

Introducción a la Física Experimental

Guía de la experiencia

Movimiento de proyectiles

Departamento de Física Aplicada
Universidad de Cantabria

Febrero 28, 2005

Tenga en cuenta que la lectura previa de esta guía y la comprobación de las ecuaciones le llevará del orden de dos horas, incluyendo la consulta de las palabras clave, y que la lectura de la bibliografía específica le llevará entre una y dos horas.

Resumen

Se indica cómo se pueden llevarse a cabo estimaciones previas de alcance y alturas máximas y cómo determinar experimentalmente las características del movimiento terrestre de proyectiles y cómo este movimiento se puede visualizar utilizando como cuerpo lanzado un chorro de agua, en el que puede controlarse el módulo y la orientación de la velocidad de salida del agua, cuya trayectoria se observa permanentemente.

Introducción

Un grave es un objeto que pesa, es decir, que se encuentra sometido a la acción de la gravedad. Cuando un grave está dotado de una velocidad inicial se denomina proyectil ¹.

Si el objeto tiene una densidad suficientemente grande y su velocidad es moderada, los experimentos muestran que, a menudo, se puede despreciar la *resistencia* ² del aire y suponer que la *aceleración* del objeto es debida sólo a la *gravedad*. Si además se admite que en todo su recorrido, la aceleración de la gravedad es constante y dirigida hacia abajo, resulta que el objeto describe un movimiento curvilíneo cuya descripción es relativamente sencilla. Bajo estas suposiciones, la trayectoria de un proyectil será siempre plana con forma de *parábola*.

¹El inicio del estudio del movimiento de los graves se sitúa en el estudio de los proyectiles lanzados por catapultas y cañones en batallas y asedios.

²Consulte y escriba la definición de todos los conceptos que aparecen en letra cursiva en este texto.

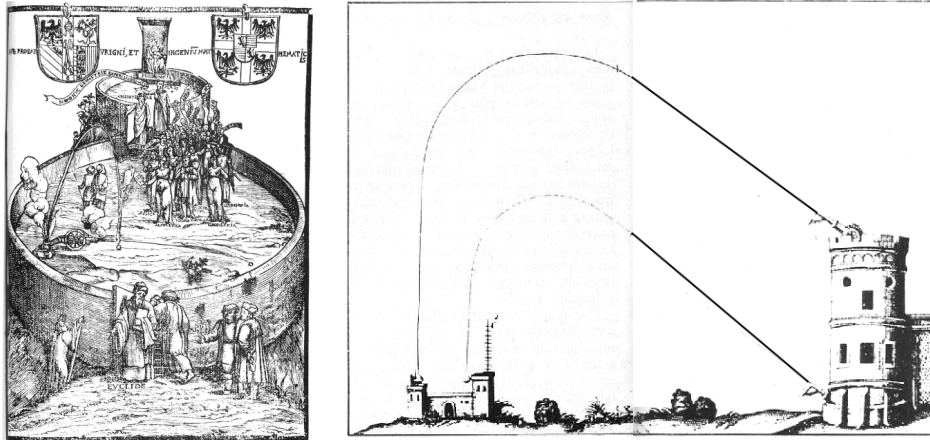


Figura 1: Frontispicio de la edición de 1550 del libro de Giacomo Tartaglia *La Nuova Scienza*. La trayectoria de un proyectil se muestra constando de tres partes: un ascenso en línea recta con el ángulo de lanzamiento, arco de círculo intermedio y posterior caída en vertical –caída libre–. Daniele Santbech.

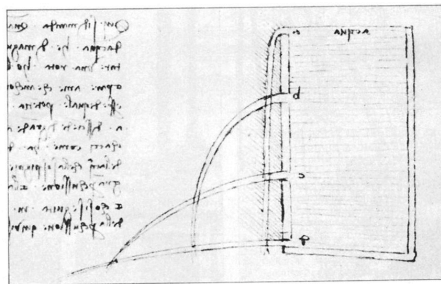


Figura 2: Dibujo de Leonardo da Vinci mostrando las trayectorias de chorros de agua que surgen a diferentes alturas de un depósito.

Sea un sistema de referencia cartesiano OXY (ver Fig. 3). Desde el punto (x_0, y_0) se lanza un proyectil, en el instante de tiempo $t = 0$, con velocidad inicial \vec{v}_0 cuyas componentes son (v_{0x}, v_{0y}) . La aceleración a la que se ve sometido tiene por componentes $(0, -g)$. Al cabo de un cierto tiempo t , la posición del proyectil viene dada por las siguientes *ecuaciones paramétricas* temporales

$$x(t) = x_0 + v_{0x} t \quad (1)$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2. \quad (2)$$

Por tanto, el movimiento en el eje X se considera como un movimiento unidimensional con velocidad constante y el movimiento en el eje Y , como un movimiento unidimensional con aceleración g constante.

La independencia de las componentes x e y del movimiento fue observada

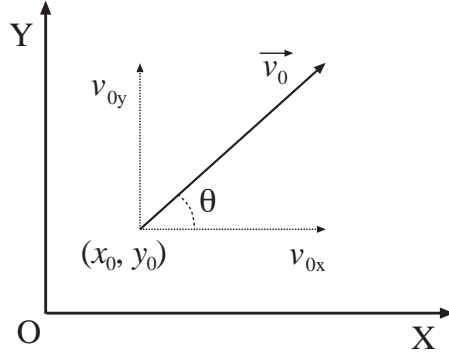


Figura 3: Sistema de referencia OXY. Un proyectil, en el instante $t = 0$, se encuentra en la posición (x_0, y_0) con una velocidad \vec{v}_0 que forma un ángulo θ con el eje X. v_{0x} y v_{0y} son los componentes cartesianos de la velocidad inicial \vec{v}_0 .

por Galileo, que describía así el movimiento de una partícula despedida fuera de los límites de una superficie horizontal:

... entonces la partícula que se mueve, que imaginamos pesada, al sobrepasar el borde del plano, además de su perpetuo movimiento uniforme previo, adquiere una propensión hacia abajo debida a su propio peso; de forma que el movimiento resultante, que llamaré proyección (*projectio*), está compuesto de uno que es uniforme y horizontal y otro que es vertical y acelerado naturalmente ³.

Supóngase que se dispara un proyectil desde el origen de coordenadas $(x_0, y_0) = (0, 0)$ con una componente v_{0y} positiva. Las Eqs. (1-2) permiten escribir el vector de posición del proyectil como función del tiempo,

$$\vec{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2, \quad (3)$$

siendo $\vec{r}_0(t) = x_0(t)\mathbf{i} + y_0(t)\mathbf{j}$ el vector de posición del punto de partida. $\vec{v}_0 t$ corresponde a un movimiento uniforme en la dirección de \vec{v}_0 y $1/2 \vec{g} t^2$ corresponde a un movimiento de caída libre en dirección vertical con aceleración constante.

Existen dos puntos de la trayectoria del grave cuyo análisis es interesante: el punto en el que el proyectil cae al suelo, denominado *alcance horizontal* con coordenadas $(R, 0)$, y el punto más alto, denominado *altura máxima* con coordenadas $(R/2, h)$, siendo pues R el alcance horizontal y h la altura máxima. Ambos pueden expresarse en función de \vec{v}_0 , θ y g :

$$R = \frac{v_0^2 \sen 2\theta}{g}, \quad (4)$$

³Galileo Galilei, *Dos Nuevas Ciencias*, Henry Grew y Alfonso de Salvio (trads.). Dover, NY, 1954, pg. 244.

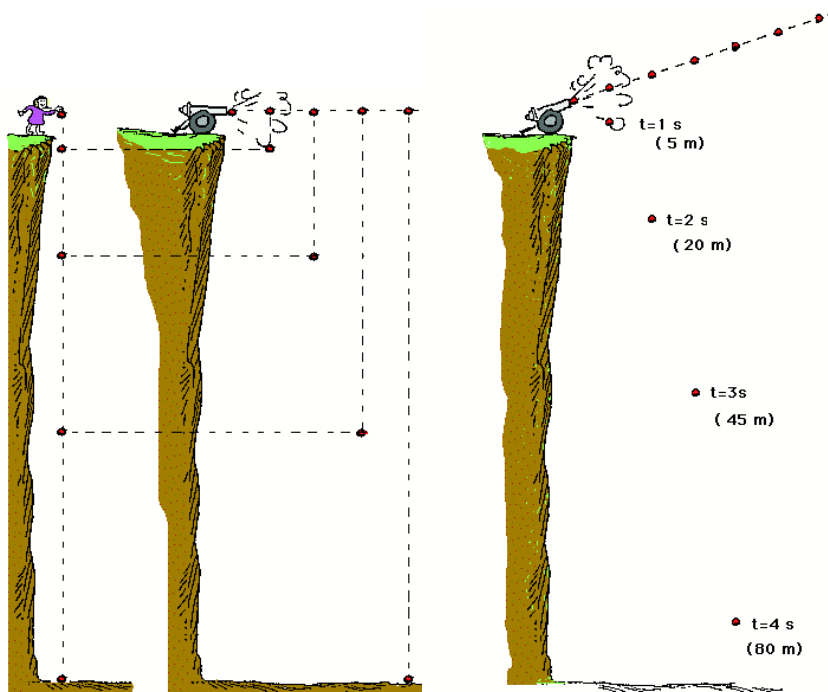


Figura 4: Comparación entre los movimientos de un proyectil lanzado horizontalmente y el mismo dejado en caída libre. Las alturas recorridas son las mismas. A la derecha, alturas recorridas por un proyectil lanzado con un cierto ángulo respecto de la horizontal.

$$h = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{2g}. \quad (5)$$

La ecuación general de la trayectoria $y(x)$ puede obtenerse de las Eqs. (1-2) eliminando el tiempo t y escribiendo las componentes de la velocidad inicial en función del ángulo θ (ver Fig. 5).

$$y(x) = \operatorname{tg} \theta x - \left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \right) x^2. \quad (6)$$

Esta ecuación tiene la forma de una parábola invertida que pasa por el origen (punto de partida del proyectil).

Reflexiones previas a la realización del experimento

1. Obtenga las Eqs. (1-2) a partir de la ecuación diferencial del movimiento del proyectil utilizando las condiciones iniciales indicadas.
2. Obtenga las ecuaciones Eqs. (4-5) del alcance horizontal y de la altura máxima.

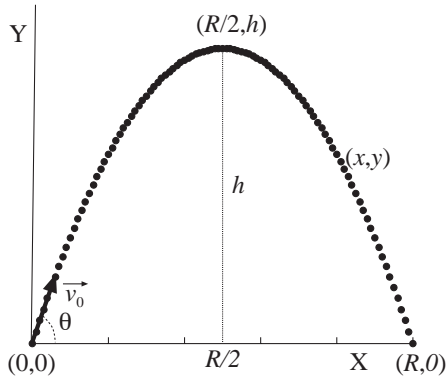


Figura 5: Trayectoria parabólica de un proyectil lanzado con velocidad inicial \vec{v}_0 y ángulo θ h es la altura máxima h y R , el alcance.

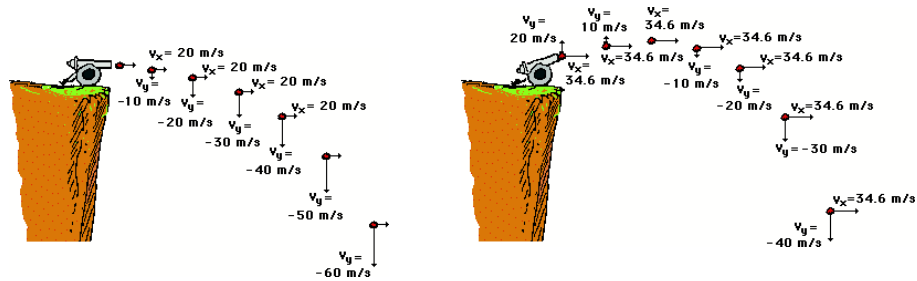


Figura 6: Velocidades de proyectiles lanzados con diferentes ángulos respecto de la horizontal. Izquierda, $v_x = 20 \text{ m s}^{-1}$ y $v_y = 0$; derecha, $v_x = 34,6 \text{ m s}^{-1}$ y $v_y = 20 \text{ m s}^{-1}$.

3. Busque en bibliografía [1] la definición de gasto por un orificio y relaciónelo con la velocidad de salida de un líquido por un orificio circular. En el desarrollo del experimento va a necesitar esta información.

Descripción del material

Para llevar a cabo este tipo de experiencias se utiliza el siguiente material (Fig. 7):

1. Aparato de proyección de agua.
2. Vaso de 0,500 L de capacidad.
3. Reloj.

El aparato de proyección de agua está formado por las siguientes piezas (ver Figs. 7 y 8):

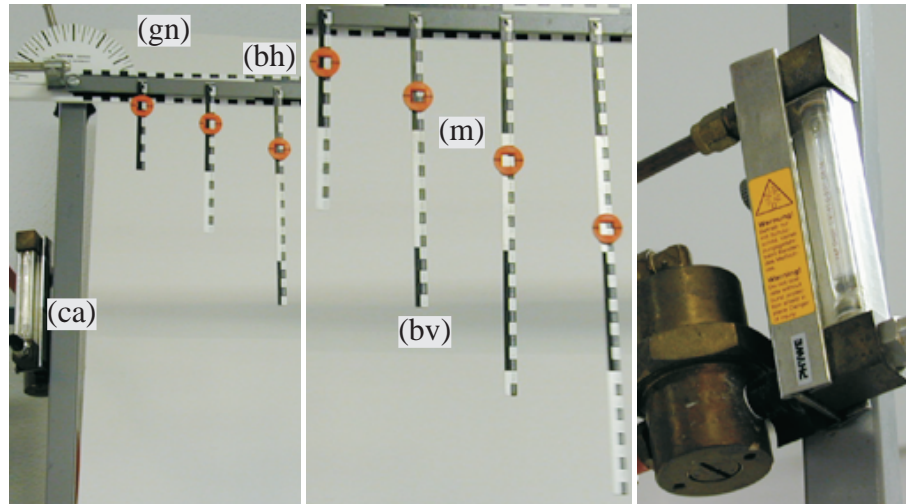


Figura 7: Material relacionado con movimientos de proyectiles. Goniómetro (gn), caudalímetro (ca), barras horizontales (bh) y barras verticales (bv) con marcadores de posición (m). A la derecha, detalle del caudalímetro.

- a. - Carril de orientación de lanzamiento. La boquilla de salida de agua está colocada de tal manera que su abertura está en el origen de la escala. En el carril se cuelgan 8 regletas verticales espaciadas entre sí 7.5 centímetros. Las regletas están divididas en centímetros y cada una de ellas posee un marcador de posición de color naranja.
- b. - Regla horizontal con divisiones de 1 cm y escala de ángulos con divisiones de 5° .
- c. - Canaleta de descarga por la que evacúa el agua hacia un desagüe.
- d. - Caudalímetro con regulador de presión diferencial, compensa las oscilaciones de presión.
- d. - Un calibre.

Modo operativo

Con este dispositivo puede realizarse un estudio cuantitativo de la trayectoria de lanzamiento de agua para diferentes velocidades iniciales. Al ser un chorro de agua el cuerpo lanzado, su trayectoria se observa permanentemente.

Coloque la boquilla de salida de agua de tal manera que forme un ángulo de 30° con la horizontal. Abra lentamente el grifo hasta que el caudalímetro se llene aproximadamente hasta la mitad y el chorro de agua salga bien formado

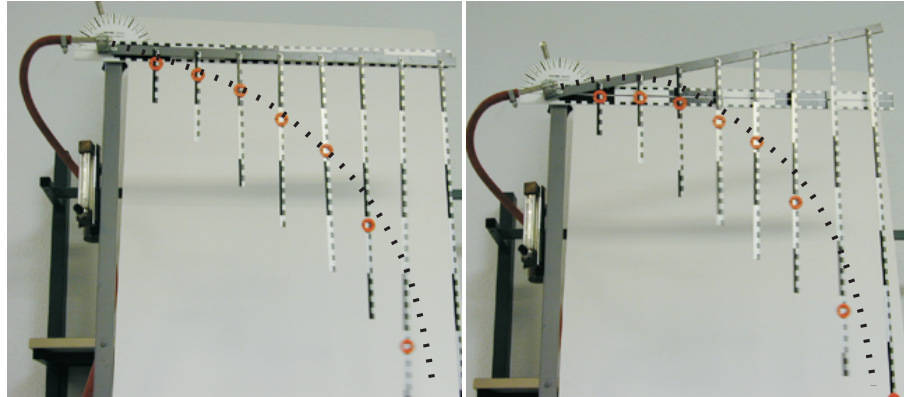


Figura 8: Dispositivo experimental para medir movimientos de proyectiles. (a) Lanzamiento del chorro de agua con ángulo cero, (b) Lanzamiento del chorro de agua con un cierto ángulo.

mientras atraviesa la región del espacio donde están las reglas verticales.

Para cada experiencia –es decir, para cada caudal y cada ángulo–, mediante el dato del caudal que le proporciona el caudalímetro y con la medida previa del diámetro de la boquilla por la que sale el agua, *estime* la velocidad de salida del agua, aplicando la expresión correspondiente que ha debido obtener previamente, y *estime* el alcance *horizontal* y la altura máxima de la trayectoria⁴. Estos dos valores, que pueden no coincidir con ninguna regleta, deben compararse con los resultados experimentales que obtenga y se debe discutir la comparación entre los valores teóricos y los experimentales.

Una vez lanzado el agua, haga coincidir los marcadores con los puntos de cruce del chorro con dichas reglas. Anote, en forma de tabla, las coordenadas de la posición de los marcadores, del alcance máximo horizontal y de la altura máxima. Cada uno de estos marcadores representa un punto de la trayectoria del proyectil (simulado por una pequeña porción de agua). Repita el experimento, con la estimaciones previas señaladas y las medidas experimentales correspondientes, con el mismo caudal, para ángulos de lanzamiento de 45° y 60° .

Como se ha indicado previamente, halle la velocidad inicial del agua a partir de la determinación del gasto cúbico y halle el alcance horizontal y la altura máxima a partir de las expresiones Eqs. (4-5). Compare los resultados con los que se obtienen de la gráfica.

Represente gráficamente, en cada caso, los puntos experimentales, incluyendo los estimados de alcance máximo y altura máxima. Interprete la gráfica y

⁴Suponga por un momento que el caudalímetro no estuviera correctamente calibrado. En ese caso, si no llevara a cabo estimaciones previas del alcance horizontal y de la altura máxima, los valores de las velocidades iniciales medidas con el caudalímetro y estimadas experimentalmente no serían las mismas, por lo que los experimentos no podrían interpretarse adecuadamente.

ajuste la nube de puntos a una curva de acuerdo con la teoría mostrada en la Introducción.

Fije el ángulo de salida del agua en 45° y determine el alcance para diferentes velocidades de salida. Haga una representación gráfica e interprétela.

Fije la velocidad de salida y mida el alcance para diferentes ángulos de orientación de la boquilla. Haga una representación gráfica e interprétela.

Elabore las tablas, los gráficos y el cálculo de errores según las normas.

Preguntas adicionales relacionadas con la experiencia

1. Compruebe que las ecuaciones Eqs. (4-5) y (6) son dimensionalmente correctas.
2. En la determinación del alcance R , ¿qué magnitud introduce mayor error?
3. A partir de sus primeras estimaciones de alcance horizontal y altura máxima, ¿puede considerarse que el caudalímetro está bien calibrado?
4. Si mantiene la velocidad inicial y sustituye la boquilla por otra de doble diámetro de abertura, ¿cómo se modificarán los resultados experimentales?
5. Galileo demostró que, si se despreciaba la resistencia del aire, eran iguales los alcances de los proyectiles cuyos ángulos de tiro eran mayores o menores de 45° en la misma cantidad. Demuéstrelo usted. ¿Lo ha comprobado experimentalmente?

Referencias

- [1] S. Burbano, E. Burbano, C. Gracia, *Física General*, Ed. Mira, Zaragoza (1993).
- [2] P. A. Tipler, *Física*, Ed. reverté S.A., Barcelona (1999), 4ª Edición, tomo I.
- [3] R. A. Serway, *Física*, Ed. McGraw-Hill (1992), 3ª edición, tomo I.
- [4] R. M. Sutton, *Three demonstration experiments on projectile motion*, Am. J. Phys. **12**, 104-105 (1944)
- [5] C. Jones and M. Thaxton, *A laboratory method for the study of projectile motion*, Am. J. Phys. **12**, 217-219 (1944)
- [6] T. W. Williams III, *Apparatus drawings Project. Report Number 32 Launching tube for a laboratory experiment on projectile motion*, Am. J. Phys. **30**, 851-853 (1962)
- [7] A Ruari Grant, *A study of the trajectories of projectiles*, Phys. Education **25**, 288-292 (1990)

- [8] Eds, *Apparatus to teaching physics. A versatile projectile motion board*, The Physics Teacher **22**, 402-403 (1984)
- [9] J Strnad, *On projectiles, missiles and history*, Eur. J. Phys. **23**, 361-365 (2002)
- [10] P. Thuillier, *En las fuentes de la Ciencia: Del arte a la Ciencia: El descubrimiento de la trayectoria parabólica.*, Mundo Científico V-7, n° 74, Noviembre 1987. (Cuenta que Galileo fue el primero en establecer ‘geométricamente’ que una bala de cañón describe una trayectoria parabólica.)
- En la trayectoria de un proyectil con el mismo módulo de velocidad inicial hay tres ángulo interesantes: el ángulo que proporciona el máximo alcance horizontal, el ángulo que proporciona la máxima longitud de recorrido y el ángulo que proporciona el área máxima bajo la trayectoria.
- [11] Hui Hu, J Yu, *Another look at projectile motion*, The Physics Teacher **38**, 423 (2000)
- [12] H Sarafian, *On projectile motion*, The Physics Teacher **37**, 86-88 (1999)
- En caso de rozamiento, los cuerpos en caída libre alcanzan una velocidad límite.
- [13] S Herbert, T Toepker, *Terminal velocity*, The Physics Teacher **37**, 96-97 (1999)