

# Introducción a la Física Experimental

## Guía de la experiencia

### Ondas estacionarias

*Departamento de Física Aplicada*  
Universidad de Cantabria

Febrero 13, 2006

*Tenga en cuenta que la lectura previa de esta guía y la comprobación de las ecuaciones le llevará del orden de una hora, incluyendo la consulta de las palabras clave, y que la lectura de la bibliografía específica le llevará entre una y dos horas.*

#### Resumen

Se describe un método para contrastar el resultado teórico de la ecuación de ondas, aplicada a una cuerda, que relaciona la velocidad de propagación de la onda con la raíz cuadrada de la tensión aplicada dividida por la densidad lineal de la cuerda. A su vez, la velocidad de propagación de la onda se calcula midiendo frecuencias del armónico fundamental y semilongitudes de onda.

## Introducción

Cuando una piedra cae en un lago en calma se produce una perturbación que se propaga por la superficie del agua en forma de *ondas*. Las ondas implican un transporte de energía sin que le acompañe un transporte de materia. A diferencia de las *ondas electromagnéticas*, que se pueden propagar en el vacío, estas *ondas mecánicas* son ondas que se propagan a través de un medio material. Todas las ondas mecánicas necesitan: (i) alguna clase de perturbación, (ii) un medio que pueda ser perturbado, (iii) algún mecanismo físico a través del cual las partículas del medio puedan influirse unas a otras.

## Modelo de onda

Supóngase una cuerda de longitud semi-infinita (por ejemplo, en el intervalo  $[0, +\infty]$ ) en reposo. Si su extremo libre se perturba –moviéndolo arriba y abajo durante un corto intervalo de tiempo–, la perturbación se propaga en forma de cresta cuyo máximo se desplaza con cierta velocidad. Una onda

continúa se crea cuando este extremo libre se hace oscilar continuamente con un movimiento armónico (ver Fig. 1). Si el extremo libre se hace oscilar arriba y abajo como

$$y(t) = A \text{sen}(\omega t), \quad (1)$$

siendo  $A$  la amplitud del movimiento –la máxima desviación a partir de la ordenada de referencia– y  $\omega$  la frecuencia angular del movimiento, se crea una onda sinusoidal con tres características físicas importantes: (i) longitud de onda  $\lambda$ , frecuencia angular  $\omega$  y velocidad  $v$ . La frecuencia angular se mide en radianes por segundo. Si la frecuencia,  $f$ , se expresa en hertzios, entonces  $f = \omega/2\pi$ . El inverso de la frecuencia es el período  $T$ ,  $T = 1/f = 2\pi/\omega$ .

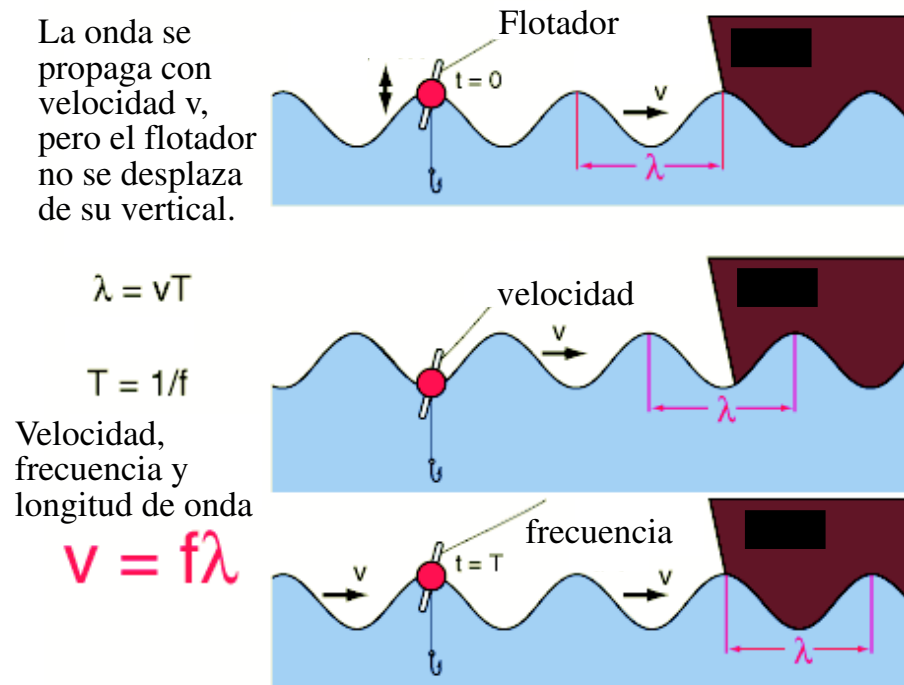


Figura 1: Onda sinusoidal transversal. La superficie del líquido se comporta como una cuerda cuyos puntos presentan un movimiento armónico simple. El punto en el que se encuentra el flotador no se desplaza, sólo oscila arriba y abajo –movimiento transversal a la dirección de propagación–. La energía se propaga sin desplazamiento longitudinal –en la dirección de propagación de la onda– de materia.

Así, el desplazamiento  $y(x, t)$  que experimenta el elemento de cuerda  $dx$  que se encuentra en la posición  $x$ , en el instante  $t$  viene dado por la ecuación

$$y(x, t) = A \text{sen} \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) \right]. \quad (2)$$

Si la onda se congela en un instante de tiempo dado  $t$ , se tiene una función senoidal caracterizada por una cierta longitud de onda. Si se observa el

movimiento de un cierto punto  $x$  a lo largo del tiempo oscila con una frecuencia angular característica  $\omega = 2\pi v/\lambda$ .

Cuando una cresta se desplaza, durante un período  $T$  avanza una longitud de onda  $\lambda$ , por lo que la velocidad de propagación de la onda viene dada por

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f. \quad (3)$$

La frecuencia angular de la cuerda como un todo y la frecuencia de cada elemento individual de la cuerda son iguales.

### Ecuación de ondas

La ecuación de propagación de la onda se puede poner como

$$y(x, t) = A \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi x}{\lambda} - \omega t \right). \quad (4)$$

Como se ha indicado, un punto P de la cuerda se mueve arriba y abajo, pero su coordenada  $x$  permanece constante. Su velocidad y aceleración transversales vienen dadas por

$$v_y = \left( \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right)_x = -w A \cos \left( \frac{2\pi x}{\lambda} - \omega t \right); \quad (5)$$

$$a_y = \left( \frac{\partial v_y}{\partial t} \right)_x = \left( \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \right)_x = -w^2 A \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi x}{\lambda} - \omega t \right). \quad (6)$$

Si se toman las derivadas a un tiempo fijo –la onda congelada–, se tiene

$$\left( \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right)_t = -\frac{2\pi}{\lambda} A \cos \left( \frac{2\pi x}{\lambda} - \omega t \right); \quad (7)$$

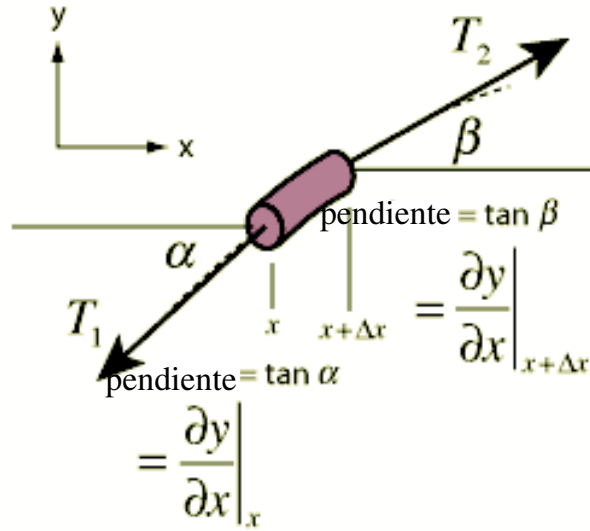
$$\left( \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right)_t = -\left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 A \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi x}{\lambda} - \omega t \right). \quad (8)$$

Comparando las dos derivadas segundas se obtiene la conocida como *ecuación de ondas*

$$\left( \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right)_t = \frac{1}{v^2} \left( \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \right)_x. \quad (9)$$

Este sería el aspecto cinemático de la ecuación de ondas.

Si se aborda el aspecto dinámico, se parte de la observación de que cada cuerda tiene un elemento de inercia, su masa, y un elemento dinámico, la tensión a que está sometida (ver Fig. 2). Cuando se aplica la Segunda Ley de Newton, en su forma  $\vec{F} = m\vec{a}$ , a un elemento de cuerda de longitud  $dl$  y masa  $dm = \mu dl$ , donde  $\mu = M/L$  es la densidad lineal de la cuerda –de masa total



$\mu =$  Densidad lineal

Figura 2: Esquema para la aplicación de la Segunda Ley de Newton a un elemento de cuerda sometido a tensión. La derivada primera de  $y$  con respecto a  $x$ ,  $(\partial y / \partial x)$  proporciona la dirección de las tensiones, mientras que la derivada segunda  $(\partial^2 y / \partial^2 x)$  se relaciona con la fuerza neta transversal aplicada. La derivada segunda de  $y$  respecto al tiempo  $(\partial^2 y / \partial^2 t)$  se relaciona directamente con la aceleración que experimenta el trozo de cuerda bajo la tensión aplicada.

$M$  y longitud total  $L$ , sometida a una tensión  $T$ , se tiene que la fuerza neta transversal aplicada y la aceleración transversal se relacionan como

$$T \left( \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right)_t = \mu \left( \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \right)_x . \quad (10)$$

La expresión del miembro izquierdo está relacionada con la fuerza neta – perpendicular a la dirección de propagación– que se ejerce sobre un elemento de cuerda, mientras que el segundo miembro está relacionado con la inercia y con la aceleración que experimenta dicho elemento.

Comparando las Ecs. (9) y (10) se obtiene la relación entre la velocidad de propagación de una onda en una cuerda, la tensión aplicada y la densidad lineal de la misma,

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} . \quad (11)$$

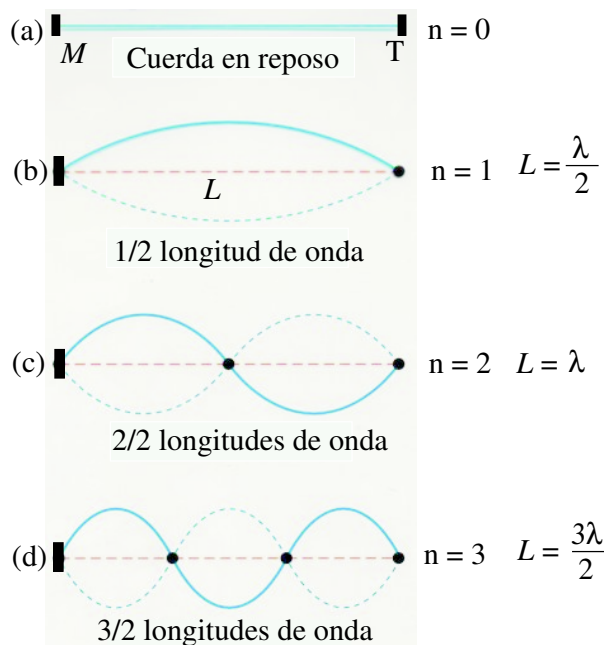


Figura 3: Formación de ondas estacionarias. (a) Cuerda en reposo, de longitud  $L$  y masa  $M$ , sometida a una tensión  $T$ . (b) Primer armónico (media longitud de onda). (c) Segundo armónico (dos medias longitudes de onda). (d) Tercer armónico.

### Ondas estacionarias

Cuando las ondas viajeras están confinadas en el espacio, como, por ejemplo, las ondas que se propagan en una cuerda fija por sus extremos, se producen reflexiones en ambos extremos. Un ejemplo son las cuerdas de los instrumentos musicales que tienen dos extremos fijos. En estos casos existen ondas propagándose en ambos sentidos que se combinan de acuerdo con el *principio de superposición*. Para impedir el movimiento de los extremos –es decir, para que las soluciones de la ecuación de ondas sean compatibles con las condiciones de contorno dadas–, sólo pueden darse ondas con múltiplos exactos de media longitud de onda.

Las soluciones de la ecuación de ondas Ec. (9) son siempre de la forma

$$y(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt), \quad (12)$$

donde  $f$  y  $g$  son funciones arbitrarias. Ambas funciones representan ondas que se desplazan, viajando, respectivamente, en dirección positiva y en dirección negativa. Si se toman como condiciones de contorno  $y(x = 0, t) = y(L, t) = 0$ , ambos extremos de la cuerda no se mueven, ambas funciones deben ser periódicas en  $x$ , con un período  $2L/n$  ( $n$  es un entero), lo que conduce a la frecuencia

$$f = n \frac{v}{2L}. \quad (13)$$

las dos ondas viajando en direcciones opuestas interfieren (principio de superposición de ondas) y crean la onda estacionaria. En la onda estacionaria todos los puntos tienen el mismo movimiento armónico simple, misma frecuencia, salvo los nodos, pero diferente amplitud.

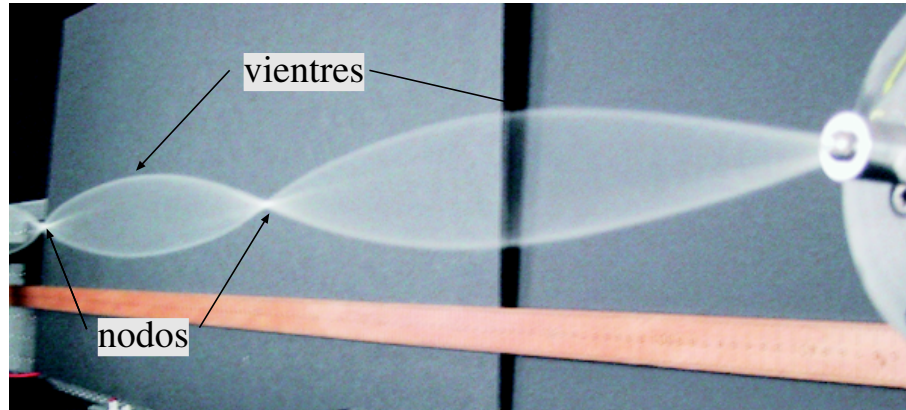


Figura 4: Imagen de una cuerda vibrante. Tercer armónico, con dos nodos y tres vientres.

Por tanto, para una cuerda dada, existen ciertas frecuencias (*frecuencias de resonancia* o *frecuencias propias*) para las cuales se produce un estado vibratorio estacionario que se denomina *onda estacionaria*. La frecuencia de resonancia más pequeña se denomina *frecuencia fundamental* o primer armónico,  $f_1$ , y en orden creciente, las restantes frecuencias de resonancia se denominan segundo armónico,  $f_2$ , tercer armónico,  $f_3$ , etc. Los puntos que nunca se mueven se denominan *nodos* y los que alcanzan la máxima amplitud *vientres*. La onda estacionaria de mayor longitud de onda es la que tiene nodos sólo en los extremos, es decir, aquella en que la longitud de la cuerda corresponde a media longitud de onda (ver Fig. 3 y Fig. 4)).

## Descripción del material

Para el estudio de la formación de ondas estacionarias en una cuerda se dispone del siguiente material (Fig. 5):

1. Plataforma de sujeción para la placa vibrante y polea [(1) en Fig. 5].
2. Máquina vibratoria [(2) en Fig. 5].
3. Control de frecuencia y amplitud [(3) en Fig. 5].
4. Lámpara estroboscópica [(5) en Fig. 5]
5. Lámpara de luz ultravioleta
6. Regla de 1000 mm

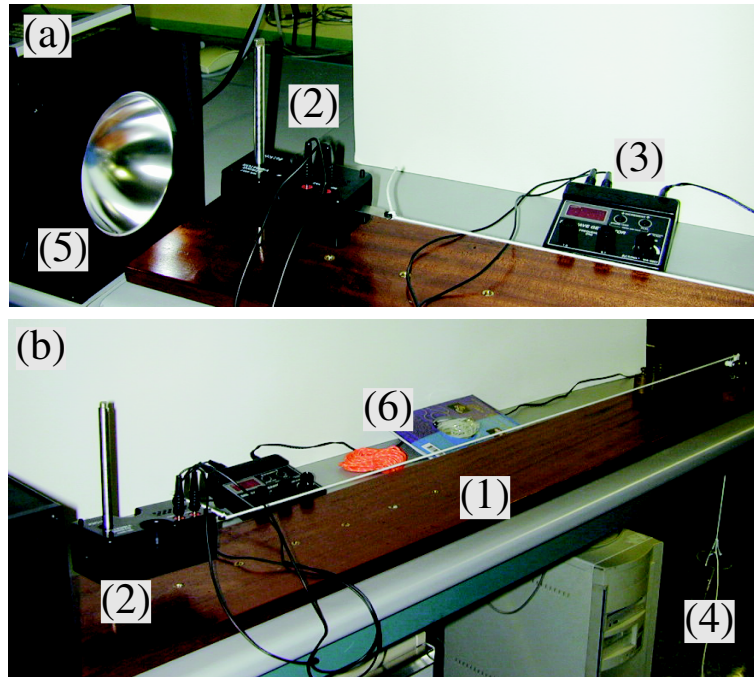


Figura 5: Dispositivo experimental. (1) Soporte de madera, (2) Placa vibrante, (3) controlador de la frecuencia de vibración, (4) pesos que generan la tensión en la cuerda (5) lámpara estroboscópica, (6) diferentes cuerdas.

7. Juego de pesas.
8. Juego de cuerdas.

## Reflexiones previas a la realización del experimento

1. Defina todos aquellos conceptos que aparecen en la Introducción señalados en letra cursiva.
2. ¿En qué se diferencia una onda transversal de una onda longitudinal?
3. Escriba las semejanzas y las diferencias que existen entre ondas mecánicas y ondas electromagnéticas.
4. Si para una tensión  $T$  aplicada a la cuerda se determina que la frecuencia de su primer armónico es  $f_1$ , demuestre que entonces

$$f_1^2 = \frac{1}{4L^2\mu}T. \quad (14)$$

5. Si para la misma tensión aplicada se determina que la frecuencia del segundo armónico es  $f_2$ , demuestre que

$$f_1(T) = \frac{f_2(T)}{2}. \quad (15)$$

6. Las ondas estacionarias juegan un papel importante en una amplia variedad de fenómenos. Relacione las ondas estacionarias con el funcionamiento de un láser y con las soluciones de la ecuación de Schrödinger para un átomo de hidrógeno.

## Modo operativo

- *Frecuencia del primer armónico.* Mida la masa de una cuerda como la que hay colocada en el soporte, mida su longitud y obtenga su densidad. Estime la masa que debe colocar al extremo de la cuerda como para que la frecuencia del primer armónico sea de unos 10 Hz. Obtenga la frecuencia  $f_1$  del primer armónico para la tensión aplicada mediante el control de la frecuencia y la luz estroboscópica.

Para la misma tensión, obtenga la frecuencia del segundo armónico.

- *Variación de la tensión.* Añadiendo masas al extremo de la cuerda, obtenga las correspondientes frecuencias del primer armónico.

## Preguntas adicionales relacionadas con el experimento

1. Una vez ha obtenido las sucesivas frecuencias  $f_1(T_i)$  del primer armónico, correspondientes a las sucesivas tensiones  $T_i$ , ¿qué representación gráfica es la más adecuada para obtener la densidad lineal de la cuerda? Compare la densidad lineal obtenida experimentalmente con la densidad lineal medida previamente.
2. ¿Cuáles son las hipótesis más importantes que se han contrastado mediante estos experimentos?
3. Una cuerda homogénea tiene una masa de 0,300 kg y una longitud total de 6,00 m. La tensión en la cuerda se mantiene constante suspendiendo un objeto de masa 2,00 kg de uno de sus extremos. Un extremo de la cuerda esta atado a 5,00 m de la polea de la que cuelga el paso. Obtener la frecuencia del primer armónico para esta disposición.

## Referencias

- [1] G F Wheeler, W P Crummett, *The vibrating string controversy*, American Journal of Physics **55**, 33-37 (1987). Historia del origen de la ecuación de ondas.

- [2] W J Jackson, F R Pratt, *A mechanical vibrator for demonstrating standing waves*, American Journal of Physics **4**, 205 (1936). Un primer diseño de un aparato para producir ondas estacionarias.
- [3] F P Clay, R L Kernell, *Standing waves in a string driven by loudspeakers and signal generators*, American Journal of Physics **50**, 910-912 (1982). Un diseño experimental semejante al utilizado en nuestros laboratorios.
- [4] T Southworth, *Waves on a lead-filled hose*, The Physics Teacher **39**, 164-165 (2001). Se comprueba la dependencia inversa de la longitud de onda y la frecuencia para ondas estacionarias.
- [5] M Graham, *Melde's experiment with an aquarium aerator*, The Physics Teacher **36**, 276-279 (1998). Aparato para el estudio de ondas estacionarias.
- [6] E de Campos Valadares, E Gracia Alves, *Surfing a standing wave*, The Physics Teacher **43**, 280-281 (2005). P Gluck, *Hot-wire vibrations get waves standing*, Physics Education **July**, 315-316 (2005). Distintas formas de hacer más visibles las ondas estacionarias
- [7] R E Gibbs, *Standing waves on a hanging rope*, The Physics Teacher **36**, 108-110 (1998). W Herreman, *Comments on 'Standing waves on a hanging rope'*, The Physics Teacher **36**, 388-389 (1998). E Kashy, D A Johnson, J McIntyre, S L Wolfe *Transverse standing waves in a string with free ends*, American Journal of Physics **65**, 310-313 (1997). Ondas estacionarias con uno o dos extremos libres de las cuerdas.