2^0 Curso - Grado I. CIVIL - Curso 2012/13

Ampliación de Matemáticas: ECUACIONES DIFERENCIALES

HOJA 1 - Preliminares / EDO con MATLAB

1. Operaciones con variables simbólicas y numéricas: analizar el área de trabajo (*workspace*) en MATLAB

2. Definir una función de una variable independiente, por ejemplo $h(t) = 2\sin(t) + t^2 + e^{-t}$

3. Calcular las derivadas sucesivas de h: h', h'',... (*diff*).

4. Calcular las integrales $\int h(t)dt$, $\int_0^2 h(t)dt$ y el valor numérico de esta integral (*int*, *double*, *format*...).

5. Evaluar las funciones $\sin(t)$ y $h(t)$ en $t = 2$.

6. Hacer la gráfica de la función $h(t)$ en el intervalo $[0, 2]$. Usar los comandos *ezplot* y *plot* y comparar las gráficas (*hold on* / *hold off*). Repetir cambiando de intervalo.

7. Definir una función de dos variables independientes t, x: e.g., $u(t, x) = \sin(x)\cos(t) + t^2$. Calcular distintas derivadas parciales de u, integrales dobles, integrales definidas,... Evaluar u en distintos puntos.

8. Hacer la gráfica de la superficie $z = u(t, x)$ para $(t, x) \in [0, 3] \times [0, 1]$. Dibujar distintas curvas de nivel, cortes por planos t (o x) constante , ...(*ezsurf* / *ezplot*).

9. Resolver una ecuación diferencial de primer orden: por ejemplo, la ecuación lineal $y' = t + y$, siendo t variable independiente (*dsolve*)

10. Resolver un problema de Cacuchy asociado: por ejemplo, $y' = t + y$, $y(0) = 1$. Hacer una gráfica de la solución en distintos intervalos.

11. Resolver la ecuación de Riccati
$$y' = -\frac{y}{t} + y^2 - \frac{1}{t^2},$$
y los distintos problemas de Cauchy asociados con las condiciones inciales $y(2) = 1$, $y(1) = 1$ (dibujar las soluciones).

12. Resolver (aplicar cambios de variable y/o fórmulas integrales si se necesita, y comprobar si la solución obtenida verifica la ecuación diferencial):
$$y' = \frac{t+y}{t-y} \quad , \quad y' = \frac{t-y}{t+y}$$

13. Utilizando MATLAB, resolver algunas ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden del libro de apuntes (o de las hojas de problemas de clase). Verificar si son soluciones y comparar con la solución obtenida en clase y/o utilizando las fórmulas integrales. Dibujar algunas soluciones.

2^0 Curso - Grado I. CIVIL - Curso 2012/13

Ampliación de Matemáticas: ECUACIONES DIFERENCIALES

HOJA 2 - Campos de direccciones asociados a EDO

1.- Utilizando MATLAB (*dfield*), dibujar los campos de direcciones asociados a las ecuaciones cuaciones diferenciales ordinarias de primer orden del libro de apuntes (o de las hojas de problemas de clase). En particular, dibujar los campos de direcciones asocidados a las siguientes ecuaciones:

1. La ecuación de Riccati: $y' = y^2 - t$

   Utilizar el comando *ezplot* para dibujar curvas isoclinas para distintas pendientes, e.g., pendiente 0, ± 1, ± 2,

   Dar un punto y dibujar la solución pasando por él en un intervalo. Elegir los distintos métodos numéricos que permite el entorno, variando tamaños de paso e intervalos de aproximación.

2. La ecuación lineal $y' = -y + 3 + \cos(t)$, para $(t, y) \in [-2, 14] \times [-2, 6]$.

   Calcular con *dsolve* y dibujar con *ezplot* la curva hacia la que tienden asintóticamente todas las soluciones cuando $t \to \infty$

3. La ecuación homogénea $y' = \dfrac{y+t}{t-y}$. Considerar $y, t \in [-4, 4]$

   Dibujar la solución del problema de Cauchy : $y' = (t+y)/(t-y), \quad y(-2) = 0$, en [-2.5, -1.5]. Ampliar el intervalo.

4. La ecuación de Bernouilli $y' = y(1 - y^2)$ para $y \in [0, 0.1]$ y $t \in [0, 2]$.

   En particular dibujar y comparar las soluciones pasando por (0, 0.01), (0, 0.001). .

5. La ecuación de variables separadas $y' = -\frac{y}{\sin(t)}$. Considerar $(t, y) \in [-2\pi, 2\pi] \times [-4, 4]$.

   Dibujar las isoclinas para las pendientes $k = 0, -2, 1/2, \infty$.

   Encontrar los puntos del plano donde el campo de direcciones no está definido.

Interpretar los resultados obtenidos.

2.- Dibujar el campo de direcciones asociados a los modelos de Malthus y Verhulst para crecimiento de poblaciones:

$$\frac{dN}{dt} = \gamma N$$

$$\frac{dN}{dt} = \gamma N(1 - \frac{N}{N_\infty})$$

(ver sección 1.6.1 del libro de apuntes). Tomar $t \in [0, 10]$, $N \in [0, 6]$, y los distintos valores de las constantes $N_\infty = 2$, $\gamma = \pm 0.3$. Interpretar los resultados en términos del comportamiento de la población.

2^0 Curso - Grado I. CIVIL - Curso 2012/13

Ampliación de Matemáticas: ECUACIONES DIFERENCIALES

HOJA 3 - Resolución numérica de EDO

1. Considerar el problema de Cauchy

$$y' = t + y, \quad y(0) = 1,$$

Comparar la solución exacta con la aproximada obtenida por el método de Euler para distintos tamaños del paso h.

Repetir con los métodos de Euler mejorado y Runge-Kutta.

Comparar la solución con la obtenida utilizando la función MATLAB $ode45$

2. Considerar el problema de Cauchy :

$$y' = x^2 + y^2\,, \quad y(0) = 1$$

Comprobar usando $dfield$ que la solución no está definida en $[0, 1]$ (ver ejemplo 13 de la sección 1.7 del libro de apuntes; ver también el ejercicio 10 de la sección 1.7)

Aplicar el método de Runge-Kutta, para distintos tamaños del paso, viendo como la solución crece muy deprisa en el intervalo $[0.9, 1]$. Hacer gráficas de las soluciones.

Establecer un control de paso que nos permita tomar h tal que $y(0.9) \approx 14.27$.

Considerar el problema de Cauchy: $y' = x^2 + y^2\,, \quad y(0.9) = 14.27$. Aplicar el método de Runge-Kutta para distintos tamaños del pasos en $[0.9, 1]$. Tomar, e.g., $h = 0.001$

Utilizando las soluciones numéricas de los apartados anteriores, dibujar la aproximación de la solución de $y' = x^2 + y^2\,, \quad y(0) = 1$, en $[0, 0.96]$.

Utilizar la funcionón MATLAB $ode45$, para resolver numericamente.

3. Resolver explícita o numericamente los problemas de Cauchy:

$$\left\{\begin{array}{rcl} y' &=& x + y - 3 \\ y(0) &=& 2, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} y' &=& x + y - 3 \\ y(0) &=& 2.001, \end{array}\right.$$

Comparar las soluciones mediante una gráfica en los intervalos [0,5], [0,10], [0,100]. Comparar las soluciones en $x = 1$ y en $x = \log 10^6$.

4. Para otros errores que pueden aparecer con los métodos numéricos, como son los de redondeo, o los de propagación de los errores en los datos de un problema ver, por ejemplo, ejercicios 1 y 12 de las secciones 1.6 y 1.7 respectivamente del libro de apuntes

5. Utilizar una función MATLAB para resolver numericamente, en el intervalo $[0.5, 1.5]$ los problemas de Cauchy:

$y' = y^2 - x^2$, $y(1) = 1.1$, / $\quad y' = ye^{-x^2}$, $y(1.1) = 1$, / $\quad y' = -y + 3\cos(x)$, $y(1) = 1$

Cambiar de condición inicial, intervalo, método y ecuación.

2^0 Curso - Grado I. CIVIL - Curso 2012/13

Ampliación de Matemáticas: ECUACIONES DIFERENCIALES

HOJA 4 - Resolución numérica de EDO y sistemas

1. Resolver numéricamente el problema de Cauchy

$$y'' = 2y^3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

en el intervalo $[0, 1/2]$, utilizando las funciones MATLAB eul, $rk2$ y $rk4$, para distintos tamaños de paso $h = 0.1, h = 0.05, h = 0.001$.

Utilizar también $ode45$ y comparar las distintas aproximaciones con la solución exacta mediante gráficas. Comparar valores en $x = 1/2$. (solución exacta: $y = 1/(1-x)$, ver ejemplo 21, Sección 2.1 del libro de apuntes).

2. Resolver numéricamente el problema de Cauchy relativo a la ecuación del péndulo

$$y'' + sin(y) = 0,$$

con condiciones inciales $y(0) = 0, y'(0) = 0.2$. Utilizar $ode45$ y el intervalo $[0, 6\pi]$.

Comparar la solución con con la del problema de Cauchy para la ecuación linealizada:

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.2$$

3. Se considera el problema de valor inicial

$$y'' - x^2 y = e^x, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = \beta$$

Tomando los distintos valores de $\beta = \pm 1$, ± 0.5, ± 0.25, aproximar numéricamente la solución en [0,1] (utilizar $ode45$.)

Indicar qué valor de β es el mejor para aproximar la solución del problema de contorno

$$y'' - x^2 y = e^x, \quad x \in (0, 1)$$
$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

Intentar mejorar β, y escribir el valor aproximado de la solución obtenida en $x = 1$.

Utilizar *dsolve* para comprobar que el problema de contorno dado tiene solución única.

4. Usando la técnica del ejercicio anterior resolver

$$y'' - y = x^2, \quad x \in (0, 1)$$
$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

Empezar con valores de $\beta = \pm 0.1$. Comparar con la solución exacta.

5. Utilizar un método en diferencias finitas de orden 2 para resolver los dos ejercicios anteriores. Comparar solución exacta y soluciones aproximadas, para distintos tamaños de paso h, para la ecuación $y'' - y = x^2$.

Considerar otras ecuaciones y otras condiciones de contorno.

6. Encontrar la solución exacta y numérica de un problema de Cauchy para uno de los sistemas diferenciales resueltos en clase, comparando soluciones.

2^0 Curso - Grado I. CIVIL - Curso 2012/13

Ampliación de Matemáticas: ECUACIONES DIFERENCIALES

HOJA 5 - Modelos Matemáticos y T. de Laplace

1.- Estudiar el comportamiento de las vibraciones del modelo de resorte lineal

$$my'' + ky' + cy = p(t)$$

dependiendo de la relación entre las constantes masa m, recuperación c y amortiguación k (ver sección 2.5 del libro de apuntes).

Tomando $p(t) = 0$, y las ecuaciones

$$y'' + 3y' + 2y = 0, \quad y'' + 2y' + 2y = 0, \quad y'' + 4y' + 4y = 0, \quad y'' + 4y = 0$$

hacer una gráfica de las soluciones para distintas condiciones iniciales indicando cuándo el movimiento es débilmente amortiguado, fuertemente amortiguado o periódico.

En ausencia de amortiguación, comparar los distintos comportamientos para distintas fuerzas actuando sobre el sistema resorte-masa: e.g., tomar $k = 0$, $m = 1$, $c = 4$, $p(t) = cos(t)$ y $p(t) = cos(2t)$

2.- Utilizar la transformada de Laplace para resolver los problemas que se enuncian a continuación. Si se pueden resolver con el comando *dsolve*, comprobar que la solución que se obtiene es la misma. Hacer una gráfica de la solución en un intervalo que contenga puntos de discontinuidad de los datos.

1. $y' - y = 1, \qquad y(0) = A$, siendo A una constante
2. $y'' - 3y' + 2y = 4te^{3t}, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$
3. $y'' + 2y' + 2y = 3\delta(t - pi), \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

   (ver ejercicio 7 de la sección 2.7 del libro de apuntes, relativo a modelos de resortes o circuitos)
4. $y'' + y = -u(t) + u(t-1), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

   (ver ejercicio 16, sección 7.2 del libro de apuntes, relativo a modelos de resortes lineales)
5. $$y^{iv} = \delta(x-1), \quad x \in (0,2)$$
   $$y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(2) = y'''(2) = 0$$
   (problema de contorno relativo a un modelo de vigas; ver sección 2.7 del libro de apuntes).
6. $$\left\{\begin{array}{rcl} y + z' & = & e^{-t} \\ 3y + y' & = & z - 3z' \\ y(0) = 1 & , & z(0) = 1. \end{array}\right.$$
   (Problema de Cauchy para un sistema diferencial lineal de primer orden; ver ejercicio 10-a de la sección 2.7 del libro de apuntes)