Problemas gravitación

Soluciones

1. *Utilizando los datos de los planetas del Sistema Solar, calcular la masa del Sol.*

Se trata de aplicar la 3ª ley de Kepler a cada uno de los planetas (incluido Plutón):

$$\tau^2 = \frac{4\pi^2}{GM_\odot} a^3$$

donde τ es el periodo del planeta y a el semieje mayor de su órbita alrededor del Sol, cuya masa es $M_\odot$. Convirtiendo periodos a años terrestres y semiejes a U.A., el cociente

$$\frac{a^3}{\tau^2}$$

será exactamente 1 para la Tierra. En la tabla se listan los resultados:

Planeta	Masa (UA^3/años^2)
Mercurio	0.9953
Venus	0.9868
Tierra	1
Marte	0.9936
Júpiter	0.9919

Planeta	Masa (UA³/años²)
Saturno	0.9983
Urano	0.9903
Neptuno	0.9934
Plutón	0.9947

Calculando el promedio y la dispersión se obtiene 0.9938 +/- 0.0037.
Calculando ahora en unidades del S.I. para la Tierra, se obtiene que $M_{\odot}(Tierra) = 2.0086 \times 10^{30}\ \text{kg}$ por lo tanto, para el Sistema Solar,

$$M_{\odot} = (1.996 \pm 0.007) \times 10^{30}\ \text{kg}$$

2. *Una partícula se mueve en una órbita elíptica de semieje mayor a. Calcular la velocidad de la partícula en función de la distancia al foco.*

La energía de una partícula con velocidad v a una distancia r del centro del potencial (uno de los focos) es,

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$$

En una órbita elíptica se tiene también que

$$E = -\frac{GMm}{2a}$$

donde a es el semieje mayor de la órbita. Por tanto

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2a}$$

$$\frac{1}{2}v^2 = GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right)$$

$$v = \sqrt{2GM}\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}}$$

3. *Un cometa de masa m se observa a una distancia 10^{11} m del Sol, acercándose a él a una velocidad de 5.16×10^4 m/s formando su trayectoria un ángulo de 45º con el radio que parte del Sol. Obténgase la ecuación de la órbita del cometa y la distancia de máximo acercamiento al Sol. ¿Volverá el cometa a acercarse al Sol?*

La ecuación general de una órbita kepleriana es la cónica

$$\frac{1}{r} = B + A\cos\theta$$

con

$$B = \frac{GMm^2}{L^2} \quad \text{y} \quad A = \left(B^2 + \frac{2mE}{L^2}\right)^{1/2}$$

donde E es la energía de la partícula y L su momento angular. Calculamos estas dos cantidades para el cometa:

puesto que el ángulo que forman el radio vector $\vec{r}$ y la velocidad $\vec{v}$ del cometa es 45º, tenemos

$$L = \left|\vec{L}\right| = m\left|\vec{r}\times\vec{v}\right| = mrv\sin(45) = m3.65\times10^{15} \ \ \mathrm{kg\cdot m^2/s}$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{mGM_\odot}{r} = -m2.72\times10^6 \ \mathrm{J}$$

Así,

$$B = 1.0013\times10^{-11} \quad \text{y} \quad A = 9.993\times10^{-12}$$

Y entonces la excentricidad de la órbita y la ecuación de la órbita son:

$$\varepsilon = \frac{A}{B} = 0.9980$$

$$r = \frac{9.987\times10^{10}}{1+0.9980\cos\theta}$$

La distancia de máximo acercamiento es, en este caso, el perihelio,

$r_P = a(1-\varepsilon)$

donde el semieje mayor es

$$a = \frac{-GmM_{\odot}}{2E} = 2.45\times10^{13}\ \text{m}$$

$r_P = 5\times10^{10}\ \text{m} = 0.333\ \text{U.A.}$

El cometa volverá a acercarse al Sol puesto que su órbita es elíptica.

4. *Un satélite geoestacionario es aquel que aparece fijo desde un punto de la superficie terrestre. Calcular el radio de su órbita.*

Para permanecer fijo desde un punto de la superficie terrestre, el satélite debe tener un periodo de 24h, por tanto, de la tercera ley de Kepler,

$$a = \left(\frac{GM_T}{4\pi^2}\tau^2\right)^{1/3} = 42200\ \text{km}$$

y la altura sobre la superficie será entonces 42200-6371=35829 km.

5. *La órbita de un asteroide alrededor del Sol se extiende desde la órbita de la Tierra hasta la de Júpiter. Calcular su periodo orbital, su velocidad mínima y su velocidad máxima.*

El perihelio del asteroide es el radio de la órbita terrestre y su afelio es el radio de la órbita de Júpiter. Así, el semieje mayor de la órbita es,

$$a = \frac{r_P + r_A}{2} = \frac{150+778}{2}\times10^9 = 4.64\times10^{11}\ \text{m}$$

Así su periodo es

$$\tau = \left(\frac{4\pi^2}{GM_\odot} a^3 \right)^{1/2} = 1.72 \times 10^8 \text{ s} = 5.45 \text{ años}$$

Las velocidades mínima y máxima ocurren en el afelio y perihelio respectivamente. Utilizando el resultado del problema 2,

$$v_A = \sqrt{2GM_\odot} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{2a} \right)^{1/2} = 7445 \text{ m/s}$$
$$v_P = \sqrt{2GM_\odot} \left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{2a} \right)^{1/2} = 38615 \text{ m/s}$$

6. *Dos planetas se mueven en el mismo plano con órbitas circulares de radios r_1 y r_2. Se ha de lanzar una sonda espacial desde el planeta 1 al planeta 2. Puede demostrarse que para lanzarla con la mínima velocidad posible, debe ponerse en una órbita elíptica con perihelio r_1 y afelio r_2. Cálcúlese dicha velocidad en función de r_1 y r_2 y de la duración del año del planeta 1. Cálculese la duración del viaje de la sonda. Aplicar a sondas enviadas desde la Tierra a Marte.*

La sonda parte del planeta 1 (interior) con velocidad v_1 respecto al Sol y llega al planeta 2 (exterior) con velocidad v_2. Al corresponder al perihelio y afelio respectivamente, estas velocidades son perpendiculares al radio vector de la órbita de la sonda. Para encontrar las velocidades debemos aplicar las leyes de conservación del momento angular y de la energía en estos dos puntos:

$$L = mv_1 r_1 = mv_2 r_2$$
$$E = \frac{1}{2} v_1^2 - \frac{GM_\odot}{r_1} = \frac{1}{2} v_2^2 - \frac{GM_\odot}{r_2}$$

despejando v_2 de la primera y substituyendo en la segunda, obtenemos:

$$v_1 = \sqrt{2GM_\odot \left(\frac{r_2}{r_1}\right)\left(\frac{1}{r_1+r_2}\right)}$$

Para poner esta velocidad en términos del año del planeta 1,

$$\tau_1^2 = \frac{4\pi^2}{GM_\odot} r_1^3 \rightarrow \frac{1}{r_1} = \left(\frac{4\pi^2}{GM_\odot}\right)^{1/3} \frac{1}{\tau_1^{2/3}}$$

$$v_1 = \left(\frac{2\pi GM_\odot}{\tau_1}\right)^{1/3} \left(\frac{2r_2}{r_1+r_2}\right)^{1/2}$$

La duración del viaje de la sonda será entonces

$$T_S = \tau_S / 2$$

$$\tau_S^2 = \frac{4\pi^2}{GM_\odot} a_S^3 = \frac{4\pi^2}{GM_\odot} \frac{(r_1+r_2)^3}{8}$$

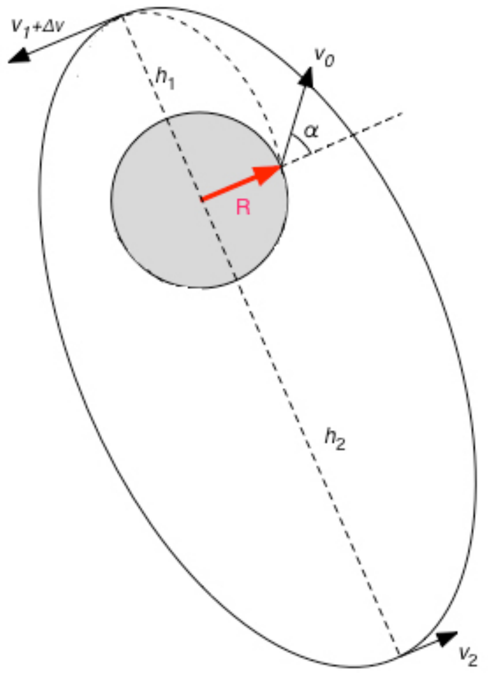
Para sondas enviadas desde la Tierra a Marte, se obtiene

$$v_1 = 32824 m/s$$

$$T_S = 2.24 \times 10^7 s = 260 \text{ días}$$

La velocidad relativa a la Tierra será 2939 m/s.

7. *Desde la superficie terrestre se lanza un satélite formando un ángulo α con la vertical con una velocidad inicial v_0 tal que cuando alcanza una altura h_1 sobre la superficie terrestre, su velocidad es horizontal. Justo en ese momento se encienden los motores propulsores que comunican al satélite una velocidad adicional Δv_1. La órbita final ha de ser elíptica con perigeo h_1 y apogeo h_2 (referidos a la superficie terrestre). Hállense las velocidades v_0 y Δv_1 requeridas en función de R, α, h_1, h_2, y g, siendo R y g el radio terrestre y la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre, respectivamente.*



Hay dos órbitas. La primera desde el punto de lanzamiento donde el satélite tiene velocidad v_0 y su distancia al centro de la Tierra R hasta el punto en que su velocidad v_1 es paralela al suelo y está a la altura h_1. Al propulsar en ese punto, se le imparte al cohete una velocidad extra Δv, de modo que pasa a la órbita deseada con perigeo y apogeo R-h_1 y $R+h_2$ respectivamente. Aplicando conservación del momento angular y energía en los dos puntos mencionados de la primera órbita y en el apogeo y perigeo de la segunda:

$$v_0 R \sin\alpha = v_1(R+h_1)$$
$$\frac{1}{2}v_0^2 - \frac{GM}{R} = \frac{1}{2}v_1^2 - \frac{GM}{R+h_1}$$
$$(v_1+\Delta v)(R+h_1) = v_2(R+h_2)$$
$$\frac{1}{2}(v_1+\Delta v)^2 - \frac{GM}{R+h_1} = \frac{1}{2}v_2^2 - \frac{GM}{R+h_2}$$

de las dos primeras se obtiene

$$v_0 = \sqrt{2g}\sqrt{\frac{Rh_1(R+h_1)}{R^2\cos^2\alpha + h_1(2R+h_1)}}$$
$$v_1 = v_0\frac{R\sin\alpha}{R+h_1}$$
$$g = \frac{GM}{R^2}$$

De las dos últimas,

$$v_1 + \Delta v = \sqrt{2g}\sqrt{\frac{R^2(R+h_2)}{R+h_1}\cdot\frac{1}{2R+h_1+h_2}}$$

8. *Calcular la velocidad necesaria para que la Tierra escape de la atracción del Sol. Compararla con la velocidad media de la Tierra en su órbita.*

La velocidad de escape de una partícula a la distancia r de la masa central es

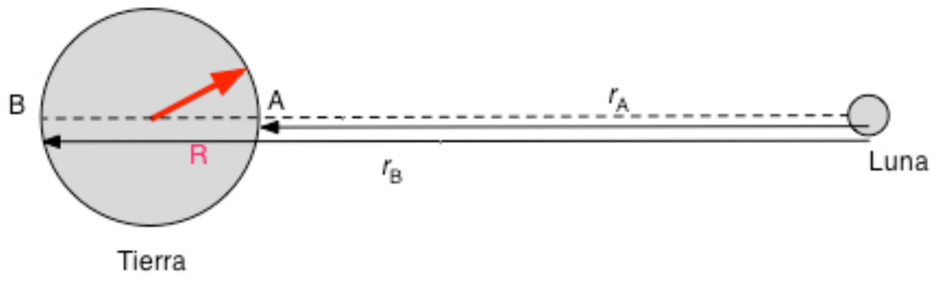
$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

Para la Tierra, se obtiene 42 km/s. Su velocidad orbital, suponiendo una órbita circular es

$$v_{orb} = \frac{2\pi r}{T}$$

siendo T el periodo de la órbita. Para la Tierra esta es ~ 30 km/s. Así $v_e \sim 1.4 v_{orb}$

9. *Sea Δg_M la diferencia de intensidad del campo gravitatorio producido por la Luna entre los puntos de la superficie terrestre más cercano y más alejado de la Luna. Calcúlese el cociente $\Delta g_M/g$ donde g es el campo gravitatorio terrestre en la superficie. Esta diferencia es el origen de las mareas.*



Considérense entonces los puntos más cercano a la Luna (A) y más alejado de la Luna (B) y calculemos la magnitud del campo gravitatorio lunar en dichos puntos:

$$g_A = \frac{GM_L}{r_A^2}$$

$$g_B = \frac{GM_L}{r_B^2} = \frac{GM_L}{(r_A + 2R)^2}$$

La diferencia de campo es entonces,

$$\Delta g_M = g_A - g_B = GM_L\left(\frac{1}{r_A^2} - \frac{1}{(r_A + 2R)^2}\right)$$

puesto que el radio terrestre es mucho más pequeño que la distancia Tierra-Luna (~1/60),

$$r_A \gg R$$

$$\frac{1}{(r_A + 2R)^2} = \frac{1}{r_A^2}\frac{1}{(1 + 2R/r_A)^2} \simeq \frac{1}{r_A^2}(1 - 4\frac{R}{r_A})$$

Así, finalmente,

$$\Delta g_M = \frac{GM_L}{r_A^2}\frac{4R}{r_A} = \frac{4RGM_L}{r_A^3}$$

$$\frac{\Delta g_M}{g} = 4\frac{M_L}{M_T}\left(\frac{R}{r_A}\right)^3$$

siendo *g* la gravedad en la superficie terrestre.

10. *Debido a la fusión termonuclear que se produce en el interior del Sol, éste pierde masa a razón de 3.634 × 10^9 kg/s. A lo largo de los ~ 5000 años de historia de la humanidad, ¿cuánto ha variado la duración del año terrestre debido a la pérdida de masa del Sol? Supóngase que la órbita terrestre es circular y que no hay fuerzas externas actuando sobre el sistema.*

Si no hay fuerzas externas se conserva el momento angular de la Tierra, L, pero no así la energía puesto que el Sol pierde masa. Combinando la tercera ley de Kepler y la conservación del momento angular,

$$L = mva = m\frac{2\pi a}{T}a \rightarrow a = \sqrt{\frac{LT}{2\pi a}}$$

$$GM_{\odot}T^2 = 4\pi^2 a^3 = 4\pi^2\left(\frac{LT}{2\pi m}\right)^{3/2} \rightarrow$$

$$GM_{\odot}T^{1/2} = 4\pi^2\left(\frac{L}{2\pi m}\right)^{3/2} = cte$$

Derivando esta última respecto al tiempo:

$$G\frac{dM_{\odot}}{dt}T^{1/2} + \frac{1}{2}GM_{\odot}T^{-1/2}\frac{dT}{dt} = 0$$

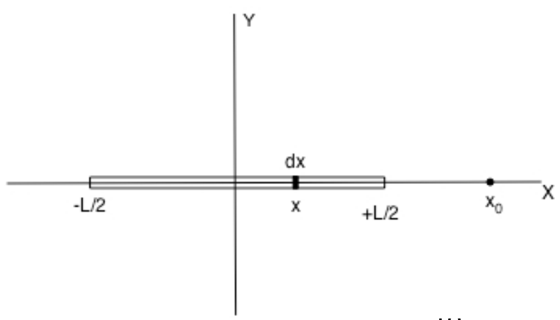
o

$$\frac{dT}{dt} = -2\frac{T}{M_{\odot}}\frac{dM_{\odot}}{dt}$$

substituyendo los valores actuales para el periodo y la masa solar y suponiendo que la pérdida de masa es constante, el incremento de periodo desde hace 5000 años es,

$$\Delta T \approx 1.82\times 10^{-2}\, s$$

11. *Una varilla infinitamente delgada de masa M, longitud L y densidad uniforme está centrada en el origen a lo largo del eje X. Calcular el campo gravitatorio debido a la varilla en el punto x_0 en el eje X, con x_0 > L/2.*



Considérese el punto x_0 sobre el eje *X*. El potencial generado por un elemento de la varilla de anchura *dx* situado en *x* sobre la varilla es

$$d\Phi(x_0) = -G\frac{dm}{x_0 - x}$$

$$dm = \lambda dx = \frac{M}{L}dx$$

donde λ es la densidad de masa de la varilla y que es *M/L*. Para sumar todas las contribuciones de los trozos de la varilla se integra desde -L/2 a L/2:

$$\Phi(x_0) = \frac{-GM}{L}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{dx}{x_0 - x} = \frac{-GM}{L}\left(-\ln(x_0 - x)\right)\Big|_{-L/2}^{L/2}$$

$$= \frac{GM}{L}\ln\left(\frac{2x_0 - L}{2x_0 + L}\right)$$

El campo gravitatorio está dirigido hacia el centro de la varilla, a lo largo del eje *X* y magnitud,

$$g(x_0) = -\frac{d\Phi}{dx_0} = \frac{GM}{L}\frac{1}{x_0 - L/2}$$

12. *Calcular el campo gravitatorio creado por una esfera sólida de masa M, radio R y densidad uniforme.*

Podemos utilizar la expresión general para el potencial gravitatorio generado por una distribución esférica de masa de densidad ρ(*r*):

$$\Phi(r) = -4\pi G\left[\frac{1}{r}\int_0^r \rho(r')dr' + \int_r^\infty \rho(r')r'dr'\right]$$

En este caso,

$$\rho(r') = \begin{cases} \rho_0 & r \le R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

Para puntos fuera de la esfera (*r*>*R*) podemos aplicar el teorema de Newton,

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r}$$

es decir, el potencial es el mismo que el generado por una masa puntual de masa *M*.

Puntos dentro de la esfera:

$$\begin{aligned}\Phi(r) &= -4\pi G\left[\frac{1}{r}\int_0^r \rho_0 r'^2\,dr' + \int \rho_0 r'dr'\right] \\ &= -4\pi G\left[\frac{1}{r}\rho_0 \left.\frac{r'^3}{3}\right|_0^r + \rho_0 \left.\frac{r'^2}{2}\right|_r^R\right] \\ &= -\frac{GM}{R^3}\left[\frac{3}{2}R^2 - \frac{1}{2}r^2\right]\end{aligned}$$

Y el campo gravitatorio es,

$$g(r) = \begin{cases} -\dfrac{GM}{r^2} & r > R \\ -\dfrac{GM}{R^3}r & r \le R \end{cases}$$

Este resultado se aplica al ejemplo de un objeto moviéndose a través de un hipotético túnel practicado desde el Polo Norte al Polo Sur (o dos puntos diametralmente opuestos en la superficie de un planeta. La fuerza gravitatoria sobre el objeto es

$$\vec{F} = m\vec{g} = -\frac{GMm}{R^3} r\vec{u}$$

donde $\vec{u}$ es un vector unitario en la dirección radial desde el centro del planeta. Por tanto su ecuación del movimiento es:

$$m\ddot{r} = -\frac{GMm}{R^3} r$$
$$\ddot{r} + \frac{GM}{R^3} r = 0$$

que es la de un oscilador armónico de frecuencia

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{GM}{R^3}} = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

es decir, tal objeto oscila indefinidamente con un periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

Para el caso de la Tierra, por ejemplo,

$$T = 5063 \text{ s} \approx 1.4 \text{ horas}$$

13. *Una esfera sólida de radio R y masa M tiene una densidad que depende de la distancia al centro:*

$$\rho(r) = \begin{cases} Cr & r \le R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

Calcular el campo gravitatorio a la distancia r del centro de la esfera.

Debemos calcular primero la constante C obligando a que la masa sea M.

$$M = 4\pi \int_0^R Cr^3 dr = \pi C R^4 \rightarrow C = \frac{M}{\pi R^4}$$

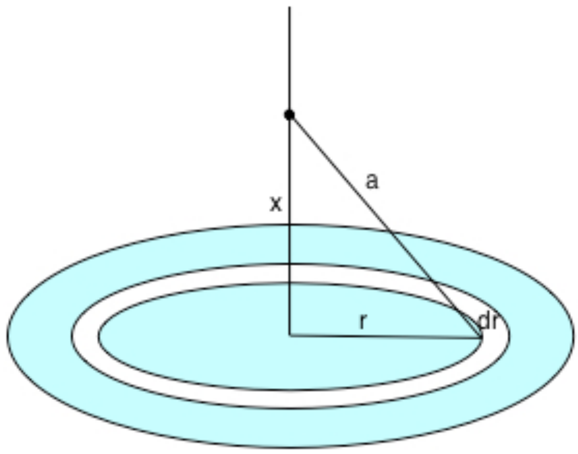
El campo para $r>R$ es simplemente

$$g(r) = -\frac{GM}{r^2}$$

y para puntos del interior

$$g(r) = -\frac{GM(r)}{r^2} = -\frac{4\pi G}{r^2}\int_0^r \rho(r')r'^2\, dr' = -\frac{GM}{R^4} r^2$$

14. *Nuestra galaxia puede considerarse un disco infinitamente delgado de radio R y masa M con densidad uniforme. (a) Considérese un anillo en dicho disco, de radio r y anchura dr. Calcular el potencial en un punto situado en el eje de este anillo a una distancia x del centro. (b) Integrar a todo el disco para calcular el potencial total debido al disco en el punto x. (c) Calcular la componente del campo gravitatorio a lo largo del eje.*



(a) Sea el punto x situado en el eje del disco. Todos los puntos materiales de un anillo cualquiera del disco contribuyen por igual al potencial gravitatorio en dicho punto por ser de densidad uniforme y estar todos a la misma distancia a de x. Por tanto, el potencial es, debido al anillo,

$$\delta\Phi(x) = -\frac{G \times masa\ del\ anillo}{a} = -\frac{Gdm}{a} = -\frac{Gdm}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$

La masa del anillo es su área por su densidad superficial de masa σ:

$$dm = \sigma 2\pi r dr = \frac{M 2\pi}{\pi R^2} r dr = \frac{2M}{R^2} r dr$$

así el potencial debido al anillo es,

$$\delta\Phi(x) = -\frac{2GM}{R^2} \frac{rdr}{\sqrt{x^2 + r^2}}$$

(b) Integrando a todo el disco:

$$\Phi(x) = -\frac{2GM}{R^2}\int_0^R \frac{rdr}{\sqrt{x^2+r^2}} = -\frac{2GM}{R^2}\sqrt{x^2+r^2}\Big|_0^R$$
$$= -\frac{2GM}{R^2}\left(\sqrt{x^2+R^2} - x\right)$$

(c) El campo gravitatorio sólo tiene componente a lo largo del eje, por simetría, y está dirigido al centro del disco y su magnitud es

$$g(x) = -\frac{d\Phi}{dx} = \frac{2GM}{R^2}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}} - x\right]$$

15. *Repetir el problema anterior pero considerando ahora que la densidad superficial del disco varia como σ(r)=C/r.*

Si la masa total es *M* entonces

$$M = 2\pi\int_0^R \sigma(r)r\,dr = 2\pi C\int_0^R dr = 2\pi CR \to C = \frac{M}{2\pi R}$$

Como en el problema anterior:

$$\delta\Phi(x) = -\frac{G\times masa\ del\ anillo}{a} = -\frac{Gdm}{a} = -\frac{Gdm}{\sqrt{r^2+x^2}}$$
$$= -\frac{2\pi G\sigma(r)rdr}{\sqrt{r^2+x^2}} = -\frac{GM}{R}\frac{dr}{\sqrt{r^2+x^2}}$$

Integrando al disco:

$$\Phi(x) = -\frac{GM}{R}\int_0^R \frac{dr}{\sqrt{r^2+x^2}} = -\frac{GM}{R}\ln\left[r+\sqrt{x^2+r^2}\right]_0^R$$
$$= -\frac{GM}{R}\ln\left[\frac{R+\sqrt{x^2+R^2}}{x}\right]$$

Y el campo gravitatorio a lo largo del eje perpendicular:

$$g(x) = -\frac{d\Phi}{dx} = -\frac{GM}{R}\left[\frac{x}{R\sqrt{x^2+R^2}+x^2+R^2} - \frac{1}{x}\right]$$

16. *Una nube difusa de gas, de forma esférica y densidad ρ está inicialmente en reposo y comienza a colapsar a causa de su propia atracción gravitatoria. Encontrar la velocidad radial de una partícula que comienza en reposo en un radio a, cuando alcanza un radio r. Demostrar que todas las partículas de la nube alcanzan el centro al mismo tiempo y que tiempo necesario para el colapso es* $(3\pi / 32\rho G)^{1/2}$*, independiente del radio inicial de la nube. Calcular este tiempo si la densidad es* 10^{-22} *g/cm*^{3}*.*

En *t =0* la partícula parte del reposo de *r =a.* La densidad de la nube es ρ en ese instante. Al ser una distribución esférica de masa, la partícula es atraída por el campo gravitatorio debido a la masa encerrada en una esfera de radio *a, M(a).* Su energía en este instante es pues

$$E = -\frac{GM(a)}{a}$$

En $t > 0$, al colapsar, todas las partículas de la nube, dentro del radio *r,* siguen dentro de *r* y por tanto, la masa dentro de ese radio es constante

$$M(r) = \frac{4\pi}{3}r^3\rho(r) = cte = \frac{4\pi}{3}a^3\rho(a) = \frac{4\pi}{3}a^3\rho \rightarrow$$

$$\rho(r) = \rho\frac{a^3}{r^3}$$

es decir, la densidad aumenta a medida que la nube colapsa. Su energía es

$$E = \frac{1}{2}v^2 - \frac{GM(r)}{r} = \frac{1}{2}v^2 - \frac{GM(a)}{r}$$

Por conservación de la energía:

$$-\frac{GM(a)}{a} = \frac{1}{2}v^2 - \frac{GM(a)}{r} \rightarrow$$
$$v = \sqrt{2GM(a)}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right)^{1/2} = \sqrt{2GM(a)}\left(\frac{a-r}{ar}\right)^{1/2}$$

Esto es una ecuación en *r(t)*

$$v = -\frac{dr}{dt} \rightarrow dr\sqrt{\frac{ar}{a-r}} = -\sqrt{2GM(a)}dt$$

ya que la velocidad aumenta al disminuir *r*.

Integrando,

$$\int_r^a \sqrt{\frac{ar}{a-r}}dr = t\sqrt{2GM(a)}$$

$$t\sqrt{2GM(a)} = \sqrt{\frac{a}{a-r}}\left\{\sqrt{r}(r-a) + a\sqrt{a-r}\,\mathrm{atg}\left[\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{a-r}}\right]\right\}\Bigg|_r^a$$

De aquí se obtiene el tiempo de colapso, T_c, poniendo $r = 0$

$$T_c\sqrt{2GM(a)} = \frac{\pi}{2}a^{3/2} \rightarrow$$

$$T_c = \frac{\pi}{2}a^{3/2}\frac{1}{\sqrt{2GM(a)}} = \frac{\pi}{2}a^{3/2}\frac{1}{\sqrt{2G4\pi\rho a^3/3}}$$

$$T_c = \sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho}}$$

Es decir, el tiempo de colapso depende sólo de la densidad inicial de la nube y no del tamaño y todas las partículas tardan lo mismo en llegar a *r=0.* Para la densidad concreta de 10^{-22} g/cm^3,

$$T_c = 2.1\times 10^{14}\, s \simeq 6.7\times 10^{6} \text{ años}$$