NOMBRE.. **Número**.........
DNI..............................

2^0 Curso - Grado I. CIVIL - Curso 2020/21
Ampliación de Matemáticas (EDO/EDP)
Examen final: segundo parcial: 28- Enero - 2021

Observación: No utilizar calculadora ni apuntes. Todas las respuestas deben ser debidamente razonadas en el examen. Escribir de forma precisa la solución donde se pida, e indicar si se cambia de hoja en una resolución.

EJERCICIO 1
Resolver el problema de valores iniciales

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_1' & = & 4y_1 + 2y_2 \\ y_2' & = & y_1 + 3y_2 + e^x \end{array} \right.$$

$$y_1(0) = 1/2, \;\; y_2(0) = -3/4.$$

SOLUCIÓN GENERAL
SISTEMA HOMOGÉNEO

SOLUCIÓN GENERAL
SISTEMA NO HOMOGENÉO

SOLUCIÓN DEL PROBLEMA

RESOLUCIÓN Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 2

a). Resolver el problemas de contorno

$$x^2y'' + xy' - 4y = 0, \quad x \in (1,2)$$
$$y(1) = 0, \quad y'(2) = 1$$

SOLUCIÓN

b). Considerar la ecuación

$$\Delta u - \frac{4}{x^2+y^2}\,u = 0$$

en coordenadas polares ($x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{4}{r^2}u = 0.$$

Encontrar soluciones independientes de θ que se anulen para $r = 1$. Asimismo, encontrar soluciones que esten acotadas cuando $r \to \infty$. Relacionar dichas soluciones con el apartado a) si se puede; justificar la respuesta.

SOLUCIONES $/u = 0$ para $r = 1$:

SOLUCIONES acotadas:

RELACIÓN con a).:

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS:

EJERCICIO 3 Encontrar los valores propios y funciones propias del problema

$$y'' + \lambda y = 0, \quad x \in (0, 2\pi)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(2\pi) = 0$$

Escribir el desarrollo en serie de Fourier de la función $f(x) = 1$, en términos de las funciones propias encontradas, en el intervalo $(0, 2\pi)$. Escribir el primer coeficiente de Fourier no nulo.

VALORES PROPIOS y FUNCIONES PROPIAS

1^{er} coef. de Fourier no nulo:

DESARROLLO DE $f(x)$.

RESOLUCIÓN Y RAZONAMIENTOS

RESOLUCIÓN Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 4
Resolver el problema mixto para la ecuación del calor:

$$\begin{cases} u_t - 9u_{xx} & = & 0\,, \quad x \in (0, 2\pi), \quad t > 0\,, \\ u(x,0) & = & f(x)\,, \quad x \in (0, 2\pi)\,, \\ u(0,t) & = & 0, \quad t > 0\,, \\ u_x(2\pi, t) & = & 0, \quad t > 0\,. \end{cases}$$

cuando $f(x) = 1$, y cuando $f(x) = \sin(x/4)$. Usar la separación de variables y los resultados del ejercicio 3 si se precisa. Escribir claramente el problema de valores propios al que se llega y las ecuaciones en la variable t que se resuelven.

PROBLEMA DE VALORES PROPIOS

ECUACIONES en la variable t:

SOLUCION del problema para $f(x) = 1$:

SOLUCION del problema para $f(x) = \sin(x/4)$:

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

Ecuaciones Diferenciales: Formulario

-Método de variación de parámetros: cálculo de soluciones particulares

- E.D.O. de primer orden $y' + p(x)y = q(x)$: $\quad k(x) = \int q(x)\,\exp(\int p(x)\,dx)\,dx$
- E.D.O. de segundo orden $\;y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$:
$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1,y_2](x)}\,dx \quad , \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1,y_2](x)}\,dx.$$
- Sistemas de E.D.O. $\bar{y}' = A(x)\bar{y} + \bar{b}(x)$: $\quad \bar{k}(x) = \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)\,dx$

-Reducción de orden para E.D.O. de segundo orden:
$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)\,dx)}{(y_1(x))^2}\,dx$$

- Método de coeficientes indeterminados cálculo de soluciones particulares:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}$
- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ ó $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$,
se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + x^s Q_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

donde p_k, P_k, Q_k son polinomios de grado k,
$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico, $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad n_i.

-Método de Euler para el problema $\;\bar{y}' = \bar{F}(t,\bar{y}),\ \bar{y}(t_0) = \bar{y}_0$:
$$t_{i+1} = t_i + h\,, \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{F}(t_i,\bar{y}_i)$$

- Funciones "escalón" (" Heaviside") y "Delta de Dirac"
$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & si \quad t < a \\ 1 & si \quad t \geq a. \end{cases}$$
$$\delta(t-a) = \begin{cases} \infty & si \quad t = a \\ 0 & si \quad t \neq a. \end{cases} \quad , \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a)dt = 1$$

-Coeficientes de Fourier:
$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\phi_k(x)s(x)\,dx}{\int_a^b (\phi_k(x))^2 s(x)\,dx}$$

- Algunas relaciones trigonométricas:
$$2\sin a\,\sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$$
$$2\sin a\,\cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)$$
$$2\cos a\,\cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$
$$(\sin a)^2 = \frac{1-\cos(2a)}{2}, \quad (\cos a)^2 = \frac{1+\cos(2a)}{2}$$