El péndulo físico. Un método para determinar la aceleración de la gravedad. Oscilaciones del péndulo en un plano inclinado.

Departamento de Física Aplicada
Universidad de Cantabria

16 Febrero 2010

Resumen

Se discuten las características del movimiento de un cuerpo rígido suspendido de algún punto cuando se desplaza de su posición de equilibrio. Se describe un método experimental para determinar el valor de la aceleración de la gravedad. Se estudia la dependencia del periodo del movimiento pendular con el valor de la gravedad, haciendo oscilar el péndulo en un plano inclinado de manera que sea solo una componente de la gravedad, gravedad efectiva, la responsable del movimiento.

Introducción

Cuando se suspende un *sólido rígido* de un punto que no pasa por su *centro de masas* (CM) y se separa de su posición de *equilibrio*, dicho sólido realiza un *movimiento oscilatorio* bajo la acción de su propio peso y recibe el nombre de *péndulo físico*. Estudiando las características del movimiento de este péndulo podemos inferir que tiene interesantes aplicaciones, una de las cuales, enunciada en el título, será objeto de este experimento. Revisemos las expresiones teóricas que describen el movimiento del péndulo[a].

Sea un cuerpo rígido plano de masa m y suspendido de un punto O (Pivot en la figura 1). Este punto se llama punto de suspensión. Supongamos que desviamos el cuerpo de su posición de equilibrio un cierto ángulo ϕ contenido en el plano del cuerpo. El movimiento que inicia dicho cuerpo cuando lo liberamos viene regido por la segunda ley de Newton ($\boldsymbol{F} = d\boldsymbol{p}/dt$) aplicada a la rotación ($\boldsymbol{\tau} = d\boldsymbol{L}/dt$), es decir,

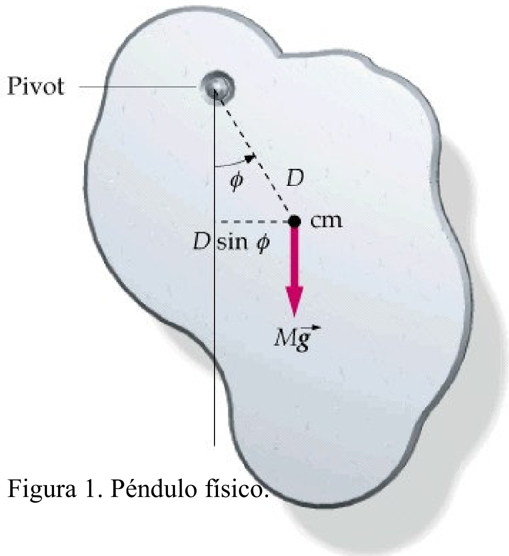

Figura 1. Péndulo físico.

$$\tau = I\alpha = I\frac{d^2\phi}{dt^2} \qquad (1),$$

en donde τ es el *momento resultante de las fuerzas exteriores*, α es la *aceleración angular* e *I el momento de inercia* respecto de O. A su vez,

$$\tau = -mgDsen\phi \qquad (2),$$

[a] Consulta en el libro de texto la deducción del movimiento de un péndulo matemático cuando realiza pequeñas oscilaciones y, después, la misma deducción para un péndulo físico. Toma nota de las definiciones de momento lineal $\boldsymbol{p}$, momento angular $\boldsymbol{L}$, momento de una fuerza $\boldsymbol{\tau}$ y momento de inercia $\boldsymbol{I}$ respecto del eje de giro que pasa por O.

en donde m es la masa del cuerpo, g es la aceleración de la gravedad y D es la distancia del CM al punto O (ver figura 1). mg es la sola fuerza que actúa sobre el cuerpo, ya que admitiremos que en el punto O no hay rozamientos. De las expresiones (1) y (2) se deduce:

$$-mgDsen\phi = I\frac{d^2\phi}{dt^2} \quad (3)$$

que es la *ecuación de movimiento* del péndulo.

Si los desplazamientos angulares son pequeños, se puede escribir la ecuación (3) de forma aproximada,

$$-mgD\phi \approx I\frac{d^2\phi}{dt^2} \quad (4),$$

en donde se ha tomado $sen\ \phi \approx \phi$. La expresión que rige el movimiento armónico simple tiene la forma

$$-\omega_0^2 x = d^2x/dt^2 \quad (5).$$

De la comparación de las expresiones (4) y (5), obtenemos la ecuación de movimiento de un péndulo simple de *frecuencia propia*

$$\omega_0 = (mgD/I)^{1/2} = 2\pi/T_0 \quad (6).$$

T_0 es el periodo del movimiento.

En este experimento, el sistema de montaje del péndulo permite variar el ángulo θ que el plano de oscilación forma con el plano vertical. Si este ángulo es distinto de cero, la fuerza que produce el movimiento del péndulo ya no es mg sino su proyección sobre el plano del movimiento, es decir,

$$F_{proy} = mg\cos\theta \quad (7),$$

en donde $g_e = g\cos\theta$ es la gravedad efectiva. La expresión de la frecuencia propia ω_e del sistema es ahora,

$$\omega_e = (mg_e D/I)^{1/2} = 2\pi/T_e \quad (8).$$

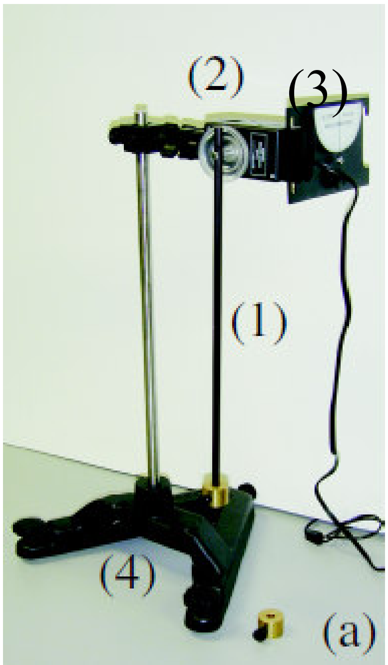

Figura 2: (1) Péndulo físico, (2) sensor de rotación, (3) plomada y escala angular, (4) soporte.

Equipamiento

Barra metálica con pesa, soporte. Plomada. Sensor de rotación. Interface 500 Pasco. Software requerido. Ordenador. Balanza. Regla.

Modo operativo

1.- Una vez comprendida la base teórica necesaria que se resume en la Introducción y que constituye una reflexión previa, ineludible por parte del alumno, para comprender y realizar correctamente este experimento, se aplica el siguiente procedimiento,

1ª PARTE. *Se determina la aceleración de la gravedad g en el laboratorio utilizando la expresión (6).*

1. Prepara una tabla para registrar todas las medidas que realices con sus unidades y errores correspondientes (ver Apéndice 1).
2. Utiliza el péndulo de la figura 2.
3. Mide su masa m con ayuda de una balanza.

4. Calcula la posición de su centro de masas *CM* tomando como origen el punto O para obtener *D*.
5. Determina el momento de inercia I_O respecto de un eje normal a la varilla que pasa por O, que es el eje de giro. Se hace necesario consultar en bibliografía el momento de inercia de una varilla y de un cilindro hueco (las dos piezas que componen el péndulo) respecto de los ejes adecuados y utilizar el teorema de los ejes paralelos[b] $I_O = I_{CM} + m\,h^2$ (T. Steiner).
6. Haz oscilar el péndulo, en un plano y con pequeña amplitud, y determina el periodo de oscilación T_0 midiendo el tiempo t_n que emplea el péndulo en realizar un número n de oscilaciones relativamente grande, con ayuda del software disponible.
7. Repite este procedimiento en varias posiciones distintas del cilindro hueco del péndulo. La primera de ellas con el cilindro en el extremo de la varilla, como muestra la figura 2. De esta manera el momento de inercia del péndulo se modifica y también la posición de su CM. Toma nota en la tabla de todas las medidas.
8. Utilizando las medidas registradas, representa gráficamente ω_0^2 en función de D/I . Si se verifica la expresión (6), debe obtenerse una recta de pendiente mg que debe pasar por el origen (0,0). Los valores calculados de ω_0^2 y D/I deben aparecer también en la tabla.
9. Utiliza Kaleidagraph para encontrar esa recta y obtén g a partir de la pendiente de la recta. Escribe el valor de g con sus unidades y su error correctamente expresado.

2ª PARTE. *Utilizando la expresión (8), se estudia la dependencia del periodo del movimiento pendular con el valor de la gravedad (gravedad efectiva), haciendo oscilar el péndulo en un plano inclinado.*

10. Prepara una tabla en la que vas a registrar todas las medidas con sus unidades y errores correspondientes (ver Apéndice 1).
11. Utiliza el péndulo en la configuración de la figura 3.
12. Haz oscilar el péndulo, en un plano y con pequeña amplitud, y determina el periodo de oscilación T_e midiendo el tiempo t_n que emplea el péndulo en realizar un número n de oscilaciones relativamente grande, con ayuda del software disponible.
13. Repite este procedimiento para planos de oscilación que formen diferentes ángulos φ con el plano vertical, desde θ = 10º hasta θ = 60º con intervalos de 10 grados (el caso θ = 0º ya ha sido contemplado en la primera parte). Toma nota en la tabla de todas las medidas.
14. Utilizando las medidas registradas, representa gráficamente ω_e^2 en función de g_e. Si se verifica la expresión (8), debe obtenerse una recta de pendiente mD/I que debe pasar por el origen (0,0). Los valores calculados de ω_e^2 y $g_e = g\cos\theta$ deben aparecer también en la tabla.
15. Utiliza Kaleidagraph para encontrar esa recta y discute la bondad del ajuste obtenido. ¿Es la pendiente de la recta el valor de mD/I calculado en la primera parte?

[b] Consulta el libro de texto.

Algunas preguntas para inspirar la discusión de tu informe sobre el experimento que has realizado.

Figura 3. El plano de oscilación del péndulo forma un ángulo con el plano vertical que puede medirse con la ayuda de la plomada y la escala angular (3).

1. ¿Por qué el péndulo debe oscilar en un plano?
2. Cuando has determinado experimentalmente el periodo del péndulo, ¿por qué no has medido el tiempo que el péndulo emplea en realizar una oscilación completa y has preferido medir el tiempo que tarda en realizar *n* oscilaciones, siendo n>>1, que resulta más laborioso? ¿Qué valor de *n* has elegido? ¿Por qué justamente ése y no otro?
3. Estima el valor de la amplitud de los movimientos que ha impuesto al péndulo. ¿Deberían influir en la medida del periodo?
4. ¿Es *compatible* su resultado experimental con el que encuentra en bibliografía para g?
5. ¿Cómo depende experimentalmente el periodo de oscilación con la gravedad efectiva? ¿Es el resultado compatible con la teoría? ¿Cuál es la discrepancia relativa del resultado experimental de la pendiente *mD/I* de la recta obtenida respecto del correspondiente valor calculado?
6. Describe alguna otra aplicación del péndulo físico. Por ejemplo, consulte en bibliografía por qué es famoso el péndulo de Foucault e intente explicarlo.

Apéndice 1

Para la 1ª Parte, construye una tabla semejante a la que se muestra a continuación,

m/kg	x_v /m	x_c /m	*D/m*	I_v /kg.m^2	I_c/kg.m^2	I_p/kg.m^2	t_n/s	ω_o/s^{-1}	ω_o^2/s^{-2}	*(D/I) kg.m*

Tabla 1. Registro de las medidas experimentales realizadas para determinar la aceleración de la gravedad con un péndulo físico. m es la masa del péndulo. x es la distancia del CM al punto de suspensión O. D es la distancia del CM del péndulo al punto de suspensión O. I es el momento de inercia. Subíndices *v* para varilla, *c* para cilindro y *p* para el péndulo. t_n es el tiempo que invierte el péndulo en realizar *n* oscilaciones. ω_o es la frecuencia propia del péndulo. Los resultados de las dos últimas columnas se representan en la gráfica 1.

Para la 2ª Parte, construye una tabla semejante a la que se muestra a continuación,

t_n/s	ω_e/s^{-1}	ω_e^2/s^{-2}	θ/rad	g_e/ms^{-2}	$(mD/I)/m^{-1}$
					calculado
					ajustado

Tabla 2. Registro de las medidas experimentales (y errores asociados) realizadas para determinar la dependencia de la frecuencia del movimiento pendular con el valor de la gravedad efectiva g_e. t_n es el tiempo que invierte el péndulo en realizar *n* oscilaciones. ω_e es la frecuencia de oscilación del péndulo. θ es el ángulo de inclinación del plano de oscilación con el plano vertical. El valor de *D/I* corresponde a la configuración, constantemente mantenida en esta parte, del péndulo de la figura 3.

Referencias

[1] Burbano S., Burbano E.,Gracia C., *Física General*, Ed. Mira, Zaragoza (1993).
[2] Tipler P. A., *Física,* Ed. reverté S.A., Barcelona (1999), 4ª edición, tomo I.
[3] *The variable gravity pendulum*, Feliciano, J., Phys. Teach., 36, enero 1998.
[4] *The pendulum- Rich physics from a simple system*, R. A. Nelson y M. G. Olsson, Am. J. Phys. 54, 112 (1986).
[5] *Simple linearization of the simple pendulum for any amplitude*, M. I. Molina, Phys. Teach. 35, 489 (1997).