Ampliación de Matemáticas

2º Curso, Grado en Ingeniería Civil
(Mención en Construcciones Civiles)

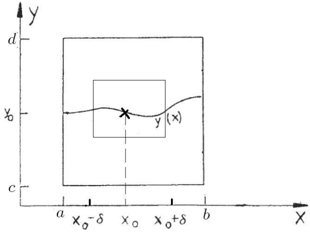
ETSI Caminos, Canales y Puertos,
Universidad de Cantabria

Mª Eugenia Pérez Martínez
meperez@unican.es

El problema de Cauchy: Ecuaciones no lineales

Teorema: *Sea D el rectángulo abierto* $D = \{(x, y)/a < x < b, c < y < d\}$ *y* $f : D \subset \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$, *f y* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *continuas en D. Entonces,* $\forall (x_0, y_0) \in D$, $\exists$ *un intervalo,* $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset (a, b)$, *en el cual existe una única solución* $y = \varphi(x)$ *del problema de Cauchy*

$$(PC) \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$



Observaciones

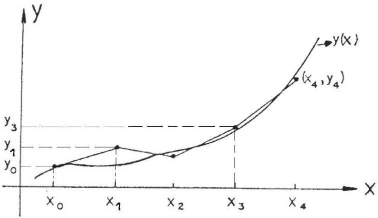
- D puede ser cualquier dominio abierto de $\mathbf{R}^2$.
- El δ máximo en general no es fácil de determinar.

Una primera estimación de δ: $\delta = \min(\alpha, \frac{\beta}{M}), \alpha, \beta /$
$D_1 = \{(x, y)/|x - x_0| \leq \alpha, |y - y_0| \leq \beta\} \subset D$, y, $M = \max_{(x,y)\in D_1} |f(x, y)|$

Solución numérica: Método de Euler

Sean f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ continuas en D, y $(x_0, y_0) \in D$. Sea $y = \varphi(x)$ la única solución de (PC) e en $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

$$(PC) \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$



Se conoce la recta tangente a $\varphi(x)$ en (x_0, y_0)

Para h muy pequeño, en $[x_0, x_0 + h]$, $\quad \varphi(x) \approx y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0)$

Sea $x_1 = x_0 + h$, $\quad \varphi(x) \approx \varphi(x_1) + f(x_1, \varphi(x_1))(x - x_1)$ en $[x_1, x_1 + h]$,

pero $\varphi(x_1) \approx y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0)$

$\Longrightarrow$ en $[x_1, x_1 + h]$, $\varphi(x) \approx y_1 + f(x_1, y_1)(x - x_1)$.

Método de Euler (continua)

Así, construimos **una aproximación de la solución de (PC)** en $[x_0, x_0+\delta]$

Dados (x_0, y_0), $N = \delta h^{-1}$, se calcula recursivamente

$$x_i = x_0 + ih, \quad y_i = y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1}), \, i = 1, 2, ..., N.$$

Solución numérica de (PC) en $[x_0, x_0+\delta]$: $\{y_i\}_{i=0}^{N}$
Aproximación de la solución en $[x_0, x_0+\delta]$:

$$\varphi_h(x) = y_{i-1} + (x - x_{i-1})f(x_{i-1}, y_{i-1}) \, , x \in [x_{i-1}, x_i].$$

h=**tamaño del paso**= $\frac{\delta}{N}$, $\quad h \to 0 \Leftrightarrow N \to \infty$

Para la aproximación en $[x_0 - \delta, x_0]$: cambiar h por $-h$

Método de orden 1: error acotado por $Cte.h$

Sobre convergencia: el *método converge en x si* $\lim_{h\to 0} |\varphi(x) - \varphi_h(x)| = 0.$

Teorema *Sea f,* $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ *continuas en* $[a, b] \times \mathbf{R}$ *y f acotada:*

$$\lim_{h\to 0} |\varphi(x) - \varphi_h(x)| = 0, \quad \forall x \in [x_0, x_0+\delta] \subset [a, b].$$

Sobre errores del método

En la iteración i, el método de Euler nos da un valor y_i aproximado de la solución $\varphi(x_i)$; el ordenador nos da $\tilde{y}_i$

$$E_i = \varphi(x_i) - \tilde{y}_i = \varphi(x_i) - y_i + y_i - \tilde{y}_i.$$

$y_i - \tilde{y}_i$ es el **error de redondeo** / $e_i = \varphi(x_i) - y_i$, **error del método**,

Definición: el método es de orden p si $|e_i| \leq Cte.h^p$

error local de truncatura: El error en la iteración i supuesto que y_{i-1} es exacto ($y_{i-1} = \varphi(x_{i-1})$).

error global: suma de todos los errores locales (e_N) $\quad |e_N| \leq \dfrac{Ch}{2L}(e^{\delta L} - 1)$

donde $C = \max_{(x,y)\in D_1} |f\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x}|$, $L = \max_{(x,y)\in D_1} |\frac{\partial f}{\partial y}|$, siendo D_1 el rectángulo cerrado en el que f y sus derivadas parciales primeras son continuas, $\delta = \min(\alpha, \frac{\beta}{M})$.

- El error en el método de Euler es de orden 1
- El error aumenta al aumentar el intervalo (δ)
- La aproximación es mejor para h pequeño
- Al disminuir h puede aumentar el error de redondeo.

Sobre mejoras del Método de Euler

Considerar:

$$\varphi(x_{i+1}) = \varphi(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(s, \varphi(s))\, ds, \qquad \text{o}$$

$$\varphi(x_i + h) = \varphi(x_i) + h\varphi'(x_i) + \frac{h^2}{2!}\varphi''(x_i) + \frac{h^3}{3!}\varphi'''(x_i) + \cdots$$

- El método de Euler mejorado para aproximar numéricamente la solución de (PC): Se calcula y_{i+1} por el método de Euler y se mejora aproximando la integral $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(s, \varphi(s))\, ds$ por el valor medio:

$$\frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})}{2}(x_{i+1} - x_i).$$

Para $i = 0, 1, \cdots, N-1$

$$x_{i+1} = x_i + h, \quad y_{i+1} = y_i + h\frac{f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i))}{2}$$

Método de orden 2.

Sobre mejoras del Método de Euler (continua)

- El método Taylor de orden n para la aproximación numérica de la solución de (PC): se utilizan en cada iteración los n primeros términos del desarrollo en serie de Taylor de la solución en x_i.
Para $n = 3$ (método de orden 2):

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + (f_x(x_i, y_i) + f_y(x_i, y_i)f(x_i, y_i))\frac{h^2}{2}$$

- El método de Runge-Kutta, para aproximar la solución de (PC):
Para $i = 0, 1, \cdots, N-1$: $\quad x_{i+1} = x_i + h$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(L_{i,1} + 2L_{i,2} + 2L_{i,3} + L_{i,4})$$

donde

$$L_{i,1} = f(x_i, y_i)\,, \quad L_{i,2} = f(x_i + \frac{1}{2}h\,, y_i + \frac{1}{2}hL_{i,1})\,,$$

$$L_{i,3} = f(x_i + \frac{1}{2}h\,, y_i + \frac{1}{2}hL_{i,2})\,, \quad L_{i,4} = f(x_i + h\,, y_i + hL_{i,3})\,.$$

Método de orden 4.

Extensión a ED de segundo orden y a sistemas diferenciales

Dada $f : D \subset \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$, con f, $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ continuas en D, y dado $(x_0, y_0^1, y_0^2) \in D$, **problema de valores iniciales** o **Problema de Cauchy:**

$$(PC)\left\{\begin{array}{ccc} y'' & = & f(x,y,y') \\ y(x_0) = y_0^1 & , & y'(x_0) = y_0^2. \end{array}\right.$$

Haciendo $y' = z$ en la ecuación $y'' = f(x,y,y') \rightarrow$ **sistema diferencial de 1^{er} orden** con dos ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{ccc} y' & = & z \\ z' & = & f(x,y,z). \end{array}\right.$$

x **variable independiente** $y = y(x), z = z(x)$ **incógnitas**

Para aproximación de la solución numéricamente: utilizar fórmulas con notaciones vectoriales:

$$(PC)\left\{\begin{array}{ccc} \overline{y}' & = & \overline{F}(x,\overline{y}) \\ \overline{y}(x_0) & = & \overline{y}_0 \end{array}\right.$$

Ejemplo: método de Euler

Dada la función $\overline{F}$ y el punto $(x_0, \overline{y}_0)$, calcular

$$x_i = x_0 + ih, \quad \overline{y}_i = \overline{y}_{i-1} + h\overline{F}(x_{i-1}, \overline{y}_{i-1}), \quad i = 1, 2, \cdots N$$

Para un sistema con dos ecuaciones y dos incógnitas:

$$(PC) \left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & r(x,y,z) \\ z' & = & s(x,y,z), \\ y(x_0) = y_0 & , & z(x_0) = z_0, \end{array} \right.$$

$\forall (x_0, y_0, z_0) \in D$, $\exists\ \delta$ / la solución del problema de Cauchy (PC) está definida en $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, y es única.

La aproximación numérica de la solución $(y(x), z(x))$ en $x_i = x_0 + ih$, para el tamaño del paso h, es:

$$y_i = y_{i-1} + hr(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$$

$$z_i = z_{i-1} + hs(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}),$$

para $i = 1, 2, \cdots N$, donde $N = \delta h^{-1}$

$(y_i, z_i) \approx (y(x_i), z(x_i))$ para $h \longrightarrow 0$

Para sistemas con n ED y n incógnitas

$$
(PC) \begin{cases} \overline{y}_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) \\ \overline{y}_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) \\ \ldots &= \ldots\ldots. \\ \overline{y}_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) \\ y_1(x_0) &= y_0^1,\ y_2(x_0) = y_2^0, \cdots, y_n(x_0) = y_0^n \end{cases}
$$

Las fórmulas

$$
x_i = x_0 + ih, \quad \overline{y}_i = \overline{y}_{i-1} + h\overline{F}(x_{i-1}, \overline{y}_{i-1}), \quad i = 1, 2, \cdots N,
$$

con $\quad \overline{y}_0 = (y_0^1, y_0^2, \cdots, y_0^n) \quad$ y

$$
\overline{F}(x, \overline{y}) = (f_1(x, y_1, y_2, \cdots, y_n), f_2(x, y_1, y_2, \cdots, y_n), \cdots, f_n(x, y_1, y_2, \cdots, y_n))^T,
$$

implican

$$
y_i^j = y_{i-1}^j + hf_j(x_{i-1}, y_{i-1}^1, y_{i-1}^2, \cdots, y_{i-1}^n), \quad i = 1, 2, \cdots N, \quad j = 1, 2, \cdots n,
$$

donde $N = \delta h^{-1}$;

$$
(y_i^1, y_i^2, \cdots, y_i^n) \approx (y_1(x_i), y_2(x_i), \cdots, y_n(x_i)) \text{ para } h \to 0.
$$