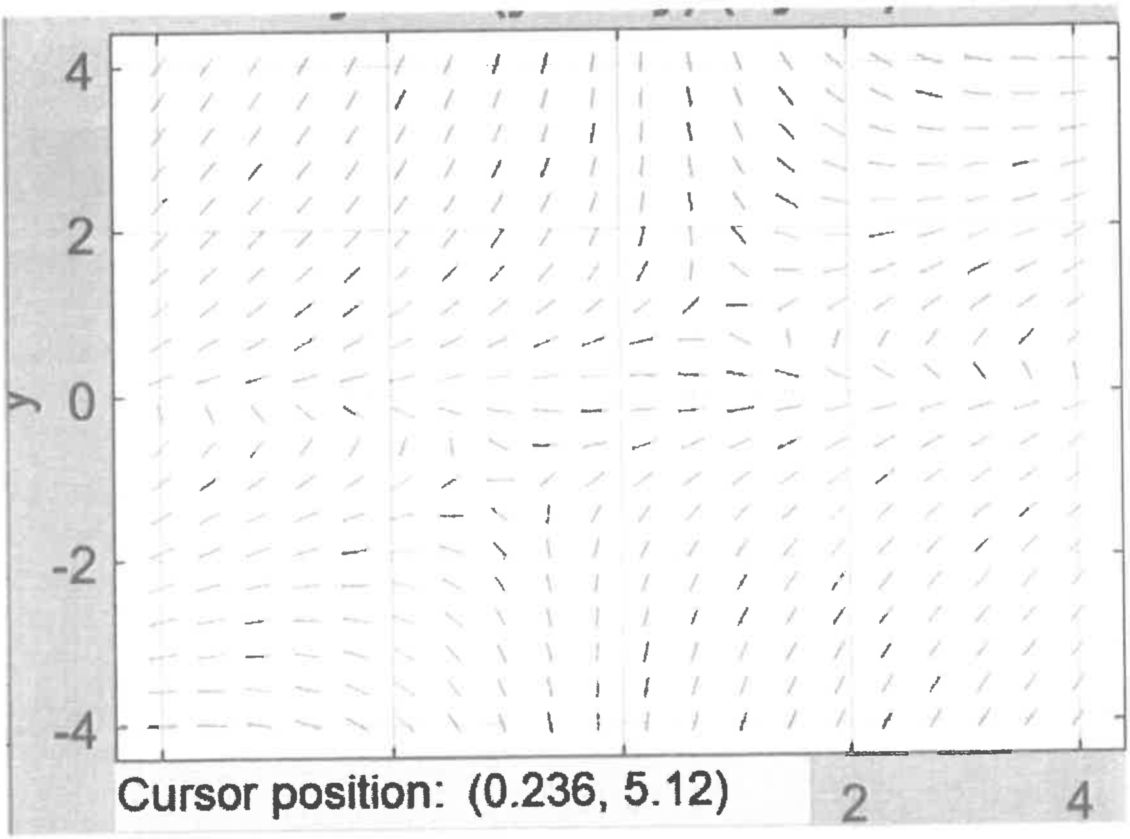
.

ISOCLINAS para las pendientes 0 e ∞

I).


4
2
y 0
-2
-4
Cursor position: (-1.93, -1.85)
2
4

II).


4
2
y 0
-2
-4
Cursor position: (0.236, 5.12)
2
4

EJERCICIO 3 (3 p.)

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de segundo orden indicando el intervalo de definición de la solución

3.1) $y'' + 4y' - 5y = \cos(x)$

SOLUCIÓN PARTICULAR

SOLUCIÓN GENERAL

INTERVALO

RESOLUCIÓN Y RAZONAMIENTOS

3.2) $$y'' + 4y' + 5y = \frac{e^{-2x}}{\cos(x)}$$

SOLUCIÓN PARTICULAR

SOLUCIÓN GENERAL

INTERVALO.

RESOLUCIÓN Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 4 (2.1 P.)

Se considera la ecuación (una ecuación de Hermite)

$$y'' - 2xy' + 2y = 0$$

1. Buscar la solución en forma de serie de potencias $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

   Escribir los los 9 primeros términos en función de a_0 y a_1, y encontrar el término general a_n en función de los anteriores. Indicar el intervalo de convergencia de la serie. Razonar la respuesta.

2. Dar la solución del problema de Cauchy

$$y'' - 2xy' + 2y = 0$$
$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

   Utilizando dicha solución y el método de reducción de orden, escribir otra solución de la ecuación diferencial (dejar las integrales indicadas). Escribir la solución general de la ED, y la ED de primer orden a la que se llega.

1.-DESARROLLO en serie de la solución

INTERVALO....

$$y(x) = a_0(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$$

$$+a_1(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$$

TÉRMINO GENERAL a_n.. para $n \geq$.........?

2.- $y_1(x) =$.................................... $y_2(x) =$..........................

SOLUCIÓN GENERAL...

ED de primer orden...

Ecuaciones Diferenciales: Formulario

-Método de variación de parámetros: cálculo de soluciones particulares

- E.D.O. de primer orden $y' + p(x)y = q(x)$: $\quad k(x) = \int q(x) \exp(\int p(x)\,dx)\,dx$
- E.D.O. de segundo orden $\quad y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$:

$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)}\,dx \quad , \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)}\,dx.$$

- Sistemas de E.D.O. $\bar{y}' = A(x)\bar{y} + \bar{b}(x)$: $\quad \bar{k}(x) = \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)\,dx$

-Reducción de orden para E.D.O. de segundo orden:

$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)\,dx)}{(y_1(x))^2}\,dx$$

- Método de coeficientes indeterminados cálculo de soluciones particulares:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}$
- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ ó $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$,
  se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + x^s Q_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

donde p_k, P_k, Q_k son polinomios de grado k,
$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico, $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad n_i.

-Método de Euler para el problema $\bar{y}' = \bar{F}(t, \bar{y}),\ \bar{y}(t_0) = \bar{y}_0$:

$$t_{i+1} = t_i + h\,, \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{F}(t_i, \bar{y}_i)$$

- Funciones "escalón" (" Heaviside") y "Delta de Dirac"

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & si \quad t < a \\ 1 & si \quad t \geq a. \end{cases}$$

$$\delta(t-a) = \begin{cases} \infty & si \quad t = a \\ 0 & si \quad t \neq a. \end{cases} \quad , \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a)dt = 1$$

-Coeficientes de Fourier:

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\phi_k(x)s(x)\,dx}{\int_a^b (\phi_k(x))^2 s(x)\,dx}$$

- Algunas relaciones trigonométricas:

$$2\sin a\,\sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$$
$$2\sin a\,\cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)$$
$$2\cos a\,\cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$
$$(\sin a)^2 = \frac{1-\cos(2a)}{2}, \quad (\cos a)^2 = \frac{1+\cos(2a)}{2}$$