ECUACIONES DIFERENCIALES DE $1^{\underline{er}}$ ORDEN*

Una ecuación diferencial de primer orden es una expresión matemática en la que se relaciona una función con su derivada

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (1)$$

$F : D \subset \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$, $y = y(x)$ es la **función incógnita**,

$y'(x)$ su derivada, y x es la **variable independiente**.

Definición: Dada una función $\varphi : (\alpha, \beta) \to \mathbf{R}$, $y = \varphi(x)$ es **solución** de la ecuación (1) en (α, β) si:

1). φ es continua y derivable en (α, β), y

2).$(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \in D$ y $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$.

Ecuación diferencial **en forma normal:** $y' = f(x, y)$.

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$$

Integración $\longleftrightarrow$ **Familia uniparamétrica de soluciones - Solución general:**

- *en forma explícita*, $y = y(x, c)$,
- *en forma implícita*, $\phi(x, y, c) = 0$,
- *en forma paramétrica* $(x(t, c), y(t, c)), t \in \mathbf{R}$,
- *en forma inversa*, $x = x(y, c)$.

Todas estas curvas se llaman **curvas integrales**

para $c = c_0$, $y = y(x, c_0)$ es una **solución particular**

* **Resúmenes / Capítulo 1 / Ecuaciones Diferenciales!?. Una introducción. UC, Mª Eugenia Pérez Martínez**

El proceso inverso a la integración: dada $\phi(x,y,c)=0$

$F(x,y,y')=0$ se obtiene eliminando c, si se puede, en

$$\phi(x,y,c)=0 \quad \text{y} \quad \phi_x(x,y,c)+\phi_y(x,y,c)y'=0$$

Problema de valor inicial o **problema de Cauchy**

$$\begin{cases} y' &= f(x,y) \\ y(x_0) &= y_0. \end{cases}$$

$(x_0,y_0)\in$ dominio de definición de f.

$\rightarrow$ Una solución $y=\varphi(x)$ / $\varphi(x_0)=y_0$, $\quad x_0\in(\alpha,\beta)$

Ecuaciones de variables separadas: $f(y)y'=g(x)$

Solución: $$\int f(y)dy=\int g(x)dx+c \quad \forall c \text{ constante.}$$

Ecuaciones homogéneas: $y'=g(\frac{y}{x})$.

El cambio de variable $y=u.x \longrightarrow$ variables separadas

$$y'=u'x+u=g(u)\longleftrightarrow \frac{u'}{g(u)-u}=\frac{1}{x}$$

Se reducen a ecuaciones homogéneas:

- $y'=f(x,y)$, con $f(\lambda x,\lambda y)=f(x,y),\forall\lambda\in\mathbf{R}$:
  $y'=\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, con P y Q *funciones homogéneas de grado* n
  ($P(\lambda x,\lambda y)=P(x,y)\lambda^n$ y $Q(\lambda x,\lambda y)=Q(x,y)\lambda^n$, $\forall\lambda\in\mathbf{R}$)

- $y'=\dfrac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}$:
  hacer $z=ax+by$ (o $X=-x_0+x$, $Y=-y_0+y$ si (x_0,y_0) es un punto de corte de las rectas $ax+by+c=0$ y $\alpha x+\beta y+\gamma=0$

Extensión del dominio de definición:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \quad \longleftrightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x,y)}$$

$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,/\, f(x,y)$ definida ó $\frac{1}{f(x,y)}$ definida$\}$

INTERPRETACIÓN geométrica de $y' = f(x,y)$

La ecuación diferencial $y' = f(x,y)$ define **un campo de direcciones** en el dominio $D \subset \mathbf{R}^2$ donde $f(x,y)$ o $\dfrac{1}{f(x,y)}$ estén definidas:

$(x,y) \in D \longrightarrow$ dirección de la recta de pendiente $f(x,y)$

dirección del vector $(1, f(x,y))$ ó $(\dfrac{1}{f(x,y)}, 1)$.

En los puntos / f y $\dfrac{1}{f}$ estan definidas ambas direcciones coinciden.

Bosquejo de curvas solución: en cada punto son tangentes a la dirección del campo

Curva isoclina para la pendiente k

$$\{(x,y)/f(x,y) = k\}$$

puntos del plano en los que las soluciones tienen pendiente k.

Dirección del campo $\equiv$ Dirección del vector $(1,k)$

Isoclinas para las pendientes $k = 0$ y $k = \infty$ $\longrightarrow$ posibles cambios en el crecimiento de las soluciones

Dominio de definición de $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$

$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,/\, P(x,y)$ y $Q(x,y)$
definidas y no nulas a la vez $\}$

Otras definiciones/consideraciones de tipo geométrico

Si $\phi(x,y,c) = 0$ familia de curvas solución de $y' = f(x,y)$, la **familia de curvas ortogonales** son curvas solución de $y' = -\dfrac{1}{f(x,y)}$.

$$F(x,y,y') = 0 \longrightarrow F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0$$

Ecuaciones de familias de curvas que se cortan con un ángulo ω:

$$F(x,y,y') = 0 \longrightarrow F\left(x, y, \frac{y' - \tan\omega}{1 + y'\tan\omega}\right) = 0$$

o

$$F(x,y,y') = 0 \longrightarrow F\left(x, y, \frac{y' + \tan\omega}{1 - y'\tan\omega}\right) = 0$$

Una curva γ es **curva envolvente** de una familia de curvas $\phi(x,y,c) = 0$ cuando

1. en cada punto de γ hay una curva de la familia tangente a ella
2. en cada trozo de curva γ hay infinitas curvas de la familia tangentes a γ.

$\gamma: \qquad \phi(x,y,c) = 0 \quad$ y $\quad \dfrac{\partial\phi}{\partial c}(x,y,c) = 0 \quad (\longrightarrow$ eliminar $c)$

Ecuaciones diferenciales exactas.

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0. \qquad (2)$$

$$\Updownarrow \qquad y' = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

$P, Q : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $\mathcal{R}$ un rectángulo de $\mathbf{R}^2$
P y Q continuas y no nulas a la vez en $\mathcal{R}$.

Definición: (2) es **diferencial exacta** si $\exists F : \mathcal{R} \to \mathbf{R}$ /

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = P(x,y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = Q(x,y), \ \forall (x,y) \in \mathcal{R}.$$

Si (2) diferencial exacta, entonces $F(x,y) = c$ es una familia de curvas integrales: $F_x + F_y y' = 0$

$\rightarrow$ Notación: $F_x \equiv \frac{\partial F}{\partial x}$, $F_y \equiv \frac{\partial F}{\partial y}$

CARACTERIZACIÓN:

Teorema 1 *Sean P y Q dos funciones continuas y con derivadas parciales primeras continuas en $\mathcal{R}$. La ecuación (2) es diferencial exacta en $\mathcal{R}$ si y sólo si*

$$P_y(x,y) = Q_x(x,y)\,, \forall (x,y) \in \mathcal{R}.$$

RESOLUCIÓN:

$$F(x,y) = \int P(x,y)\,dx + C(y)$$

$$C'(y) = Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,dx$$

$$F(x,y) = \int P(x,y)\,dx + \int \left(Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,dx \right)\, dy.$$

Definición: un **factor integrante** de la ecuación (2) es una función $\nu = \nu(x,y) \neq 0$ en $\mathcal{R}$, tal que

$$\nu(x,y)P(x,y)\,dx + \nu(x,y)Q(x,y)\,dy = 0$$

es diferencial exacta $\quad (\Longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial y}(\nu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\nu Q))$

$\nu(x,y)$ factor integrante de (2) $\Rightarrow$

$P(x,y)dx+Q(x,y)dy = 0 \Longleftrightarrow \nu P(x,y)dx+\nu Q(x,y)dy = 0$

$\Rightarrow$ $\nu(x,y)$ es solución de:

$$\nu_y(x,y)P + \nu(x,y)P_y = \nu_x(x,y)Q + \nu(x,y)Q_x$$

EDP / dificil resolución!. Se buscan factores integrantes: $\nu(x)$, $\nu(y)$, $\nu(xy)$, $\nu(x^2+y)$, $\nu(x^2+y^2)$, etc.

EJEMPLOS:

$\exists \nu(y) \Longleftrightarrow \frac{Q_x - P_y}{P}$ es función de $y \longrightarrow \nu(y) = e^{\int \frac{Q_x-P_y}{P}\,dy}$

$\exists \nu(x,y) = \nu(xy^2) \Longleftrightarrow \frac{Q_x-P_y}{2xyP-y^2Q}$ función de $z = xy^2$

$$\longrightarrow \nu(z) = e^{\int \frac{Q_x-P_y}{2xyP-y^2Q}\,dz}.$$

$$\left(\quad \nu(x) = e^{\int \frac{P_y-Q_x}{Q}\,dx} \quad / \quad \nu(z) = e^{\int \frac{Q_x-P_y}{2yP-2xQ}\,dz}, \ \text{con } z = x^2+y^2 \right)$$

EJERCICIOS: ED reducibles a diferenciales exactas

- 1). La ecuación lineal $y' = p(x)y + q(x)$ admite un factor integrante dependiente de x.

-2). Si la ecuación $y' = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ es homogénea, admite un factor integrante: $\nu(x,y) = \frac{1}{xP(x,y)+yQ(x,y)}$

(supuesto que $xP(x,y) + yQ(x,y) \neq 0$)

Ecuaciones lineales .

Ecuación lineal homogénea (LH):

$$y' + p(x)y = 0, \quad p : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbf{R} \text{ continua}$$

($a_0(x)y' + a_1(x)y = 0$, $a_0 \neq 0$ en (α, β) $(p(x) = \frac{a_1(x)}{a_0(x)})$)

PROPIEDAD de las soluciones de (LH):

$y_1(x)$, $y_2(x)$ soluciones en (α, β) y $\forall k_1, k_2 \in \mathbf{R}$

$\Longrightarrow y(x) = k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x)$ solución en (α, β)

SOLUCIÓN GENERAL de (LH): $y(x) = ce^{-\int p(x)dx}$

Ecuación lineal no homogénea (LNH):

$$y' + p(x)y = q(x), \quad p, q : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbf{R} \text{ continuas.}$$

SOLUCIÓN GENERAL de (LNH):

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx} c + e^{-\int p(x)dx} \int q(x)\, e^{\int p(x)dx}\, dx$$

Teorema 2 *Sean $p, q : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbf{R}$ funciones continuas y $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $y_0 \in \mathbf{R}$. Entonces, existe una única solución del problema de Cauchy,*

$$\begin{cases} y' + p(x)y & = & q(x) \\ y(x_0) & = & y_0, \end{cases}$$

definida en el intervalo (α, β). Esta solución es:

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds} \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} q(s)\, e^{\int_{x_0}^{s} p(u)du}\, ds \right).$$

Ecuaciones lineales de 1^{er} orden.

$$y' + p(x)y = 0, \qquad \text{(LH)}$$

$$y' + p(x)y = q(x), \qquad \text{(LNH)}$$

PROPIEDADES de las soluciones de (LNH):

- y_1, y_2 soluciones de (LNH) en $(\alpha, \beta) \Longrightarrow$
  $y_1 - y_2$ solución de (LH) en (α, β).

- La solución general de (LNH) es
  $$y(x) = ce^{-\int p(x)dx} + y_p(x)$$
  donde $y_p(x)$ es una solución particular de (LNH).

- **Método de variación de parámetros**: Buscar $y_p(x)$, $y_p(x) = k(x)e^{-\int p(x)dx}$, con $k(x)$ a determinar
  $$\Longrightarrow \qquad k(x) = \int e^{\int p(x)dx} q(x)\, dx$$

Ecuaciones reducibles a lineales

Ecuación de Bernouilli: $y' + p(x)y = q(x)y^n$ $(n \neq 0, 1)$

Multiplicar por y^{-n} y hacer $z = y^{-n+1} \longrightarrow$ lineal

Ecuación de Riccati: $y' + p(x)y^2 + q(x)y = h(x)$

Hacer $u = y - y_p(x) \longrightarrow$ Bernouilli para $n = 2$
(supuesto conocida una solución particular $y_p(x)$).

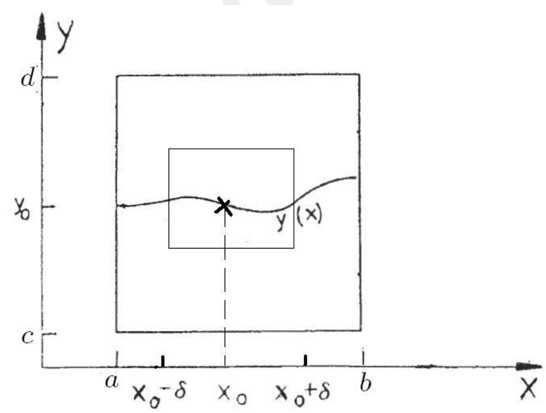
El problema de Cauchy: Ecuaciones no lineales

Teorema 3 *Sea D el rectángulo abierto*

$$D = \{(x, y)/a < x < b, c < y < d\}$$

y $f : D \subset \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$, f *y* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *continuas en* D. *Entonces,* $\forall (x_0, y_0) \in D$, $\exists$ *un intervalo,* $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset (a, b)$, *en el cual existe una única solución* $y = \varphi(x)$ *del problema de Cauchy*

$$(PC) \left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & f(x, y) \\ y(x_0) & = & y_0 \end{array} \right.$$



OBSERVACIONES

- D puede ser cualquier dominio abierto de $\mathbf{R}^2$.
- El δ máximo en general no es fácil de determinar

  Una primera estimación de δ: $\delta = \min(\alpha, \frac{\beta}{M})$, $\alpha, \beta \,/\, D_1 = \{(x, y)/|x - x_0| \leq \alpha, |y - y_0| \leq \beta\} \subset D$, y, $M = \max_{(x,y)\in D_1} |f(x, y)|$.
- **Problema bien planteado**: "*pequeñas variaciones de los datos*" $\Rightarrow$ "*pequeñas variaciones de la solución*"
- Supuesto que f es "*muy regular*", "*cerca de* x_0":

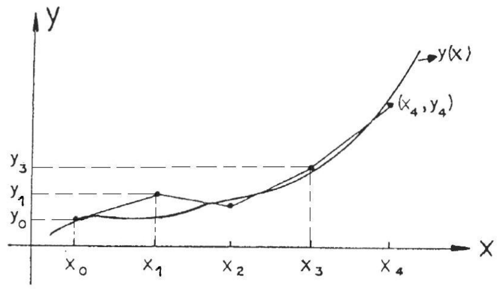
$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x - x_0) + \frac{\varphi''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots$$

$$|error| \leq max_{\zeta\in[x_0-\delta, x_0+\delta]} \frac{|\varphi'''(\zeta)|}{3!} \delta^3$$

Solución numérica: Método de Euler

Sean f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ continuas en D, y $(x_0, y_0) \in D$: Sea $y = \varphi(x)$ la única solución de (PC) en $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$:

$$(PC) \left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & f(x,y) \\ y(x_0) & = & y_0 \end{array} \right.$$



Se conoce es la recta tangente a $\varphi(x)$ en (x_0, y_0)

Para h muy pequeño, en $[x_0, x_0 + h]$,
$\varphi(x) \approx y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0)$

Sea $x_1 = x_0 + h$, en $[x_1, x_1 + h]$,
$\varphi(x) \approx \varphi(x_1) + f(x_1, \varphi(x_1))(x - x_1)$.

pero $\varphi(x_1) \approx y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) \Longrightarrow$
en $[x_1, x_1 + h]$, $\varphi(x) \approx y_1 + f(x_1, y_1)(x - x_1)$.

Construimos así **una aproximación de la solución de (PC)** en el intervalo $[x_0, x_0 + \delta]$

Dados (x_0, y_0), $N = \delta h^{-1}$, se calcula recursivamente
$x_i = x_0 + ih, \quad y_i = y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1}),\ i = 1, 2, ..., N.$

Solución numérica de (PC) en $[x_0, x_0 + \delta]$: $\{y_i\}_{i=0}^N$
Aproximación de la solución en $[x_0, x_0 + \delta]$:

$$\varphi_h(x) = y_{i-1} + (x - x_{i-1}) f(x_{i-1}, y_{i-1})\,, x \in [x_{i-1}, x_i].$$

h=**tamaño del paso**= $\frac{\delta}{N}$, $\quad h \to 0 \longleftrightarrow N \to \infty$

Para la aproximación en $[x_0 - \delta, x_0]$: cambiar h por $-h$

Método de orden 1: error acotado por $Cte.h$

SOBRE CONVERGENCIA del método:

El *método converge en x* si $\lim_{h\to 0} |\varphi(x) - \varphi_h(x)| = 0$.

Teorema 4 *Sea f, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ continuas en $[a,b] \times \mathbf{R}$ y f acotada:*

$$\lim_{h\to 0} |\varphi(x) - \varphi_h(x)| = 0, \quad \forall x \in [x_0, x_0 + \delta] \subset [a,b]\,.$$

SOBRE ERRORES del método:

En la iteración i, el método de Euler nos da un valor y_i aproximado de la solución $\varphi(x_i)$; el ordenador nos da $\tilde{y}_i$

$$E_i = \varphi(x_i) - \tilde{y}_i = \varphi(x_i) - y_i + y_i - \tilde{y}_i.$$

$y_i - \tilde{y}_i$ es el **error de redondeo**

$e_i = \varphi(x_i) - y_i$, **error del método**,

Definición: el método es de orden p si $|e_i| \leq Cte.h^p$

error local de truncatura: El error en la iteración i supuesto que y_{i-1} es exacto ($y_{i-1} = \varphi(x_{i-1})$).

error global: suma de todos los errores locales (e_N)

$$|e_N| \leq \frac{Ch}{2L}(e^{\delta L} - 1)$$

donde $C = \max_{(x,y)\in D_1} |f\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x}|$, $L = \max_{(x,y)\in D_1} |\frac{\partial f}{\partial y}|$, siendo D_1 el rectángulo cerrado en el que f y sus derivadas parciales primeras son continuas, $\delta = \min(\alpha, \frac{\beta}{M})$.

- El error en el método de Euler es de orden 1
- El error aumenta al aumentar el intervalo (δ)
- La aproximación es mejor para h pequeño
- Al disminuir h puede aumentar el error de redondeo.

SOBRE MEJORAS DEL MÉTODO DE EULER:

Considerar: $$\varphi(x_{i+1}) = \varphi(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(s,\varphi(s))\,ds, \qquad \text{o}$$

$$\varphi(x_i+h) = \varphi(x_i) + h\varphi'(x_i) + \frac{h^2}{2!}\varphi''(x_i) + \frac{h^3}{3!}\varphi'''(x_i) + \cdots$$

- **El método de Euler mejorado** para aproximar numéricamente la solución de (PC): Se calcula y_{i+1} por el método de Euler y se mejora aproximando la integral $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(s,\varphi(s))\,ds$ por el valor medio:
$$\frac{f(x_i,y_i)+f(x_{i+1},y_{i+1})}{2}(x_{i+1}-x_i).$$
Método de orden 2.

- **El método Taylor de orden** n para la aproximación numérica de la solución de (PC): se utilizan en cada iteración los n primeros términos del desarrollo en serie de Taylor de la solución en x_i.

  Para $n=3$ (método de orden 2):
$$y_{i+1} = y_i + f(x_i,y_i)h + (f_x(x_i,y_i) + f_y(x_i,y_i)f(x_i,y_i))\frac{h^2}{2}$$

- **El método de Runge-Kutta**, para aproximar la solución de (PC):
$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(L_{i,1} + 2L_{i,2} + 2L_{i,3} + L_{i,4})$$
$$L_{i,1} = f(x_i,y_i)\,, \qquad L_{i,2} = f(x_i + \frac{1}{2}h\,, y_i + \frac{1}{2}hL_{i,1})\,,$$
$$L_{i,3} = f(x_i + \frac{1}{2}h\,, y_i + \frac{1}{2}hL_{i,2})\,, \qquad L_{i,4} = f(x_i + h\,, y_i + hL_{i,3})\,.$$
Método de orden 4.