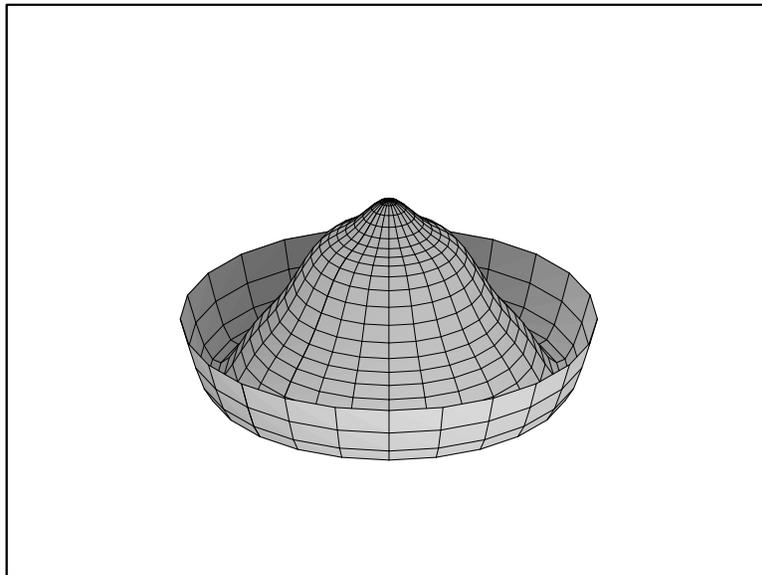


Introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales



Luis A. Fernández

Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación

Universidad de Cantabria

Febrero, 2022

Índice general

1. Introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales	5
1.1. EDP lineales de primer orden con coeficientes constantes	6
1.2. EDP lineales de primer orden con coeficientes variables	8
1.3. Aplicaciones de las EDP lineales de primer orden: Ecuación de Transporte	9
1.4. EDP lineales de segundo orden con coeficientes constantes: clasificación y reducción a la forma canónica	10
1.5. EDP con Wolfram Alpha	17
2. Series de Fourier	19
2.1. El método de separación de variables: resolución de EDP en dimensión dos	19
2.2. Serie de Fourier completa. Convergencia puntual y en el sentido de L^2	27
2.3. Problema Regular de Sturm-Liouville	36
2.4. El método de separación de variables: resolución de EDP en dimensión tres	38
2.5. Series de Fourier con Wolfram Alpha	41
3. Transformadas integrales de funciones	45
3.1. Transformada de Fourier	45
3.2. Aplicaciones de la transformada de Fourier a las EDP	51
3.3. Transformada de Laplace	54
3.4. Aplicaciones de la transformada de Laplace a las EDO	58
3.5. Aplicación de la transformada de Laplace a las EDP	61
3.6. Transformadas integrales con Wolfram Alpha	62
4. Funciones especiales de la Física Matemática	65
4.1. Función Gamma	65
4.2. Función Beta	68
4.3. Funciones de Bessel y asociadas	69
4.4. Polinomios de Legendre	79
4.5. Otros polinomios ortogonales: Hermite y Laguerre	83
4.6. Aplicación a las EDP en dimensión tres	89
4.7. Funciones especiales con Wolfram Alpha	95
5. Teoría elemental de distribuciones	99
5.1. La Delta de Dirac	99
5.2. Extensión del concepto de derivada	101
5.3. Transformadas integrales y la Delta de Dirac	105
5.4. Cambio de variables y la Delta de Dirac	107
5.5. Otras propiedades de la Delta de Dirac	108
5.6. Series de Fourier y la Delta de Dirac	109
5.7. EDO y la Delta de Dirac	112
5.8. EDP y la Delta de Dirac	113
5.9. Distribuciones con Wolfram Alpha	113

A. Método de separación de variables	117
A.1. Ecuación del Calor (dimensión espacial uno)	117
A.2. Ecuación de Ondas (dimensión espacial uno)	117
A.3. Ecuación de Laplace	117
A.4. Ecuación del Calor (dimensión espacial dos)	118
A.5. Ecuación de Ondas (dimensión espacial dos)	118
A.6. Ecuación del Calor (geometría circular)	119
A.7. Ecuación de Ondas (geometría circular)	119
A.8. Ecuación de Laplace (geometría circular)	119
B. Tablas de Transformadas	121
B.1. Transformadas de Fourier	121
B.2. Transformadas de Laplace	122
C. Suma de algunas series numéricas notables	123

Capítulo 1

Introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales

DEFINICIÓN 1.1 1. Una ecuación en derivadas parciales (EDP) de orden $n \in \mathbb{N}$ es una ecuación en la que aparece una función desconocida que depende (al menos) de dos variables reales, junto a algunas de sus derivadas parciales hasta orden n . Cuando la función incógnita sólo depende de una variable real, se trata de una ecuación diferencial ordinaria (EDO) de orden n .

2. Se dice que una EDP es lineal si es lineal respecto de la función desconocida y de todas sus derivadas parciales. En otro caso, se dice que es no lineal.

Dada una función $u(x, y)$, es habitual utilizar la siguiente notación abreviada para designar sus derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = u_x(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = u_y(x, y), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = u_{xx}(x, y), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) = u_{xy}(x, y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x, y) = u_{xy}(x, y), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = u_{yy}(x, y) \dots$$

A partir de ahora, supondremos que las funciones que manejamos son suficientemente regulares de forma que todas las derivadas parciales que aparecen estén bien definidas y sean continuas.

Por otra parte, si la función u es de clase C^2 en un cierto dominio (existen todas las derivadas parciales hasta orden 2 de dicha función y son continuas en el dominio), se sabe que $u_{yx}(x, y) = u_{xy}(x, y)$, gracias al Teorema de Schwarz (igualdad de las derivadas cruzadas). Por ello, en las EDP de segundo orden sólo aparecerá u_{xy} (y no $u_{yx}(x, y)$). En general, es irrelevante el orden en el cual se aplican k (ó menos) derivadas parciales a una función de clase C^k en un cierto dominio.

EJEMPLO 1.1 1. Una EDP lineal de primer orden: $u_x(x, y) - u_y(x, y) + 2u(x, y) = 6$.

2. Una EDP no lineal de primer orden: $(u_x(x, y))^2 + (u_y(x, y))^2 = 0$.

3. Algunas EDP lineales de segundo orden:

a) $u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0$ (Ec. de Laplace)

b) $u_t(t, x) - u_{xx}(t, x) = 0$ (Ec. del calor)

c) $u_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x) = 0$ (Ec. de ondas)

4. Una EDP no lineal de segundo orden: $u(x, y) \cdot u_{xy}(x, y) + u_x(x, y) = y$.

Por regla general, al integrar una EDO de orden n aparecen n constantes arbitrarias. De la misma manera, al integrar una EDP de orden n , es habitual que aparezcan n funciones arbitrarias. Por ejemplo, la EDP lineal de primer orden $u_y(x, y) = 0$, tiene como solución $u(x, y) = f(x)$, donde f es una función arbitraria que sólo depende de x . Del mismo modo, dada la EDP lineal de segundo orden $u_{xy}(x, y) = 0$, al integrarla con respecto de y se obtiene que

$$u_x(x, y) = f(x),$$

donde f es una función arbitraria que sólo depende de x . Integrando ahora esta última identidad con respecto de x , resulta que la solución general de la EDP viene dada por

$$u(x, y) = \int f(x)dx + G(y),$$

donde G es una función arbitraria que sólo depende de y . Teniendo en cuenta que f es una función arbitraria, podemos expresar u en la forma

$$u(x, y) = F(x) + G(y),$$

donde F y G son funciones arbitrarias.

1.1. EDP lineales de primer orden con coeficientes constantes

Cuando la función incógnita depende de dos variables independientes, son aquellas que tienen la forma

$$a \cdot u_x(x, y) + b \cdot u_y(x, y) + c \cdot u(x, y) = f(x, y) \quad (1.1)$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ son conocidos ($|a| + |b| > 0$); también es conocida la función $f(x, y)$.

Supongamos, para empezar, que $a = 0$ y $b \neq 0$. Así la EDP queda

$$b \cdot u_y(x, y) + c \cdot u(x, y) = f(x, y) \quad (1.2)$$

En este caso, para cada x fijo, podemos ver la EDP anterior (1.2) como una EDO lineal de primer orden. Resolviéndola como tal, obtenemos que

$$u(x, y) = e^{-cy/b} \left(K(x) + \int^y \frac{1}{b} f(x, r) e^{cr/b} dr \right),$$

donde K es una función arbitraria.

En el caso general (cuando $a \neq 0$ y $b \neq 0$), introducimos la nueva variable

$$\xi = b \cdot x - a \cdot y$$

y la nueva función incógnita $v(\xi, y) = u(x, y)$. Utilizando la regla de la cadena, podemos escribir la EDP (1.1) en términos de la nueva función incógnita, en la forma

$$b \cdot v_y(\xi, y) + c \cdot v(\xi, y) = f \left(\frac{\xi + a \cdot y}{b}, y \right) \quad (1.3)$$

Ahora, esta EDP es del tipo anterior y aplicando la fórmula correspondiente a este caso, se obtiene

$$v(\xi, y) = e^{-cy/b} \left(K(\xi) + \int^y \frac{1}{b} f \left(\frac{\xi + a \cdot r}{b}, r \right) e^{cr/b} dr \right).$$

Deshaciendo el cambio, se llega a que

$$u(x, y) = e^{-cy/b} \left(K(bx - ay) + \int^y \frac{1}{b} f \left(x + \frac{a(r - y)}{b}, r \right) e^{cr/b} dr \right), \quad (1.4)$$

donde K es una función arbitraria. Las rectas $b \cdot x - a \cdot y = cte$ se denominan rectas características de la EDP.

Para resolver la EDP (1.1) también es posible utilizar el cambio de función incógnita $v(x, \xi) = u(x, y)$. Con ello, la EDP queda

$$a \cdot v_x(x, \xi) + c \cdot v(x, \xi) = f\left(x, \frac{bx - \xi}{a}\right) \quad (1.5)$$

de donde

$$v(x, \xi) = e^{-cx/a} \left(\tilde{K}(\xi) + \int^x \frac{1}{a} f\left(r, \frac{br - \xi}{a}\right) e^{cr/a} dr \right)$$

y por lo tanto

$$u(x, y) = e^{-cx/a} \left(\tilde{K}(bx - ay) + \int^x \frac{1}{a} f\left(r, y + \frac{b(r-x)}{a}\right) e^{cr/a} dr \right). \quad (1.6)$$

A pesar de las apariencias, es posible demostrar que los segundos miembros de las expresiones (1.4) y (1.6) son iguales, teniendo en cuenta que las funciones K y \tilde{K} deben estar relacionadas entre sí: para verlo, basta igualar (1.4) y (1.6) y tomar algún valor concreto para x ó y .

EJERCICIO 1.1 Probar que la solución general de la EDP $3u_x(x, y) - 2u_y(x, y) + u(x, y) = 1$ viene dada por $u(x, y) = 1 + K(-2x - 3y)e^{y/2}$, donde K es una función arbitraria. Obtener soluciones particulares, eligiendo la función K de diferentes maneras. Probar que también se puede expresar en la forma $u(x, y) = 1 + \tilde{K}(-2x - 3y)e^{-x/3}$, donde \tilde{K} es una función arbitraria. Ambas expresiones coinciden si y sólo si $K(-2x - 3y)e^{y/2} = \tilde{K}(-2x - 3y)e^{-x/3}$ para cada $x, y \in \mathbb{R}$: haciendo (por ejemplo) $x = 0$, resulta $K(-3y)e^{y/2} = \tilde{K}(-3y)$, o equivalentemente, $\tilde{K}(r) = K(r)e^{-r/6}$. Comprobar ahora que las dos expresiones anteriores de u coinciden, si K y \tilde{K} están relacionadas de esa manera.

En ciertas aplicaciones, resulta interesante determinar una solución particular de la EDP que satisface una condición adicional del tipo $u(x, \varphi(x)) = g(x)$ (resp. $u(\varphi(y), y) = g(y)$), donde las funciones φ y g son conocidas. En muchos de estos casos, esta condición sirve para determinar la función arbitraria K de manera única. Cuando $y = \varphi(x)$ (resp. $x = \varphi(y)$) es una recta característica para la EDP, existe solución verificando la condición adicional sólo para ciertas funciones particulares g ; además, en el caso de que g tenga la forma particular requerida, existirán infinitas funciones K satisfaciendo el requisito. Para verlo, basta derivar $u(x, \varphi(x)) = g(x)$ con respecto de x , de donde resulta $u_x(x, \varphi(x)) + u_y(x, \varphi(x))\varphi'(x) = g'(x)$. Multiplicando por a , se sigue que

$$a \cdot u_x(x, \varphi(x)) + a \cdot \varphi'(x) \cdot u_y(x, \varphi(x)) = a \cdot g'(x).$$

Haciendo ahora $y = \varphi(x)$ en la EDP, tenemos que

$$a \cdot u_x(x, \varphi(x)) + b \cdot u_y(x, \varphi(x)) + c \cdot u(x, \varphi(x)) = f(x, \varphi(x)).$$

Cuando $a \cdot \varphi'(x) = b$, resulta evidente que ambas expresiones sólo son compatibles si

$$a \cdot g'(x) + c \cdot g(x) = f(x, \varphi(x)).$$

EJEMPLO 1.2 La única solución del problema $3u_x(x, y) - 2u_y(x, y) + u(x, y) = 1$ que además verifica $u(x, 0) = x^2$ viene dada por $u(x, y) = 1 + \left(\frac{(2x+3y)^2}{4} - 1\right) e^{y/2}$. Por otro lado, ninguna de las soluciones de esta EDP verifica $u(x, 1 - \frac{2x}{3}) = x$, mientras que existen infinitas soluciones verificando $u(x, -\frac{2x}{3}) = 1 + e^{-x/3}$ (todas aquellas que satisfacen $K(0) = 1$). Notar que la recta $y = 0$ no es característica para la EDP, mientras que las rectas $y = 1 - \frac{2x}{3}$ e $y = -\frac{2x}{3}$ sí lo son.

1.2. EDP lineales de primer orden con coeficientes variables

Cuando la función incógnita depende de dos variables independientes son aquellas que tienen la forma

$$a(x, y) \cdot u_x(x, y) + b(x, y) \cdot u_y(x, y) + c(x, y) \cdot u(x, y) = f(x, y) \quad (1.7)$$

donde las funciones $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ y $f(x, y)$ son conocidas, $|a(x, y)| + |b(x, y)| > 0$.

El planteamiento teórico aquí es muy parecido al caso de coeficientes constantes. Cuando $a(x, y) = 0$ y $b(x, y) \neq 0$ la EDP queda

$$b(x, y) \cdot u_y(x, y) + c(x, y) \cdot u(x, y) = f(x, y) \quad (1.8)$$

y, de nuevo (para cada x fijo), podemos ver (1.8) como una EDO lineal de primer orden, que podemos resolver explícitamente, obteniendo

$$u(x, y) = \exp\left(-\int^y \frac{c(x, r)}{b(x, r)} dr\right) \left(K(x) + \int^y \frac{f(x, r)}{b(x, r)} \exp\left(\int^r \frac{c(x, s)}{b(x, s)} ds\right) dr\right),$$

donde K es una función arbitraria.

En el caso general (cuando $a(x, y) \neq 0$ y $b(x, y) \neq 0$), queremos introducir una nueva variable

$$\xi = \xi(x, y) \quad (1.9)$$

y una nueva función incógnita $v(\xi, y) = u(x, y)$ tal que la nueva EDP que resulte sea del tipo (1.8). Veamos cómo debemos elegir la función $\xi(x, y)$ para conseguirlo. Utilizando la regla de la cadena, tenemos que

$$u_x(x, y) = v_\xi(\xi, y) \frac{\partial \xi}{\partial x}(x, y), \quad u_y(x, y) = v_\xi(\xi, y) \frac{\partial \xi}{\partial y}(x, y) + v_y(\xi, y).$$

Sustituyendo en la EDP (1.7) se sigue que

$$f(x, y) = a(x, y) \cdot v_\xi(\xi, y) \frac{\partial \xi}{\partial x}(x, y) + b(x, y) \cdot \left(v_\xi(\xi, y) \frac{\partial \xi}{\partial y}(x, y) + v_y(\xi, y)\right) + c(x, y) \cdot v(\xi, y).$$

Así pues, la condición necesaria y suficiente para que el término v_ξ no aparezca es que

$$a(x, y) \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}(x, y) + b(x, y) \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y}(x, y) = 0.$$

En otras palabras, la función $\xi(x, y)$ que nos interesa utilizar en el cambio de variable, es una solución de la parte principal de la propia EDP (1.7), esto es, de la EDP inicial con $c = f = 0$. Esto puede conseguirse cuando $\xi(x, y) = cte$ define (implícitamente) alguna solución de la EDO (en general, no lineal)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x, y)}{a(x, y)}. \quad (1.10)$$

ya que, derivando la expresión $\xi(x, y(x)) = cte$ con respecto de x , resulta que

$$0 = \frac{\partial \xi}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial \xi}{\partial y}(x, y) \frac{dy}{dx} = \frac{\partial \xi}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial \xi}{\partial y}(x, y) \frac{b(x, y)}{a(x, y)}, \quad (1.11)$$

que es la condición que buscamos.

Con este cambio de variable, la EDP (1.7) queda

$$b(x, y) \cdot v_y(\xi, y) + c(x, y) \cdot v(\xi, y) = f(x, y).$$

Para poderla resolver, necesitamos expresar todos los coeficientes en términos de la nueva variable ξ ; para ello, precisamos despejar $x = h(\xi, y)$ a partir de (1.9). Una vez hecho esto, la EDP queda

$$b(h(\xi, y), y) \cdot v_y(\xi, y) + c(h(\xi, y), y) \cdot v(\xi, y) = f(h(\xi, y), y) \quad (1.12)$$

Ahora sí, esta EDP es del tipo anterior y aplicando la fórmula correspondiente a este caso, se obtiene $v(\xi, y)$. Deshaciendo el cambio, resulta $u(x, y) = v(\xi(x, y), y)$.

Las soluciones de la EDO (1.10) se denominan curvas características de la EDP. Notemos que, cuando a y b son constantes, la solución general de (1.10) viene dada por $y = \frac{b}{a}x + cte$, y por lo tanto, podemos tomar $\xi(x, y) = b \cdot x - a \cdot y$.

EJERCICIO 1.2 Probar que la solución general de la EDP $u_x(x, y) + yu_y(x, y) + yu(x, y) = 0$ viene dada por $u(x, y) = K(ye^{-x})e^{-y}$, donde K es una función arbitraria. Obtener soluciones particulares, eligiendo la función K de diferentes maneras.

En la práctica, es claro que la determinación de alguna función ξ (curva característica) puede ser (va a ser, en muchos casos) complicado; por otra parte, aunque sea posible, el cálculo explícito de la función inversa h resulta (en general) muy difícil. Todo ello implica que (salvo casos concretos) la resolución de EDP lineales de primer orden con coeficientes variables resulte una tarea complicada mediante métodos explícitos.

De nuevo, en ocasiones, una condición adicional del tipo $u(x, \varphi(x)) = g(x)$ (resp. $u(\varphi(y), y) = g(y)$), donde las funciones φ y g son conocidas, sirve para determinar la función arbitraria K de manera única. También puede suceder que dicha condición adicional sea incompatible con la EDP o que haya infinitas funciones K verificando el requisito. Derivando $u(x, \varphi(x)) = g(x)$ con respecto de x resulta $u_x(x, \varphi(x)) + u_y(x, \varphi(x))\varphi'(x) = g'(x)$. Multiplicando por $a(x, \varphi(x))$, se sigue que

$$a(x, \varphi(x)) \cdot u_x(x, \varphi(x)) + a(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \cdot u_y(x, \varphi(x)) = a(x, \varphi(x)) \cdot g'(x).$$

Haciendo ahora $y = \varphi(x)$ en la EDP, tenemos que

$$a(x, \varphi(x)) \cdot u_x(x, \varphi(x)) + b(x, \varphi(x)) \cdot u_y(x, \varphi(x)) + c(x, \varphi(x)) \cdot u(x, \varphi(x)) = f(x, \varphi(x)).$$

Cuando $a(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = b(x, \varphi(x))$, las expresiones sólo son compatibles si

$$a(x, \varphi(x)) \cdot g'(x) + c(x, \varphi(x)) \cdot g(x) = f(x, \varphi(x)).$$

Resaltemos que esta incompatibilidad entre la EDP y la condición inicial se puede producir cuando

$$\varphi'(x) = \frac{b(x, \varphi(x))}{a(x, \varphi(x))},$$

es decir, cuando la condición inicial viene dada sobre una curva característica.

EJEMPLO 1.3 La única solución del problema $u_x(x, y) + yu_y(x, y) + yu(x, y) = 0$ que además verifica $u(0, y) = ye^{-y}$ viene dada por $u(x, y) = ye^{-x-y}$. Por otro lado, ninguna de las soluciones de esta EDP verifica $u(x, 0) = x$, mientras que existen infinitas soluciones verificando $u(x, 0) = 1$ (todas aquellas que satisfacen $K(0) = 1$).

El método de las características se puede extender al caso de EDP lineales donde la función incógnita depende de tres ó más variables independientes. También es posible tratar EDP cuasilineales del tipo

$$a(x, y, u(x, y))u_x(x, y) + b(x, y, u(x, y))u_y(x, y) = c(x, y, u(x, y)),$$

donde los coeficientes pueden ser no lineales respecto de u , ver Bleeker y Csordas, pág. 92 y siguientes.

1.3. Aplicaciones de las EDP lineales de primer orden: Ecuación de Transporte

Consideremos un fluido que se mueve con una velocidad constante V en un tubo recto, fino y con sección transversal A . Supongamos que el fluido contiene un contaminante cuya concentración en el punto

x y en el instante t denotaremos por $u(x, t)$. Para simplificar supondremos que no hay otras fuentes de contaminantes en el tubo y que el contaminante no puede escapar a través de sus paredes. Entonces, en el instante t , la cantidad de contaminante en la sección del tubo entre las posiciones x_1 y x_2 viene dada por

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x, t) A dx.$$

Por otro lado, podemos expresar la cantidad de contaminante que fluye a través de un plano situado en el punto x , durante el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$, como

$$\int_{t_1}^{t_2} u(x, t) A V dt.$$

Estamos ahora en condiciones de hacer el siguiente balance: la cantidad de contaminante en la sección $[x_1, x_2]$ en el instante t_2 es igual a la cantidad en dicha sección en el instante anterior t_1 más la cantidad que entró a través del plano en la posición x_1 durante el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ menos la cantidad que salió a través del plano en la posición x_2 durante el mismo intervalo de tiempo. Esto es,

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x, t_2) A dx = \int_{x_1}^{x_2} u(x, t_1) A dx + \int_{t_1}^{t_2} u(x_1, t) A V dt - \int_{t_1}^{t_2} u(x_2, t) A V dt.$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo sabemos que

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} u(x, t_2) A dx - \int_{x_1}^{x_2} u(x, t_1) A dx &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} u_t(x, t) A dx dt, \\ \int_{t_1}^{t_2} u(x_1, t) A V dt - \int_{t_1}^{t_2} u(x_2, t) A V dt &= - \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} u_x(x, t) A V dt dx. \end{aligned}$$

Combinando estas identidades llegamos a que

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} (u_t(x, t) + V u_x(x, t)) A dx dt = 0.$$

Suponiendo que la igualdad anterior se verifica en cada segmento del tubo y en cada intervalo de tiempo y que la función $u(x, t)$ y sus derivadas parciales de primer orden son continuas, obtenemos

$$u_t(x, t) + V u_x(x, t) = 0.$$

Esta es la llamada **Ecuación de Transporte** en dimensión uno, que también se utiliza para estudiar fenómenos de flujos de tráfico. En los casos en que la velocidad V (resp. A) no es constante, sino que dependa de t y/o x (resp. x), habrá que deducir la correspondiente versión para la ecuación de Transporte, que tendrá en ese caso coeficientes variables. Existe también la versión en dimensión n cualquiera.

1.4. EDP lineales de segundo orden con coeficientes constantes: clasificación y reducción a la forma canónica

Vamos a considerar EDP del tipo

$$a \cdot u_{xx}(x, y) + b \cdot u_{xy}(x, y) + c \cdot u_{yy}(x, y) + d \cdot u_x(x, y) + e \cdot u_y(x, y) + f \cdot u(x, y) = F(x, y) \quad (1.13)$$

donde $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ son conocidos ($|a| + |b| + |c| > 0$) lo mismo que la función $F(x, y)$.

En esta sección vamos a ver que estas EDP pueden clasificarse (según sean los coeficientes a, b y c) y reducirse (mediante cambios de variable adecuados) a ciertas formas canónicas, de una manera totalmente análoga a la clasificación y reducción de las cónicas en el plano, es decir, de las ecuaciones cuadráticas

$$a \cdot x^2 + b \cdot xy + c \cdot y^2 + d \cdot x + e \cdot y + f = 0.$$

Recordemos que (en la terminología habitual) se dice que esta ecuación cuadrática es hiperbólica (esencialmente reducible a una hipérbola) si $b^2 - 4ac > 0$ (p.e. $x^2 - y^2 = 1$), elíptica (esencialmente reducible a una elipse) si $b^2 - 4ac < 0$ (p.e. $x^2 + y^2 = 1$) y parabólica (esencialmente reducible a una parábola) si $b^2 - 4ac = 0$ (p.e. $x^2 - y = 0$).

En el caso de las EDP esta terminología se mantiene. Veremos que (esencialmente) la EDP (1.13) puede reducirse a la ec. de ondas (prototipo de ec. hiperbólica), ec. de Laplace (prototipo de ec. elíptica) ó a la ec. del calor (prototipo de ec. parabólica) mencionadas en la introducción de este capítulo.

Para transformar (1.13) en su forma canónica, introducimos de nuevo un cambio de variables

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y) \quad (1.14)$$

y una nueva función incógnita $v(\xi, \eta) = u(x, y)$. Una vez más, utilizando la regla de la cadena, resulta que

$$\begin{aligned} u_x &= v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x, & u_y &= v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y, \\ u_{xx} &= v_{\xi\xi} (\xi_x)^2 + 2v_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + v_{\eta\eta} (\eta_x)^2 + v_\xi \xi_{xx} + v_\eta \eta_{xx}, \\ u_{xy} &= v_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + v_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + v_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + v_\xi \xi_{xy} + v_\eta \eta_{xy}, \\ u_{yy} &= v_{\xi\xi} (\xi_y)^2 + 2v_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + v_{\eta\eta} (\eta_y)^2 + v_\xi \xi_{yy} + v_\eta \eta_{yy}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la EDP (1.13) se obtiene

$$a^*(x, y) \cdot v_{\xi\xi} + b^*(x, y) \cdot v_{\xi\eta} + c^*(x, y) \cdot v_{\eta\eta} + d^*(x, y) \cdot v_\xi + e^*(x, y) \cdot v_\eta + f \cdot v = F(x, y) \quad (1.15)$$

donde los coeficientes vienen dados por

$$\begin{aligned} a^*(x, y) &= a \cdot (\xi_x)^2 + b \cdot \xi_x \xi_y + c \cdot (\xi_y)^2 \\ b^*(x, y) &= 2a \cdot \xi_x \eta_x + b \cdot (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + 2c \cdot \xi_y \eta_y \\ c^*(x, y) &= a \cdot (\eta_x)^2 + b \cdot \eta_x \eta_y + c \cdot (\eta_y)^2 \\ d^*(x, y) &= a \cdot \xi_{xx} + b \cdot \xi_{xy} + c \cdot \xi_{yy} + d \cdot \xi_x + e \cdot \xi_y \\ e^*(x, y) &= a \cdot \eta_{xx} + b \cdot \eta_{xy} + c \cdot \eta_{yy} + d \cdot \eta_x + e \cdot \eta_y \end{aligned} \quad (1.16)$$

Notar que ahora los nuevos coeficientes pueden no ser constantes, por lo que la EDP transformada se antoja más difícil que la EDP inicial. Sin embargo, podemos elegir ξ y η del modo que nos resulte más conveniente. El único requisito es que las funciones que definen el cambio debe ser funcionalmente independientes, es decir, $\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \neq 0$. Una buena opción consiste en elegirlos de tal forma que

$$\begin{aligned} a^*(x, y) &= a \cdot (\xi_x)^2 + b \cdot \xi_x \xi_y + c \cdot (\xi_y)^2 = 0, \\ c^*(x, y) &= a \cdot (\eta_x)^2 + b \cdot \eta_x \eta_y + c \cdot (\eta_y)^2 = 0. \end{aligned}$$

Como las dos expresiones son similares, trabajaremos con la primera. Dividiéndola por $(\xi_y)^2$, resulta

$$a \cdot \left(\frac{\xi_x}{\xi_y} \right)^2 + b \cdot \left(\frac{\xi_x}{\xi_y} \right) + c = 0.$$

Teniendo ahora en cuenta que si $\xi(x, y(x)) = cte$ define implícitamente una función, derivando con respecto de x , vemos que

$$\xi_x(x, y(x)) + \xi_y(x, y(x)) \frac{dy}{dx}(x) = 0,$$

o, lo que es lo mismo, esa función es una solución de la EDO

$$\frac{dy}{dx}(x) = - \frac{\xi_x(x, y(x))}{\xi_y(x, y(x))},$$

llegamos a que debemos elegir ξ como solución (implícita) de la EDO

$$a \cdot \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - b \cdot \left(\frac{dy}{dx} \right) + c = 0. \quad (1.17)$$

Supongamos por el momento que $a \neq 0$. Resolviendo, obtenemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (1.18)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (1.19)$$

Estas ecuaciones (llamadas características) admiten como soluciones las familias de rectas

$$y = \lambda_1 x + cte, \quad y = \lambda_2 x + cte,$$

respectivamente, siendo $\lambda_1 = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ y $\lambda_2 = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Una vez más, estas rectas se denominan características.

Dependiendo ahora del signo del término $b^2 - 4ac$ se distinguen los siguientes casos:

Caso Hiperbólico: $b^2 - 4ac > 0$

Aquí, los valores λ_1 y λ_2 son reales y distintos. Tomando

$$\xi(x, y) = y - \lambda_1 x, \quad \eta(x, y) = y - \lambda_2 x,$$

resulta que la EDP transformada (1.15) queda

$$v_{\xi\eta}(\xi, \eta) + \tilde{d} \cdot v_{\xi}(\xi, \eta) + \tilde{e} \cdot v_{\eta}(\xi, \eta) + \tilde{f} \cdot v(\xi, \eta) = \tilde{F}(\xi, \eta) \quad (1.20)$$

donde los coeficientes son constantes y vienen dados por $\tilde{d} = \frac{a(e-d\lambda_1)}{4ac-b^2}$, $\tilde{e} = \frac{a(e-d\lambda_2)}{4ac-b^2}$, $\tilde{f} = \frac{af}{4ac-b^2}$ y la función $\tilde{F}(\xi, \eta) = \frac{a}{4ac-b^2} F\left(\frac{\eta-\xi}{\lambda_1-\lambda_2}, \xi + \lambda_1 \frac{\eta-\xi}{\lambda_1-\lambda_2}\right)$.

Cuando $a = 0$ ni siquiera tiene sentido considerar λ_1 y λ_2 . En este caso, hay que elegir un cambio de variable distinto. Si además $c = 0$, la EDP inicial ya está en la misma forma que (1.20). Si $a = 0, c \neq 0$, en lugar de elegir ξ (resp. η) como solución de la EDO (1.17), escribimos la ecuación característica en la forma

$$-b \cdot \left(\frac{dx}{dy}\right) + c \cdot \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 0, \quad (1.21)$$

cuyas soluciones viene dadas por

$$x = cte, \quad x = \frac{b}{c}y + cte$$

y planteamos el cambio de variable

$$\xi(x, y) = x, \quad \eta(x, y) = x - \frac{b}{c}y.$$

En este caso, la EDP transformada resulta ser de nuevo (1.20), pero ahora con $\tilde{d} = -\frac{dc}{b^2}$, $\tilde{e} = \frac{eb-dc}{b^2}$, $\tilde{f} = -\frac{fc}{b^2}$ y la función $\tilde{F}(\xi, \eta) = \frac{-c}{b^2} F\left(\xi, \frac{c(\xi-\eta)}{b}\right)$. Notar que $b \neq 0$, por la condición de hiperbolicidad.

Caso Parabólico: $b^2 - 4ac = 0$

Si $a = b = 0$ (y por lo tanto $c \neq 0$), la ecuación inicial ya está en la forma

$$u_{yy}(x, y) + \frac{d}{c} \cdot u_x(x, y) + \frac{e}{c} \cdot u_y(x, y) + \frac{f}{c} \cdot u(x, y) = \frac{1}{c} F(x, y) \quad (1.22)$$

Algo similar sucede cuando $b = c = 0, a \neq 0$.

Si $a \neq 0, b \neq 0$, las raíces λ_1 y λ_2 son ambas iguales a $\frac{b}{2a}$, por lo que sólo contamos con una familia de rectas características: $y = \frac{b}{2a}x + cte$. En estas circunstancias, nos planteamos el cambio de variable

$$\xi(x, y) = y - \frac{b}{2a}x, \quad \eta(x, y) = x,$$

(otras opciones para η son posibles, del tipo $\eta(x, y) = hy + kx$ tales que $2ak + bh \neq 0$).

La elección que hemos hecho nos lleva a que $a^* = 0$ y $b^* = 0$, por lo que la EDP transformada (1.15) queda

$$v_{\eta\eta}(\xi, \eta) + \tilde{d} \cdot v_{\xi}(\xi, \eta) + \tilde{e} \cdot v_{\eta}(\xi, \eta) + \tilde{f} \cdot v(\xi, \eta) = \tilde{F}(\xi, \eta) \quad (1.23)$$

donde $\tilde{d} = \frac{2ae-db}{2a^2}$, $\tilde{e} = \frac{d}{a}$, $\tilde{f} = \frac{f}{a}$ y $\tilde{F}(\xi, \eta) = \frac{1}{a}F(\eta, \xi + \frac{b\eta}{2a})$.

Caso Elíptico: $b^2 - 4ac < 0$

Aquí, los valores λ_1 y λ_2 son complejos conjugados. Usando las mismas variables ξ y η que en el caso hiperbólico (aunque en este caso sean complejas), se llega a una EDP como (1.20). Si no queremos trabajar con las variables complejas $y - \lambda_1 x, y - \lambda_2 x$, podemos considerar sus partes real e imaginaria, es decir, el cambio de variable

$$\xi(x, y) = y - \frac{b}{2a}x, \quad \eta(x, y) = -\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}x.$$

Con esta elección, la EDP transformada queda

$$v_{\xi\xi}(\xi, \eta) + v_{\eta\eta}(\xi, \eta) + \tilde{d} \cdot v_{\xi}(\xi, \eta) + \tilde{e} \cdot v_{\eta}(\xi, \eta) + \tilde{f} \cdot v(\xi, \eta) = \tilde{F}(\xi, \eta) \quad (1.24)$$

donde $\tilde{d} = \frac{4ae-2bd}{4ac-b^2}$, $\tilde{e} = \frac{-2d}{\sqrt{4ac-b^2}}$, $\tilde{f} = \frac{4af}{4ac-b^2}$ y $\tilde{F}(\xi, \eta) = \left(\frac{4a}{4ac-b^2}\right) F\left(\frac{-2a\eta}{\sqrt{4ac-b^2}}, \xi - \frac{b\eta}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)$

Como $b^2 < 4ac$, notemos que no puede suceder que a ó c sea nulo.

Acabamos de ver que es posible transformar la EDP original (1.13) en otra EDP de la forma (1.20), (1.23) y (1.24), según sea el caso (hiperbólico, parabólico ó elíptico, respectivamente).

Pero todavía es posible simplificar aún más las EDP transformadas, haciendo "desaparecer" las derivadas parciales de primer orden con el siguiente argumento: consideramos el cambio de función incógnita $w(\xi, \eta) = v(\xi, \eta) \exp(k\xi + h\eta)$ con k y h constantes por determinar. Derivando la expresión $v(\xi, \eta) = w(\xi, \eta) \exp(-k\xi - h\eta)$ y utilizando la regla de la cadena, resulta

$$\begin{aligned} v_{\xi} &= (w_{\xi} - kw) \exp(-k\xi - h\eta), & v_{\eta} &= (w_{\eta} - hw) \exp(-k\xi - h\eta) \\ v_{\xi\xi} &= (w_{\xi\xi} - 2kw_{\xi} + k^2w) \exp(-k\xi - h\eta), \\ v_{\eta\eta} &= (w_{\eta\eta} - 2hw_{\eta} + h^2w) \exp(-k\xi - h\eta), \\ v_{\xi\eta} &= (w_{\xi\eta} - kw_{\eta} - hw_{\xi} + hkw) \exp(-k\xi - h\eta). \end{aligned}$$

En el caso hiperbólico, sustituyendo las expresiones anteriores en (1.20) y eligiendo $k = \tilde{e}$ y $h = \tilde{d}$, nos queda

$$w_{\xi\eta}(\xi, \eta) + (\tilde{f} - \tilde{d}\tilde{e}) \cdot w(\xi, \eta) = \tilde{F}(\xi, \eta) \exp(\tilde{e}\xi + \tilde{d}\eta) \quad (1.25)$$

En el caso parabólico, distinguiremos dos situaciones: si $\tilde{d} \neq 0$ ó no en (1.23). En el primer caso, sustituyendo las expresiones anteriores y eligiendo $k = \frac{4\tilde{f}-\tilde{e}^2}{4\tilde{d}}$ y $h = \frac{\tilde{e}}{2}$, nos queda

$$w_{\eta\eta}(\xi, \eta) + \tilde{d} \cdot w_{\xi}(\xi, \eta) = \tilde{F}(\xi, \eta) \exp\left(\frac{4\tilde{f}-\tilde{e}^2}{4\tilde{d}}\xi + \frac{\tilde{e}\eta}{2}\right) \quad (1.26)$$

Si $\tilde{d} = 0$, sustituyendo las expresiones anteriores y eligiendo $h = \tilde{e}/2$ y k como se quiera, nos queda

$$w_{\eta\eta}(\xi, \eta) + \left(\tilde{f} - \frac{\tilde{e}^2}{4}\right) w(\xi, \eta) = \tilde{F}(\xi, \eta) \exp\left(k\xi + \frac{\tilde{e}\eta}{2}\right) \quad (1.27)$$

En el caso elíptico, sustituyendo las expresiones anteriores en (1.24) y eligiendo $k = \tilde{d}/2$ y $h = \tilde{e}/2$, nos queda

$$w_{\xi\xi}(\xi, \eta) + w_{\eta\eta}(\xi, \eta) + \left(\tilde{f} - \frac{\tilde{d}^2}{4} - \frac{\tilde{e}^2}{4} \right) \cdot w(\xi, \eta) = \tilde{F}(\xi, \eta) \exp\left(\frac{\tilde{d}\xi + \tilde{e}\eta}{2}\right) \quad (1.28)$$

Los desarrollos anteriores se pueden resumir en el siguiente resultado:

TEOREMA 1.1 (Teorema de clasificación) *Dada la EDP (1.13), existen cambios de variable y de función incógnita que la transforman en una de las siguientes formas canónicas:*

- Si $b^2 - 4ac > 0$ (caso hiperbólico),

$$w_{\xi\eta}(\xi, \eta) + \hat{f} \cdot w(\xi, \eta) = \hat{F}(\xi, \eta)$$

- Si $b^2 - 4ac < 0$ (caso elíptico),

$$w_{\xi\xi}(\xi, \eta) + w_{\eta\eta}(\xi, \eta) + \hat{f} \cdot w(\xi, \eta) = \hat{F}(\xi, \eta)$$

- Si $b^2 = 4ac$ (caso parabólico), hay dos posibilidades:

$$w_{\eta\eta}(\xi, \eta) + \hat{d} \cdot w_{\xi}(\xi, \eta) = \hat{F}(\xi, \eta) \quad (\text{Caso no degenerado, si } \hat{d} \neq 0)$$

$$w_{\eta\eta}(\xi, \eta) + \hat{f} \cdot w(\xi, \eta) = \hat{F}(\xi, \eta) \quad (\text{Caso degenerado})$$

donde \hat{d}, \hat{f} son constantes.

COROLARIO 1.1 a) *En el caso hiperbólico, la EDP también se puede escribir en la forma*

$$W_{tt}(t, s) - W_{ss}(t, s) + \hat{f} \cdot W(t, s) = G(t, s).$$

b) *En el caso parabólico no degenerado, la EDP también se puede escribir en la forma*

$$W_t(t, s) - W_{ss}(t, s) = G(t, s).$$

Dem. En **a)**, basta hacer el cambio de variables $t = \xi + \eta$, $s = \xi - \eta$ y de función incógnita $W(t, s) = w(\xi, \eta)$, tomando $G(t, s) = \hat{F}\left(\frac{t+s}{2}, \frac{t-s}{2}\right)$. En **b)**, podemos hacer el cambio de variable $t = -\xi/\hat{d}$, $s = \eta$ y de función incógnita $W(t, s) = w(\xi, \eta)$, tomando $G(t, s) = -\hat{F}(-\hat{d}t, s)$. El caso $\hat{d} = 0$ lo incluimos en el caso degenerado. ■

Conviene destacar que en el caso hiperbólico con $\hat{f} = 0$, la parte homogénea de la EDP nos queda $w_{\xi\eta}(\xi, \eta) = 0$, cuya solución general (obtenida al principio del capítulo) viene dada por

$$w(\xi, \eta) = K_1(\xi) + K_2(\eta),$$

donde K_1 y K_2 son funciones arbitrarias. En el caso parabólico degenerado (llamado así porque no aparece w_{ξ}), la parte homogénea de la EDP nos queda

$$w_{\eta\eta}(\xi, \eta) + \hat{f} \cdot w(\xi, \eta) = 0$$

y es fácilmente resoluble por métodos elementales, porque (una vez más) para cada ξ fijo, podemos verla como una EDO (en esta ocasión, lineal de segundo orden con coeficientes constantes). Según sea el signo de \hat{f} , la solución viene dada por:

- a)** Si $\hat{f} = 0$, $w(\xi, \eta) = K_1(\xi)\eta + K_2(\xi)$.

b) Si $\hat{f} < 0$, $w(\xi, \eta) = K_1(\xi)e^{\sqrt{-\hat{f}}\eta} + K_2(\xi)e^{-\sqrt{-\hat{f}}\eta}$.

c) Si $\hat{f} > 0$, $w(\xi, \eta) = K_1(\xi) \cos\left(\sqrt{\hat{f}}\eta\right) + K_2(\xi) \sin\left(\sqrt{\hat{f}}\eta\right)$.

donde K_1 y K_2 son funciones arbitrarias.

EJEMPLO 1.4 Reducir a su forma canónica la EDP

$$4u_{xx}(x, y) + 5u_{xy}(x, y) + u_{yy}(x, y) + u_x(x, y) + u_y(x, y) = 2$$

Aquí, $a = 4, b = 5, c = d = e = 1, f = 0$ y $F(x, y) = 2$. Como $b^2 - 4ac = 9 > 0$, la EDP es hiperbólica. Las EDO características quedan $y'(x) = 1, y'(x) = \frac{1}{4}$, por lo que hacemos el cambio de variables

$$\xi = y - x, \quad \eta = y - \frac{x}{4}.$$

Notemos que $\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x = -3/4 \neq 0$. Haciendo $v(\xi, \eta) = u(x, y)$, la EDP transformada resulta

$$v_{\xi\eta}(\xi, \eta) - \frac{v_\eta}{3}(\xi, \eta) = -\frac{8}{9}.$$

Ahora, el cambio $w(\xi, \eta) = v(\xi, \eta)e^{-\xi/3}$, nos conduce a la forma canónica

$$w_{\xi\eta}(\xi, \eta) = -\frac{8}{9}e^{-\xi/3}.$$

Esta EDP se puede integrar primero con respecto de η

$$w_\xi(\xi, \eta) = -\frac{8}{9}e^{-\xi/3}\eta + \tilde{K}_1(\xi),$$

y luego con respecto de ξ ,

$$w(\xi, \eta) = \frac{8}{3}e^{-\xi/3}\eta + \int \tilde{K}_1(\xi)d\xi + K_2(\eta) = \frac{8}{3}e^{-\xi/3}\eta + K_1(\xi) + K_2(\eta),$$

donde \tilde{K}_1, K_1 y K_2 son funciones arbitrarias. Deshaciendo los cambios, resulta que

$$v(\xi, \eta) = \frac{8}{3}\eta + (K_1(\xi) + K_2(\eta))e^{\xi/3}$$

y, por lo tanto,

$$u(x, y) = \frac{8}{3}\left(y - \frac{x}{4}\right) + \left(K_1(y - x) + K_2\left(y - \frac{x}{4}\right)\right)e^{(y-x)/3}.$$

EJEMPLO 1.5 Reducir a su forma canónica la EDP

$$u_{xx}(x, y) + u_{xy}(x, y) + u_{yy}(x, y) + u_x(x, y) = 0$$

Aquí, $a = b = c = d = 1, e = f = F = 0$. Como $b^2 - 4ac = -3 < 0$, la EDP es elíptica. Las EDO características quedan $y'(x) = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, por lo que hacemos el cambio de variables

$$\xi = y - \frac{x}{2}, \quad \eta = -\frac{\sqrt{3}x}{2}.$$

Notemos que $\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x = \sqrt{3}/2 \neq 0$. Haciendo $v(\xi, \eta) = u(x, y)$, la EDP transformada queda

$$v_{\xi\xi}(\xi, \eta) + v_{\eta\eta}(\xi, \eta) - \frac{2v_\xi}{3}(\xi, \eta) - \frac{2v_\eta}{\sqrt{3}}(\xi, \eta) = 0.$$

Ahora, el cambio $w(\xi, \eta) = v(\xi, \eta)e^{-\xi/3 - \eta/\sqrt{3}}$, nos conduce a la forma canónica

$$w_{\xi\xi}(\xi, \eta) + w_{\eta\eta}(\xi, \eta) - \frac{4}{9}w(\xi, \eta) = 0.$$

EJEMPLO 1.6 Reducir a su forma canónica la EDP

$$u_{xx}(x, y) - 4u_{xy}(x, y) + 4u_{yy}(x, y) = e^y$$

Aquí, $a = 1, b = -4, c = 4, d = e = f = 0$ y $F(x, y) = e^y$. Como $b^2 - 4ac = 0$, la EDP es parabólica. La EDO característica queda $y'(x) = -2$. Planteamos el cambio de variables dado por

$$\xi = y + 2x, \quad \eta = x.$$

Notemos que $\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x = -1 \neq 0$. Haciendo $v(\xi, \eta) = u(x, y)$, la forma canónica queda

$$v_{\eta\eta}(\xi, \eta) = e^{\xi - 2\eta}.$$

Integrando dos veces con respecto de η resulta

$$v(\xi, \eta) = \frac{e^{\xi - 2\eta}}{4} + K_1(\xi)\eta + K_2(\xi)$$

donde K_1 y K_2 son funciones arbitrarias. Deshaciendo los cambios, nos queda que

$$u(x, y) = \frac{e^y}{4} + K_1(y + 2x)x + K_2(y + 2x).$$

Si elegimos $\eta = y$, la forma canónica nos queda

$$v_{\eta\eta}(\xi, \eta) = \frac{e^\eta}{4}$$

de donde

$$v(\xi, \eta) = \frac{e^\eta}{4} + \tilde{K}_1(\xi)\eta + \tilde{K}_2(\xi),$$

y, por lo tanto,

$$u(x, y) = \frac{e^y}{4} + \tilde{K}_1(y + 2x)y + \tilde{K}_2(y + 2x).$$

Como en el caso de las EDP de primer orden, resultan dos expresiones aparentemente distintas para $u(x, y)$. De hecho, se puede comprobar que son iguales: para verlo, hay que encontrar las relaciones que hay entre K_1, K_2, \tilde{K}_1 y \tilde{K}_2 . Las dos expresiones de u coinciden si y sólo si

$$K_1(y + 2x)x + K_2(y + 2x) = \tilde{K}_1(y + 2x)y + \tilde{K}_2(y + 2x), \quad \text{para cada } x, y \in \mathbb{R}.$$

Haciendo $y = 0$, se sigue que $\tilde{K}_2(r) = K_1(r)\frac{r}{2} + K_2(r)$; si hacemos $x = 0$, resulta $\tilde{K}_1(y)y + \tilde{K}_2(y) = K_2(y)$, de donde $\tilde{K}_1(r) = -\frac{K_1(r)}{2}$. Con estas relaciones en la mano, es fácil comprobar que las dos expresiones de $u(x, y)$ coinciden para cada $x, y \in \mathbb{R}$.

En el caso de EDP lineales de segundo orden con coeficientes constantes en \mathbb{R}^n

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i x_j}(x) + \sum_{j=1}^n b_j u_{x_j}(x) + cu(x) = F(x),$$

donde $a_{ij}, b_j, c \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, \dots, n$ y la función incógnita $u(x)$ depende de n de variables independientes (es decir, $x \in \mathbb{R}^n$), es posible establecer una clasificación similar a la que hemos visto aquí (ligeramente más complicada), mediante transformaciones parecidas. En este caso (ver Casas, capítulo 7), las formas canónicas quedan

$$w_{tt}(y, t) - \sum_{i=1}^{n-1} w_{y_i y_i}(y, t) + \hat{c}w(y, t) = \hat{F}(y, t) \quad (\text{caso hiperbólico})$$

$$w_t(y, t) - \sum_{i=1}^{n-1} w_{y_i y_i}(y, t) + \hat{c}w(y, t) = \hat{F}(y, t) \quad (\text{caso parabólico})$$

$$\sum_{i=1}^n w_{y_i y_i}(y) + \hat{c}w(y) = \hat{F}(y) \quad (\text{caso elíptico}).$$

Los resultados anteriores justifican que (a partir de ahora) nos centremos en el estudio y la resolución de las tres EDP canónicas, dado que cualquier otra EDP lineal de segundo orden con coeficientes constantes puede ser transformada en una de ellas. Deshaciendo los cambios de variables efectuados tendremos entonces resueltas las EDP originales.

1.5. EDP con Wolfram Alpha

Se pueden resolver distintos tipos de EDP con Wolfram Alpha (<https://www.wolframalpha.com/>). La solución se expresa en términos de funciones arbitrarias $c_1(\cdot), c_2(\cdot), \dots$. Veamos algunos ejemplos.

Se resuelven EDP lineales de primer orden y coeficientes constantes, como

$$3D(u(x, y), x) - 2D(u(x, y), y) + u(x, y) = 1,$$

con resultado

$$u(x, y) = e^{-x/3} \left(c_1 \left(\frac{1}{3}(2x + 3y) \right) + e^{x/3} \right),$$

fácilmente simplificable y equivalente a

$$u(x, y) = e^{-x/3} F(2x + 3y) + 1.$$

Se pueden elegir los nombres de la función y las variables, como se prefiera. También se pueden resolver algunas EDP lineales de primer orden y coeficientes variables, como

$$x * D(u(x, y), x) - 2 * y * D(u(x, y), y) + u(x, y) = \exp(x),$$

con solución

$$u(x, y) = \frac{c_1(x^2 y) + e^x}{x}.$$

Igualmente, ciertas EDP lineales de segundo orden sencillas

$$D(u(x, y), x, x) + u(x, y) = y \implies u(x, y) = c_1(y) \sin(x) + c_2(y) \cos(x) + y.$$

También admite EDP lineales de segundo orden y coeficientes variables, como

$$x^2 D(u(x, y), x, x) + u(x, y) = y.$$

Algunas EDP de orden superior son fácilmente integrables por técnicas de EDO:

$$D(u(x, y, z), x, y, z) = 0 \implies u(x, y, z) = c_3(x, y) + c_2(x, z) + c_1(y, z).$$

$$D(u(x, t), x, t, t) = \exp(2x + 3t) \implies u(x, t) = tc_3(x) + c_2(x) + c_1(t) + \frac{1}{18} e^{3t+2x}.$$

A veces, Wolfram Alpha no proporciona solución explícita, lo cual no significa que no se pueda obtener.

Otra posibilidad es usar la orden DSolve y una sintaxis tipo Mathematica (mucho más rígida: no pueden olvidarse las mayúsculas, corchetes, etc...)

$$DSolve[D[u[x, y], x, x] + 10 * D[u[x, y], x, y] + 9 * D[u[x, y], y, y] == 0, u[x, y], {x, y}],$$

que proporciona el resultado

$$u(x, y) = c_1(y - x) + c_2(y - 9x).$$

Esta sintaxis es la que se utiliza en Wolfram Alpha Open Code, una versión libre y gratuita de Mathematica en la nube, disponible en <https://sandbox.open.wolframcloud.com> y también pinchando en el icono "Open code", cuando se ejecuta una orden en Wolfram Alpha. En este último caso, además traduce los órdenes de Wolfram Alpha a la sintaxis de Mathematica automáticamente.

Bibliografía sobre EDP:

1. "Basic partial differential equations", D. Bleecker y G. Csordas, Van Nostrand, 1992.
2. "Partial differential equations for scientists and engineers", Tyn Myint-U y L. Debnath, North Holland, 1987.
3. "Partial differential equations for scientists and engineers", Stanley J. Farlow, Dover Publications, 1982.
4. "Introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales", E. Casas, Universidad de Cantabria, 1992.

Recursos en Internet sobre EDP:

1. En Youtube, "But, what is a partial differential equation?"
<https://www.youtube.com/watch?v=ly4S0oi3Yz8>
2. https://en.wikipedia.org/wiki/Partial_differential_equation
3. <http://eqworld.ipmnet.ru/>
Web muy recomendable y completa donde se recopila información sobre métodos de resolución de EDP y EDO (lineales y no lineales), tipos de soluciones particulares, transformaciones interesantes en cada caso, etc...

Capítulo 2

Series de Fourier

2.1. El método de separación de variables: resolución de EDP en dimensión dos

Supongamos que queremos estudiar cómo se difunde el calor en un alambre homogéneo de longitud L a lo largo del tiempo. Para ello, necesitamos conocer la temperatura inicial en cada punto del alambre. También necesitamos contar con alguna información sobre lo que sucede en los extremos del alambre (cuál es su temperatura durante el proceso, si permanecen aislados, si reciben calor, etc...) Comencemos considerando el caso en que dicha temperatura permanece igual a cero todo el tiempo. Supondremos que el alambre es suficientemente fino de manera que el calor está igualmente distribuido sobre cada sección transversal en cada instante de tiempo t , que no hay fuentes de calor internas y que la superficie del alambre está aislado, por lo que no se produce pérdida de calor a través de ella. Si denotamos por $u(x, t)$ la temperatura del alambre en el punto x y en el instante t , desde el punto de vista matemático, este problema se puede formular de la siguiente manera:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), & x \in (0, L), t > 0 \quad \text{Ec. del Calor} \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t > 0 \quad \text{Condiciones de Contorno} \\ u(x, 0) = f(x), & x \in (0, L) \quad \text{Condición inicial} \end{array} \right. \quad (2.1)$$

En principio, como no sabemos resolver la ec. del calor, podemos comenzar buscando algunas soluciones particulares. Por ejemplo, las soluciones de la forma

$$u(x, t) = F(x) \cdot G(t), \quad (2.2)$$

donde F y G son funciones desconocidas. Es decir, queremos determinar las soluciones en las cuales las variables x y t aparecen separadas (de ahí el nombre del método). Es inmediato ver que para este tipo de funciones la ec. del Calor se reduce a un par de EDO: sustituyendo la expresión (2.2) en la EDP, resulta

$$F(x)G'(t) = F''(x)G(t), \quad x \in (0, L), t > 0.$$

Suponiendo que $F \neq 0$ y $G \neq 0$ (en otro caso, obtenemos la solución $u(x, t) \equiv 0$ con la que ya contamos) y dividiendo por $F(x)G(t)$, se sigue que

$$\frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)}, \quad x \in (0, L), t > 0.$$

Como las variables x y t son independientes, la única posibilidad para que la igualdad anterior se produzca es que exista una constante $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = -\lambda, \quad x \in (0, L), t > 0,$$

donde el signo menos se introduce por motivos técnicos. Además, imponiendo las condiciones de contorno,

$$u(0, t) = F(0)G(t) = 0, \quad u(L, t) = F(L)G(t) = 0, \quad t > 0$$

resulta que $F(0) = F(L) = 0$.

Por lo tanto, las funciones F y G que nos interesan deben verificar

$$F''(x) + \lambda F(x) = 0, \quad x \in (0, L), \quad F(0) = F(L) = 0, \quad (2.3)$$

$$G'(t) + \lambda G(t) = 0, \quad t > 0 \quad (2.4)$$

donde λ es una constante desconocida arbitraria. Vamos a determinar los valores λ que proporcionan soluciones no nulas. Para ello, resolvemos el problema de contorno (2.3).

Notemos que en (2.3) tenemos una EDO de segundo orden lineal y con coeficientes constantes que es fácil resolver. Para ello, basta distinguir el signo de λ . Si $\lambda = 0$, $F(x) = c_1x + c_2$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Como $0 = F(0) = c_2$ y $0 = F(L) = c_1L + c_2$, resulta $c_1 = c_2 = 0$. Si $\lambda < 0$, la solución general de la EDO viene dada por $F(x) = c_1e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Como $0 = F(0) = c_1 + c_2$ y $0 = F(L) = c_1e^{\sqrt{-\lambda}L} + c_2e^{-\sqrt{-\lambda}L}$, resulta de nuevo $c_1 = c_2 = 0$. Consideremos, por tanto, el caso $\lambda > 0$. Ahora, la solución general de la EDO viene dada por $F(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Usando las condiciones de contorno resulta que $c_1 = 0$ y $c_2 \sin(\sqrt{\lambda}L) = 0$, de donde $c_2 = 0$ ó $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$ para algún número natural n . Este último caso es el único que nos proporciona soluciones no nulas del problema (2.3); dependiendo del valor de n , vienen dadas por $F_n(x) = C \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, con $C \in \mathbb{R}$. Llevando el valor de λ a la ecuación (2.4), se sigue que

$$G_n(t) = C \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 t}{L^2}\right),$$

con $C \in \mathbb{R}$ arbitraria. Por lo tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$ encontramos que las funciones

$$u_n(x, t) = C \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 t}{L^2}\right),$$

donde $C \in \mathbb{R}$, son soluciones de la ec. del Calor y verifican también las condiciones de contorno.

Nos falta únicamente verificar la condición inicial. Haciendo $t = 0$ en la expresión de u_n resulta que

$$u_n(x, 0) = C \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

con $C \in \mathbb{R}$. Ahora, resulta inmediato deducir cuál es la solución del problema (2.1) si la función f tiene esa forma. Por ejemplo, si $f(x) = -3 \sin\left(\frac{5\pi x}{L}\right)$, entonces la solución del problema (2.1) viene dada por

$$u(x, t) = -3 \sin\left(\frac{5\pi x}{L}\right) \exp\left(-\frac{25\pi^2 t}{L^2}\right).$$

Asimismo, gracias a la linealidad del problema, si $f(x) = -3 \sin\left(\frac{5\pi x}{L}\right) + 2 \sin\left(\frac{7\pi x}{L}\right)$, la solución del problema viene dada por

$$u(x, t) = -3 \sin\left(\frac{5\pi x}{L}\right) \exp\left(-\frac{25\pi^2 t}{L^2}\right) + 2 \sin\left(\frac{7\pi x}{L}\right) \exp\left(-\frac{49\pi^2 t}{L^2}\right).$$

En general, si

$$f(x) = \sum_{n=1}^N b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

entonces la solución del problema (2.1) viene dada por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 t}{L^2}\right).$$

De esta manera, queda claro que cubrimos algunas, pero no todas las posibilidades, ya que no siempre la temperatura inicial f va a tener la forma anterior. Llegados a este punto, la genial aportación que hizo J.-B. J. Fourier fue imaginar que **cualquier función arbitraria $f(x)$ puede ser expresada como una serie infinita de senos**, es decir en la forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (2.5)$$

tal como anunció en 1807 ante la Academia de Ciencias de París. En su honor, nos referimos a (2.5) como **la serie de Fourier de senos** de la función f . Una vez asumido esto, resulta claro que la solución del problema (2.1) puede expresarse formalmente como

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 t}{L^2}\right). \quad (2.6)$$



Figura 2.1: *Jean Baptiste Joseph Fourier.*

Por supuesto, la afirmación de Fourier causó un impresionante revuelo entre los miembros de la Academia, muchos de los cuales no aceptaron la validez de su planteamiento. Tal incomprensión puede entenderse fácilmente, debido a que es la primera vez en la Historia que aparece el concepto de **una base con infinitos elementos** y a que en aquel momento muchos de los conceptos matemáticos (función, convergencia de series, etc...) todavía no estaban rigurosamente establecidos. En este capítulo precisaremos en qué sentido se verifica la igualdad (2.5) y para qué tipo de funciones.

Previamente, una cuestión fundamental es la determinación de los coeficientes b_n a partir de la función f . Básicamente, se sigue de las propiedades

$$\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ \frac{L}{2} & \text{si } k = n \end{cases} \quad (2.7)$$

Supuesto que se verifica (2.5), multiplicando a ambos lados por $\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$ e integrando con respecto de x entre 0 y L resulta que

$$\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx = \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx.$$

Suponiendo que la integral de la serie coincide con la serie de la integral (este paso se puede justificar

rigurosamente en ciertas condiciones, ver Tyn Myint-U, pg. 117), es decir,

$$\int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx,$$

y utilizando ahora (2.7), se obtiene

$$b_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

Notemos que estas expresiones son fáciles de calcular en multitud de casos, incluso bajo requisitos de regularidad mínimos sobre f (por ejemplo, podemos considerar el caso de una función f constante a trozos).

EJEMPLO 2.1 Para expresar la función $f(x) = x(1-x)$ en serie de Fourier de senos en $[0, 1]$ basta calcular

$$b_n = 2 \int_0^1 x(1-x) \sin(n\pi x) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Integrando dos veces por partes,

$$\begin{aligned} b_n &= 2 \left(-x(1-x) \frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} \Big|_{x=0}^{x=1} + 2 \int_0^1 (1-2x) \frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} dx \right) = 2 \int_0^1 (1-2x) \frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} dx = \\ &= 2 \left((1-2x) \frac{\sin(n\pi x)}{n^2\pi^2} \Big|_{x=0}^{x=1} + 4 \int_0^1 \frac{\sin(n\pi x)}{n^2\pi^2} dx \right) = -4 \left(\frac{\cos(n\pi x)}{n^3\pi^3} \Big|_{x=0}^{x=1} \right) = \frac{4(1-(-1)^n)}{n^3\pi^3}. \end{aligned}$$

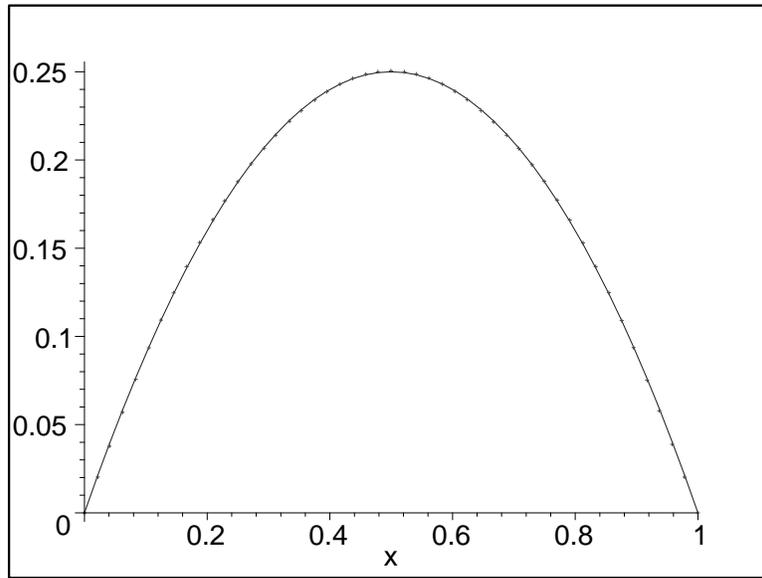


Figura 2.2: Aproximación en serie de Fourier de senos con tres términos para $x(1-x)$ en $[0, 1]$.

Entonces, aplicando (2.6), la solución del problema (2.1) con $L = 1$ y $f(x) = x(1-x)$ viene dada por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(1-(-1)^n)}{n^3\pi^3} \sin(n\pi x) e^{-n^2\pi^2 t}$$

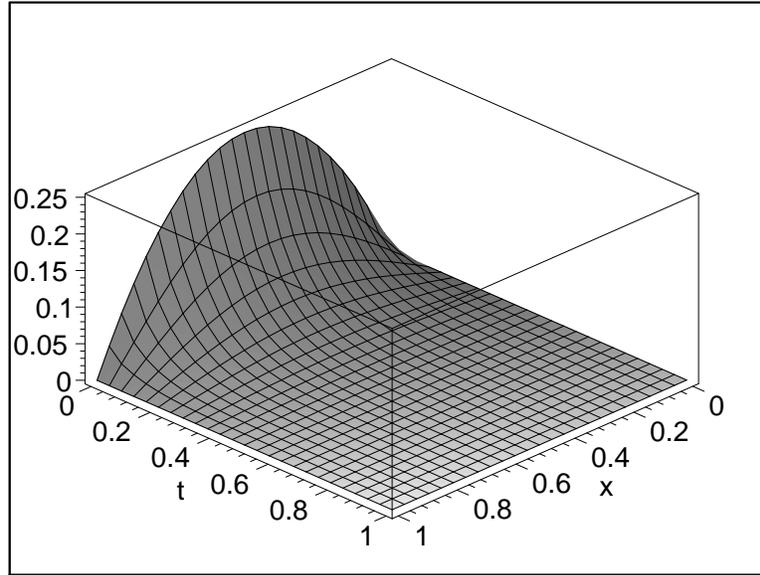


Figura 2.3: Aproximación de la solución del Ejemplo 2.1.

El método de separación de variables puede aplicarse a la resolución de diversos problemas asociados a EDP, de manera análoga a la que acabamos de ver. Por ejemplo, si estudiamos el mismo proceso de difusión del calor, suponiendo que los extremos del alambre permanecen aislados todo el tiempo, el problema se formula:

$$\begin{cases} u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), & x \in (0, L), t > 0 & \text{Ec. del Calor} \\ u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0, & t > 0 & \text{Condiciones de Contorno} \\ u(x, 0) = f(x), & x \in (0, L) & \text{Condición inicial} \end{cases} \quad (2.9)$$

donde sólo han cambiado las condiciones de contorno, que se imponen sobre las derivadas de u con respecto de x . Aplicando el mismo razonamiento que antes, se obtiene ahora que la función F debe satisfacer

$$F''(x) + \lambda F(x) = 0, \quad x \in (0, L), \quad F'(0) = F'(L) = 0, \quad (2.10)$$

mientras que G sigue siendo solución de la misma EDO (2.4).

Volviendo a distinguir los casos $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ y $\lambda > 0$, es fácil deducir que las únicas soluciones no nulas vienen dadas por $F_0(x) = C$, cuando $\lambda_0 = 0$ y

$$F_n(x) = C \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad \text{cuando } \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \quad \text{para algún número natural } n,$$

con $C \in \mathbb{R}$. Siguiendo el paralelismo, en este caso, dada una función arbitraria f necesitamos poder expresarla como

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (2.11)$$

para obtener la solución del problema (2.9) en la forma

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 t}{L^2}\right). \quad (2.12)$$

Es costumbre referirse a (2.11) como la “serie de Fourier” de cosenos de la función f . Cuestiones similares a las enumeradas antes quedan abiertas también en este caso.

De nuevo, es factible determinar los coeficientes a_n a partir de la función f de manera similar a como se hizo en el caso de la serie de Fourier de senos, utilizando ahora que

$$\int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ \frac{L}{2} & \text{si } k = n \neq 0 \\ L & \text{si } k = n = 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

obteniéndose que

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.14)$$

EJEMPLO 2.2 Para expresar la función $f(x) = x(1-x)$ en serie de Fourier de cosenos en $[0, 1]$ basta calcular $a_0 = 2 \int_0^1 x(1-x) dx = \frac{1}{3}$ y

$$a_n = 2 \int_0^1 x(1-x) \cos(n\pi x) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Integrando dos veces por partes,

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \left(x(1-x) \frac{\sin(n\pi x)}{n\pi} \Big|_{x=0}^{x=1} - 2 \int_0^1 (1-2x) \frac{\sin(n\pi x)}{n\pi} dx \right) = -2 \int_0^1 (1-2x) \frac{\sin(n\pi x)}{n\pi} dx = \\ &= 2 \left((1-2x) \frac{\cos(n\pi x)}{n^2\pi^2} \Big|_{x=0}^{x=1} + 4 \int_0^1 \frac{\cos(n\pi x)}{n^2\pi^2} dx \right) = \frac{-2(1+(-1)^n)}{n^2\pi^2}. \end{aligned}$$

Aplicando (2.12), la solución del problema (2.9) con $L = 1$ y $f(x) = x(1-x)$ viene dada por

$$u(x, t) = \frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2(1+(-1)^n)}{n^2\pi^2} \cos(n\pi x) e^{-n^2\pi^2 t}$$

Veamos otro tipo de problemas que también se resuelven mediante la misma técnica, aunque la EDP sea en este caso hiperbólica: determinar las vibraciones de una cuerda elástica de longitud L y densidad constante, sujeta por los extremos y de la cual conocemos la posición y la velocidad inicial en cada punto. Matemáticamente, si $u(x, t)$ representa la posición del punto x de la cuerda en el instante t , se trata de resolver el problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t), & x \in (0, L), t > 0 \quad \text{Ec. de Ondas} \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t > 0 \quad \text{Condiciones de Contorno} \\ u(x, 0) = f(x), & x \in (0, L) \\ u_t(x, 0) = g(x), & x \in (0, L) \quad \text{Condiciones iniciales} \end{array} \right. \quad (2.15)$$

En este caso, si $u(x, t) = F(x) \cdot G(t)$, los mismos razonamientos de antes nos conducen a

$$\frac{G''(t)}{G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = -\lambda \in \mathbb{R}, \quad x \in (0, L), t > 0,$$

de donde se concluye de nuevo que la función F debe ser solución del problema (2.3), mientras que G debe verificar ahora

$$G''(t) + \lambda G(t) = 0, \quad t > 0.$$

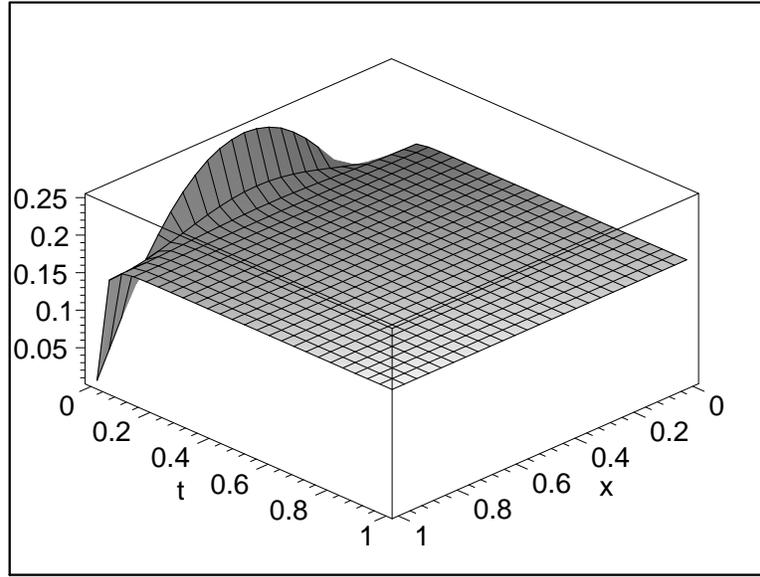


Figura 2.4: Aproximación de la solución del Ejemplo 2.2.

Teniendo en cuenta que $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$ para algún número natural n son los únicos valores que proporcionan soluciones F no nulas, se sigue que

$$G_n(t) = c_1 \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + c_2 \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right),$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ arbitrarias. Por lo tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$ encontramos que

$$u_n(x, t) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \right),$$

donde $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, es una solución básica de la ec. de Ondas y verifica también las condiciones de contorno. Formalmente, para que la expresión

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \right) \quad (2.16)$$

satisfaga las condiciones iniciales, debe suceder que

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$g(x) = u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi b_n}{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

es decir, nos volvemos a encontrar con las series de Fourier de senos. Aquí, hemos derivado (2.16) formalmente con respecto de t para obtener

$$u_t(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left(\frac{n\pi}{L}\right) \left(-a_n \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + b_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \right).$$

EJEMPLO 2.3 Aplicando (2.16), la solución del problema (2.15) con $L = 1$, $f(x) = x(1-x)$ y $g(x) = 0$ viene dada por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(1 - (-1)^n)}{n^3 \pi^3} \sin(n\pi x) \cos(n\pi t).$$

Análogamente, la solución del problema (2.15) con $L = 1$, $f(x) = 0$ y $g(x) = x(1-x)$ viene dada por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(1 - (-1)^n)}{n^4 \pi^4} \sin(n\pi x) \sin(n\pi t).$$

Finalmente, el método de separación de variables también es aplicable en el caso de EDP elípticas. Consideremos el siguiente problema de Dirichlet para la ec. de Laplace sobre un rectángulo

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0, & x \in (0, L), y \in (0, \hat{L}) \quad \text{Ec. de Laplace} \\ u(0, y) = u(L, y) = 0, & y \in (0, \hat{L}) \\ u(x, 0) = 0, & x \in (0, L) \quad \text{Condiciones de Contorno} \\ u(x, \hat{L}) = f(x), & x \in (0, L) \end{array} \right. \quad (2.17)$$

Aquí, el método nos lleva a considerar $u(x, y) = F(x) \cdot G(y)$. Sustituyendo en la EDP, resulta

$$-\frac{G''(y)}{G(y)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = -\lambda \in \mathbb{R}, \quad x \in (0, L), y \in (0, \hat{L}).$$

Además, como $u(0, y) = F(0)G(y) = 0$, $u(L, y) = F(L)G(y) = 0$ para cada $y \in (0, \hat{L})$ debe ser $F(0) = F(L) = 0$; por otro lado, la condición $u(x, 0) = F(x)G(0) = 0$ para cada $x \in (0, L)$ nos lleva a que $G(0) = 0$. Otra vez nos encontramos con que $\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}$ con $n = 1, 2, \dots$, son los únicos valores que proporcionan soluciones F no nulas, mientras que G debe verificar ahora

$$G''(y) - \lambda_n G(y) = 0, \quad G(0) = 0, \quad y \in (0, \hat{L}).$$

para algún n . Entonces,

$$G_n(y) = C \sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right),$$

con $C \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, a falta de imponer la condición $u(x, \hat{L}) = f(x)$, podemos expresar las soluciones del problema (2.17) en la forma

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \quad (2.18)$$

con $b_n \in \mathbb{R}$. Tomando ahora $y = \hat{L}$, llegamos a

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sinh\left(\frac{n\pi \hat{L}}{L}\right)$$

y volvemos a recuperar una expresión del tipo (2.5).

EJEMPLO 2.4 Aplicando (2.18), la solución del problema (2.17) con $L = \hat{L} = 1$ y $f(x) = x(1-x)$ viene dada por

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(1 - (-1)^n)}{n^3 \pi^3 \sinh(n\pi)} \sin(n\pi x) \sinh(n\pi y)$$

2.2. Serie de Fourier completa. Convergencia puntual y en el sentido de L^2

DEFINICIÓN 2.1 Dada una función f definida en el intervalo $[-L, L]$, se denomina serie de Fourier asociada a f a la expresión

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right),$$

donde los coeficientes vienen dados por

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.19)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.20)$$

El argumento para obtener las expresiones (2.19)-(2.20) es el mismo que utilizamos en el caso de las series de Fourier de senos ó de cosenos. Supuesto que se verifica

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) \quad (2.21)$$

se basa en las propiedades de ortogonalidad

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx &= \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ 1 & \text{si } k = n \neq 0 \\ 2 & \text{si } k = n = 0 \end{cases} \\ \frac{1}{L} \int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx &= \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ 1 & \text{si } k = n \end{cases} \\ \frac{1}{L} \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx &= 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Multiplicando la expresión (2.21) a ambos lados por $\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$, integrando con respecto de x entre $-L$ y L , suponiendo que se verifica que la integral de la serie coincide con la serie de la integral, las propiedades de ortogonalidad nos llevan a (2.19). Si multiplicamos ahora (2.21) por $\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$, el mismo razonamiento nos conduce a (2.20).

EJEMPLO 2.5 Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{si } x \in [-1, 0) \end{cases}$$

Los coeficientes de la serie de Fourier completa asociada a f vienen dados por

$$a_0 = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3},$$

$$a_n = \int_{-1}^1 f(x) \cos(n\pi x) dx = \int_0^1 x^2 \cos(n\pi x) dx = \frac{2(-1)^n}{n^2\pi^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = \int_{-1}^1 f(x) \sin(n\pi x) dx = \int_0^1 x^2 \sin(n\pi x) dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{2((-1)^n - 1)}{n^3\pi^3}, \quad n = 1, 2, \dots$$

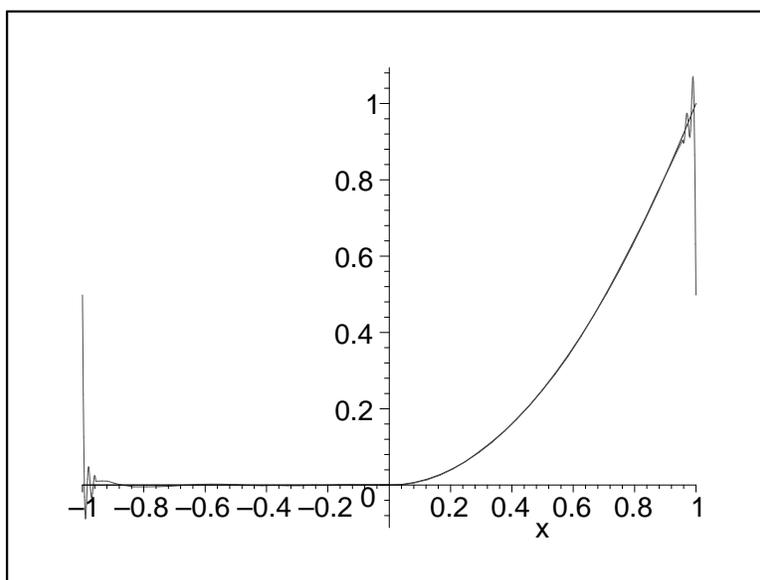


Figura 2.5: Aproximación de Fourier con cien términos para el ejemplo 2.5 en $[-1, 1]$.

sin más que integrar por partes.

Así, la serie de Fourier completa asociada a la función $f(x)$ en $[-1, 1]$ viene dada por

$$\frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2\pi^2} \cos(n\pi x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{2((-1)^n - 1)}{n^3\pi^3} \right) \sin(n\pi x).$$

COMENTARIOS 2.1 Recordemos que una función se dice que es **par** en $[-L, L]$ si verifica $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in [-L, L]$ y se dice que es **impar** en $[-L, L]$ si verifica $f(x) = -f(-x)$ para todo $x \in [-L, L]$. Resulta sencillo comprobar las siguientes propiedades:

- i) Si f es par en $[-L, L]$, entonces $\int_{-L}^L f(x)dx = 2 \int_0^L f(x)dx$.
- ii) Si f es impar en $[-L, L]$, entonces $\int_{-L}^L f(x)dx = 0$.
- iii) El producto de dos funciones pares en $[-L, L]$ es una función par en $[-L, L]$.
- iv) El producto de dos funciones impares en $[-L, L]$ es una función par en $[-L, L]$.
- v) El producto de una función par en $[-L, L]$ y una función impar en $[-L, L]$ es una función impar en $[-L, L]$.

Utilizando estas propiedades, resulta inmediato comprobar que la serie de Fourier completa de una función impar en $[-L, L]$ es una serie de Fourier que sólo contiene senos (del tipo (2.5) y con los coeficientes dados por (2.8)), dado que el coseno es una función par en \mathbb{R} y por lo tanto el producto de f por el coseno es impar, mientras que el seno es una función impar en \mathbb{R} y por lo tanto el producto de f por el seno es par. Un razonamiento análogo nos permite deducir que la serie de Fourier completa de una función par en $[-L, L]$ es una serie de Fourier que sólo contiene cosenos (del tipo (2.11) con los coeficientes dados por (2.14)).

Finalmente, dada una función cualquiera definida en $[0, L]$ podemos extenderla a todo $[-L, L]$ bien de manera impar ($f(-x) = -f(x)$ para cada $x \in [-L, 0]$), bien de manera par ($f(-x) = f(x)$ para cada $x \in [-L, 0]$), según nos interese. Así, podemos lograr que su serie de Fourier sólo contenga senos o cosenos.

Con el fin de estudiar bajo qué condiciones la serie de Fourier coincide con la función f , es decir, se verifica realmente la igualdad (2.21), vamos a considerar (como es habitual) la sucesión de sumas parciales

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right), \quad (2.23)$$

donde los coeficientes a_n y b_n vienen dados por (2.19)-(2.20).

DEFINICIÓN 2.2 Dada una función f definida en el intervalo $[-L, L]$, se dice que f es de **cuadrado integrable** en $[-L, L]$ (y se escribe $f \in L^2(-L, L)$) cuando $\int_{-L}^L f^2(x)dx < +\infty$.

Dada $f \in L^2(-L, L)$, vamos a estudiar la diferencia entre f y S_N en el sentido de L^2 . Desarrollando,

$$\int_{-L}^L (f(x) - S_N(x))^2 dx = \int_{-L}^L f^2(x)dx - 2 \int_{-L}^L f(x)S_N(x)dx + \int_{-L}^L S_N^2(x)dx.$$

Introduciendo la expresión de $S_N(x)$ y de los coeficientes, se deduce que

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x)S_N(x)dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L f(x)dx + \sum_{n=1}^N a_n \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx + b_n \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \\ &= \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \right) \cdot L \end{aligned}$$

Por otro lado, al desarrollar el término $S_N^2(x)$ e integrarlo con respecto de x entre $-L$ y L , resulta fácil comprobar que los términos que contienen alguno de los factores

$$\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right), \quad \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \quad \text{ó} \quad \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$$

van a desaparecer si $n \neq k$ debido a las condiciones de ortogonalidad (2.22), por lo que nos queda

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L S_N^2(x)dx &= \int_{-L}^L \frac{a_0^2}{4} dx + \sum_{n=1}^N a_n^2 \int_{-L}^L \cos^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx + b_n^2 \int_{-L}^L \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \\ &= \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \right) \cdot L \end{aligned}$$

Combinando todas las expresiones anteriores, resulta

$$\int_{-L}^L (f(x) - S_N(x))^2 dx = \int_{-L}^L f^2(x)dx - \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \right) \cdot L \quad (2.24)$$

A partir de esta igualdad (que es cierta para cada N) es posible deducir algunas conclusiones importantes:

1. Teniendo en cuenta que el término de la izquierda es siempre mayor o igual que cero, se tiene

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N a_n^2 + b_n^2 \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L f^2(x)dx$$

Tomando límites cuando N tiende hacia $+\infty$ llegamos a que

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L f^2(x)dx. \quad (2.25)$$

Esta desigualdad se conoce con el nombre de **Desigualdad de Bessel** y veremos que juega un papel muy importante en el contexto del Análisis de Fourier. De hecho, la desigualdad anterior es realmente una igualdad (ver más adelante el teorema 2.3).

2. Como primera consecuencia de la desigualdad de Bessel tenemos que las series numéricas $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ son claramente convergentes. Por lo tanto, los términos generales a_n^2 y b_n^2 deben converger hacia 0 cuando n tiende hacia $+\infty$; en particular esto implica que

$$a_n \rightarrow 0 \text{ y } b_n \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow +\infty,$$

o, lo que es lo mismo,

$$\int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \rightarrow 0,$$

cuando n tiende hacia $+\infty$.

COMENTARIOS 2.2 La misma argumentación que hemos seguido para la serie de Fourier completa (2.21) puede aplicarse en situaciones más generales, donde se mantengan las siguientes características básicas: supongamos que contamos con una familia de funciones $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^2(\alpha, \beta)$ que verifican las condiciones de ortogonalidad

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi_n(x) \varphi_k(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ 1 & \text{si } k = n \end{cases} \quad (2.26)$$

Consideramos entonces una serie de funciones relativa a la familia $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ dada por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x), \quad (2.27)$$

con los coeficientes

$$a_n = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \varphi_n(x) dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.28)$$

y donde $f \in L^2(\alpha, \beta)$. Se demuestra entonces la correspondiente Desigualdad de Bessel

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leq \int_{\alpha}^{\beta} f^2(x) dx < +\infty \quad (2.29)$$

de donde se concluye que

$$a_n = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \varphi_n(x) dx \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow +\infty. \quad (2.30)$$

Utilizando la desigualdad de Bessel es posible obtener un primer resultado que nos garantiza que (bajo ciertas hipótesis) efectivamente la serie de Fourier asociada a una función f coincide con ella.

TEOREMA 2.1 Supongamos que f es una función continua y derivable en $[-L, L]$ tal que $f(-L) = f(L)$ y $f'(-L) = f'(L)$. Entonces, se verifica que

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) = f(x) \quad (2.31)$$

para cada $x \in [-L, L]$.

Dem. Vamos a comenzar obteniendo una expresión de $S_N(x)$ equivalente a (2.23). Partiendo de (2.23) y sustituyendo los valores (2.19)-(2.20) de los coeficientes, se llega a

$$S_N(x) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right) + \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \right] f(y) dy.$$

Utilizando la identidad trigonométrica

$$\cos(u)\cos(v) + \sin(u)\sin(v) = \cos(u-v),$$

resulta

$$S_N(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \left[1 + 2 \sum_{n=1}^N \cos\left(\frac{n\pi(x-y)}{L}\right) \right] f(y) dy.$$

Introduciendo la función **Núcleo de Dirichlet**

$$K_N(z) = 1 + 2 \sum_{n=1}^N \cos\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \quad (2.32)$$

la fórmula para S_N queda

$$S_N(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L K_N(x-y) f(y) dy.$$

Extendemos ahora f a todo \mathbb{R} por periodicidad: esto es, si $x \in [(j-1)L, (j+1)L]$ para algún número entero j , definimos $f(x) = f(x-jL)$. Debido a las hipótesis $f(-L) = f(L)$ y $f'(-L) = f'(L)$, el resultado es una función continua y derivable en todo \mathbb{R} .

Haciendo el cambio de variable $z = y - x$ en la expresión de S_N , se sigue que

$$S_N(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L-x}^{L-x} K_N(-z) f(x+z) dz = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L K_N(z) f(x+z) dz,$$

ya que $K_N(-z) = K_N(z)$ para cada $z \in \mathbb{R}$ y $K_N(z) f(x+z)$ es una función $2L$ -periódica (por ser producto de funciones $2L$ -periódicas) por lo que el valor de su integral es el mismo sobre cualquier intervalo de longitud $2L$.

Nos interesa ahora estudiar algunas propiedades de la función K_N . Para ello usaremos la **Fórmula de Euler**:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta), \quad \text{para cada } \theta \in \mathbb{R},$$

donde $i = \sqrt{-1}$ denota la unidad imaginaria.

i) Una simple integración inmediata nos convence de que

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L K_N(z) dz = 1.$$

ii) Denotando $\theta = \frac{\pi z}{L}$, se verifica

$$\begin{aligned} K_N(z) &= 1 + 2 \sum_{n=1}^N \cos(n\theta) = 1 + \sum_{n=1}^N (e^{in\theta} + e^{-in\theta}) = \sum_{n=-N}^N e^{in\theta} = e^{-i\theta N} \sum_{n=0}^{2N} (e^{i\theta})^n = \\ &= e^{-i\theta N} \frac{e^{i(2N+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} = \frac{e^{i(N+1/2)\theta} - e^{-i(N+1/2)\theta}}{e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}} = \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi z}{L}\right)}{\sin\left(\frac{\pi z}{2L}\right)} \end{aligned}$$

Combinando las expresiones y propiedades anteriores resulta que

$$\begin{aligned} S_N(x) - f(x) &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L K_N(z) f(x+z) dz - f(x) \cdot \frac{1}{2L} \int_{-L}^L K_N(z) dz = \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L K_N(z) (f(x+z) - f(x)) dz = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi z}{L}\right) g(z) dz, \end{aligned} \quad (2.33)$$

donde

$$g(z) = \frac{f(x+z) - f(x)}{\sin\left(\frac{\pi z}{2L}\right)}.$$

Por supuesto, la función g también depende de x , sin embargo este aspecto no es relevante aquí, puesto que podemos fijar el valor de x a lo largo de toda la demostración. Por otra parte, la función g es claramente continua en todos los puntos $z \in [-L, L]$, excepto en $z = 0$. Sin embargo, aplicando L'Hopital,

$$\lim_{z \rightarrow 0} g(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2L f'(x+z)}{\pi \cos\left(\frac{\pi z}{2L}\right)} = \frac{2L}{\pi} f'(x),$$

por lo que (tomando este cantidad como valor $g(0)$), resulta que g es continua en $[-L, L]$; en particular, $g \in L^2(-L, L)$. Por otra parte, resulta inmediato comprobar que las funciones

$$\varphi_n(z) = \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi z}{L}\right),$$

satisfacen las propiedades de ortogonalidad

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L \varphi_n(z) \varphi_k(z) dz = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ 1 & \text{si } k = n \end{cases}$$

Por lo tanto, como consecuencia de la desigualdad de Bessel correspondiente a esta familia de funciones (ver (2.30)), se obtiene finalmente que

$$\int_{-L}^L \varphi_N(z) g(z) dz \rightarrow 0 \quad \text{cuando } N \rightarrow +\infty.$$

En virtud de (2.33), esto significa que

$$S_N(x) \rightarrow f(x) \quad \text{cuando } N \rightarrow +\infty,$$

ó equivalentemente, (2.31). ■

Como ya se ha dicho, un aspecto a destacar es que para determinar la serie de Fourier asociada a una función f basta poder calcular los correspondientes coeficientes a_n y b_n y, para ello, no es necesario que f sea continua. Este hecho resulta muy interesante en la práctica donde es habitual encontrarse (por ejemplo) con funciones definidas a trozos. Vamos a ser más precisos con las funciones que manejaremos:

DEFINICIÓN 2.3 *i) Dada una función f definida en $[\alpha, \beta]$, se dice que f es **continua a trozos en $[\alpha, \beta]$** cuando f es continua en todos los puntos de $[\alpha, \beta]$, salvo quizás en un número finito de puntos interiores, donde la discontinuidad es de salto finito.*

*ii) Dada una función f definida en $[\alpha, \beta]$, se dice que f es C^1 **a trozos en $[\alpha, \beta]$** cuando tanto f como f' son continuas a trozos en $[\alpha, \beta]$.*

En el caso de funciones continuas a trozos, la igualdad (2.31) puede no verificarse en los puntos de discontinuidad, ya que los límites laterales $f(x^+) = \lim_{y \rightarrow x, y > x} f(y)$ y $f(x^-) = \lim_{y \rightarrow x, y < x} f(y)$ son distintos. No obstante, la conclusión del teorema 2.1 puede "afinarse" en el siguiente sentido:

TEOREMA 2.2 *Supongamos que f es una función C^1 a trozos en $[-L, L]$. Entonces, se verifica que*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \quad (2.34)$$

para cada $x \in (-L, L)$. Además,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi) = \frac{f(-L) + f(L)}{2} \quad (2.35)$$

Dem. Es una variante de la demostración anterior. Dado $x \in (-L, L)$ escribimos

$$S_N(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L K_N(z) f(x+z) dz = \frac{1}{2L} \left[\int_{-L}^0 K_N(z) f(x+z) dz + \int_0^L K_N(z) f(x+z) dz \right],$$

donde seguimos designando por f la extensión $2L$ -periódica a todo \mathbb{R} de la función inicial f , en principio sólo definida en $[-L, L]$.

Por otra parte, se comprueba fácilmente que

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^0 K_N(z) dz = \frac{1}{2L} \int_0^L K_N(z) dz = \frac{1}{2}.$$

Entonces,

$$\frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} = \frac{1}{2L} \left[\int_{-L}^0 K_N(z) f(x^-) dz + \int_0^L K_N(z) f(x^+) dz \right]$$

y por lo tanto

$$S_N(x) - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{1}{2L} \left[\int_{-L}^0 \varphi_N(z) g^-(z) dz + \int_0^L \varphi_N(z) g^+(z) dz \right], \quad (2.36)$$

donde

$$g^-(z) = \frac{f(x+z) - f(x^-)}{\sin\left(\frac{\pi z}{2L}\right)}, \quad g^+(z) = \frac{f(x+z) - f(x^+)}{\sin\left(\frac{\pi z}{2L}\right)}.$$

Razonando como en el teorema anterior, la regla de L'Hopital nos permite concluir que $g^-(z)$ es continua a trozos en $[-L, 0]$ (definiendo $g^-(0) = \frac{2L}{\pi} f'(x^-)$) y que $g^+(z)$ es continua a trozos en $[0, L]$ (definiendo $g^+(0) = \frac{2L}{\pi} f'(x^+)$), por lo que $g^- \in L^2(-L, 0)$ y $g^+ \in L^2(0, L)$. La demostración se concluye como en aquel caso, sin más que observar que las funciones $\varphi_n(z)$ verifican

$$\frac{2}{L} \int_{-L}^0 \varphi_n(z) \varphi_k(z) dz = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi_n(z) \varphi_k(z) dz = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ 1 & \text{si } k = n \end{cases}$$

y volviendo a utilizar la desigualdad de Bessel con respecto de cada intervalo (ver (2.30)) para concluir que cada integral del lado derecho de (2.36) tiende hacia 0 cuando N tiende hacia $+\infty$, por lo que se llega a (2.34).

En el caso $x = L$, debido a la periodicidad de f , se verifica $f(L) = f(L^-)$ y $f(-L) = f(L^+)$, por lo que el mismo argumento nos permite concluir que $S_N(L) \rightarrow \frac{f(L^+) + f(L^-)}{2} = \frac{f(-L) + f(L)}{2}$ cuando $N \rightarrow +\infty$, ó lo que lo mismo, (2.35). El razonamiento para $x = -L$ es similar. ■

COMENTARIOS 2.3 *i) No es difícil comprobar que la serie de Fourier completa se puede re-escribir en la forma exponencial*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) = \frac{1}{2L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{L}} \quad (2.37)$$

con

$$c_0 = La_0, \quad c_n = L(a_n - ib_n), \quad c_{-n} = L(a_n + ib_n) \quad \text{si } n = 1, 2, \dots$$

Esta versión compleja suele preferirse frecuentemente en diversas áreas de la Física.

ii) En los puntos x donde f es continua, se verifica $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = f(x)$ y, por lo tanto, se recupera (2.31). En cuanto a lo que sucede en los extremos, si $f(-L) = f(L)$, la expresión (2.35) también coincide con (2.31) para los valores particulares $x = L$ y $x = -L$.

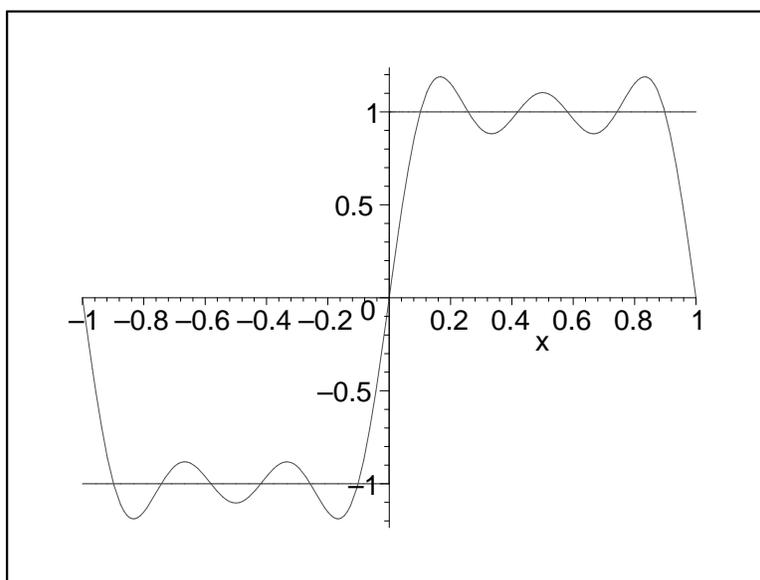


Figura 2.6: Aproximación de Fourier con cinco términos para $\text{signo}(x)$ en $[-1, 1]$.

- iii) La conclusión del teorema 2.2 se mantiene (con la misma demostración), si f es continua a trozos en $[-L, L]$ y existen las derivadas laterales (a derecha e izquierda) de f en cada punto de $[-L, L]$, aunque dichas derivadas laterales no coincidan, ver Tveito y Winther, págs. 294-295.
- iv) Otros resultados de convergencia puntual (con hipótesis menos exigentes sobre f) pueden probarse, ver por ejemplo Gadella y Nieto, pág. 126 ó Apóstol, pág. 388.
- v) Supuesto que f es continua en $[-L, L]$, $f(-L) = f(L)$ y f' es continua a trozos en $[-L, L]$, se puede probar (no es difícil) que $S_N \rightarrow f$ uniformemente en $[-L, L]$ cuando $N \rightarrow +\infty$. La demostración puede verse (por ejemplo) en Bleecker y Csordas, págs. 228-230 ó Tveito y Winther, págs. 296-98.

En el caso de funciones menos regulares (pero todavía de $L^2(-L, L)$) la igualdad (2.34) puede fallar incluso en un número infinito de puntos. No obstante, se verifica, al menos, la convergencia de S_N hacia la función f en el sentido de L^2 , es decir,

TEOREMA 2.3 Dada $f \in L^2(-L, L)$, se verifica que

$$\int_{-L}^L (f(x) - S_N(x))^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{cuando } N \rightarrow +\infty.$$

En virtud de la expresión (2.24), la conclusión del teorema 2.3 es equivalente a que

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 = \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^L f^2(x) dx, \quad (2.38)$$

relación que se conoce con el nombre de **Identidad de Parseval** y se considera una generalización del clásico teorema de Pitágoras. La demostración de este resultado trasciende el nivel de este curso, ver por ejemplo Folland, págs. 75-79.

Las identidades (2.34) y (2.38) obtenidas en los teoremas precedentes y aplicadas a funciones particulares f resultan extraordinariamente útiles a la hora de sumar series numéricas, tarea ésta (como es sabido) muy complicada en general. Veamos algunos ejemplos:

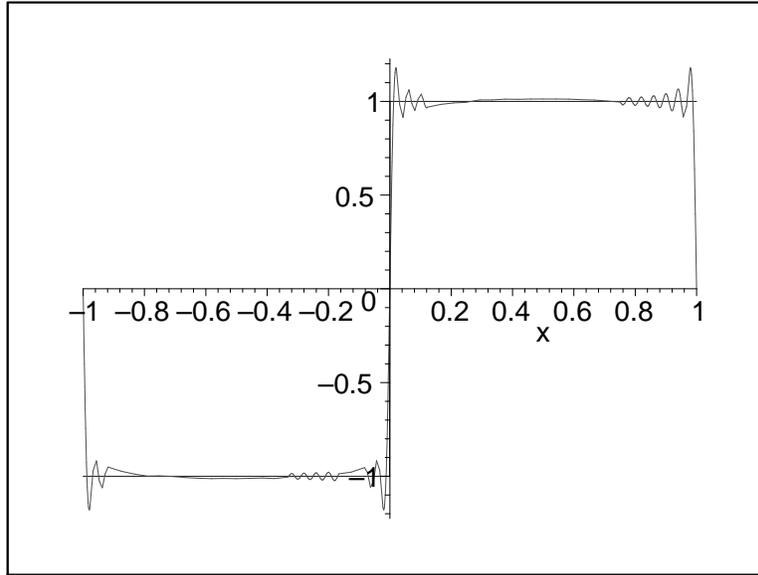


Figura 2.7: Aproximación de Fourier con cincuenta términos para $\text{signo}(x)$ en $[-1, 1]$.

EJEMPLO 2.6 i) Consideremos la función

$$f(x) = \text{signo}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1] \\ -1 & \text{si } x \in [-1, 0) \end{cases}$$

Como f es impar, la serie de Fourier asociada a f es una serie de Fourier de senos (es decir, $a_n = 0$ para cada $n = 0, 1, \dots$). Además,

$$b_n = \int_{-1}^1 f(x) \sin(n\pi x) dx = 2 \int_0^1 \sin(n\pi x) dx = \frac{2(1 - (-1)^n)}{n\pi}.$$

Así, la serie de Fourier asociada a la función $\text{signo}(x)$ viene dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1 - (-1)^n)}{n\pi} \sin(n\pi x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} \sin((2k-1)\pi x)$$

Como la función f es C^1 a trozos, en virtud del teorema 2.2 se tiene que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} \sin((2k-1)\pi x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (0, 1) \\ -1 & \text{si } x \in (-1, 0) \\ 0 & \text{si } x = 0, 1 \text{ ó } -1 \end{cases}$$

En particular, tomando $x = 1/2$ obtenemos la suma de la serie alternada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}.$$

Utilizando ahora la identidad de Parseval y teniendo en cuenta que $\int_{-1}^1 (\text{signo}(x))^2 dx = 2$, deducimos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots = \frac{\pi^2}{8}.$$

ii) Consideremos ahora la función $f(x) = x$ en el intervalo $[-L, L]$. De nuevo, como f es impar, la serie de Fourier asociada a f es una serie de Fourier de senos. Además,

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = (-1)^{n+1} \frac{2L}{n\pi}.$$

Así, la serie de Fourier asociada a x viene dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Como la función f es C^1 , en virtud del teorema 2.2 se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = x, \quad \forall x \in (-L, L).$$

Notemos que la igualdad anterior no se verifica para $x = -L$ ni para $x = L$, dado que $f(-L) = -L \neq L = f(L)$, aunque $f'(-L) = f'(L) = 1$. Por lo tanto no estamos en las condiciones del teorema 2.1. Podemos comprobar que la igualdad (2.35) sí que se verifica, dado que $f(-L) + f(L) = 0$.

En virtud de la identidad de Parseval y teniendo en cuenta que $\int_{-L}^L x^2 dx = 2L^3/3$, resulta que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Leonhard Euler obtuvo esta expresión en 1735, cuando tenía veintiocho años, después de que los matemáticos más importantes de la época (como los Bernoulli) lo hubieran intentado. Este problema se conoce en matemáticas como **Problema de Basilea** y es famoso en teoría de números.

2.3. Problema Regular de Sturm-Liouville

Las Series de Fourier son un caso particular (muy importante, eso sí) de una teoría que se puede plantear en un marco más general. Para ello vamos a utilizar las siguientes notaciones

$$L[x](t) \stackrel{\text{def}}{=} (p(t)x'(t))' + q(t)x(t), \quad \Delta_a[x] \stackrel{\text{def}}{=} a_1x(a) + a_2x'(a) \quad \text{y} \quad \Delta_b[x] \stackrel{\text{def}}{=} b_1x(b) + b_2x'(b),$$

donde $p \in C^1[a, b]$, $q \in C[a, b]$, $p(t) > 0 \quad \forall t \in [a, b]$ y $|a_1| + |a_2| > 0$, $|b_1| + |b_2| > 0$.

Comenzaremos introduciendo algunos conceptos claramente inspirados en el caso finito dimensional.

DEFINICIÓN 2.4 i) Se denomina **Problema Regular de Sturm-Liouville** al siguiente

$$(PRSL) \begin{cases} L[x](t) + \lambda s(t)x(t) = 0, & t \in [a, b] \\ \Delta_a[x] = 0 \\ \Delta_b[x] = 0, \end{cases}$$

donde λ es una constante y $s \in C[a, b]$, siendo $s(t) > 0$, $\forall t \in [a, b]$.

- ii) Se denominan **valores propios del (PRSL)** a los valores λ para los cuales (PRSL) posee soluciones distintas de la solución nula.
- iii) Se denominan **funciones propias del (PRSL)** asociados al valor propio λ a las soluciones del (PRSL), distintas de la solución nula, correspondientes a dicho λ .

EJEMPLO 2.7 Con esta terminología, en las secciones anteriores vimos que

i) Los valores propios del Problema Regular de Sturm-Liouville

$$x''(t) + \lambda x(t) = 0, \quad t \in (0, L), \quad x(0) = x(L) = 0,$$

vienen dados por

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

y sus funciones propias por

$$x_n(t) = C \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right), \quad \forall C \in \mathbb{R},$$

respectivamente.

Notar que aquí $p(t) \equiv 1, q(t) \equiv 0, s(t) \equiv 1, a = 0, b = L, a_1 = 1, a_2 = 0, b_1 = 1$ y $b_2 = 0$.

ii) Los valores propios del Problema Regular de Sturm-Liouville

$$x''(t) + \lambda x(t) = 0, \quad t \in (0, L), \quad x'(0) = x'(L) = 0,$$

vienen dados por

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

y sus funciones propias por

$$x_n(t) = C \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right), \quad \forall C \in \mathbb{R},$$

respectivamente.

Con respecto del caso anterior, sólo cambia que $a_1 = 0, a_2 = 1, b_1 = 0$ y $b_2 = 1$.

Es bien conocido del Álgebra lineal que si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son los valores propios reales distintos de una matriz real $n \times n$, los vectores propios asociados a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ proporcionan un base del espacio \mathbb{R}^n . En el caso del Problema Regular de Sturm-Liouville se verifica un resultado muy similar, pero en su versión infinito-dimensional:

TEOREMA 2.4 i) Cada Problema Regular de Sturm-Liouville posee una sucesión infinita de valores propios reales, verificando

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots \quad \text{y} \quad \lim_n \lambda_n = +\infty.$$

ii) Supongamos que $x_n(t)$ es una función propia del (PRSL) asociada al valor propio λ_n para cada $n \in \mathbb{N}$. Dadas dos funciones propias $x_n(t)$ y $x_m(t)$ con $n \neq m$, se verifica que son **ortogonales en $[a, b]$ respecto del peso $s(t)$** , esto es, verifican

$$\int_a^b x_n(t)x_m(t)s(t)dt = 0.$$

iii) Dada $f \in C^2[a, b]$ tal que $\Delta_a[f] = \Delta_b[f] = 0$, se verifica que

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n(t) \quad \forall t \in [a, b], \quad (2.39)$$

donde la serie converge uniforme y absolutamente, con

$$a_n = \frac{\int_a^b f(t)x_n(t)s(t)dt}{\int_a^b x_n^2(t)s(t)dt} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

iv) Dada f una función C^1 a trozos en $[a, b]$, se verifica que

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n(t) \quad \forall t \in (a, b),$$

con a_n dado como antes.

v) Dada f tal que $\int_a^b f^2(t)s(t)dt < +\infty$, se verifica que

$$\int_a^b (f(t) - S_N(t))^2 s(t)dt \rightarrow 0 \quad \text{cuando } N \rightarrow +\infty,$$

donde $S_N(t) = \sum_{n=1}^N a_n x_n(t)$, con a_n dados como antes.

Para más detalles se puede consultar cualquiera de los textos:

- "Mathematical methods for physicists", G. B. Arfken y H. J. Weber, Harcourt-Academic Press, 2001.
- "Methods of Mathematical Physics", R. Courant y D. Hilbert, Wiley and Sons, 1953.

y la bibliografía de más abajo.

2.4. El método de separación de variables: resolución de EDP en dimensión tres

Hemos visto cómo se pueden resolver algunos problemas de interés físico (difusión del calor en un alambre, vibraciones de una cuerda,...) mediante el método de separación de variables. En esta sección queremos ampliar ese estudio a otras situaciones donde el cuerpo que estamos estudiando tiene dimensión espacial mayor que uno.

Empezamos planteándonos la determinación de las vibraciones de una membrana rectangular elástica de dimensión $L \times K$ y densidad constante, sujeta por los extremos y de la cual conocemos la posición f y la velocidad inicial g en cada punto. Matemáticamente, si $u(x, y, t)$ representa la posición del punto (x, y) de la membrana en el instante t y $u = 0$ representa la posición de reposo, se trata de resolver el problema

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt}(x, y, t) = u_{xx}(x, y, t) + u_{yy}(x, y, t), \quad x \in (0, L), y \in (0, K), t > 0 \quad \text{Ec. de Ondas} \\ \\ \left. \begin{array}{l} u(0, y, t) = u(L, y, t) = 0, \quad y \in (0, K), t > 0 \\ u(x, 0, t) = u(x, K, t) = 0, \quad x \in (0, L), t > 0 \end{array} \right\} \quad \text{Condiciones de Contorno} \\ \\ \left. \begin{array}{l} u(x, y, 0) = f(x, y), \quad x \in (0, L), y \in (0, K), \\ u_t(x, y, 0) = g(x, y), \quad x \in (0, L), y \in (0, K). \end{array} \right\} \quad \text{Condiciones iniciales} \end{array} \right. \quad (2.40)$$

Como en otras ocasiones, nos planteamos buscar soluciones básicas (no idénticamente nulas), de la forma $u(x, y, t) = F(x) \cdot G(y) \cdot T(t)$. Sustituyendo en la ec. de Ondas y dividiendo por u , llegamos a que

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} + \frac{G''(y)}{G(y)} = -\lambda \in \mathbb{R}, \quad x \in (0, L), y \in (0, K), t > 0.$$

Además, fijando un valor de x y otro de t y permitiendo que y varíe en $(0, K)$ y fijando un valor de y y otro de t y permitiendo que x varíe en $(0, L)$, obtenemos que

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = -\mu_1 \in \mathbb{R}, \quad x \in (0, L), \quad \frac{G''(y)}{G(y)} = -\mu_2 \in \mathbb{R}, \quad y \in (0, K)$$

y por lo tanto las constantes están relacionadas en la forma $\lambda = \mu_1 + \mu_2$. Teniendo ahora en cuenta las condiciones de contorno, es sencillo darse cuenta que las funciones F y G que nos interesan deben verificar

$$F''(x) + \mu_1 F(x) = 0, \quad x \in (0, L), \quad F(0) = F(L) = 0, \quad (2.41)$$

$$G''(y) + \mu_2 G(y) = 0, \quad y \in (0, K), \quad G(0) = G(K) = 0, \quad (2.42)$$

Este tipo de problemas ya nos ha aparecido, por lo que ya sabemos cuáles son sus soluciones (no nulas). Concretamente,

$$F_n(x) = C \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad \text{cuando } \mu_{1n} = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots, \quad \text{con } C \in \mathbb{R} \quad \text{y}$$

$$G_m(y) = \hat{C} \sin\left(\frac{m\pi y}{K}\right), \quad \text{cuando } \mu_{2m} = \frac{m^2 \pi^2}{K^2} \quad \text{para } m = 1, 2, 3, \dots, \quad \text{con } \hat{C} \in \mathbb{R}.$$

Si definimos ahora $\lambda_{nm} = \mu_{1n} + \mu_{2m} > 0$ y usando que

$$T''(t) + \lambda_{nm} T(t) = 0, \quad t > 0,$$

se sigue que

$$T_{nm}(t) = c_1 \cos\left(t\sqrt{\lambda_{nm}}\right) + c_2 \sin\left(t\sqrt{\lambda_{nm}}\right),$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ arbitrarias, por lo que nos encontramos que (para cada par de números naturales n y m) una solución básica de la ec. de Ondas verificando además las condiciones de contorno, viene dada por

$$u_{nm}(x, y, t) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{K}\right) \left(a_{nm} \cos\left(t\pi\sqrt{\frac{n^2}{L^2} + \frac{m^2}{K^2}}\right) + b_{nm} \sin\left(t\pi\sqrt{\frac{n^2}{L^2} + \frac{m^2}{K^2}}\right) \right),$$

donde $a_{nm}, b_{nm} \in \mathbb{R}$. Así pues, la solución más completa que podemos obtener por este método viene dada por la serie doble (suma de todas las soluciones básicas)

$$u(x, y, t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{K}\right) \left(a_{nm} \cos\left(t\pi\sqrt{\frac{n^2}{L^2} + \frac{m^2}{K^2}}\right) + b_{nm} \sin\left(t\pi\sqrt{\frac{n^2}{L^2} + \frac{m^2}{K^2}}\right) \right). \quad (2.43)$$

Formalmente, para que esta expresión satisfaga además las condiciones iniciales, debe suceder que

$$f(x, y) = u(x, y, 0) = \sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{K}\right), \quad (2.44)$$

$$g(x, y) = u_t(x, y, 0) = \sum_{n,m=1}^{\infty} b_{nm} \sqrt{\lambda_{nm}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{K}\right). \quad (2.45)$$

Nos encontramos entonces con la necesidad de tener que desarrollar funciones arbitrarias (que dependen de dos variables) en series de Fourier dobles de senos.

Una vez más, la determinación de los coeficientes a_{nm} a partir de la función f , se sigue de las propiedades (2.7). Supuesto que se verifica (2.44), multiplicando a ambos lados por $\sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right)$ y $\sin\left(\frac{l\pi y}{K}\right)$ e integrando con respecto de x entre 0 y L y con respecto de y entre 0 y K resulta que

$$\begin{aligned} & \int_0^L \int_0^K f(x, y) \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{l\pi y}{K}\right) dy dx = \\ &= \int_0^L \int_0^K \sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{K}\right) \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{l\pi y}{K}\right) dy dx \end{aligned}$$

Suponiendo que la integral de la serie coincide con la serie de la integral (este paso se puede justificar rigurosamente bajo ciertas condiciones), podemos continuar la relación anterior, escribiendo

$$\begin{aligned} &= \sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm} \int_0^L \int_0^K \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{K}\right) \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{l\pi y}{K}\right) dy dx = \\ &= \sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm} \left(\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right) dx \right) \left(\int_0^K \sin\left(\frac{l\pi y}{K}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{K}\right) dy \right) = a_{jl} \frac{L}{2} \cdot \frac{K}{2}, \end{aligned}$$

gracias a(2.7). Se obtiene así que

$$a_{nm} = \frac{4}{LK} \int_0^L \int_0^K f(x, y) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{K}\right) dy dx, \quad n, m = 1, 2, \dots \quad (2.46)$$

Del mismo modo, a partir de (2.45) se tiene que

$$b_{nm} = \frac{4}{LK\sqrt{\lambda_{nm}}} \int_0^L \int_0^K g(x, y) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{K}\right) dy dx, \quad n, m = 1, 2, \dots \quad (2.47)$$

Una vez más, notemos que estas expresiones son fáciles de calcular en multitud de casos, incluso bajo requisitos de regularidad mínimos sobre f y g (por ejemplo, podemos considerar el caso de funciones constantes a trozos).

EJEMPLO 2.8 *Supongamos que $L = K = 1$. Utilizando la expresión obtenida en el Ejemplo 2.1, podemos concluir que la solución del problema (2.40) con $f(x, y) = x(1-x)y(1-y)$ y $g(x, y) = 0$ viene dada por*

$$u(x, y, t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{16(1 - (-1)^n)(1 - (-1)^m)}{n^3 m^3 \pi^6} \cos\left(t\pi\sqrt{n^2 + m^2}\right) \sin(n\pi x) \sin(m\pi y).$$

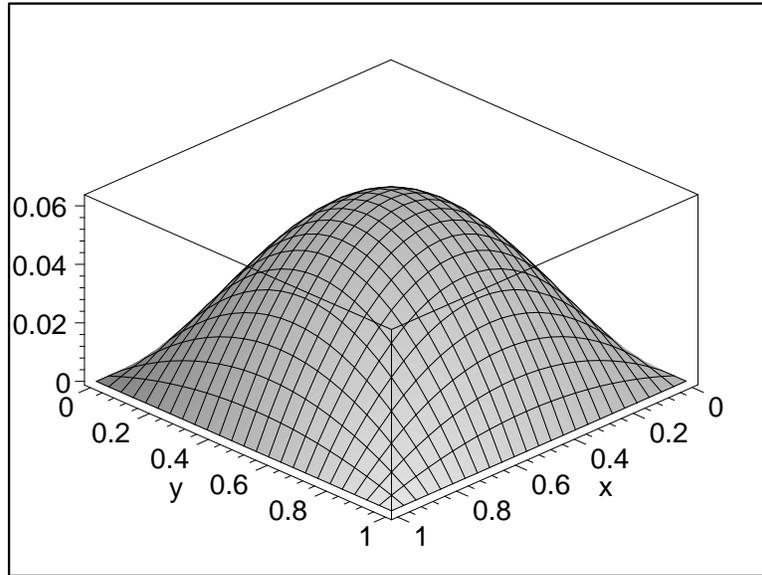


Figura 2.8: Posición inicial de la membrana cuadrada (Ejemplo 2.8.)

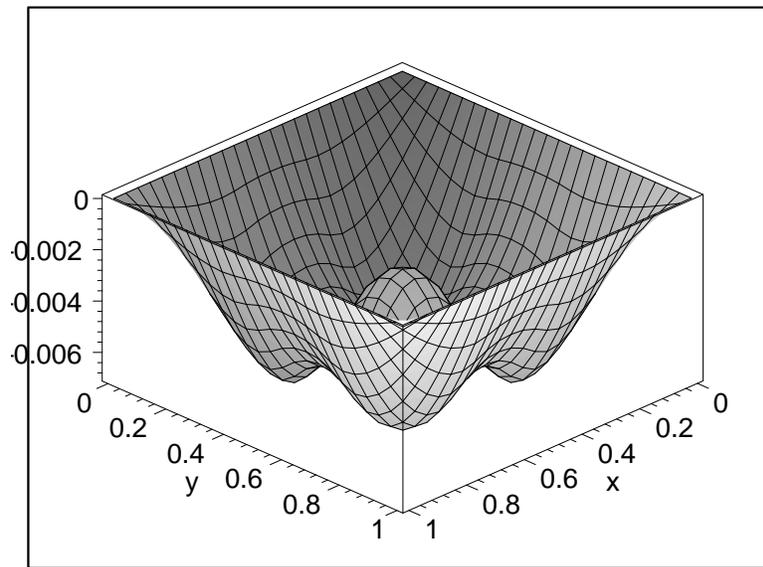


Figura 2.9: Posición aproximada de la membrana cuadrada cuando $t = 0,38$ (Ejemplo 2.8.)

Análogamente, la solución del problema (2.40) con $f(x, y) = 0$ y $g(x, y) = x(1-x)y(1-y)$ viene dada por

$$u(x, y, t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{16(1 - (-1)^n)(1 - (-1)^m)}{n^3 m^3 \pi^7 \sqrt{n^2 + m^2}} \sin\left(t\pi\sqrt{n^2 + m^2}\right) \sin(n\pi x) \sin(m\pi y).$$

Finalmente, la solución del problema (2.40) con $f(x, y) = g(x, y) = x(1-x)y(1-y)$ viene dada por la suma de las dos expresiones anteriores.

2.5. Series de Fourier con Wolfram Alpha

Las siguientes sentencias se utilizan para generar una gráfica como la Figura 2.2

$$\text{plot}(x * (1 - x), \text{sum}(4 * (1 - (-1)^n) / (n^3 * \pi^3) * \sin(n * \pi * x), n = 1..3), x = 0..1)$$

y la Figura 2.7

$$\text{plot}(\text{piecewise}((-1, x < 0), (1, x > 0)), \text{sum}(2 * (1 - (-1)^n) / (n * \pi) * \sin(n * \pi * x), n = 1..50), x = -1..1)$$

También se puede usar la sintaxis de Mathematica, tanto en Wolfram Alpha como en Wolfram Alpha Open Code para generar figuras como 2.3 y 2.4, respectivamente.

$$\text{Plot3D}[\text{Sum}[4*(1-(-1)^n)/(n^3*\pi^3)*\text{Sin}[n*\pi*x]*\text{Exp}[-n^2*\pi^2*t], \{n, 1, 8\}], \{x, 0, 1\}, \{t, 0, 1\}, \text{PlotRange} \rightarrow \{0, 0, 25\}]$$

$$\text{Plot3D}[1/6-\text{Sum}[2*(1+(-1)^n)/(n^2*\pi^2)*\text{Cos}[n*\pi*x]*\text{Exp}[-n^2*\pi^2*t], \{n, 1, 30\}], \{x, 0, 1\}, \{t, 0, 1\}, \text{PlotRange} \rightarrow \{0, 0, 25\}]$$

con la ventaja de que en Open Code se pueden manipular (girar, hacer un zoom, copiar, ...) Allí también se puede obtener la figura 2.5

$$g[x_] := 1/6 + \text{Sum}[2*(-1)^n * \text{Cos}[n*\pi*x] / (n^2*\pi^2) + \text{Sin}[n*\pi*x] * ((-1)^(n+1) / (n*\pi) + 2*((-1)^n - 1) / (n^3*\pi^3)), \{n, 1, 100\}]$$

$$\text{Plot}[\{g[x], \text{Piecewise}[\{0, x < 0\}, \{x^2, x > 0\}]\}, \{x, -1, 1\}]$$

Las series numéricas que hemos sumado utilizando las series de Fourier y la Identidad de Parseval se obtienen directamente mediante la orden **sum**:

$$\text{sum}((-1)^{(k+1)}/(2*k-1), k = 1..infinity) = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{sum}(1/(2*k-1)^2, k = 1..infinity) = \frac{\pi^2}{8}.$$

$$\text{sum}(1/n^2, n = 1..infinity) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Cualquiera de las siguientes sentencias se puede utilizar para generar la figura 2.8

$$\text{plot}(x(1-x)y(1-y), x = 0..1, y = 0..1)$$

$$\text{Plot3D}[x(x-1)y(y-1), \{x, 0, 1\}, \{y, 0, 1\}]$$

y esta otra para obtener la figura 2.9

$$\text{Plot3D}[\text{Sum}[16 * (1 - (-1)^n) * (1 - (-1)^m) / ((n^3 * m^3 * \text{Pi}^6)) * \text{Sin}[n * \text{Pi} * x] * \text{Sin}[m * \text{Pi} * y] * \text{Cos}[\text{Pi} * 0.38 * \text{Sqrt}[n^2 + m^2]], \{n, 1, 20\}, \{m, 1, 20\}], \{x, 0, 1\}, \{y, 0, 1\}]$$

Bibliografía sobre Series de Fourier y sus aplicaciones a las EDP:

1. "Matemáticas avanzadas para ingeniería", Peter V. O'Neil, Ed. Thomson, 2004.
2. "Introduction to Partial Differential Equations", A. Tveito y R. Winther, Springer, 1998.
3. "Basic partial differential equations", D. Bleecker y G. Csordas, Van Nostrand, 1992.
4. "Partial differential equations for scientists and engineers", Tyn Myint-U y L. Debnath, North Holland, 1987.
5. "Fourier analysis and its applications", G. B. Folland, Wadsworth and Brooks, 1992.
6. "Métodos matemáticos avanzados para ciencias e ingenierías", M. Gadella y L.M. Nieto, Univ. de Valladolid, 2000.

Recursos en Internet sobre Series de Fourier:

1. En Youtube,
 - <https://www.youtube.com/watch?v=r6sGWTCMz2k> ("But, what is a Fourier series?")
 - <https://www.youtube.com/watch?v=ToIXSwZ1pJU&t=2s> ("Solving the Heat equation")
2. https://en.wikipedia.org/wiki/Fourier_series
3. <http://www.sosmath.com/calculus/calculus.html> (Apartado "Fourier Series")
4. En Academia Khan,
 - <https://es.khanacademy.org/science/electrical-engineering/ee-signals#ee-fourier-series>

5. <http://www.mathphysics.com/pde/>

Libro web "Linear Methods of Applied Mathematics: Orthogonal series, boundary-value problems, and integral operators". Autores: Evans M. Harrell II y James V. Herod. Muy completo y con ejemplos.

6. El analizador armónico de Michelson: una máquina de 1897 con ruedas y engranajes para calcular series de Fourier:

<http://www.youtube.com/watch?v=NASM30MAHLg>

El libro con toda la información sobre el aparato:

<http://www.engineerguy.com/fourier/pdfs/albert-michelsons-harmonic-analyzer.pdf>

Capítulo 3

Transformadas integrales de funciones

3.1. Transformada de Fourier

Es una herramienta que se emplea para transformar funciones definidas en el dominio del tiempo (señales) en otras funciones definidas en el dominio de las frecuencias. Además del campo de las EDP, tiene muchas e importantísimas aplicaciones en diversas áreas de las matemáticas, física e ingeniería como la teoría de números, la óptica y la propagación de ondas. Sin ella no existirían las telecomunicaciones modernas, como Internet o la telefonía móvil.

DEFINICIÓN 3.1 Dada una función $f(x)$ definida para cada $x \in \mathbb{R}$, la transformada de Fourier de f es otra función (que designamos por $\mathcal{F}(f)$ ó \hat{f}) y que para cada $\xi \in \mathbb{R}$ viene dada por

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\xi x} dx,$$

en caso de que exista.

Una vez más, usaremos aquí la **Fórmula de Euler**:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta), \quad \text{para cada } \theta \in \mathbb{R},$$

donde $i = \sqrt{-1}$ denota la unidad imaginaria.

COMENTARIO 3.1 No hay unanimidad a la hora de definir la transformada de Fourier. Otras definiciones que pueden encontrarse en la literatura son

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f)(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\xi x} dx, & \mathcal{F}(f)(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2\pi i\xi x} dx, & \mathcal{F}(f)(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{2\pi i\xi x} dx, \\ \mathcal{F}(f)(\xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\xi x} dx & \text{ó} & & \mathcal{F}(f)(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\xi x} dx. \end{aligned}$$

Esta cuestión debe ser tenida muy en cuenta a la hora de comparar las propiedades y los resultados, según las diversas referencias.

No es difícil comprobar que la transformada de Fourier de una función f puede no existir. Por ejemplo, si $f(x) = 1$ para cada $x \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}(f)(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} 1 dx = +\infty,$$

y si $\xi \neq 0$,

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{+R} e^{-i\xi x} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{e^{i\xi R} - e^{-i\xi R}}{i\xi} = \frac{2}{\xi} \lim_{R \rightarrow +\infty} \sin(R\xi),$$

pudiendo comprobarse que este último límite no existe.

Una condición suficiente para que exista la transformada de Fourier de una función $f(x)$ para cada $\xi \in \mathbb{R}$ es que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$, ya que entonces

$$|\mathcal{F}(f)(\xi)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)e^{-i\xi x}| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

En lo sucesivo, esta es una condición que impondremos a menudo.

EJEMPLO 3.1 1) La transformada de Fourier de una función real puede tomar valores complejos.

Por ejemplo, si

$$f_1(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\mathcal{F}(f_1)(\xi) = \int_0^{+\infty} e^{-x} e^{-i\xi x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-(1+i\xi)x} dx = - \frac{e^{-(1+i\xi)x}}{1+i\xi} \Big|_{x=0}^{x=+\infty} = \frac{1}{1+i\xi} \in \mathbb{C}.$$

2) Otro caso en el que se puede aplicar directamente la definición para calcular fácilmente la transformada de Fourier, operando con números complejos, aunque el resultado final sea real $f_2(x) = e^{-|x|}$:

$$\mathcal{F}(f_2)(\xi) = \int_{-\infty}^0 e^{x(1-i\xi)} dx + \int_0^{+\infty} e^{-x(1+i\xi)} dx = \frac{1}{1-i\xi} + \frac{1}{1+i\xi} = \frac{2}{1+\xi^2}.$$

3) La transformada de Fourier de una función "muy concentrada" (cero fuera de un cierto dominio acotado) resulta ser una función "muy extendida" (distinta de cero en todo \mathbb{R}). Por ejemplo, si

$$f_3(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\mathcal{F}(f_3)(\xi) = \int_{-1}^{+1} e^{-i\xi x} dx = - \frac{e^{-i\xi x}}{i\xi} \Big|_{x=-1}^{x=+1} = \frac{2 \sin(\xi)}{\xi}.$$

Veamos ahora cuáles son las principales propiedades de la transformada de Fourier:

i) La transformada de Fourier de una función real y par es una función real y par. Al ser el seno una función impar y el coseno una función par en \mathbb{R} y ser el producto de dos funciones pares, otra función par y el producto de una función par por una función impar, otra función impar en \mathbb{R} , resulta que

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) (\cos(\xi x) - i \sin(\xi x)) dx = 2 \int_0^{+\infty} f(x) \cos(\xi x) dx \in \mathbb{R},$$

que es una función par, respecto de ξ .

ii) La transformada de Fourier de una función real e impar es una función imaginaria pura e impar. Argumentando como antes y utilizando que el producto de dos funciones impares es otra función par, resulta que

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) (\cos(\xi x) - i \sin(\xi x)) dx = -2i \int_0^{+\infty} f(x) \sin(\xi x) dx,$$

que es una función impar, respecto de ξ .

Estas propiedades dan lugar a otras transformadas integrales de interés, como son la transformada de Fourier en cosenos y la transformada de Fourier en senos, respectivamente.

iii) La transformada de Fourier es lineal:

$$\mathcal{F}(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha \mathcal{F}(f_1) + \beta \mathcal{F}(f_2), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

iv) Supongamos que f es continua en \mathbb{R} , $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, f' es continua a trozos en \mathbb{R} y que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)| dx < +\infty$. Entonces

$$\mathcal{F}(f')(\xi) = i\xi \mathcal{F}(f)(\xi).$$

Dem. Basta integrar por partes la definición de $\mathcal{F}(f')$ y utilizar las hipótesis

$$\mathcal{F}(f')(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-i\xi x} dx = f(x) e^{-i\xi x} \Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} + i\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx = i\xi \mathcal{F}(f)(\xi). \blacksquare$$

v) En las condiciones de la propiedad anterior,

$$\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \mathcal{F}(f)(\xi) = 0.$$

De hecho, esta propiedad es cierta sólo suponiendo que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$, como se demuestra en Folland, p. 217.

Dem. Basta notar que

$$|\mathcal{F}(f)(\xi)| = \frac{|\mathcal{F}(f')(\xi)|}{|\xi|} \leq \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)| dx}{|\xi|} = \frac{C}{|\xi|} \rightarrow 0, \quad \text{cuando } |\xi| \rightarrow +\infty. \blacksquare$$

vi) Supongamos que f y f' son continuas en \mathbb{R} , $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f'(x) = 0$, f'' es continua a trozos en \mathbb{R} y que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f''(x)| dx < +\infty$. Entonces

$$\mathcal{F}(f'')(\xi) = -\xi^2 \mathcal{F}(f)(\xi).$$

Dem. Basta aplicar la propiedad iv) primero a f y luego a f' :

$$\mathcal{F}(f'')(\xi) = i\xi \mathcal{F}(f')(\xi) = (i\xi)^2 \mathcal{F}(f)(\xi). \blacksquare$$

vii) Supongamos que $\int_{-\infty}^{+\infty} |xf(x)| dx < +\infty$. Entonces,

$$\mathcal{F}(xf(x))(\xi) = i \frac{d\mathcal{F}(f)}{d\xi}(\xi).$$

Dem. Formalmente, basta utilizar que podemos intercambiar la derivación respecto de ξ con la integración respecto de x

$$\mathcal{F}(xf(x))(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) e^{-i\xi x} dx = i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{de^{-i\xi x}}{d\xi} dx = i \frac{d}{d\xi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx \right). \blacksquare$$

EJEMPLO 3.2 *Combinando varias propiedades anteriores podemos calcular la transformada de Fourier de algunas funciones que sería difícil obtener a partir de la definición. Por ejemplo, la función $f(x) = e^{-x^2}$ verifica $f'(x) + 2xf(x) = 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Aplicando transformada de Fourier de esta expresión y suponiendo que estamos en condiciones de poder utilizar las propiedades iii), iv) y vii), resulta que*

$$0 = \mathcal{F}(f'(x) + 2xf(x))(\xi) = \mathcal{F}(f')(\xi) + 2\mathcal{F}(xf(x))(\xi) = i\xi \mathcal{F}(f)(\xi) + 2i \frac{d\mathcal{F}(f)}{d\xi}(\xi),$$

o, lo que es lo mismo,

$$\frac{d\mathcal{F}(f)}{d\xi}(\xi) = -\frac{\xi}{2}\mathcal{F}(f)(\xi),$$

que es otra EDO lineal de primer orden, por lo que integrándola

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = Ce^{-\xi^2/4}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Por otro lado,

$$C = \mathcal{F}(f)(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

y por lo tanto,

$$\mathcal{F}(e^{-x^2})(\xi) = \sqrt{\pi}e^{-\xi^2/4}.$$

Otras propiedades igualmente interesantes de la transformada de Fourier, supuesto que $f(x)$ verifica la condición $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx < +\infty$, son las siguientes:

a) Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, se cumple:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(x - \alpha)](\xi) &= e^{-i\alpha\xi}\mathcal{F}[f(x)](\xi), \\ \mathcal{F}[e^{i\alpha x}f(x)](\xi) &= \mathcal{F}[f(x)](\xi - \alpha). \end{aligned}$$

b) Si $\alpha \neq 0$, entonces $\mathcal{F}[f(\alpha x)](\xi) = \frac{1}{|\alpha|}\mathcal{F}[f(x)](\frac{\xi}{\alpha})$.

Todas ellas se pueden demostrar directamente ó mediante sencillos cambios de variable en las integrales.

TEOREMA 3.1 (Teorema de inversión de Fourier) *Supongamos que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx < +\infty$ y que f es C^1 a trozos en cada intervalo de \mathbb{R} . Entonces,*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi)e^{i\xi x}d\xi = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Idea de la demostración. El punto de partida es la igualdad (2.34) del Teorema 2.2 relativo a la convergencia de series de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}, \quad \forall x \in (-L, L), \quad (3.3)$$

donde

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.5)$$

Ya se comentó en el Capítulo 2 (ver (2.37)) que (3.3) se puede re-escribir en la forma exponencial

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{1}{2L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{L}}, \quad \forall x \in (-L, L) \quad (3.6)$$

donde

$$c_n = \int_{-L}^L f(x) e^{-\frac{in\pi x}{L}} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.7)$$

Definiendo $\Delta\xi = \frac{\pi}{L}$ y $\xi_n = n\Delta\xi$, las identidades (3.6)-(3.7) quedan

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\xi_n x} \Delta\xi, \quad \forall x \in (-L, L) \quad (3.8)$$

y

$$c_n = \int_{-L}^L f(x) e^{-i\xi_n x} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.9)$$

Suponiendo que $f(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$ y que L es suficientemente grande, todavía podemos re-escribir (3.8)-(3.9) de manera aproximada como

$$c_n \approx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi_n x} dx = \mathcal{F}(f)(\xi_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.10)$$

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(f)(\xi_n) e^{i\xi_n x} \Delta\xi, \quad \forall x \in (-L, L) \quad (3.11)$$

Finalmente, teniendo en cuenta que $\Delta\xi \rightarrow 0$ cuando $L \rightarrow +\infty$ y que la serie (3.11) se asemeja a la suma de Riemann de una integral, en el límite tendríamos

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi) e^{i\xi x} d\xi, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \blacksquare \quad (3.12)$$

La expresión (3.12) nos sugiere la siguiente

DEFINICIÓN 3.2 Dada una función $g(\xi)$ definida para cada $\xi \in \mathbb{R}$, la transformada inversa de Fourier de g es otra función (que designamos por $\mathcal{F}^{-1}(g)$) y que para cada $x \in \mathbb{R}$ viene dada por

$$\mathcal{F}^{-1}(g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

A partir del Teorema de inversión de Fourier, resulta inmediato comprobar que para cada función $f(x)$ continua en \mathbb{R} tal que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$ y con derivada f' continua a trozos en cada intervalo de \mathbb{R} , se verifica

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)(\xi))(x) &= f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(f)(x))(\xi) &= f(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

como cabía esperar.

EJEMPLO 3.3 Hemos visto en el Ejemplo 3.1 que si

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases},$$

su transformada de Fourier viene dada por

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \frac{1}{1 + i\xi}.$$

Según el Teorema de inversión de Fourier, se verifica en este caso

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\xi x}}{1 + i\xi} d\xi = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

También, vimos en el Ejemplo 3.1 que

$$\mathcal{F}(e^{-|x|})(\xi) = \frac{2}{1 + \xi^2}.$$

Podemos aplicar de nuevo el Teorema de inversión de Fourier, de una manera hábil para obtener

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\xi x}}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(e^{-|\xi|})(x) e^{-i\xi x} dx = \pi \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(e^{-|x|}))(-\xi) = \pi e^{-|\xi|}.$$

DEFINICIÓN 3.3 Dadas dos funciones f y g definidas en todo \mathbb{R} , se denomina **producto de convolución** de f y g (y se designa por $f \star g$) a una nueva función que para cada $x \in \mathbb{R}$ viene dada por

$$(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - y)g(y)dy.$$

Es fácil convencerse de que el producto de convolución no siempre está bien definido. Por ejemplo, si $f(x) = g(x) = 1$ para cada $x \in \mathbb{R}$, resulta que

$$(1 \star 1)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} 1dy = +\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

En cambio, el producto de convolución $(f \star g)(x)$ es finito para cada $x \in \mathbb{R}$ (al menos) en los siguientes casos:

- si $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx < +\infty$ y g es acotada (existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $|g(y)| \leq C$ para cada $y \in \mathbb{R}$), ya que

$$|(f \star g)(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x - y)g(y)|dy \leq C \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x - y)|dy < +\infty.$$

- si f es acotada (existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $|f(y)| \leq C$ para cada $y \in \mathbb{R}$) y $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|dx < +\infty$, ya que

$$|(f \star g)(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x - y)g(y)|dy \leq C \int_{-\infty}^{+\infty} |g(y)|dy < +\infty.$$

Veamos algunos ejemplos: supuesto que

$$f_3(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases} \quad (3.13)$$

resulta inmediato comprobar que

$$(1 \star f_3)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_3(y)dy = \int_{-1}^1 1dy = 2.$$

Algo más trabajoso resulta ver que

$$(f_3 \star f_3)(x) = \int_{-1}^1 f_3(x - y)dy = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -2 \\ 2 + x & \text{si } x \in [-2, 0] \\ 2 - x & \text{si } x \in [0, 2] \\ 0 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Entre las propiedades que verifica el producto de convolución, destacamos aquí las más importantes que, sin duda, nos recuerdan a las correspondientes propiedades del producto de funciones habitual (éste es el motivo por el cual se denomina “producto” a la convolución).

Dadas funciones f, g, h y $\alpha \in \mathbb{C}$, se verifica

1. $f \star g = g \star f$ (Prop. conmutativa)
2. $f \star (g \star h) = (f \star g) \star h$ (Prop. asociativa)
3. $f \star (g + h) = f \star g + f \star h$ (Prop. distributiva respecto de la suma)
4. $f \star (\alpha \cdot g) = \alpha \cdot (f \star g)$,

supuesto que los productos de convolución anteriores están bien definidos.

La razón por la cual el producto de convolución se introduce en conexión con la transformada de Fourier queda recogida en el siguiente teorema.

TEOREMA 3.2 *Supongamos que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx < +\infty$, $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|dx < +\infty$ y existe $(f \star g)(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Entonces*

$$\mathcal{F}(f \star g)(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi) \cdot \mathcal{F}(g)(\xi).$$

Dem. Basta utilizar las definiciones y un simple cambio de variable

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f \star g)(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f \star g)(x)e^{-i\xi x}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy \right) e^{-i\xi x}dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)e^{-i\xi(x-y)}g(y)e^{-i\xi y}dydx \stackrel{z=x-y}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)e^{-i\xi z}g(y)e^{-i\xi y}dzdy = \\ &= \mathcal{F}(f)(\xi) \cdot \mathcal{F}(g)(\xi). \blacksquare \end{aligned}$$

Aplicando ahora este teorema, teniendo en cuenta el Ejemplo 3.1, resulta inmediato deducir que

$$\mathcal{F}(f_3 \star f_3)(\xi) = (\mathcal{F}(f_3)(\xi))^2 = \left(\frac{2 \sin(\xi)}{\xi} \right)^2 = \frac{4(\sin(\xi))^2}{\xi^2}.$$

3.2. Aplicaciones de la transformada de Fourier a las EDP

La transformada de Fourier está especialmente indicada para resolver EDP donde el dominio espacial es todo \mathbb{R} . Consideremos, por ejemplo, el problema de difusión del calor en un alambre "infinito", supuesta conocida la temperatura inicial en cada punto

$$\begin{cases} u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), & x \in \mathbb{R}, t > 0 & \text{Ec. del Calor} \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R} & \text{Condición inicial} \end{cases} \tag{3.14}$$

En lo que sigue, supondremos que todas las funciones que aparecen, verifican las hipótesis necesarias para que tengan sentido los cálculos que vamos a llevar a cabo.

Aplicando al problema la transformada de Fourier respecto de la variable x , llamando

$$U(\xi, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t)e^{-ix\xi}dx$$

y utilizando la propiedad vi) sobre la transformada de la derivada segunda resp. x , se obtiene

$$\begin{cases} U_t(\xi, t) = -\xi^2 U(\xi, t), & \xi \in \mathbb{R}, t > 0 \\ U(\xi, 0) = \mathcal{F}(f)(\xi), & \xi \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.15}$$

Fijado ξ , la EDP anterior podemos resolverla como una EDO lineal de primer orden, por lo que integrando resulta

$$U(\xi, t) = c(\xi)e^{-\xi^2 t},$$

donde c es una función arbitraria. Utilizando la condición inicial, concluimos que $c(\xi) = U(\xi, 0) = \mathcal{F}(f)(\xi)$, por lo que

$$U(\xi, t) = \mathcal{F}(f)(\xi)e^{-\xi^2 t}.$$

Queremos ahora aplicar transformada inversa y obtener la solución del problema inicial (3.14). En virtud de (3.12) se tiene que

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi)e^{-\xi^2 t} e^{i\xi x} d\xi. \quad (3.16)$$

En algunos casos particulares, es posible calcular la integral anterior. Por ejemplo, si $f(x) = e^{-x^2}$, sabemos que $\mathcal{F}(f)(\xi) = \sqrt{\pi}e^{-\xi^2/4}$, por lo que

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\pi}e^{-\xi^2/4} e^{-\xi^2 t} e^{i\xi x} d\xi = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2(t+1/4)} e^{i\xi x} d\xi = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \mathcal{F}(e^{-\xi^2(t+1/4)})(-x) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} \frac{1}{\sqrt{t+1/4}} e^{-x^2/(4t+1)} = \frac{e^{-x^2/(4t+1)}}{\sqrt{4t+1}}, \end{aligned}$$

utilizando la propiedad de que si $\alpha > 0$,

$$\mathcal{F}[f(\alpha x)](\xi) = \frac{1}{\alpha} \mathcal{F}[f]\left(\frac{\xi}{\alpha}\right), \quad (3.17)$$

con $\alpha = \sqrt{t+1/4}$ y $f(x) = e^{-x^2}$.

En general, para invertir la expresión de $U(\xi, t)$, se tiene en cuenta que

$$e^{-\xi^2 t} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathcal{F}(e^{-x^2})(2\xi\sqrt{t}) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \mathcal{F}\left(e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)(\xi),$$

usando nuevamente (3.17), pero ahora con $\alpha = \frac{1}{2\sqrt{t}}$. Por lo tanto,

$$U(\xi, t) = \mathcal{F}(f)(\xi) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \mathcal{F}\left(e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)(\xi).$$

Utilizando ahora el producto de convolución (respecto de la variable x) y la conclusión del Teorema 3.2, se sigue que

$$u(x, t) = f(x) \star_x \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) e^{-\frac{y^2}{4t}} dy = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy. \quad (3.18)$$

La función

$$E(x, t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}, \quad (3.19)$$

se denomina **núcleo gaussiano** y, como acabamos de ver, juega un papel destacado a la hora de resolver la Ec. del Calor (de hecho, se le suele llamar por ello **solución fundamental de la Ec. del Calor**).

Consideremos ahora el siguiente problema elíptico en un semiplano

$$\begin{cases} u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0, & x \in \mathbb{R}, y > 0 & \text{Ec. de Laplace} \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R}. & \text{Condición de Contorno} \end{cases} \quad (3.20)$$

La primera observación es que si $u(x, y)$ es una solución de este problema, entonces $u(x, y) + Cy$ también lo es para cualquier valor de $C \in \mathbb{R}$. Con el fin de quedarnos con una única solución, vamos a determinar aquella que está acotada cuando $y \rightarrow +\infty$. De nuevo, vamos a suponer que estamos en condiciones de poder llevar a cabo todos los cálculos que siguen.

Aplicando transformada de Fourier respecto de la variable x , llamando

$$U(\xi, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, y) e^{-ix\xi} dx$$

y utilizando la propiedad vi) sobre la transformada de la derivada segunda respecto de x , se obtiene como antes

$$\begin{cases} -\xi^2 U(\xi, y) + U_{yy}(\xi, y) = 0, & \xi \in \mathbb{R}, y > 0 \\ U(\xi, 0) = \mathcal{F}(f)(\xi), & \xi \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.21)$$

Fijado ξ , la EDP anterior podemos resolverla como si fuera una EDO lineal de segundo orden, por lo que integrando se llega a

$$U(\xi, y) = c_1(\xi) e^{|\xi|y} + c_2(\xi) e^{-|\xi|y},$$

donde c_1, c_2 son funciones arbitrarias. Como queremos que $u(x, y)$ esté acotada cuando $y \rightarrow +\infty$, también debe estarlo $U(\xi, y)$, por lo que debe ser $c_1(\xi) = 0$. De otro lado, utilizando la condición inicial, concluimos que $c_2(\xi) = U(\xi, 0) = \mathcal{F}(f)(\xi)$, por lo que finalmente

$$U(\xi, y) = \mathcal{F}(f)(\xi) e^{-|\xi|y}.$$

Hemos visto en el Ejemplo 3.3 que

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)(\xi) = \pi e^{-|\xi|} \quad \text{para cada } \xi \in \mathbb{R},$$

así que podemos escribir

$$e^{-|\xi|y} = \frac{1}{\pi} \mathcal{F}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)(\xi \cdot y) = \frac{1}{\pi y} \mathcal{F}\left(\frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}\right)(\xi) = \mathcal{F}\left(\frac{y}{\pi(x^2+y^2)}\right)(\xi),$$

usando de nuevo (3.17), ahora con $\alpha = \frac{1}{y}$. Por lo tanto,

$$U(\xi, y) = \mathcal{F}(f)(\xi) \cdot \mathcal{F}\left(\frac{y}{\pi(x^2+y^2)}\right)(\xi)$$

y utilizando otra vez el producto de convolución (respecto de la variable x) y la conclusión del Teorema 3.2, se sigue que

$$u(x, y) = f(x) \star_x \frac{y}{\pi(x^2+y^2)} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-z) \frac{y}{\pi(z^2+y^2)} dz. \quad (3.22)$$

COMENTARIO 3.2 *Haciendo $y = 0$ en la expresión anterior aparentemente resulta que $u(x, 0) = 0$, en lugar de $u(x, 0) = f(x)$, como se indica en (3.20). La explicación a esta aparente contradicción es que la condición de contorno se verifica en el sentido de límite cuando $y \rightarrow 0^+$, porque el denominador también se anula cuando $z = 0$. Para confirmar este hecho basta escribir la identidad (3.22), cuando $y > 0$, en la forma equivalente*

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-z) \frac{\frac{dz}{y}}{\pi\left(\left(\frac{z}{y}\right)^2+1\right)} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-yw) \frac{dw}{\pi(w^2+1)}, \quad (3.23)$$

mediante el cambio de variable $w = z/y$ y notar que

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} u(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{dw}{\pi(w^2+1)} = \frac{f(x)}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dw}{w^2+1} = \frac{f(x)}{\pi} (\arctan(w)) \Big|_{w=-\infty}^{w=+\infty} = f(x), \quad (3.24)$$

tal y como esperábamos.

3.3. Transformada de Laplace

DEFINICIÓN 3.4 Dada una función $f(t)$ definida (al menos) para cada $t > 0$, (si se prefiere se puede suponer que $f(t) = 0$ para cada $t < 0$) **la transformada de Laplace de f** es otra función (que designamos por $\mathcal{L}(f)$ ó F) y que viene dada por

$$\mathcal{L}(f)(s) = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt,$$

para los valores s para los cuales la integral sea finita.

COMENTARIOS 3.1 i) Curiosamente, y a diferencia de lo que sucede con la transformada de Fourier, la definición de la transformada de Laplace no presenta ningún tipo de controversia y está unánimemente aceptada en la literatura.

ii) Supuesto que $f(t) = 0$ para $t < 0$ y que $\int_0^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty$, resulta inmediato comprobar la relación que existe entre la Transformada de Fourier y la de Laplace

$$\mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{F}(f)(-is) \quad \text{y} \quad \mathcal{F}(f)(\xi) = \mathcal{L}(f)(i\xi),$$

iii) En general, la transformada de Laplace $\mathcal{L}(f)(s)$ existe cuando $s > \gamma$, donde γ es una cierta constante, que puede ser diferente para cada f .

EJEMPLO 3.4 1) Aplicando la definición, es inmediato comprobar que si $f(t) = 1$ para $t > 0$

$$\mathcal{L}(1)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \begin{cases} \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{1}{s} & \text{si } s > 0 \\ +\infty & \text{si } s \leq 0 \end{cases}$$

2) Hemos visto que la transformada de Fourier de

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \quad (3.25)$$

viene dada por

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \frac{1}{1 + i\xi}.$$

Según lo que acabamos de ver, se tiene entonces que

$$\mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{F}(f)(-is) = \frac{1}{1 + s},$$

expresión que es válida si $s > -1$.

3) En general, dado $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}(e^{\alpha t})(s) = \int_0^{+\infty} e^{-(s-\alpha)t} dt = \mathcal{L}(1)(s - \alpha) = \frac{1}{s - \alpha},$$

siempre que $s > \alpha$.

4) Dada $f(t) = t$, integrando por partes, se obtiene

$$\mathcal{L}(t)(s) = \int_0^{+\infty} te^{-st} dt = t \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_{t=0}^{t=+\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s} \mathcal{L}(1)(s) = \frac{1}{s^2},$$

supuesto que $s > 0$. Por inducción, es sencillo comprobar que para cada $n \in \mathbb{N}$, si $s > 0$

$$\mathcal{L}(t^n)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}. \quad (3.26)$$

5) Dada $f(t) = \sin(t)$, se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\sin(t))(s) &= \int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} \operatorname{Im}(e^{(i-s)t}) dt = \\ &= \operatorname{Im} \left(\left. \frac{e^{(i-s)t}}{i-s} \right|_{t=0}^{t=+\infty} \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{1}{s-i} \right) = \frac{1}{s^2+1},\end{aligned}$$

supuesto que $s > 0$. Análogamente, si $s > 0$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\cos(t))(s) &= \int_0^{+\infty} \cos(t)e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} \operatorname{Re}(e^{(i-s)t}) dt = \\ &= \operatorname{Re} \left(\left. \frac{e^{(i-s)t}}{i-s} \right|_{t=0}^{t=+\infty} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{s-i} \right) = \frac{s}{s^2+1}.\end{aligned}$$

Al igual que sucede con la transformada de Fourier, tampoco la transformada de Laplace está definida para cualquier función $f(t)$. Sin embargo, la clase de funciones que admiten transformada de Laplace es mucho más amplia que en el caso de la transformada de Fourier, razón que explica su mayor utilidad. En este sentido, resulta interesante definir el siguiente tipo de funciones:

DEFINICIÓN 3.5 Se dice que una función $f(t)$ es de orden exponencial γ cuando $t \rightarrow +\infty$, si existen $M > 0$ y $T > 0$ tales que se verifica

$$|f(t)| \leq Me^{\gamma t} \quad \text{para cada } t > T.$$

EJEMPLO 3.5 1) Toda función acotada es de orden exponencial γ cuando $t \rightarrow +\infty$, para todo $\gamma \geq 0$, dado que

$$|f(t)| \leq M \leq Me^{\gamma t} \quad \text{para cada } t \geq 0.$$

En particular, las funciones constantes, seno y coseno son de orden exponencial γ cuando $t \rightarrow +\infty$, para todo $\gamma \geq 0$.

2) Si $f(t) \cdot e^{-\gamma t} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$, entonces $f(t)$ es de orden exponencial γ cuando $t \rightarrow +\infty$. En particular, cualquier polinomio es de orden exponencial γ cuando $t \rightarrow +\infty$, para todo $\gamma > 0$.

3) Sin embargo, la función $f(t) = e^{t^2}$ no es de orden exponencial γ cuando $t \rightarrow +\infty$, para ningún $\gamma \geq 0$.

Supuesto que lo fuera, existirían $\gamma \in \mathbb{R}$, $M > 0$ y $T > 0$ tales que $e^{t^2} \leq Me^{\gamma t}$ para cada $t > T$. Entonces, $e^{t(t-\gamma)} \leq M$ para cada $t > T$ y tomando límites cuando $t \rightarrow +\infty$, llegamos a la contradicción de que $+\infty \leq M$.

PROPOSICIÓN 3.1 Supongamos que $f(t)$ es una función continua a trozos en $[0, T]$ para todo $T > 0$ y de orden exponencial γ cuando $t \rightarrow +\infty$. Entonces, existe $\mathcal{L}(f)(s)$ para cada $s > \max\{0, \gamma\}$. Además, se verifica

$$\mathcal{L}(f)(s) \rightarrow 0, \quad \text{cuando } s \rightarrow +\infty.$$

Dem. Por ser $f(t)$ una función de orden exponencial γ cuando $t \rightarrow +\infty$, existen $M > 0$ y $T > 0$ tales que se verifica

$$|f(t)| \leq Me^{\gamma t} \quad \text{para cada } t > T.$$

Por otra parte, como $f(t)$ es una función continua a trozos en $[0, T]$, en particular f está acotada, luego existe $C > 0$ tal que

$$|f(t)| \leq C \quad \text{para cada } t \in [0, T].$$

Combinando ambas estimaciones, se sigue que si $s > \max\{0, \gamma\}$,

$$|\mathcal{L}(f)(s)| = \left| \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \right| = \left| \int_0^T f(t)e^{-st} dt + \int_T^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \right| \leq$$

$$C \int_0^T e^{-st} dt + M \int_T^{+\infty} e^{-(s-\gamma)t} dt = C \frac{1 - e^{-sT}}{s} + M \frac{e^{(\gamma-s)T}}{s - \gamma} < +\infty.$$

Además, es evidente que el término de la derecha tiende hacia cero cuando $s \rightarrow +\infty$, por lo que $\mathcal{L}(f)(s)$ también. ■

EJERCICIO 3.1 1) Probar que no existe la transformada de Laplace $\mathcal{L}(f)(s)$ de la función $f(t) = e^{t^2}$ para ningún valor de s . Indicación: Probar que para cada $s \in \mathbb{R}$ se verifica

$$e^{t^2-st} \geq e^{-s^2/4} \quad \forall t > 0.$$

2) Probar que no existe ninguna función $f(t)$ función continua a trozos en $[0, T]$ para todo $T > 0$ y de orden exponencial γ cuando $t \rightarrow +\infty$ tal que

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{s}{3s-1}.$$

Las principales propiedades de la transformada de Laplace que vamos a utilizar son las siguientes:

i) La transformada de Laplace es lineal: dadas dos funciones f_1 y f_2 ,

$$\mathcal{L}(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha \mathcal{L}(f_1) + \beta \mathcal{L}(f_2), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

ii) Supongamos que f es continua en $[0, +\infty)$, de orden exponencial γ cuando $t \rightarrow +\infty$ y que $f'(t)$ es continua a trozos en $[0, T]$ para cada $T > 0$. Entonces, si $s > \gamma$,

$$\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0).$$

Dem. Basta integrar por partes la definición de $\mathcal{L}(f')$ y utilizar las hipótesis

$$\mathcal{L}(f')(s) = \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-st} dt = f(t)e^{-st} \Big|_{t=0}^{t=+\infty} + s \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0),$$

dado que, si $s > \gamma$,

$$|f(t)e^{-st}| \leq Me^{(\gamma-s)t} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow +\infty. \blacksquare$$

iii) Supongamos que f y f' son continuas en $[0, +\infty)$, de orden exponencial γ cuando $t \rightarrow +\infty$ y que $f''(t)$ es continua a trozos en $[0, T]$ para cada $T > 0$. Entonces, si $s > \gamma$,

$$\mathcal{L}(f'')(s) = s^2\mathcal{L}(f)(s) - sf(0) - f'(0).$$

Dem. Basta aplicar la propiedad ii) a primero a f'' y f' y luego a f' y f :

$$\mathcal{L}(f'')(s) = s\mathcal{L}(f')(s) - f'(0) = s(s\mathcal{L}(f)(s) - f(0)) - f'(0). \blacksquare$$

EJERCICIO 3.2 1) En la propiedad ii) anterior, es fundamental que f sea continua en $[0, +\infty)$ y no basta que sea continua a trozos en $[0, T]$ para cada $T > 0$. En el caso de que f sea sólo continua a trozos en $[0, T]$ para cada $T > 0$ y se mantengan el resto de las condiciones, obtener la expresión de $\mathcal{L}(f')(s)$.

2) Partiendo de que $\mathcal{L}(1)(s) = \frac{1}{s}$, si $s > 0$, y aplicando las propiedades anteriores, volver a obtener que si $s > 0$

$$\mathcal{L}(t^n)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \mathcal{L}(\sin(t))(s) = \frac{1}{s^2+1} \quad \text{y} \quad \mathcal{L}(\cos(t))(s) = \frac{s}{s^2+1}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

A continuación, recopilamos otras propiedades interesantes de la transformada de Laplace, suponiendo que las funciones que aparecen son continuas a trozos en cualquier intervalo $[0, T]$ y de orden exponencial γ :

1. $\mathcal{L}[e^{\alpha t} \cdot f(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s - \alpha)$, si $s > \gamma + \alpha$, para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. $\mathcal{L}[f(\alpha t)](s) = \frac{1}{\alpha} \mathcal{L}[f(t)]\left(\frac{s}{\alpha}\right)$, si $s > \gamma \cdot \alpha$, para cualquier $\alpha > 0$.
3. Dada una función f periódica de periodo w , se verifica

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{1}{1 - e^{-sw}} \int_0^w e^{-st} f(t) dt, \text{ si } s > \gamma.$$

4. Dado $a > 0$ y

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq a \\ f(t - a) & \text{si } t > a, \end{cases}$$

se verifica

$$\mathcal{L}[g(t)](s) = e^{-as} \mathcal{L}[f(t)](s), \text{ si } s > \gamma.$$

5. $\frac{d^n \mathcal{L}[f(t)](s)}{ds^n} = (-1)^n \mathcal{L}[t^n f(t)](s)$, si $s > \gamma$, para cualquier natural n .

Análogamente a lo que vimos para la Transformada de Fourier, el producto de convolución tiene gran interés a la hora de calcular Transformadas inversas de Laplace. Veamos cómo se define en este caso:

DEFINICIÓN 3.6 Dadas dos funciones f y g definidas en $[0, +\infty)$, se denomina **producto de convolución de f y g** (y se designa por $f \star g$) a una nueva función que para cada $t > 0$ viene dada por

$$(f \star g)(t) = \int_0^t f(t - y)g(y)dy.$$

Es fácil comprobar que esta definición de producto de convolución coincide con la definición 3.3, supuesto que $f(t) = g(t) = 0$ para $t < 0$. Según la definición 3.3

$$(f \star g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - y)g(y)dy = \begin{cases} \int_0^t f(t - y)g(y)dy & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

A la vista del Teorema 3.2, no sorprende que el producto de convolución que acabamos de introducir verifique la siguiente propiedad en conexión con la transformada de Laplace:

TEOREMA 3.3 Supongamos que $f(t)$ y $g(t)$ son funciones continuas a trozos en $[0, T]$ para todo $T > 0$ y de orden exponencial γ cuando $t \rightarrow +\infty$. Entonces

$$\mathcal{L}(f \star g)(s) = \mathcal{L}(f)(s) \cdot \mathcal{L}(g)(s), \quad \text{si } s > \gamma.$$

Dem. Una vez más, basta utilizar las definiciones y un simple cambio de variable

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f \star g)(s) &= \int_0^{+\infty} (f \star g)(t)e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^t f(t - y)g(y)dy \right) e^{-st} dt = \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^t f(t - y)g(y)e^{-st} dy dt = \int_0^{+\infty} \int_y^{\infty} f(t - y)g(y)e^{-st} dt dy = \\ &= \int_0^{+\infty} \int_y^{\infty} f(t - y)e^{-s(t-y)} g(y)e^{-sy} dt dy \stackrel{z=t-y}{=} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(z)e^{-sz} g(y)e^{-sy} dz dy = \mathcal{L}(f)(s) \cdot \mathcal{L}(g)(s). \blacksquare \end{aligned}$$

3.4. Aplicaciones de la transformada de Laplace a las EDO

Vamos a considerar un problema de Cauchy muy sencillo, que sabemos resolver por métodos elementales. La idea es resolverlo aquí por otra vía totalmente diferente, utilizando transformada de Laplace. Se trata del siguiente problema

$$\begin{cases} x'(t) - 2x(t) = e^{5t} \\ x(0) = 3 \end{cases} \quad (3.27)$$

Procederemos como en casos anteriores, suponiendo que podemos utilizar la propiedad ii) que hemos visto. Así pues, aplicando transformada de Laplace, se tiene

$$\mathcal{L}(e^{5t})(s) = \mathcal{L}(x' - 2x)(s) = \mathcal{L}(x')(s) - 2\mathcal{L}(x)(s) = s\mathcal{L}(x)(s) - x(0) - 2\mathcal{L}(x)(s) = (s - 2)\mathcal{L}(x)(s) - 3,$$

de donde deducimos que

$$\mathcal{L}(x)(s) = \frac{\mathcal{L}(e^{5t})(s) + 3}{s - 2} = \frac{1}{(s - 2)(s - 5)} + \frac{3}{s - 2} = \frac{8/3}{s - 2} + \frac{1/3}{s - 5}.$$

Teniendo en cuenta lo que sabemos,

$$\mathcal{L}(x)(s) = \frac{8}{3}\mathcal{L}(e^{2t})(s) + \frac{1}{3}\mathcal{L}(e^{5t})(s) = \mathcal{L}\left(\frac{8}{3}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{5t}\right)(s),$$

de donde parece lógico concluir que

$$x(t) = \frac{8e^{2t} + e^{5t}}{3}.$$

Es sencillo comprobar ahora que (efectivamente) ésta es la solución del problema (3.27).

La transformada de Laplace está especialmente indicada para resolver problemas donde aparezcan funciones definidas a trozos, como en el siguiente ejemplo:

$$\begin{cases} x'(t) - 2x(t) = f(t) \\ x(0) = 3 \end{cases} \quad (3.28)$$

con

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, 1] \\ 2 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

Razonando como antes, es sencillo deducir que

$$\mathcal{L}(x)(s) = \frac{\mathcal{L}(f)(s) + 3}{s - 2}.$$

Llegados a este punto es posible actuar de dos maneras:

- 1) Calculamos la transformada de Laplace de f e invertimos la expresión global que resulte:

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_1^{+\infty} 2e^{-st} dt = 2 \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_{t=1}^{t=+\infty} = \frac{2e^{-s}}{s}, \quad \text{si } s > 0.$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{L}(x)(s) = \frac{2e^{-s}}{s(s - 2)} + \frac{3}{s - 2} = e^{-s} \left(\frac{1}{s - 2} - \frac{1}{s} \right) + \frac{3}{s - 2} = e^{-s}\mathcal{L}(e^{2t} - 1)(s) + \mathcal{L}(3e^{2t})(s).$$

Nos conviene mencionar aquí la siguiente propiedad: si $\tilde{f}(t)$ es continua a trozos en cualquier intervalo $[0, T]$ y de orden exponencial γ , $a > 0$ e introducimos la función definida por $g(t) = 0$ para $t \leq a$ y $g(t) = \tilde{f}(t - a)$ para $t > a$, entonces $\mathcal{L}[g](s) = e^{-as} \mathcal{L}[\tilde{f}](s)$, si $s > \gamma$.

Utilizando dicha propiedad con $a = 1$ y $\tilde{f}(t) = e^{2t} - 1$, resulta $\mathcal{L}(x)(s) = \mathcal{L}(g(t) + 3e^{2t})(s)$, donde

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, 1] \\ e^{2(t-1)} - 1 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

por lo que llegamos finalmente a que

$$x(t) = g(t) + 3e^{2t}.$$

2) Utilizamos el producto de convolución y el Teorema 3.3:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x)(s) &= \frac{\mathcal{L}(f)(s) + 3}{s - 2} = \mathcal{L}(f)(s) \cdot \frac{1}{s - 2} + \frac{3}{s - 2} = \mathcal{L}(f)(s) \cdot \mathcal{L}(e^{2t})(s) + \mathcal{L}(3e^{2t})(s) = \\ &= \mathcal{L}(f(t) * e^{2t})(s) + \mathcal{L}(3e^{2t})(s) = \mathcal{L}(f(t) * e^{2t} + 3e^{2t})(s), \end{aligned}$$

de donde

$$x(t) = f(t) * e^{2t} + 3e^{2t}.$$

Basta utilizar la definición del producto de convolución para comprobar que (como cabía esperar)

$$f(t) * e^{2t} = e^{2t} * f(t) = \int_0^t f(y) e^{2(t-y)} dy = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, 1] \\ \int_1^t 2e^{2(t-y)} dy = e^{2(t-1)} - 1 & \text{si } t > 1 \end{cases} = g(t).$$

Por supuesto, también es posible resolver el problema (3.28) mediante un enfoque clásico, a trozos. En concreto, en el intervalo $[0, 1]$, el problema queda

$$\begin{cases} x'(t) - 2x(t) = 0 \\ x(0) = 3 \end{cases} \quad (3.29)$$

por lo que es fácil deducir que $x(t) = 3e^{2t}$, para cada $t \in [0, 1]$.

Por otro lado, si $t > 1$, sólo contamos con la EDO

$$x'(t) - 2x(t) = 2 \quad (3.30)$$

y no tenemos condición inicial, por lo que $x(t) = Ce^{2t} - 1$, con $C \in \mathbb{R}$ arbitraria, para cada $t > 1$. La constante C se determina de manera única si estamos interesados en la solución continua: en particular, para que las expresiones anteriores “peguen continuidad en $t = 1$, debe verificarse que $3e^2 = Ce^2 - 1$, de donde $C = 3 + e^{-2}$, por lo que nuevamente llegamos a que

$$x(t) = \begin{cases} 3e^{2t} & \text{si } t \in [0, 1] \\ (3 + e^{-2})e^{2t} - 1 & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

Para la resolución de EDO lineales de segundo orden y coeficientes constantes, la transformada de Laplace es una herramienta igualmente interesante. En general, dado el problema de Cauchy

$$\begin{cases} a_0 x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = f(t) \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = x_1 \end{cases} \quad (3.31)$$

donde $a_0, a_1, a_2, x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ son conocidos, al igual que la función f , aplicando transformada de Laplace y utilizando las propiedades i)-iii), se sigue

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f)(s) &= \mathcal{L}(a_0x'' + a_1x' + a_2x)(s) = a_0\mathcal{L}(x'')(s) + a_1\mathcal{L}(x')(s) + a_2\mathcal{L}(x)(s) = \\ &= a_0(s^2\mathcal{L}(x)(s) - sx(0) - x'(0)) + a_1(s\mathcal{L}(x)(s) - x(0)) + a_2\mathcal{L}(x)(s) = \\ &= (a_0s^2 + a_1s + a_2)\mathcal{L}(x)(s) - a_0x_0s - a_0x_1 - a_1x_0,\end{aligned}$$

de donde

$$\mathcal{L}(x)(s) = \frac{\mathcal{L}(f)(s)}{a_0s^2 + a_1s + a_2} + \frac{a_0x_0s + a_0x_1 + a_1x_0}{a_0s^2 + a_1s + a_2}$$

Denotemos por h_1 y h_2 las dos funciones que verifican

$$\mathcal{L}(h_1)(s) = \frac{1}{a_0s^2 + a_1s + a_2}, \quad \mathcal{L}(h_2)(s) = \frac{s}{a_0s^2 + a_1s + a_2}.$$

En virtud de la linealidad de la transformada de Laplace y utilizando de nuevo el producto de convolución y el Teorema 3.3, resulta

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x)(s) &= \mathcal{L}(f)(s) \cdot \mathcal{L}(h_1)(s) + a_0x_0\mathcal{L}(h_2)(s) + (a_0x_1 + a_1x_0)\mathcal{L}(h_1)(s) = \\ &= \mathcal{L}(f * h_1)(s) + \mathcal{L}(a_0x_0h_2 + (a_0x_1 + a_1x_0)h_1)(s),\end{aligned}$$

por lo que llegamos a que la solución del problema (3.31) viene dada por

$$x(t) = (f * h_1)(t) + a_0x_0h_2(t) + (a_0x_1 + a_1x_0)h_1(t).$$

Por ejemplo, la solución del problema

$$\begin{cases} x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = f(t) \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = -1 \end{cases} \quad (3.32)$$

vendrá dada por la expresión

$$x(t) = (f * h_1)(t) - h_1(t),$$

donde $h_1(t) = e^{-t} - e^{-2t}$, debido a que

$$\frac{1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1}{s + 1} - \frac{1}{s + 2} = \mathcal{L}(h_1)(s).$$

1) Si $f(t) = 1$ en (3.32), la solución queda

$$x(t) = \int_0^t (e^{-y} - e^{-2y}) dy - e^{-t} + e^{-2t} = \frac{1}{2} + \frac{3e^{-2t}}{2} - 2e^{-t}$$

2) En cambio, si

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, 5] \\ 2 & \text{si } t > 5 \end{cases}$$

se tiene que

$$\begin{aligned}x(t) &= \int_0^t f(y)h_1(t-y)dy - e^{-t} + e^{-2t} = \begin{cases} e^{-2t} - e^{-t} & \text{si } t \in [0, 5] \\ 2 \int_5^t (e^{y-t} - e^{2(y-t)}) dy - e^{-t} + e^{-2t} & \text{si } t > 5 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} e^{-2t} - e^{-t} & \text{si } t \in [0, 5] \\ 1 - (1 + 2e^5)e^{-t} + (e^{10} + 1)e^{-2t} & \text{si } t > 5. \end{cases}\end{aligned}$$

EJERCICIO 3.3 Volver a calcular las transformadas de Laplace de $\sin(t)$ y $\cos(t)$, utilizando que son soluciones de EDO de segundo orden.

3.5. Aplicación de la transformada de Laplace a las EDP

Consideremos el problema de las vibraciones de una cuerda “infinita” colocada en el eje $x > 0$, supuesta conocida la posición del extremo $x = 0$ en cada momento, junto a las condiciones iniciales en cada punto

$$\left\{ \begin{array}{lll} u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t), & x > 0, t > 0 & \text{Ec. de Ondas} \\ u(0, t) = f(t), & t > 0 & \text{Condición frontera} \\ u(x, 0) = 0, & x > 0 & \text{Posición inicial (en reposo)} \\ u_t(x, 0) = 0, & x > 0 & \text{Velocidad inicial (nula)} \end{array} \right. \quad (3.33)$$

Desde un punto de vista físico, nos interesan las soluciones $u(x, t)$ que estén acotadas cuando $x \rightarrow +\infty$. En lo que sigue, volvemos a suponer que todas las funciones que aparecen, verifican las hipótesis necesarias para que tengan sentido los cálculos que vamos a llevar a cabo.

Aplicando al problema la transformada de Laplace respecto de la variable t , llamando

$$U(x, s) = \mathcal{L}(u(x, t))(s) = \int_0^{+\infty} u(x, t)e^{-st} dt$$

y utilizando la propiedad iii) sobre la transformada de la derivada segunda respecto de t , se obtiene

$$\left\{ \begin{array}{ll} s^2 U(x, s) - su(x, 0) - u_t(x, 0) = U_{xx}(x, s), & x > 0, s > \gamma \\ U(0, s) = \mathcal{L}(f)(s), & s > \gamma. \end{array} \right. \quad (3.34)$$

Teniendo en cuenta las condiciones iniciales del problema (3.33) nos queda

$$\left\{ \begin{array}{ll} s^2 U(x, s) = U_{xx}(x, s), & x > 0, s > \gamma \\ U(0, s) = \mathcal{L}(f)(s), & s > \gamma. \end{array} \right. \quad (3.35)$$

Fijado $s > 0$, la EDP anterior podemos resolverla como una EDO lineal de segundo orden respecto de x , por lo que integrando resulta

$$U(x, s) = c_1(s)e^{sx} + c_2(s)e^{-sx},$$

donde c_1 y c_2 son funciones arbitrarias. Si $u(x, t)$ está acotada cuando $x \rightarrow +\infty$, también debe estar $U(x, s)$ acotada cuando $x \rightarrow +\infty$, por lo que obligatoriamente $c_1(s) \equiv 0$. Por ello,

$$U(x, s) = c_2(s)e^{-sx},$$

y utilizando la condición frontera, concluimos que $c_2(s) = U(0, s) = \mathcal{L}(f)(s)$, de donde resulta

$$U(x, s) = \mathcal{L}(f)(s) \cdot e^{-sx}.$$

Queremos ahora aplicar transformada inversa y obtener la solución del problema inicial (3.33). Para ello, volvemos a usar la propiedad indicada en el apartado anterior, pero ahora con $a = x$ y $\tilde{f}(t) = f(t)$, resultando

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq x \\ f(t-x) & \text{si } t > x. \end{cases}$$

Esta solución se puede interpretar del siguiente modo: la posición del extremo $x = 0$ en cada instante de tiempo t se transmite al punto $x_0 > 0$ de la cuerda en el instante $t + x_0$, lo cual significa en particular que la onda se mueve hacia la derecha con velocidad 1.

3.6. Transformadas integrales con Wolfram Alpha

La sintaxis para la transformada de Fourier es **fourier** y para la transformada de Laplace es **laplace**. Para las transformadas inversas, la sintaxis también es natural: **invfourier** e **invlaplace**, respectivamente.

Una primera observación importante (ver el comentario 3.1) es que la definición de transformada de Fourier que está implementada (por defecto) en Wolfram Alpha es

$$\mathcal{F}(f)(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iwx} dx.$$

Consecuentemente,

$$\mathcal{F}^{-1}(g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(w)e^{-iwx} dw.$$

Por ello, para obtener en Wolfram Alpha la transformada de Fourier que nosotros estamos manejando **tenemos que elegir el resultado con normalización 1 y factor de oscilación -1**, en el menú desplegable. Bajo esta premisa, resulta que

$$\text{fourier}(\exp(-x^2), x, w) = \sqrt{\pi}e^{-w^2/4}.$$

$$\text{fourier}(1/(1+x^2), x, w) = \pi e^{-|w|}.$$

Para la transformada inversa, se tiene

$$\text{invfourier}(1/(1+i*w), w, x) = \sqrt{2\pi}e^x\theta(-x),$$

donde $\theta(z)$ es la función de Heaviside que vale cero para $z < 0$ y 1 para $z > 0$. Notemos que esta transformada inversa es la que corresponde a la implementación por defecto y que para obtener la correspondiente a nuestro caso hay que dividir la expresión anterior por $\sqrt{2\pi}$ y cambiar x por $-x$. Otro ejemplo es

$$\text{invfourier}(\exp(-w^2/4), w, x) = \sqrt{2}e^{-x^2}.$$

En el caso de la transformada de Laplace, ya sabemos que hay unanimidad en las definiciones, por lo que no hay que tener ninguna precaución a la hora de comparar los resultados:

$$\text{laplace}(t^2 + \sin(t), t, s) = \frac{2}{s^3} + \frac{1}{s^2 + 1}.$$

$$\text{laplace}(\text{besselj}(0, t), t, s) = \frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}}.$$

Observación: Las funciones de Bessel se estudiarán en el siguiente capítulo.

$$\text{invlaplace}((s+2)/(s^2-4s+9), s, t) = e^{2t} \left(\frac{4\sin(\sqrt{5}t) + \sqrt{5}\cos(\sqrt{5}t)}{\sqrt{5}} \right)$$

También se pueden calcular transformadas de funciones definidas a trozos

$$\text{laplace}(\text{piecewise}((1, t > 0 \text{ and } t < 1), (0, t > 1)), t, s) = \frac{\sinh(s) - \cosh(s) + 1}{s}.$$

Bibliografía sobre Transformadas integrales:

1. "Mathematical methods for physicists", G. B. Arfken y H. J. Weber, Harcourt-Academic Press, 2001.
2. "Basic partial differential equations", D. Bleecker y G. Csordas, Van Nostrand, 1992.
3. "Fourier analysis and its applications", G. B. Folland, Wadsworth and Brooks, 1992.
4. "Fórmulas y tablas de la matemática aplicada", M. R. Spiegel, J. Liu y L. Abellanas, Mc Graw Hill, 2000.
5. "Partial differential equations for scientists and engineers", Tyn Myint-U y L. Debnath, North Holland, 1987.
6. "Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado", D. G. Zill, International Thomson Editores, 1997.
7. "Métodos matemáticos avanzados para ciencias e ingenierías", M. Gadella y L.M. Nieto, Univ. de Valladolid, 2000.

Recursos en Internet sobre Transformadas Integrales:

1. En Youtube, "But, what is the Fourier Transform? A visual introduction"
<https://www.youtube.com/watch?v=spUNpyF58BY&t=28s>
2. https://en.wikipedia.org/wiki/Fourier_transform
https://en.wikipedia.org/wiki/Laplace_transform
3. <http://www.thefouriertransform.com/>
4. En Academia Khan,
<https://es.khanacademy.org/math/differential-equations/laplace-transform#laplace-transform-tutorial>
5. <http://mathworld.wolfram.com/FourierTransform.html>
<http://mathworld.wolfram.com/LaplaceTransform.html>

Capítulo 4

Funciones especiales de la Física Matemática

Cualquiera de las funciones especiales de la Física Matemática que vamos a estudiar en este tema merece un capítulo específico, por su indudable interés, la variedad de sus aplicaciones y la larga lista de propiedades que verifica: para confirmar este punto, basta echar un vistazo a la “Biblia.^{en} este campo, el libro de Abramowitz y Stegun. Aquí, vamos a presentar las funciones especiales más conocidas y sus principales propiedades en relación con las aplicaciones de tipo físico.

4.1. Función Gamma

La función Gamma aparece de manera natural en el cálculo de ciertas integrales múltiples (ver el comentario 4.1) y en estadística, como generalización de la función factorial de un número natural y en la definición de otras funciones especiales de la Física Matemática. Por ejemplo, al calcular la transformada de Laplace de la función $f(t) = \sqrt{t}$:

$$\mathcal{L}(\sqrt{t})(s) = \int_0^{\infty} \sqrt{t} e^{-st} dt.$$

Haciendo el cambio de variable $r = st$ para $s > 0$, resulta que

$$\mathcal{L}(\sqrt{t})(s) = \frac{1}{s^{3/2}} \int_0^{\infty} \sqrt{r} e^{-r} dr.$$

Cuando n es un número natural, es conocido que $\mathcal{L}(t^n)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$, ver (3.26). Si queremos que la expresión para \sqrt{t} sea una generalización de ésta debería cumplirse

$$\int_0^{\infty} \sqrt{r} e^{-r} dr = (1/2)!.$$

Vamos a ver que, efectivamente, esta definición es completamente natural.

DEFINICIÓN 4.1 *Dado $z > 0$, se define la función Gamma de z como la integral*

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Propiedades.

i) $\Gamma(z)$ está bien definida:

$$\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \leq \int_0^1 t^{z-1} dt + C_1 \int_1^\infty e^{-t/2} dt = \frac{1}{z} + 2C_1 e^{-\frac{1}{2}} < +\infty.$$

Hemos utilizado en la deducción anterior que existe una constante $C_1 > 0$ tal que

$$e^{-t} t^{z-1} \leq C_1 e^{-t/2} \quad \forall t \geq 1.$$

ii) Notemos que para $z = 0$ la integral es divergente:

$$\Gamma(0^+) = \int_0^\infty e^{-t} t^{-1} dt \geq \int_0^1 e^{-t} t^{-1} dt \geq e^{-1} \int_0^1 t^{-1} dt = e^{-1} (\log t)|_{t=0}^{t=1} = +\infty.$$

iii) $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_{t=0}^{t=+\infty} = 1.$

iv) Integrando por partes, se obtiene que

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^z dt = [-e^{-t} t^z]_{t=0}^{t=+\infty} + \int_0^{+\infty} z e^{-t} t^{z-1} dt = z \cdot \Gamma(z),$$

para cada $z > 0$.

v) Utilizando repetidamente las propiedades anteriores, con $z = n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n) = n \cdot (n-1) \cdot \Gamma(n-1) = \dots = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1 \cdot \Gamma(1) = n!.$$

vi) Razonando como antes, haciendo el cambio de variable $r = st$ para $s > 0$, resulta que

$$\mathcal{L}(t^{z-1})(s) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-st} dt = \frac{1}{s^z} \int_0^\infty r^{z-1} e^{-r} dr = \frac{\Gamma(z)}{s^z},$$

fórmula que extiende la mencionada expresión (3.26) y que es válida aunque z no sea un número natural.

vii) Si $z > 0$, $\Gamma(z) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-s^2} s^{2z-1} ds.$

Para comprobarlo, basta hacer el cambio de variable $t = s^2$ en la integral que define Γ .

viii) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$

Utilizando la propiedad vii), $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds.$ El valor de esta integral impropia no se puede calcular directamente, pero sí utilizando el siguiente "truco":

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^2 &= \left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \right) \left(\int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds \right) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(t^2+s^2)} dt ds = \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{\pi/2} e^{-r^2} r d\theta dr = -\frac{\pi}{2} \frac{e^{-r^2}}{2} \Big|_{r=0}^{r=+\infty} = \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado el cambio a coordenadas polares $t = r \cos(\theta)$, $s = r \sin(\theta)$.

ix) Como consecuencia de las propiedades iv) y viii), se tiene

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \\ \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{5}{2} + 1\right) = \frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{15\sqrt{\pi}}{8}\end{aligned}$$

Hemos visto que la definición de $\Gamma(z)$, en principio, tiene sentido para $z > 0$. La propiedad iv), permite extender su definición a los números $z \in (-1, 0)$:

DEFINICIÓN 4.2 Dado $z \in (-1, 0)$, definimos

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}.$$

Notemos que si $z \in (-1, 0)$, entonces $z+1 \in (0, 1)$ por lo que $\Gamma(z+1)$ está bien definido en la expresión anterior. Así, por ejemplo, tendremos que $\Gamma(-1/2) = \frac{\Gamma(1/2)}{-1/2} = -2\sqrt{\pi}$. También deducimos que $\Gamma(0^-) = \Gamma(-1^+) = -\infty$. Por inducción, podemos extender la definición de Γ a todo \mathbb{R} , excepto los números enteros negativos:

DEFINICIÓN 4.3 Dado $z \in (-n-1, -n)$, $n = 1, 2, \dots$ definimos

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}.$$

En cada intervalo $(-n-1, -n)$, la definición utiliza que Γ ya tiene sentido en $(-n, -n+1)$.

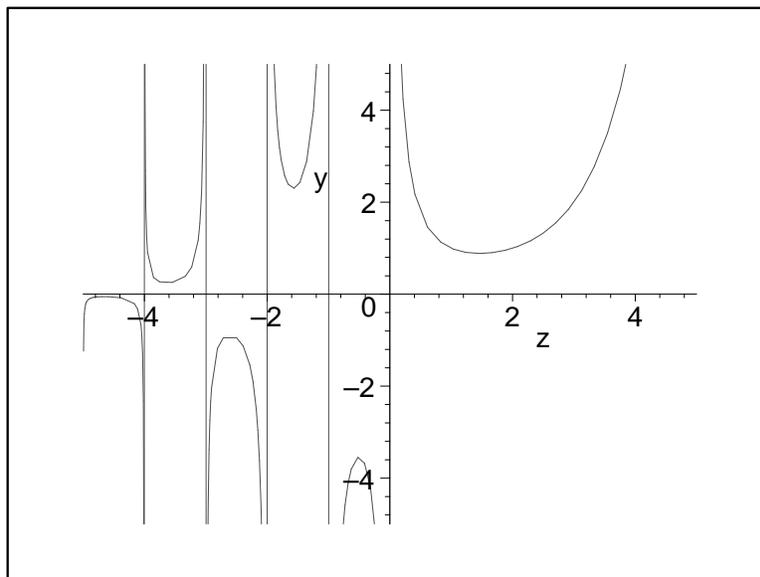


Figura 4.1: Gráfica de la función Gamma.

Inspirándonos en la propiedad v) vemos en qué sentido podemos definir el factorial de casi todos los números reales:

DEFINICIÓN 4.4 Dado $z \in \mathbb{R}$, $z \neq -1, -2, -3, \dots$, definimos el factorial de z como

$$z! = \Gamma(z + 1).$$

Con la notación anterior, las relaciones viii) y ix) se expresan en la forma

$$\left(-\frac{1}{2}\right)! = \sqrt{\pi}, \quad \left(\frac{1}{2}\right)! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \left(\frac{3}{2}\right)! = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}, \quad \left(\frac{5}{2}\right)! = \frac{15\sqrt{\pi}}{8}.$$

4.2. Función Beta

DEFINICIÓN 4.5 Dados $z > 0$ y $w > 0$, se define la función Beta de (z, w) como

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1} dt.$$

Cuando z y w son números naturales, el cálculo explícito de $B(z, w)$ se reduce a la integración de un polinomio. Por ejemplo,

$$B(1, 1) = 1, \quad B(2, 1) = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}, \quad B(3, 1) = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}, \quad B(2, 2) = \int_0^1 t(1-t) dt = \frac{1}{6}, \dots$$

Propiedades:

Aunque no lo parezca a primera vista, existe una estrecha relación entre esta función Beta que acabamos de introducir y la función Γ .

i) $B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$ para cada $z > 0$ y $w > 0$:

$$\begin{aligned} \Gamma(z)\Gamma(w) &= \left(\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt\right) \left(\int_0^{+\infty} e^{-s} s^{w-1} ds\right) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(s+t)} t^{z-1} s^{w-1} ds dt = \\ &\stackrel{r=s+t}{=} \int_0^{+\infty} \int_t^{+\infty} e^{-r} t^{z-1} (r-t)^{w-1} dr dt = \int_0^{+\infty} \int_0^r e^{-r} t^{z-1} (r-t)^{w-1} dt dr = \\ &\stackrel{u=t/r}{=} \int_0^{+\infty} \int_0^1 e^{-r} (ur)^{z-1} (r-ru)^{w-1} r du dr = \int_0^{+\infty} \int_0^1 e^{-r} r^{z+w-1} u^{z-1} (1-u)^{w-1} dr du = \\ &= \left(\int_0^{+\infty} e^{-r} r^{z+w-1} dr\right) \left(\int_0^1 u^{z-1} (1-u)^{w-1} du\right) = \Gamma(z+w)B(z, w). \end{aligned}$$

Como consecuencia de esta propiedad y de la extensión de $\Gamma(z)$ a valores $z \neq 0, -1, -2, -3, \dots$ la relación anterior permite extender también la definición de $B(z, w)$ a dichos valores. Por otra parte, utilizando las propiedades vistas para Γ , se sigue fácilmente que

ii) $B(z, w) = B(w, z)$.

iii) $B(z+1, w) = \frac{z}{z+w} B(z, w)$.

iv) $B(z, w+1) = \frac{w}{z+w} B(z, w)$.

COMENTARIO 4.1 La función $\Gamma(z)$ y su relacionada $B(z, w)$ surgen de manera natural en el cálculo de algunos tipos de integrales múltiples (áreas, volúmenes, momentos de inercia,...) extendidas al interior de ciertos recintos (triángulos, tetraedros, circunferencias, esferas, elipses, elipsoides, ...) Por ejemplo, si T es el tetraedro situado en el octante positivo cuyos puntos verifican $x + y + z \leq 1$, se tiene que

$$\int \int \int_T x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1} dx dy dz = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+r+1)},$$

y si R es la parte del recinto

$$\left(\frac{x}{a}\right)^\alpha + \left(\frac{y}{b}\right)^\beta + \left(\frac{z}{c}\right)^\gamma \leq 1,$$

situada en el octante positivo, se obtiene mediante el correspondiente cambio de variable, la que se conoce como Fórmula de Dirichlet

$$\int \int \int_R x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1} dx dy dz = \frac{a^p b^q c^r}{\alpha \beta \gamma} \frac{\Gamma(\frac{p}{\alpha})\Gamma(\frac{q}{\beta})\Gamma(\frac{r}{\gamma})}{\Gamma(\frac{p}{\alpha} + \frac{q}{\beta} + \frac{r}{\gamma} + 1)}.$$

Más detalles en las páginas 225-6 del libro “Cálculo Integral”, P. Puig Adam, Biblioteca matemática, 1979.

4.3. Funciones de Bessel y asociadas

Surgen al resolver la EDO

$$t^2 x''(t) + tx'(t) + (t^2 - \alpha^2)x(t) = 0, \tag{4.1}$$

llamada **Ec. de Bessel de orden α** , donde α es un parámetro real mayor o igual que cero.

El método que se utiliza para resolver este tipo de EDO se llama método de Frobenius y es una mezcla entre el método de serie de potencias y el método para resolver la ec. de Euler, dado que la ec. de Bessel puede considerarse un híbrido entre ambas EDO. Consiste en ensayar soluciones del tipo

$$x(t) = t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+\lambda}, \quad t > 0,$$

donde hay que determinar $\lambda \in \mathbb{R}$ y los coeficientes a_n . En general, λ no va a ser un número natural, por lo que, en principio, t^λ sólo tiene sentido en \mathbb{R} para $t > 0$, tal como estamos suponiendo. Pensemos por ejemplo en el caso $\lambda = -1/2$. Claramente, la serie de potencias nos recuerda la resolución de ec. con coeficientes analíticos, mientras que t^λ tiene que ver con la resolución de la ec. de Euler.

Teniendo en cuenta que (formalmente) la derivada de t^ρ viene dada por $\rho t^{\rho-1}$, independientemente de que ρ sea un número natural o no, resulta inmediato comprobar que

$$x'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n + \lambda) a_n t^{n+\lambda-1}, \quad x''(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n + \lambda)(n + \lambda - 1) a_n t^{n+\lambda-2}.$$

Sustituyendo estas expresiones en la ec. de Bessel y agrupando términos, se obtiene

$$\begin{aligned} 0 = t^2 x''(t) + tx'(t) + (t^2 - \alpha^2)x(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n + \lambda)(n + \lambda - 1) a_n t^{n+\lambda} + \sum_{n=0}^{\infty} (n + \lambda) a_n t^{n+\lambda} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+\lambda+2} + \\ &- \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^2 a_n t^{n+\lambda} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} [(n + \lambda)^2 - \alpha^2] a_n t^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} t^n \right) t^\lambda, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{n=0}^{\infty} [(n+\lambda)^2 - \alpha^2] a_n t^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} t^n = \\
&= a_0(\lambda^2 - \alpha^2) + a_1[(\lambda+1)^2 - \alpha^2]t + \sum_{n=2}^{\infty} ([(n+\lambda)^2 - \alpha^2]a_n + a_{n-2}) t^n.
\end{aligned}$$

Igualando cada coeficiente de t^n a cero, nos queda

$$a_0(\lambda^2 - \alpha^2) = 0, \quad \text{si } n = 0 \quad (4.2)$$

$$a_1[(\lambda+1)^2 - \alpha^2] = 0, \quad \text{si } n = 1 \quad (4.3)$$

$$[(n+\lambda)^2 - \alpha^2]a_n + a_{n-2} = 0, \quad \text{si } n = 2, 3, \dots \quad (4.4)$$

Si $a_0 \neq 0$, la relación (4.2) nos lleva a que $\lambda^2 = \alpha^2$, de modo que las raíces son $\lambda_1 = \alpha$ y $\lambda_2 = -\alpha$.

En el primer caso ($\lambda = \alpha$), la igualdad (4.3) se reduce a $a_1(1+2\alpha) = 0$ y como $\alpha \geq 0$, necesariamente $a_1 = 0$.

La fórmula de recurrencia (4.4) queda ahora

$$n(n+2\alpha)a_n + a_{n-2} = 0, \quad \text{si } n = 2, 3, \dots \quad (4.5)$$

Como $a_1 = 0$, esta fórmula nos lleva a que $a_3 = a_5 = a_7 = \dots = a_{2k+1} = 0$. Por ello, nos centramos en los coeficientes con subíndice par ($n = 2k$). Podemos ver que

$$a_2 = \frac{-a_0}{2^2(\alpha+1)}, \quad a_4 = \frac{a_0}{2^4 2!(\alpha+1)(\alpha+2)}, \quad a_6 = \frac{-a_0}{2^6 3!(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}, \dots$$

En general,

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k} k!(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\dots(\alpha+k)}.$$

Eligiendo $a_0 = \frac{1}{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)}$ y utilizando la propiedad *iv*) de la función Gamma, resulta que

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k+\alpha} k! \Gamma(k+\alpha+1)}.$$

Los cálculos anteriores se pueden repetir en el segundo caso ($\lambda = -\alpha$) y nos conducen a la siguiente

DEFINICIÓN 4.6 Dado $\alpha \geq 0$, se define la función de Bessel de primera clase y orden α como

$$J_\alpha(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+\alpha+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+\alpha}, \quad t > 0.$$

Igualmente, se define la función de Bessel de primera clase y orden $-\alpha$ como

$$J_{-\alpha}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k-\alpha+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k-\alpha}, \quad t > 0.$$

Utilizando el criterio del cociente, es fácil comprobar que las series que definen $J_\alpha(t)$ y $J_{-\alpha}(t)$ convergen si $t > 0$. Evidentemente, si $\alpha > 0$, $J_{-\alpha}(t)$ diverge en $t = 0$, por las potencias negativas que contiene.

Si $\alpha \neq 0, 1, 2, \dots$, se puede demostrar que las soluciones $J_\alpha(t)$ y $J_{-\alpha}(t)$ son linealmente independientes si $t > 0$, por lo que la solución general de la ec. de Bessel de orden α viene dada por

$$x(t) = C_1 J_\alpha(t) + C_2 J_{-\alpha}(t), \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Si $\alpha = 0$, es claro que $J_\alpha(t) = J_{-\alpha}(t)$. Además, si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, evidentemente se tiene que

$$J_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+n}, \quad t > 0 \quad (4.6)$$

De otro lado, teniendo en cuenta que $\Gamma(0)^{-1} = \Gamma(-1)^{-1} = \dots = \Gamma(1-n)^{-1} = 0$, se sigue que

$$\begin{aligned} J_{-n}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-n+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k-n} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k-n)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k-n} \stackrel{m=k-n}{=} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{m!(m+n)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m+n} = (-1)^n J_n(t). \end{aligned}$$

En particular,

$$J_{-1}(t) = -J_1(t), \quad J_{-3}(t) = -J_3(t), \quad J_{-5}(t) = -J_5(t), \quad J_{-7}(t) = -J_7(t), \dots$$

$$J_{-2}(t) = J_2(t), \quad J_{-4}(t) = J_4(t), \quad J_{-6}(t) = J_6(t), \quad J_{-8}(t) = J_8(t), \dots$$

Por tanto, si $\alpha = n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $J_n(t)$ y $J_{-n}(t)$ son linealmente dependientes, por lo que necesitamos calcular una segunda solución (linealmente independiente con $J_n(t)$) para completar la resolución de la ec. de Bessel de orden n . Por analogía con la resolución de la ec. de Euler, en el caso de raíz doble, se ensaya una solución del tipo

$$x(t) = b_{-1}(\log t)J_n(t) + t^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k, \quad t > 0, \quad (4.7)$$

donde hay que determinar los coeficientes b_k , imponiendo que $x(t)$ verifique la ec. de Bessel de orden n . No estamos interesados en detallar el cálculo de estos b_k (se puede encontrar en Coddington, págs. 175-178). Nos basta destacar la forma que tiene la función resultante y el hecho de que diverge en $t = 0$. Una manera alternativa de definir esta segunda solución es la siguiente:

DEFINICIÓN 4.7 Dado $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se define la función de Bessel de segunda clase y orden n como

$$Y_n(t) = \lim_{\alpha \rightarrow n} \frac{\cos(\alpha\pi)J_\alpha(t) - J_{-\alpha}(t)}{\sin(\alpha\pi)}, \quad t > 0.$$

Con el fin de relacionar ambas expresiones, merece la pena destacar que si se sustituye $\alpha = n$ en el cociente anterior, se llega a una indeterminación del tipo $0/0$, por lo que el límite se calcula utilizando la regla de L'Hôpital, obteniendo

$$Y_n(t) = \lim_{\alpha \rightarrow n} \frac{-\pi \sin(\alpha\pi)J_\alpha(t) + \cos(\alpha\pi) \frac{\partial J_\alpha(t)}{\partial \alpha} - \frac{\partial J_{-\alpha}(t)}{\partial \alpha}}{\pi \cos(\alpha\pi)} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\partial J_\alpha(t)}{\partial \alpha} + (-1)^{n+1} \frac{\partial J_{-\alpha}(t)}{\partial \alpha} \right) \Big|_{\alpha=n}$$

Para el cálculo de las derivadas respecto de α que aparecen, conviene fijarse en que α aparece en la definición de la función de Bessel en dos posiciones: como exponente de t y en $\Gamma(k+\alpha+1)$. Por ello, teniendo en cuenta que $\frac{\partial}{\partial \alpha}(t^\alpha) = t^\alpha \log t$, $t > 0$, al menos resulta clara la aparición del término logarítmico, tal como vimos en (4.7). No entramos en los detalles del resto de los cálculos.

Si $\alpha = n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se puede demostrar que las soluciones $J_n(t)$ e $Y_n(t)$ son linealmente independientes si $t > 0$, por lo que la solución general de la ec. de Bessel de orden n viene dada por

$$x(t) = C_1 J_n(t) + C_2 Y_n(t), \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Las funciones de Bessel verifican una larga lista de propiedades (ver Abramowitz, págs. 355-494) de las cuales sólo vamos a ver las más importantes. Aunque nos interesan principalmente las funciones de Bessel de primera clase y orden natural ó cero, la mayoría de estas propiedades son válidas también para las funciones de segunda clase y/ó con orden no natural.

Para comenzar, detallamos la expresión de $J_0(t)$ y $J_1(t)$ como funciones más habituales. Tomando $n = 0$ y $n = 1$ en (4.6) resulta

$$J_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k} = 1 - \frac{t^2}{2^2} + \frac{t^4}{2^2 4^2} - \frac{t^6}{2^2 4^2 6^2} + \dots \quad (4.8)$$

$$J_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+1)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+1} = \frac{t}{2} - \frac{t^3}{2^2 4} + \frac{t^5}{2^2 4^2 6} - \frac{t^7}{2^2 4^2 6^2 8} + \dots \quad (4.9)$$

Las figuras 4.2 y 4.3 contienen las gráficas de estas funciones, junto a $Y_0(t)$ e $Y_1(t)$. Ahí se aprecia con claridad la divergencia de $Y_0(t)$ e $Y_1(t)$ cuando $t \rightarrow 0^+$, mientras que $J_0(0) = 1$ y $J_1(0) = 0$. En general, notemos que $J_n(0) = 0$ para $n = 1, 2, \dots$

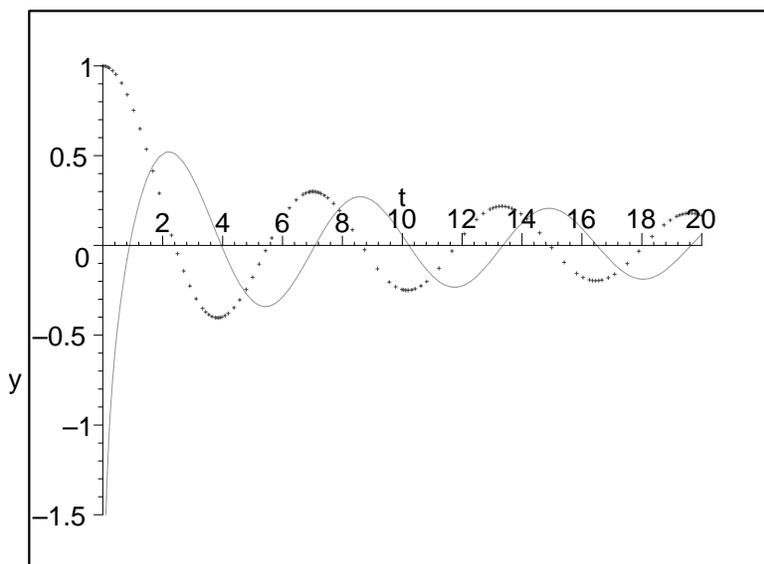


Figura 4.2: Gráficas de las funciones $J_0(t)$ (a puntos) e $Y_0(t)$ (continua).

Otro aspecto muy interesante que se aprecia en las gráficas es el carácter oscilatorio de las funciones de Bessel, así como que **los ceros** (esto es, **los puntos donde se anulan**) de las funciones de Bessel se van alternando. Ambas cuestiones recuerdan claramente las correspondientes propiedades para las funciones seno y coseno.

TEOREMA 4.1 Cada función de Bessel posee infinitos ceros en $(0, +\infty)$. Además,

- si $\alpha \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$, entre cada dos ceros consecutivos de $J_\alpha(t)$ en $(0, +\infty)$ existe exactamente un cero de $J_{-\alpha}(t)$ y, viceversa, entre cada dos ceros consecutivos de $J_{-\alpha}(t)$ en $(0, +\infty)$ existe exactamente un cero de $J_\alpha(t)$.
- si $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, entre cada dos ceros consecutivos de $J_n(t)$ en $(0, +\infty)$ existe exactamente un cero de $Y_n(t)$ y, viceversa, entre cada dos ceros consecutivos de $Y_n(t)$ en $(0, +\infty)$ existe exactamente un cero de $J_n(t)$.

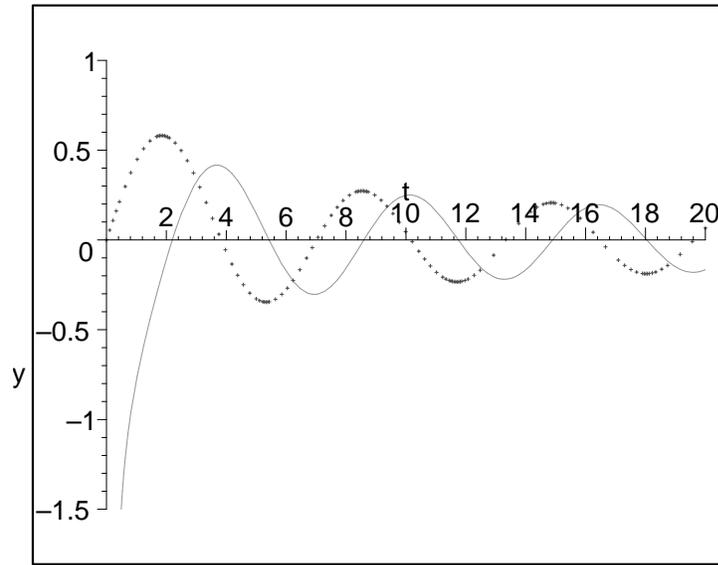


Figura 4.3: Gráfica de las funciones $J_1(t)$ (a puntos) e $Y_1(t)$ (continua).

Vamos a transformar ahora la Ec. de Bessel de dos maneras distintas que nos van a ser muy útiles para probar diversas propiedades de las funciones de Bessel:

- El cambio de función incógnita $y(t) = \sqrt{t}x(t)$ transforma la ec. de Bessel (4.1) en la EDO

$$y''(t) + \left(1 + \frac{\frac{1}{4} - \alpha^2}{t^2}\right) y(t) = 0. \quad (4.10)$$

Para verlo, basta operar:

$$y'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}x(t) + \sqrt{t}x'(t), \quad y''(t) = \frac{-1}{4t^{3/2}}x(t) + \frac{1}{\sqrt{t}}x'(t) + \sqrt{t}x''(t)$$

y notar que

$$t^{3/2}y''(t) = \frac{-x(t)}{4} + tx'(t) + t^2x''(t) = \left(\alpha^2 - t^2 - \frac{1}{4}\right)x(t) = \frac{(\alpha^2 - t^2 - \frac{1}{4})}{\sqrt{t}}y(t).$$

- Dado $\mu > 0$ fijo, el cambio de función incógnita $y(t) = x(\mu t)$ transforma la ec. de Bessel (4.1) en la **Ec. paramétrica de Bessel**

$$t^2y''(t) + ty'(t) + (\mu^2t^2 - \alpha^2)y(t) = 0. \quad (4.11)$$

Operando, $y'(t) = \mu x'(\mu t)$, $y''(t) = \mu^2 x''(\mu t)$, por lo que se obtiene

$$t^2y''(t) + ty'(t) = t^2\mu^2x''(\mu t) + t\mu x'(\mu t) = (\alpha^2 - \mu^2t^2)x(\mu t) = (\alpha^2 - \mu^2t^2)y(t).$$

A continuación, enunciaremos una propiedad de ortogonalidad que también nos recordará la correspondiente propiedad de los senos y los cosenos en las series de Fourier:

TEOREMA 4.2 *Supongamos que μ y $\tilde{\mu}$ son dos ceros positivos (distintos) de una función de Bessel $x(t)$. Entonces, se cumple*

$$\int_0^1 x(\mu t)x(\tilde{\mu}t)tdt = 0. \quad (4.12)$$

Vamos a centrarnos ahora en la Ec. paramétrica de Bessel de orden $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (fijo), es decir,

$$(ty'(t))' + \left(\mu^2 t - \frac{n^2}{t}\right)y(t) = 0, \quad t \in [0, 1]. \quad (4.13)$$

Si se requieren las condiciones de que $y(t)$ e $y'(t)$ sean finitas cuando $t \rightarrow 0^+$ y que $y(1) = 0$, llamando $\lambda = \mu^2$, nos encontramos con un Problema de Sturm - Liouville, con $p(t) = t$, $q(t) = -\frac{n^2}{t}$, $s(t) = t$, ya que $p(t) > 0$ y $s(t) > 0$ si $t \in (0, 1]$, pero $p(0) = s(0) = 0$ y $q(t)$ diverge cuando $t \rightarrow 0^+$.

Por lo que sabemos, la solución general de (4.13) viene dada por

$$y(t) = C_1 J_n(\mu t) + C_2 Y_n(\mu t), \quad t \in [0, 1]$$

Si requerimos que $y(t)$ esté acotada cuando $t \rightarrow 0^+$, necesariamente tenemos que $C_2 = 0$ (recordar que $Y_n(t)$ diverge en $t = 0$, debido a la presencia del término logarítmico). Adicionalmente, obtenemos además que $y'(t)$ está acotada cuando $t \rightarrow 0^+$. La condición añadida $y(1) = 0$ nos lleva a que $C_1 J_n(\mu) = 0$, por lo que (si $C_1 \neq 0$) no queda más posibilidad que μ sea un cero positivo de $J_n(t)$. Por el teorema 4.1, se sabe que $J_n(t)$ posee infinitos ceros $\{\mu_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ en $(0, +\infty)$. En la terminología del capítulo 2, los valores propios del problema considerado vienen dados por $\{\mu_k^2\}_{k \in \mathbb{N}}$, mientras que las funciones propias asociadas son $y_k(t) = C J_n(\mu_k t)$, $k \in \mathbb{N}$.

La ortogonalidad de las funciones propias con respecto del peso $s(t) = t$ es consecuencia del teorema 4.2, aplicado con $x(t) = J_n(t)$, $\mu = \mu_k$ y $\tilde{\mu} = \mu_{\tilde{k}}$ con $k \neq \tilde{k}$.

Destaquemos el absoluto paralelismo entre esta situación y el caso más sencillo, donde los valores propios vienen dados por $\{k^2 \pi^2\}_{k \in \mathbb{N}}$ y las funciones propias asociadas son $x_k(t) = C \sin(k\pi t)$, $k \in \mathbb{N}$.

Finalmente, la propiedad de que dichas funciones propias forman bases en el espacio de las funciones sigue manteniéndose, exactamente en los mismos términos que en el caso de las series de Fourier (ver el Teorema 2.4). Tampoco aquí se incluye la demostración.

TEOREMA 4.3 (Series de Fourier-Bessel) *Sea $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ fijo y $\{\mu_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ los ceros de $J_n(t)$ en $(0, +\infty)$.*

i) Dada f una función C^1 a trozos en $[0, 1]$, se verifica que

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k J_n(\mu_k t) \quad \forall t \in (0, 1),$$

con

$$\gamma_k = \frac{\int_0^1 f(t) J_n(\mu_k t) t dt}{\int_0^1 J_n^2(\mu_k t) t dt} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

ii) Dada f satisfaciendo

$$\int_0^1 f^2(t) t dt < +\infty,$$

se verifica que

$$\int_0^1 (f(t) - S_N(t))^2 t dt \rightarrow 0 \quad \text{cuando } N \rightarrow +\infty,$$

donde $S_N(t) = \sum_{k=1}^N \gamma_k J_n(\mu_k t)$, con γ_k dados como antes.

En los puntos t donde x es continua, se verifica $\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = f(t)$. En particular, si $f(t)$ es continua en $[0, 1]$ con derivada continua a trozos, el teorema anterior nos garantiza que

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k J_n(\mu_k t) \quad \forall t \in (0, 1).$$

Si $n = 1, 2, \dots$, el valor de la serie de Fourier-Bessel es 0, tanto para $t = 0$ como para $t = 1$, dado que $J_n(0) = J_n(\mu_k) = 0$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Si $n = 0$, el valor de la serie sigue siendo 0 para $t = 1$, pero (a priori) desconocemos su límite para $t = 0$, dado que $J_0(0) = 1$.

Para aplicar este teorema en casos concretos necesitamos poder calcular integrales que involucran a funciones de Bessel de primera clase. Veamos algunos resultados útiles en esta dirección:

PROPOSICIÓN 4.1 Sean $\mu > 0$ y $b > 0$ cualesquiera. Dado $\alpha \geq 0$, se verifica

$$\int_0^b J_\alpha^2(\mu t) t dt = \frac{b^2}{2} (J'_\alpha(\mu b))^2 + \frac{\mu^2 b^2 - \alpha^2}{2\mu^2} J_\alpha^2(\mu b). \quad (4.14)$$

Dem. Hemos visto que $y(t) = J_\alpha(\mu t)$ es solución de la Ec. paramétrica de Bessel (4.11). Multiplicando dicha EDO por $2y'(t)$ y agrupando términos, se tiene que

$$((ty'(t))^2)' + (\mu^2 t^2 - \alpha^2)(y^2(t))' = 0.$$

Integrando esta expresión respecto de t entre $t = 0$ y $t = b$, se llega a

$$(by'(b))^2 + \int_0^b (\mu^2 t^2 - \alpha^2)(y^2(t))' dt = 0.$$

Deshaciendo el cambio, resulta que

$$\mu^2 b^2 (J'_\alpha(\mu b))^2 + \int_0^b (\mu^2 t^2 - \alpha^2)(J_\alpha^2(\mu t))' dt = 0.$$

Integrando ahora por partes, concluimos que

$$\begin{aligned} 0 &= \mu^2 b^2 (J'_\alpha(\mu b))^2 + (\mu^2 t^2 - \alpha^2) J_\alpha^2(\mu t) \Big|_{t=0}^{t=b} - 2\mu^2 \int_0^b J_\alpha^2(\mu t) t dt = \\ &= \mu^2 b^2 (J'_\alpha(\mu b))^2 + (\mu^2 b^2 - \alpha^2) J_\alpha^2(\mu b) + \alpha^2 J_\alpha^2(0) - 2\mu^2 \int_0^b J_\alpha^2(\mu t) t dt. \end{aligned}$$

Notemos que $\alpha^2 J_\alpha^2(0) = 0$, bien porque $\alpha = 0$ ó bien porque $J_\alpha(0) = 0$, cuando $\alpha > 0$. Basta entonces despejar la integral para llegar a (4.14). ■

PROPOSICIÓN 4.2 (Fórmulas de recurrencia) Dado $\alpha \geq 0$, se verifica para $t > 0$ que

$$tJ'_\alpha(t) = \alpha J_\alpha(t) - tJ_{\alpha+1}(t), \quad (4.15)$$

$$(t^{-\alpha} J_\alpha(t))' = -t^{-\alpha} J_{\alpha+1}(t), \quad (4.16)$$

$$(t^\alpha J_\alpha(t))' = t^\alpha J_{\alpha-1}(t), \quad (4.17)$$

Dem. Partiendo de la definición de $J_\alpha(t)$, podemos escribir

$$\begin{aligned} tJ'_\alpha(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k+\alpha)}{k!\Gamma(k+\alpha+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+\alpha} = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\alpha+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+\alpha} + \\ &+ 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{k!\Gamma(k+\alpha+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+\alpha} = \alpha J_\alpha(t) + t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)!\Gamma(k+\alpha+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+\alpha-1} = \\ &\stackrel{m=k-1}{=} \alpha J_\alpha(t) - t \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+\alpha+2)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m+\alpha+1} = \alpha J_\alpha(t) - t J_{\alpha+1}(t). \end{aligned}$$

Dividiendo la relación (4.15) por t , se obtiene

$$J'_\alpha(t) - \frac{\alpha}{t} J_\alpha(t) = -J_{\alpha+1}(t).$$

Multiplicando a ambos lados por el factor integrante $t^{-\alpha}$, se llega a (4.16).

Finalmente podemos demostrar (4.17) partiendo de nuevo de la definición de $J_\alpha(t)$:

$$\begin{aligned} (t^\alpha J_\alpha(t))' &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k+2\alpha)t^{2k+2\alpha-1}}{k!\Gamma(k+\alpha+1)2^{2k+\alpha}} = t^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k+2\alpha)t^{2k+\alpha-1}}{k!\Gamma(k+\alpha+1)2^{2k+\alpha}} = \\ &= t^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\alpha)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+\alpha-1} = t^\alpha J_{\alpha-1}(t). \blacksquare \end{aligned}$$

COROLARIO 4.1 Sea μ un cero positivo de $J_\alpha(t)$ con $\alpha \geq 0$. Entonces,

$$\int_0^1 J_\alpha^2(\mu t) t dt = \frac{(J'_\alpha(\mu))^2}{2} = \frac{(J_{\alpha+1}(\mu))^2}{2}. \quad (4.18)$$

Dem. Basta aplicar primero la relación (4.14) con $b = 1$ y tener en cuenta que $J_\alpha(\mu) = 0$. En virtud de (4.15) con $t = \mu$ se llega a que $J'_\alpha(\mu) = -J_{\alpha+1}(\mu)$ y, por lo tanto, a la segunda identidad. ■

COROLARIO 4.2 Sea $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ fijo y $\{\mu_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ los ceros positivos de $J_n(t)$. Entonces, la expresión de los coeficientes γ_k del Teorema 4.3 queda

$$\gamma_k = \frac{2 \int_0^1 f(t) J_n(\mu_k t) t dt}{(J_{n+1}(\mu_k))^2} \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (4.19)$$

Dem. Basta sustituir el denominador de la expresión de γ_k en el Teorema 4.3 por su valor, aplicando el corolario 4.1 con $\alpha = n$ y $\mu = \mu_k$. ■

COROLARIO 4.3 Se verifican las siguientes relaciones, frecuentemente utilizadas:

- i) $J'_0(t) = -J_1(t)$.
- ii) $(tJ_1(t))' = tJ_0(t)$.
- iii) $(t^2J_2(t))' = t^2J_1(t)$.
- iv) $(t^3J_3(t))' = t^3J_2(t)$.

Dem. El apartado i) se sigue de (4.15) con $\alpha = 0$ y el resto de (4.17) con $\alpha = 1, 2$ y 3 , resp. ■

EJEMPLO 4.1 Suponiendo que $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ son los ceros positivos de $J_0(t)$, desarrollar en el intervalo $[0, 1]$ la función

$$f(t) = \begin{cases} 2 & t \in [0, 1/2) \\ 1 & t \in [1/2, 1] \end{cases} \quad (4.20)$$

en serie Fourier-Bessel del tipo $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k J_0(\mu_k t)$. Para ello, ver el Teorema 4.3 y el corolario 4.2, basta calcular

$$\gamma_k = \frac{2}{(J_1(\mu_k))^2} \int_0^1 f(t) J_0(\mu_k t) t dt \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Haciendo el cambio de variable $s = \mu_k t$ y utilizando el corolario 4.3-ii), se sigue que

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \frac{2}{(J_1(\mu_k))^2} \left(2 \int_0^{1/2} J_0(\mu_k t) t dt + \int_{1/2}^1 J_0(\mu_k t) t dt \right) = \\ &= \frac{2}{(\mu_k J_1(\mu_k))^2} \left(2 \int_0^{\mu_k/2} J_0(s) s ds + \int_{\mu_k/2}^{\mu_k} J_0(s) s ds \right) = \frac{2}{(\mu_k J_1(\mu_k))^2} \left(\int_0^{\mu_k} J_0(s) s ds + \int_0^{\mu_k/2} J_0(s) s ds \right) = \\ &= \frac{2}{\mu_k (J_1(\mu_k))^2} \left(J_1(\mu_k) + \frac{1}{2} J_1\left(\frac{\mu_k}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

Entonces, aplicando el Teorema 4.3, resulta que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2J_0(\mu_k t)}{\mu_k (J_1(\mu_k))^2} \left(J_1(\mu_k) + \frac{1}{2} J_1\left(\frac{\mu_k}{2}\right) \right) = \begin{cases} 2 & \text{si } t \in (0, 1/2) \\ 1 & \text{si } t \in (1/2, 1) \\ 1,5 & \text{si } t = 1/2 \end{cases}$$

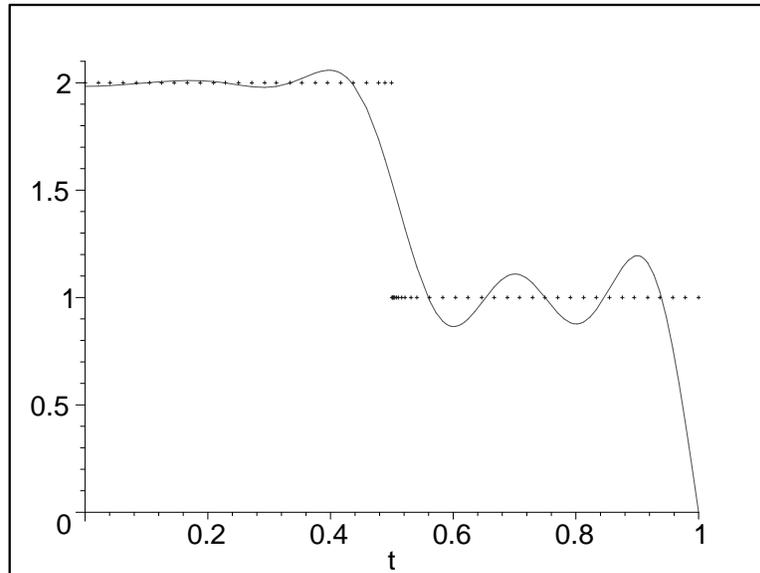


Figura 4.4: Aproximación de Fourier-Bessel con diez términos para el ejemplo 4.1.

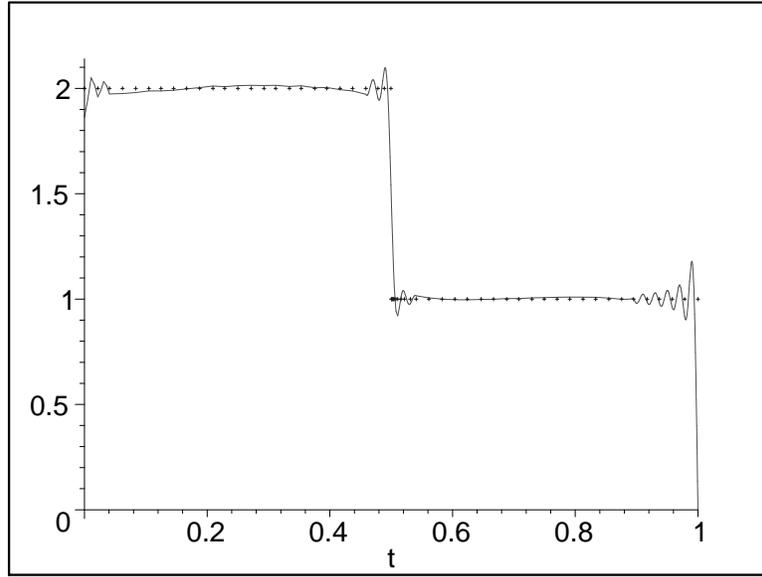


Figura 4.5: Aproximación de Fourier-Bessel con cien términos para el ejemplo 4.1.

Notemos que para $t = 1$, la serie vale 0, ya que $J_0(\mu_k) = 0$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

En las figuras 4.4 y 4.5 se comparan las gráficas de la función original $x(t)$ (a puntos) con sus aproximaciones (sumas parciales) de Fourier-Bessel $\sum_{k=1}^N \gamma_k J_0(\mu_k t)$ para $N = 10$ y $N = 100$, apreciándose la convergencia a medida que N crece. Para $t = 0$, no sabíamos en principio cuál sería el valor de la serie: en este caso, a través de las figuras vemos que la suma vale 2.

EJEMPLO 4.2 Suponiendo que $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ son los ceros positivos de $J_1(t)$, desarrollar en el intervalo $[0, 1]$ la función $f(t) = t - 7t^3$ en serie Fourier-Bessel del tipo $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k J_1(\mu_k t)$. En este caso, basta calcular

$$\gamma_k = \frac{2}{(J_2(\mu_k))^2} \int_0^1 (t^2 - 7t^4) J_1(\mu_k t) dt \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Haciendo el cambio de variable $s = \mu_k t$ y utilizando el corolario 4.3-iii) y iv) e integrando por partes, se obtiene

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \frac{2}{\mu_k^5 (J_2(\mu_k))^2} \int_0^{\mu_k} (\mu_k^2 s^2 - 7s^4) J_1(s) ds = \frac{2}{\mu_k^5 (J_2(\mu_k))^2} \left(\mu_k^4 J_2(\mu_k) - 7 \int_0^{\mu_k} s^2 (s^2 J_2(s))' ds \right) = \\ &= \frac{2}{\mu_k^5 (J_2(\mu_k))^2} \left(\mu_k^4 J_2(\mu_k) - 7s^4 J_2(s) \Big|_{s=0}^{s=\mu_k} + 14 \int_0^{\mu_k} s^3 J_2(s) ds \right) = \\ &= \frac{2}{\mu_k^2 (J_2(\mu_k))^2} (-6\mu_k J_2(\mu_k) + 14J_3(\mu_k)). \end{aligned}$$

En virtud del Teorema 4.3, resulta que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k J_1(\mu_k t) = t - 7t^3, \quad \text{si } t \in [0, 1].$$

Aquí, el valor de la serie es 0 tanto para $t = 0$ como para $t = 1$, dado que $J_1(0) = J_1(\mu_k) = 0$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

4.4. Polinomios de Legendre

Surgen al resolver la EDO

$$(1 - t^2)x''(t) - 2tx'(t) + \alpha(\alpha + 1)x(t) = 0, \quad (4.21)$$

llamada **Ec. de Legendre de orden α** , donde α es un parámetro real. Esta EDO surge en distintas partes de la física; en particular, al resolver la ec. de Laplace en coordenadas esféricas.

Cuando $t^2 \neq 1$, dividiendo la EDO por $1 - t^2$ podemos escribirla en la forma

$$x''(t) + \frac{2t}{t^2 - 1}x'(t) + \frac{\alpha(\alpha + 1)}{1 - t^2}x(t) = 0,$$

por lo que los coeficientes son analíticos en $t = 0$ y convergentes si $|t| < 1$.

Para resolver esta EDO utilizamos el método de serie de potencias, ensayando soluciones analíticas en $t = 0$

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n,$$

donde los coeficientes a_n son desconocidos y hay que determinarlos.

Derivando dos veces, resulta inmediato comprobar que

$$x'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n t^{n-1}, \quad x''(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}.$$

Sustituyendo estas expresiones en la ec. de Legendre y agrupando términos, se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= (1 - t^2)x''(t) - 2tx'(t) + \alpha(\alpha + 1)x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n t^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} n a_n t^n + \\ &+ \alpha(\alpha + 1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} t^n + \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha(\alpha + 1) - n^2 - n) a_n t^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} ((n+2)(n+1) a_{n+2} + (\alpha + n + 1)(\alpha - n) a_n) t^n \end{aligned}$$

Igualando cada coeficiente de t^n a cero, llegamos a la fórmula de recurrencia

$$a_{n+2} = -\frac{(\alpha + n + 1)(\alpha - n)}{(n + 2)(n + 1)} a_n, \quad \text{si } n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.22)$$

Dando valores a n vamos obteniendo

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{(\alpha + 1)\alpha}{2} a_0, & a_3 &= -\frac{(\alpha + 2)(\alpha - 1)}{3 \cdot 2} a_1 \\ a_4 &= -\frac{(\alpha + 3)(\alpha - 2)}{4 \cdot 3} a_2 = \frac{(\alpha + 3)(\alpha + 1)\alpha(\alpha - 2)}{4!} a_0 \\ a_5 &= -\frac{(\alpha + 4)(\alpha - 3)}{5 \cdot 4} a_3 = \frac{(\alpha + 4)(\alpha + 2)(\alpha - 1)(\alpha - 3)}{5!} a_1 \\ a_6 &= -\frac{(\alpha + 5)(\alpha - 4)}{6 \cdot 5} a_4 = -\frac{(\alpha + 5)(\alpha + 3)(\alpha + 1)\alpha(\alpha - 2)(\alpha - 4)}{6!} a_0 \\ a_7 &= -\frac{(\alpha + 6)(\alpha - 5)}{7 \cdot 6} a_5 = \frac{(\alpha + 6)(\alpha + 4)(\alpha + 2)(\alpha - 1)(\alpha - 3)(\alpha - 5)}{7!} a_1 \end{aligned}$$

Por inducción, no es difícil obtener la fórmula general para los coeficientes

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{(\alpha + 2k - 1)(\alpha + 2k - 3) \dots (\alpha + 1)\alpha(\alpha - 2) \dots (\alpha - 2k + 2)}{(2k)!} a_0$$

$$a_{2k+1} = (-1)^k \frac{(\alpha + 2k)(\alpha + 2k - 2) \dots (\alpha + 2)(\alpha - 1)(\alpha - 3) \dots (\alpha - 2k + 1)}{(2k + 1)!} a_1$$

Agrupando por un lado los términos que dependen de a_0 y por otro los que dependen de a_1 , podemos escribir la expresión de la solución como

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(\alpha + 2k - 1)(\alpha + 2k - 3) \dots (\alpha + 1)\alpha(\alpha - 2) \dots (\alpha - 2k + 2)}{(2k)!} t^{2k} \right) + \\ &+ a_1 \left(t + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(\alpha + 2k)(\alpha + 2k - 2) \dots (\alpha + 2)(\alpha - 1)(\alpha - 3) \dots (\alpha - 2k + 1)}{(2k + 1)!} t^{2k+1} \right) = \\ &\stackrel{def}{=} a_0 x_1(t) + a_1 x_2(t), \quad \forall a_0, a_1 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Las soluciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$ forman una base del espacio de todas las soluciones de la ec. de Legendre, sea cual sea el valor del parámetro α .

Utilizando el criterio del cociente, es fácil comprobar que las series que definen $x_1(t)$ y $x_2(t)$ convergen (en principio) si $|t| < 1$. No obstante, cuando α toma valores naturales podemos observar que o bien $x_1(t)$ ó bien $x_2(t)$ contienen sólo un número finito de términos: es decir, son polinomios y por lo tanto convergen para todo $t \in \mathbb{R}$. En concreto, si $\alpha = 2m$, con $m \in \mathbb{N}$, $x_1(t)$ es un polinomio de grado α , ya que en la expresión del coeficiente correspondiente a t^{2m+2} aparece el factor $(\alpha - 2m)$, que es nulo y anula al resto de los coeficientes de orden más alto. Mientras tanto, $x_2(t)$ es realmente una serie de potencias con infinitos términos, dado que los factores $(\alpha - 2k + 1)$ nunca se van anular, porque α es par. Análogamente, si $\alpha = 2m + 1$, con $m \in \mathbb{N}$, entonces $x_2(t)$ es un polinomio de grado α , mientras que ahora $x_1(t)$ tiene infinitos términos, dado que los factores $(\alpha - 2k)$ no se anulan nunca, porque α es impar. Estas observaciones dan lugar a la siguiente

DEFINICIÓN 4.8 Dado $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se define el **polinomio de Legendre de grado n** como el único polinomio $P_n(t)$ que es solución de la ec. de Legendre de orden n y verifica $P_n(1) = 1$. Concretamente,

$$\begin{aligned} P_0(t) = 1, \quad P_{2m}(t) &= a_0 \left(1 - \frac{(2m+1)2m}{2} t^2 + \frac{(2m+3)(2m+1)2m(2m-2)}{4!} t^4 + \dots + \right. \\ &\left. + (-1)^m \frac{(4m-1)(4m-3) \dots (2m+3)(2m+1)2m(2m-2)(2m-4) \dots 4 \cdot 2}{(2m)!} t^{2m} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_1(t) = t, \quad P_{2m+1}(t) &= a_1 \left(t - \frac{(2m+3)2m}{3!} t^3 + \frac{(2m+5)(2m+3)2m(2m-2)}{5!} t^5 + \dots + \right. \\ &\left. + (-1)^m \frac{(4m+1)(4m-1) \dots (2m+3)2m(2m-2)(2m-4) \dots 4 \cdot 2}{(2m+1)!} t^{2m+1} \right) \end{aligned}$$

$$\text{con } a_0 = (-1)^m \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2m)} \text{ y } a_1 = (-1)^m \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2m+1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2m)}, \text{ si } m = 1, 2, \dots$$

Las constantes a_0 y a_1 se han elegido de manera que se cumpla la condición $P_n(1) = 1$.

De la forma que tienen los polinomios de Legendre se pueden deducir algunas primeras propiedades interesantes: si n es par, $P_n(t)$ sólo contiene potencias pares de t y, por tanto, es una función par, mientras que si n es impar, $P_n(t)$ contiene sólo potencias impares de t y, por tanto, es una función impar. Además, $P_{2m}(0) = a_0$ y $P_{2m+1}(0) = 0$ para cada $m = 1, 2, \dots$

Una forma alternativa de generar los polinomios de Legendre es a través de la **Fórmula de Rodrigues**

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n \quad (4.23)$$

Dando valores a n en esta fórmula, se obtienen las expresiones de los primeros polinomios de Legendre:

$$P_0(t) = 1, \quad P_1(t) = t, \quad P_2(t) = \frac{3t^2 - 1}{2}, \quad P_3(t) = \frac{5t^3 - 3t}{2}, \quad P_4(t) = \frac{35t^4 - 30t^2 + 3}{8},$$

$$P_5(t) = \frac{63t^5 - 70t^3 + 15t}{8}, \quad P_6(t) = \frac{231t^6 - 315t^4 + 105t^2 - 5}{16}, \dots$$

Otra expresión equivalente de los polinomios de Legendre, en este caso con las potencias de t ordenadas de forma decreciente, viene dada por

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{(n-k)! \cdot k! \cdot (n-2k)!} t^{n-2k},$$

donde $\lfloor n/2 \rfloor = n/2$, si n es par y $\lfloor n/2 \rfloor = (n-1)/2$, si n es impar.

Llamando $\lambda = \alpha(\alpha+1)$ en la Ec. de Legendre, nos encontramos con el problema

$$((1-t^2)x'(t))' + \lambda x(t) = 0,$$

con $p(t) = 1-t^2$, $q(t) = 0$, $s(t) = 1$, ya que $p(t) > 0$ si $t \in (-1, 1)$, pero $p(-1) = p(1) = 0$.

Sabemos que la solución general viene dada por

$$x(t) = a_0 x_1(t) + a_1 x_2(t), \quad t \in (-1, 1)$$

Si requerimos las condiciones de que $x(t)$ y $x'(t)$ sean finitas cuando $t \rightarrow \pm 1$, necesariamente tenemos que $\lambda = n(n+1)$ (en general, $x_1(t)$ y $x_2(t)$ divergen en $t = -1$ y $t = 1$, salvo si son polinomios, es decir, salvo si $\alpha \in \mathbb{N}$). Adicionalmente, obtenemos además que $x'(t)$ está también acotada cuando $t \rightarrow \pm 1$. En la terminología habitual, los valores propios del Problema de Sturm-Liouville considerado vienen dados por $\{n(n+1)\}_{n=0,1,\dots}$, mientras que las funciones propias asociadas son $x_n(t) = cP_n(t)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Se explica entonces que los polinomios de Legendre verifican la siguiente lista de importantes propiedades

TEOREMA 4.4 *i) Dados $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ distintos, se verifica $\int_{-1}^1 P_n(t)P_m(t)dt = 0$.*

ii) Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se verifica $\int_{-1}^1 P_n^2(t)dt = \frac{2}{2n+1}$.

iii) Series de Fourier-Legendre. Dada f una función C^1 a trozos en $[-1, 1]$, se verifica que

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n P_n(t) \quad \forall t \in (-1, 1),$$

con

$$\delta_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(t)P_n(t)dt \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

iv) Dada $f \in L^2(-1, 1)$, se verifica que

$$\int_{-1}^1 (f(t) - S_N(t))^2 dt \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } N \longrightarrow +\infty,$$

donde $S_N(t) = \sum_{n=0}^N \delta_n P_n(t)$, con δ_n dado como antes.

v) Todo polinomio $f(t)$ de grado N se puede escribir como combinación lineal de $P_0(t)$, $P_1(t)$, \dots , $P_N(t)$. Concretamente, $f(t) = S_N(t)$ para cada $t \in \mathbb{R}$, con $S_N(t)$ definido en iv).

vi) Todas las raíces de cada $P_n(t)$ se encuentran en el intervalo $(-1, 1)$.

EJEMPLO 4.3 Desarrollar en el intervalo $[-1, 1]$ la función

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in (0, 1], \\ -1, & t \in [-1, 0), \end{cases} \quad (4.24)$$

en serie Fourier-Legendre. A la vista del Teorema 4.4, basta calcular

$$\delta_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(t) P_n(t) dt \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

En primer lugar, como $f(t)$ es una función impar, notemos que si n es par, entonces $P_n(t)$ es una función par, por lo que $f(t)P_n(t)$ es una función impar y $\delta_n = 0$. Además en el caso n impar, $f(t)P_n(t)$ es una función par, por lo que

$$\delta_n = (2n+1) \int_0^1 P_n(t) dt \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

Para determinar estos coeficientes vamos a utilizar la siguiente propiedad de los polinomios de Legendre

$$P'_{n+1}(t) - P'_{n-1}(t) = (2n+1)P_n(t), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

con lo que si $n = 1, 3, 5, \dots$

$$\delta_n = \int_0^1 (P'_{n+1}(t) - P'_{n-1}(t)) dt = P_{n+1}(1) - P_{n+1}(0) - P_{n-1}(1) + P_{n-1}(0) = P_{n-1}(0) - P_{n+1}(0)$$

Aplicando entonces el Teorema 4.4, resulta que

$$\sum_{k=0}^{\infty} (P_{2k}(0) - P_{2k+2}(0)) P_{2k+1}(t) = \begin{cases} -1, & \text{si } t \in (-1, 0), \\ 1, & \text{si } t \in (0, 1), \\ 0, & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

EJEMPLO 4.4 Desarrollar el polinomio $f(t) = t^3 + t^2$ en Serie de Fourier-Legendre. Al tratarse de un polinomio sabemos que el desarrollo va a tener sólo un número finito de términos: en concreto, aquí

$$f(t) = t^3 + t^2 = \sum_{n=0}^3 \delta_n P_n(t) = \delta_0 + \delta_1 t + \delta_2 \frac{3t^2 - 1}{2} + \delta_3 \frac{5t^3 - 3t}{2}.$$

En este caso, es fácil determinar (por simple inspección) que deben ser

$$\delta_3 = \frac{2}{5}, \quad \delta_2 = \frac{2}{3}, \quad \delta_1 = \frac{3}{5}, \quad \delta_0 = \frac{1}{3}$$

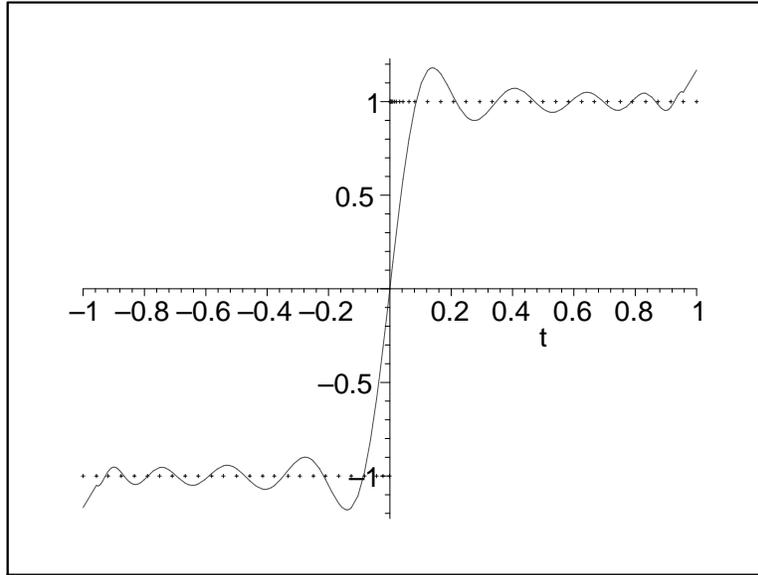


Figura 4.6: Aproximación de Fourier-Legendre con diez términos significativos para el ejemplo 4.3.

4.5. Otros polinomios ortogonales: Hermite y Laguerre

Los polinomios de Hermite surgen al resolver la EDO

$$x''(t) - 2tx'(t) + 2\alpha x(t) = 0, \quad (4.25)$$

llamada **Ec. de Hermite de orden α** , donde α es un parámetro real. Entre las ramas de la física donde surge esta ecuación podemos citar, por ejemplo, la mecánica cuántica, al investigar la ecuación de Schrödinger para un oscilador armónico.

En esta EDO, es claro que los coeficientes son analíticos en todo \mathbb{R} , por lo que para resolverla volvemos a utilizar el método de serie de potencias, ensayando soluciones del tipo $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, donde los coeficientes a_n están por determinar.

Derivando dos veces, sustituyendo las expresiones en la ec. de Hermite y agrupando términos, se obtiene

$$\begin{aligned} 0 = x''(t) - 2tx'(t) + 2\alpha x(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} n a_n t^n + 2\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} ((n+2)(n+1)a_{n+2} - 2(n-\alpha)a_n) t^n \end{aligned}$$

Igualando cada coeficiente de t^n a cero, obtenemos la fórmula de recurrencia

$$a_{n+2} = \frac{-2(\alpha - n)}{(n+2)(n+1)} a_n, \quad \text{si } n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.26)$$

Dando valores a n vamos obteniendo

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{2\alpha}{2} a_0, & a_3 &= -\frac{2(\alpha-1)}{3 \cdot 2} a_1 \\ a_4 &= -\frac{2(\alpha-2)}{4 \cdot 3} a_2 = \frac{2^2 \alpha(\alpha-2)}{4!} a_0 \end{aligned}$$

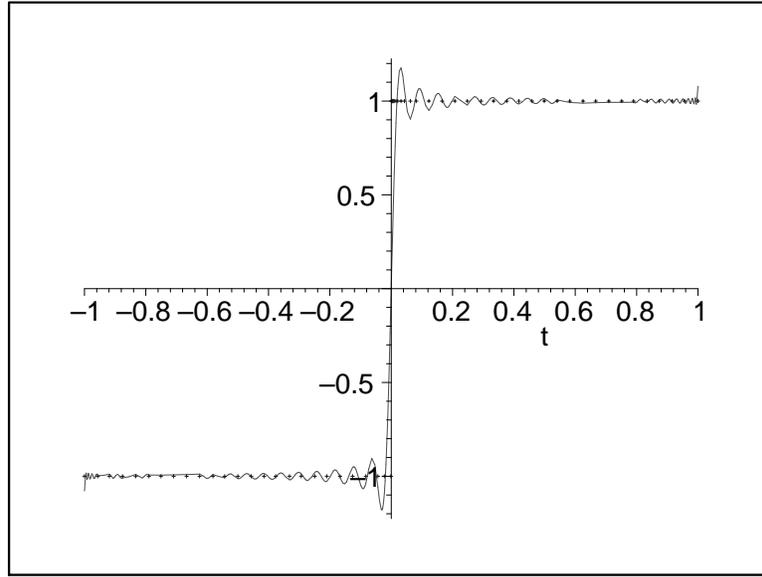


Figura 4.7: Aproximación de Fourier-Legendre con cincuenta términos significativos para el ejemplo 4.3.

$$a_5 = -\frac{2(\alpha-3)}{5 \cdot 4} a_3 = \frac{2^2(\alpha-1)(\alpha-3)}{5!} a_1$$

$$a_6 = -\frac{2(\alpha-4)}{6 \cdot 5} a_4 = -\frac{2^3\alpha(\alpha-2)(\alpha-4)}{6!} a_0$$

$$a_7 = -\frac{2(\alpha-5)}{7 \cdot 6} a_5 = -\frac{2^3(\alpha-1)(\alpha-3)(\alpha-5)}{7!} a_1$$

Por inducción, se obtiene la fórmula general para los coeficientes

$$a_{2k} = \frac{(-2)^k \alpha(\alpha-2) \dots (\alpha-2k+2)}{(2k)!} a_0, \quad a_{2k+1} = \frac{(-2)^k (\alpha-1)(\alpha-3) \dots (\alpha-2k+1)}{(2k+1)!} a_1$$

Agrupando por un lado los términos que dependen de a_0 y por otro los que dependen de a_1 , podemos escribir la expresión de la solución como

$$x(t) = a_0 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-2)^k \alpha(\alpha-2) \dots (\alpha-2k+2)}{(2k)!} t^{2k} \right) +$$

$$+ a_1 \left(t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-2)^k (\alpha-1)(\alpha-3) \dots (\alpha-2k+1)}{(2k+1)!} t^{2k+1} \right) \stackrel{def}{=} a_0 x_1(t) + a_1 x_2(t), \quad \forall a_0, a_1 \in \mathbb{R}$$

Las soluciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$ forman una base del espacio de todas las soluciones de la ec. de Hermite, sea cual sea el valor del parámetro α . Utilizando el criterio del cociente, es fácil comprobar que las series que definen $x_1(t)$ y $x_2(t)$ convergen en todo \mathbb{R} . Al igual que sucedía para la ecuación de Legendre, cuando α toma valores naturales podemos observar que o bien $x_1(t)$ ó bien $x_2(t)$ son polinomios. En concreto, si $\alpha = 2m$, con $m \in \mathbb{N}$, $x_1(t)$ es un polinomio de grado α , mientras que $x_2(t)$ es realmente una serie de potencias con infinitos términos, dado que los factores $(\alpha - 2k + 1)$ nunca se van anular, porque α es par. Análogamente, si $\alpha = 2m + 1$, con $m \in \mathbb{N}$, entonces $x_2(t)$ es un polinomio de grado α , mientras que ahora $x_1(t)$ tiene infinitos términos, dado que los factores $(\alpha - 2k)$ no se anulan nunca, dado que α es impar. Estas observaciones dan lugar a la siguiente

DEFINICIÓN 4.9 Dado $n \in \mathbb{N}$, se define el **polinomio de Hermite de grado n** como el único polinomio $H_n(t)$ que es solución de la ec. de Hermite de orden n y cuyo coeficiente de t^n es igual a 2^n .

Las constantes a_0 y a_1 se eligen de manera que se cumpla la condición $H_n(t) = 2^n t^n + \dots$.

Los polinomios de Hermite verifican algunas propiedades comunes a los polinomios de Legendre; en particular, $H_n(t)$ es una función par, si n es par, mientras que $H_n(t)$ es una función impar, si n es impar.

También para los polinomios de Hermite existe una **Fórmula de Rodrigues** que en este caso queda

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2} \quad (4.27)$$

Dando valores a n en esta fórmula, se obtienen las expresiones de los primeros polinomios de Hermite:

$$\begin{aligned} H_0(t) &= 1, & H_1(t) &= 2t, & H_2(t) &= 4t^2 - 2, & H_3(t) &= 8t^3 - 12t, & H_4(t) &= 16t^4 - 48t^2 + 12, \\ H_5(t) &= 32t^5 - 160t^3 + 120t, & H_6(t) &= 64t^6 - 480t^4 + 720t^2 - 120, \dots \end{aligned}$$

Otra expresión equivalente de los polinomios de Hermite con las potencias de t ordenadas de forma decreciente, viene dada por

$$H_n(t) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k n!}{k! \cdot (n-2k)!} (2t)^{n-2k},$$

donde $[n/2] = n/2$, si n es par y $[n/2] = (n-1)/2$, si n es impar.

Llamando $\lambda = 2\alpha$ en la Ec. de Hermite, nos encontramos con un problema que se puede escribir en la forma autoadjunta

$$\left(e^{-t^2} x'(t) \right)' + \lambda e^{-t^2} x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}$$

con $p(t) = e^{-t^2}$, $q(t) = 0$, $s(t) = e^{-t^2}$, ya que $p(t) > 0$ si $t \in (-\infty, +\infty)$, pero donde el intervalo $(-\infty, +\infty)$ no está acotado. Resulta claro que si requerimos las condiciones de que $e^{-t^2/2} x(t)$ y $(e^{-t^2/2} x(t))'$ sean finitos cuando $t \rightarrow \pm\infty$, entonces $\{2n\}_{n=0,1,\dots}$ son valores propios del Problema de Sturm-Liouville que estamos considerando, mientras que las funciones propias asociadas son $x_n(t) = cH_n(t)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, por lo que se entiende entonces que los polinomios de Hermite verifican algunas de las siguientes propiedades:

TEOREMA 4.5 *i) Dados $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ distintos, se verifica $\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(t) H_m(t) e^{-t^2} dt = 0$.*

ii) Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se verifica $\int_{-\infty}^{+\infty} H_n^2(t) e^{-t^2} dt = 2^n n! \sqrt{\pi}$.

iii) Series de Fourier-Hermite. Dada f una función C^1 a trozos en cada intervalo $[-L, L]$ tal que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) e^{-t^2} dt < +\infty,$$

se verifica que

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n H_n(t) \quad \forall t \in (-\infty, +\infty),$$

con

$$\rho_n = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) H_n(t) e^{-t^2} dt \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

iv) Dada una función f tal que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) e^{-t^2} dt < +\infty,$$

se verifica que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(t) - S_N(t))^2 e^{-t^2} dt \rightarrow 0 \quad \text{cuando } N \rightarrow +\infty,$$

donde $S_N(t) = \sum_{n=0}^N \rho_n H_n(t)$, con ρ_n dado como antes.

v) Todo polinomio $f(t)$ de grado N se puede escribir como combinación lineal de $H_0(t)$, $H_1(t)$, \dots , $H_N(t)$. Concretamente, $f(t) = S_N(t)$ para cada $t \in \mathbb{R}$, con $S_N(t)$ definido en iv).

EJEMPLO 4.5 Desarrollar el polinomio $f(t) = t^3 + t^2$ en Serie de Fourier-Hermite. Al tratarse de un polinomio sabemos que el desarrollo va a tener sólo un número finito de términos: en concreto, aquí

$$f(t) = t^3 + t^2 = \sum_{n=0}^3 \rho_n H_n(t) = \rho_0 + \rho_1 2t + \rho_2 (4t^2 - 2) + \rho_3 (8t^3 - 12t).$$

Por simple inspección, se concluye que

$$\rho_3 = \frac{1}{8}, \quad \rho_2 = \frac{1}{4}, \quad \rho_1 = \frac{3}{4}, \quad \rho_0 = \frac{1}{2}$$

EJEMPLO 4.6 Podemos desarrollar ahora la función

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ -1, & t < 0, \end{cases} \quad (4.28)$$

en serie Fourier-Hermite. Por el Teorema 4.5, basta entonces calcular ρ_n . Nuevamente, como $f(t)$ es una función impar, notemos que si n es par, entonces $H_n(t)e^{-t^2}$ es una función par y se tiene que $\rho_n = 0$. Por otro lado, en el caso n impar, el integrando es una función par, por lo que

$$\rho_n = \frac{1}{2^{n-1}n!\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} H_n(t)e^{-t^2} dt, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

Para determinar estos coeficientes vamos a utilizar la igualdad

$$\int_0^{+\infty} H_n(t)e^{-t^2} dt = H_{n-1}(0),$$

que se deduce de la propiedad 22.13.15 del libro de Abramowitz y Stegun (página 786), con lo que

$$\rho_n = \frac{H_{n-1}(0)}{2^{n-1}n!\sqrt{\pi}}, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

Aplicando en este caso el Teorema 4.5, resulta que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{H_{2k}(0)H_{2k+1}(t)}{2^{2k}(2k+1)!\sqrt{\pi}} = \begin{cases} -1, & \text{si } t < 0, \\ 1, & \text{si } t > 0, \\ 0, & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Finalmente, los polinomios de Laguerre surgen al resolver la EDO

$$tx''(t) + (1-t)x'(t) + \alpha x(t) = 0, \quad (4.29)$$

llamada **Ec. de Laguerre de orden** α , donde α es un parámetro real. La aplicación más importante de esta ecuación aparece al resolver la ecuación de Schrödinger para el átomo de hidrógeno.

Aquí, volvemos a utilizar el método de Frobenius, ya usado con la Ec. de Bessel, ensayando soluciones del tipo $x(t) = t^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, para $t > 0$, donde los coeficientes a_n y $r \in \mathbb{R}$ están por determinar.

Derivando dos veces, sustituyendo las expresiones en la ecuación y agrupando términos, se obtiene

$$0 = tx''(t) + (1-t)x'(t) + \alpha x(t) = t^r \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)^2 a_n t^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha - n - r) a_n t^n \right).$$

Dividendo por t^r y arreglando los índices, resulta

$$r^2 a_0 t^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} ((n+1+r)^2 a_{n+1} + (\alpha - n - r) a_n) t^n = 0$$

Igualando cada coeficiente de t^n a cero, vemos que debe ser $r = 0$ (salvo si $a_0 = 0$) y llegamos a la fórmula de recurrencia

$$a_{n+1} = \frac{-(\alpha - n)}{(n+1)^2} a_n, \quad \text{si } n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.30)$$

Dando valores a n , se sigue que

$$a_1 = -\alpha a_0, \quad a_2 = -\frac{(\alpha - 1)}{2^2} a_1 = \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2^2} a_0, \quad a_3 = -\frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{(3!)^2} a_0$$

Por inducción, se deduce la fórmula general para los coeficientes

$$a_n = \frac{(-1)^n \alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 1)}{(n!)^2} a_0$$

Obtenemos así una solución de la Ec. de Laguerre dada por

$$x_1(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 1)}{(n!)^2} t^n$$

Utilizando el criterio del cociente, es fácil comprobar que la serie anterior converge en todo \mathbb{R} . Al igual que sucedía en casos anteriores, cuando α toma un valor natural observamos que $x_1(t)$ es un polinomio de grado precisamente α .

De la misma manera que ya vimos para la Ec. de Bessel (caso $\alpha = 0$), puede encontrarse una segunda solución (linealmente independiente con $x_1(t)$) de la forma

$$x_2(t) = \log(t) \cdot x_1(t) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n,$$

donde hay que determinar los coeficientes b_n a través de la ecuación. Aunque no vamos a detallar el cálculo de estos coeficientes, notemos que esta segunda solución $x_2(t)$ no va a estar definida en $t = 0$, debido a la presencia del término logarítmico.

Evidentemente, la solución general de la Ec. de Laguerre vendrá dada en la forma

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t), \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Las consideraciones anteriores nos permiten plantear la siguiente

DEFINICIÓN 4.10 Dado $n \in \mathbb{N}$, se define el **polinomio de Laguerre de grado n** como el único polinomio $L_n(t)$ que es solución de la ec. de Laguerre de orden n y verifica $L_n(0) = 1$.

La expresión de los polinomios de Laguerre queda entonces

$$L_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k n!}{(k!)^2 \cdot (n-k)!} t^k. \quad (4.31)$$

En este caso, también existe una **Fórmula de Rodrigues** que viene dada por

$$L_n(t) = \frac{e^t}{n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t}) \quad (4.32)$$

Dando valores a n en la fórmula de Rodrigues (4.32), se obtienen las expresiones de los primeros polinomios de Laguerre:

$$L_0(t) = 1, \quad L_1(t) = -t + 1, \quad L_2(t) = \frac{1}{2!}(t^2 - 4t + 2),$$

$$L_3(t) = \frac{1}{3!}(-t^3 + 9t^2 - 18t + 6), \quad L_4(t) = \frac{1}{4!}(t^4 - 16t^3 + 72t^2 - 96t + 24), \dots$$

Haciendo $\lambda = \alpha$ en la Ec. de Laguerre, nos encontramos con un problema de Sturm - Liouville, que se puede escribir en la forma autoadjunta

$$(te^{-t}x'(t))' + \lambda e^{-t}x(t) = 0, \quad t \in (0, \infty)$$

con $p(t) = te^{-t}$, $q(t) = 0$, $s(t) = e^{-t}$, ya que $p(t) > 0$ si $t \in (0, +\infty)$, pero $p(0) = 0$ y el intervalo $(0, +\infty)$ no está acotado. En la terminología del capítulo 2, resulta claro que si requerimos las condiciones de que $x(t)$ sea finita cuando $t \rightarrow 0^+$ y $e^{-t}x(t)$ también sea finita cuando $t \rightarrow +\infty$, entonces $\{n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ son valores propios del problema de Sturm-Liouville que estamos considerando, mientras que las funciones propias asociadas son $x_n(t) = cL_n(t)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, por lo que no sorprende que los polinomios de Laguerre verifiquen algunas propiedades como las que siguen:

TEOREMA 4.6 *i) Dados $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ distintos, se verifica $\int_0^{+\infty} L_n(t)L_m(t)e^{-t}dt = 0$.*

ii) Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se verifica $\int_0^{+\infty} L_n^2(t)e^{-t}dt = 1$.

iii) Series de Fourier-Laguerre. Dada f una función C^1 a trozos en cada intervalo $[a, b] \subset (0, +\infty)$ tal que

$$\int_0^{+\infty} f^2(t)e^{-t}dt < +\infty,$$

se verifica que

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n L_n(t) \quad \forall t \in (0, +\infty),$$

con

$$\sigma_n = \int_0^{+\infty} f(t)L_n(t)e^{-t}dt \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

iv) Dada una función f tal que

$$\int_0^{+\infty} f^2(t)e^{-t}dt < +\infty,$$

se verifica que

$$\int_0^{+\infty} (f(t) - S_N(t))^2 e^{-t}dt \rightarrow 0 \quad \text{cuando } N \rightarrow +\infty,$$

donde $S_N(t) = \sum_{n=0}^N \sigma_n L_n(t)$, con σ_n dado como antes.

v) Todo polinomio $f(t)$ de grado N se puede escribir como combinación lineal de $L_0(t)$, $L_1(t)$, \dots , $L_N(t)$. Concretamente, $f(t) = S_N(t)$ para cada $t \in \mathbb{R}$, con $S_N(t)$ definido en iv).

vi) Todas las raíces de cada $L_n(t)$ se encuentran en el intervalo $(0, +\infty)$.

EJEMPLO 4.7 Desarrollar el polinomio $f(t) = t^3 + t^2$ en Serie de Fourier-Laguerre. De nuevo, sabemos que el desarrollo va a tener sólo un número finito de términos: en concreto,

$$f(t) = t^3 + t^2 = \sum_{n=0}^3 \sigma_n L_n(t) = \sigma_0 + \sigma_1(1-t) + \sigma_2 \frac{1}{2!}(t^2 - 4t + 2) + \sigma_3 \frac{1}{3!}(-t^3 + 9t^2 - 18t + 6).$$

Por simple inspección, se concluye que

$$\sigma_3 = -6, \quad \sigma_2 = 20, \quad \sigma_1 = -22, \quad \sigma_0 = 8$$

Los polinomios de Legendre, Hermite y Laguerre (entre otros) son útiles en cálculo numérico, concretamente en integración numérica mediante fórmulas de Gauss. En este área las raíces de estos polinomios ortogonales juegan un papel fundamental.

4.6. Aplicación a las EDP en dimensión tres

El caso de las vibraciones de una membrana rectangular ya fue resuelto en el Capítulo 2. Nos planteamos ahora el mismo problema de las vibraciones de una membrana en el caso de que tenga forma circular (y radio 1, por ejemplo). El resto de las condiciones se mantienen: está sujeta por el borde y conocemos la posición f y la velocidad inicial g en cada punto. Para simplificar los cálculos, supondremos que tanto f como g sólo dependen de la distancia al origen. La formulación matemática del problema quedaría

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt}(x, y, t) = u_{xx}(x, y, t) + u_{yy}(x, y, t), & \text{si } x^2 + y^2 < 1, t > 0 \quad \text{Ec. de Ondas} \\ u(x, y, t) = 0, & \text{si } x^2 + y^2 = 1, t > 0 \quad \text{Condición de Contorno} \\ \left. \begin{array}{l} u(x, y, 0) = f(\sqrt{x^2 + y^2}), \quad x^2 + y^2 < 1, \\ u_t(x, y, 0) = g(\sqrt{x^2 + y^2}), \quad x^2 + y^2 < 1. \end{array} \right\} & \text{Condiciones iniciales} \end{array} \right. \quad (4.33)$$

Si tratamos de utilizar el método de separación de variables como en el caso anterior, nos encontramos con el problema de que los intervalos en que varían x y y son dependientes: para cada $x \in (-1, 1)$ fijo, y se mueve en el intervalo $(-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2})$, lo cual nos imposibilita seguir la argumentación standard.

Una manera de solventar esta dificultad es realizar el cambio de variables a coordenadas polares

$$x = r \cos(\theta), y = r \sin(\theta), \quad r \in [0, 1], \quad \theta \in [-\pi, \pi),$$

porque ahora las nuevas variables r y θ sí que se mueven en intervalos independientes y fijos. Si llamamos $u(x, y, t) = U(r, \theta, t)$, basta utilizar la regla de la cadena y las relaciones

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan(\theta) = \frac{y}{x},$$

para obtener la expresión de la Ec. de Ondas en términos de las nuevas variables. En realidad, basta obtener la expresión de la Ec. de Laplace en dos variables, porque la variable temporal t no se está cambiando. Así pues, si $u(x, y) = U(r, \theta)$ se puede comprobar que

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = U_{rr}(r, \theta) + \frac{U_r(r, \theta)}{r} + \frac{U_{\theta\theta}(r, \theta)}{r^2},$$

por lo que el problema (2.40) se puede escribir en la forma

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{tt}(r, \theta, t) = U_{rr}(r, \theta, t) + \frac{U_r(r, \theta, t)}{r} + \frac{U_{\theta\theta}(r, \theta, t)}{r^2}, \quad r \in [0, 1), \theta \in [-\pi, \pi), t > 0 \\ U(1, \theta, t) = 0, \quad \theta \in [-\pi, \pi), t > 0 \\ \left. \begin{array}{l} U(r, \theta, 0) = f(r), \quad r \in [0, 1), \theta \in [-\pi, \pi), \\ U_t(r, \theta, 0) = g(r), \quad r \in [0, 1), \theta \in [-\pi, \pi). \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{Cond. de Contorno} \\ \text{Cond. iniciales} \end{array} \quad (4.34)$$

Desde un punto de vista físico, parece plausible esperar que si las condiciones iniciales son independientes del ángulo θ , la solución mantenga esta propiedad a lo largo de todo el proceso. Por ello nos planteamos resolver el siguiente problema

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{tt}(r, t) = U_{rr}(r, t) + \frac{U_r(r, t)}{r}, \quad r \in [0, 1), t > 0 \\ U(1, t) = 0, \quad t > 0 \\ \left. \begin{array}{l} U(r, 0) = f(r), \quad r \in [0, 1), \\ U_t(r, 0) = g(r), \quad r \in [0, 1). \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{Cond. de Contorno} \\ \text{Cond. iniciales} \end{array} \quad (4.35)$$

Resulta inmediato comprobar ahora que la solución de (4.35) lo es también del problema (4.34).

El método de separación de variables nos conduce en este caso a buscar soluciones básicas (no idénticamente nulas) del tipo $U(r, t) = R(r) \cdot T(t)$, que al ser sustituidas en la EDP de (4.35) y divididas por U , se transforman en

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{R''(r) + \frac{R'(r)}{r}}{R(r)} = -\lambda \in \mathbb{R}, \quad r \in [0, 1], t > 0.$$

Se obtienen así las siguientes EDO

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0, \quad t > 0 \quad (4.36)$$

$$r^2 R''(r) + r R'(r) + \lambda r^2 R(r) = 0, \quad r \in [0, 1] \quad (\text{Ec. paramétrica de Bessel de orden } 0)$$

donde hemos multiplicado la segunda EDO por r^2 . Incorporando ahora la condición de contorno, resulta

$$0 = U(1, t) = R(1) \cdot T(t), \quad t > 0,$$

por lo que debe ser $R(1) = 0$. Según hemos visto, para $\lambda > 0$, las soluciones de la Ec. paramétrica de Bessel de orden 0 vienen dadas por

$$R(r) = c_1 J_0(\sqrt{\lambda}r) + c_2 Y_0(\sqrt{\lambda}r).$$

Desde un punto de vista físico, nos interesan las soluciones acotadas (notemos que las vibraciones de una membrana circular sobre la que no actúan fuerzas externas van a estar acotadas, sin ningún género de duda: en particular, $R(0)$ debe ser finito). Teniendo en cuenta los puntos anteriores, podemos asegurar que (al menos) nos aparecen las soluciones $R_n(r) = C J_0(\mu_n r)$ con $C \in \mathbb{R}$ y $\lambda_n = \mu_n^2$, donde $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son los ceros positivos de $J_0(s)$ (de hecho, esas son las únicas soluciones no nulas y acotadas que aparecen). Para cada $\lambda = \mu_n^2 > 0$, las soluciones de la EDO (4.36) vienen dadas por

$$T_n(t) = \tilde{c}_1 \cos(\mu_n t) + \tilde{c}_2 \sin(\mu_n t),$$

por lo que cada solución básica se expresa como

$$U_n(r, t) = (a_n \cos(\mu_n t) + b_n \sin(\mu_n t)) J_0(\mu_n r)$$

y la solución más completa que se obtiene por este método queda

$$U(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\mu_n t) + b_n \sin(\mu_n t)) J_0(\mu_n r), \quad (4.37)$$

donde $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son los ceros positivos de $J_0(s)$.

Formalmente, para que U satisfaga además las condiciones iniciales, debe suceder que

$$f(r) = U(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\mu_n r), \quad r \in (0, 1) \quad (4.38)$$

$$g(r) = U_t(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \mu_n J_0(\mu_n r), \quad r \in (0, 1). \quad (4.39)$$

Estas expresiones nos plantean la necesidad de utilizar las Series de Fourier-Bessel (ver el Teorema 4.3 y el Corolario 4.2), por lo que ya hemos visto que los coeficientes a_n y b_n pueden determinarse (de manera única) sin mayor dificultad:

$$a_n = \frac{2 \int_0^1 f(r) J_0(\mu_n r) r dr}{(J_1(\mu_n))^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2 \int_0^1 g(r) J_0(\mu_n r) r dr}{\mu_n (J_1(\mu_n))^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

EJEMPLO 4.8 La solución del problema (4.33) con $f(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)$ y $g(x, y) = 0$ viene dada por

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4J_2(\mu_n)}{(\mu_n J_1(\mu_n))^2} J_0(\mu_n \sqrt{x^2 + y^2}) \cos(\mu_n t).$$

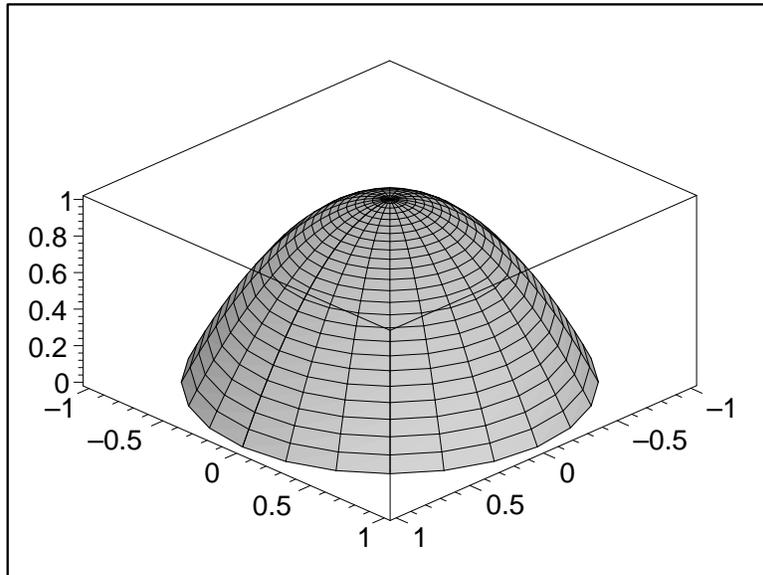


Figura 4.8: Posición inicial de la membrana circular (Ejemplo 4.8.)

Análogamente, la solución del problema (4.33) con $f(x, y) = 0$ y $g(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)$ viene dada por

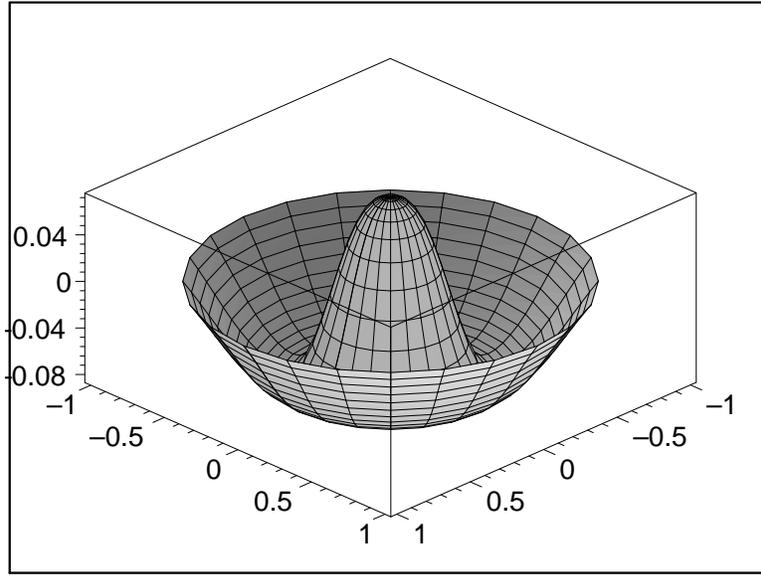


Figura 4.9: Posición aproximada de la membrana circular cuando $t = 0,68$ (Ejemplo 4.8.)

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4J_2(\mu_n)}{\mu_n^3 (J_1(\mu_n))^2} J_0(\mu_n \sqrt{x^2 + y^2}) \sin(\mu_n t),$$

donde $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son los ceros positivos de $J_0(s)$.

Para terminar este capítulo, nos planteamos la resolución de la Ec. de Laplace en la esfera de centro el origen y radio 1, conocido el valor g de la función sobre la superficie de la esfera. Matemáticamente, se trata de resolver el problema

$$\begin{cases} u_{xx}(x, y, z) + u_{yy}(x, y, z) + u_{zz}(x, y, z) = 0, & \text{si } x^2 + y^2 + z^2 < 1 & \text{Ec. de Laplace} \\ u(x, y, z) = g(x, y, z) & \text{si } x^2 + y^2 + z^2 = 1 & \text{Condición de Contorno} \end{cases} \quad (4.40)$$

Una vez más, si tratamos de utilizar el método de separación de variables en las variables (x, y, z) , nos encontramos con que los intervalos en que varían son dependientes y no están fijados.

En este caso, solventamos la dificultad realizando el cambio de variables a coordenadas esféricas

$$x = r \cos(\theta) \sin(\phi), \quad y = r \sin(\theta) \sin(\phi), \quad z = r \cos(\phi), \quad r \in [0, 1], \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad \phi \in [0, \pi].$$

Si llamamos $u(x, y, z) = U(r, \theta, \phi)$, tras algunos desarrollos, utilizando la regla de la cadena y las relaciones

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \tan(\theta) = \frac{y}{x}, \quad \cos(\phi) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

podemos obtener la expresión de la Ec. de Laplace en términos de las nuevas variables:

$$u_{xx}(x, y, z) + u_{yy}(x, y, z) + u_{zz}(x, y, z) = (r^2 U_r(r, \theta, \phi))_r + \frac{U_{\theta\theta}(r, \theta, \phi)}{(\sin(\phi))^2} + \frac{(\sin(\phi) U_\phi(r, \theta, \phi))_\phi}{\sin(\phi)}.$$

Además, aplicando también el cambio a la condición de contorno, resulta

$$U(1, \theta, \phi) = g(\cos(\theta) \sin(\phi), \sin(\theta) \sin(\phi), \cos(\phi)) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{g}(\theta, \phi).$$

Para simplificar los cálculos, vamos a suponer que \tilde{g} sólo depende del ángulo ϕ . Nuevamente, desde un punto de vista físico, parece plausible esperar que si la condición de contorno es independiente del ángulo θ , la solución conservará esta propiedad (es decir $U_\theta(r, \theta, \phi) = 0$), por lo que el problema que nos planteamos resolver finalmente es el siguiente

$$\begin{cases} (r^2 U_r(r, \phi))_r + \frac{(\sin(\phi) U_\phi(r, \phi))_\phi}{\sin(\phi)} = 0 & r \in (0, 1), \phi \in (0, \pi) \\ U(1, \phi) = \tilde{g}(\phi), & \phi \in (0, \pi) \end{cases} \quad (4.41)$$

El método de separación de variables nos conduce en este caso a buscar soluciones básicas (no idénticamente nulas) del tipo $U(r, \phi) = R(r) \cdot F(\phi)$, que al ser sustituidas en la EDP de (4.41) y divididas por U , se transforman en

$$\frac{r^2 R''(r) + 2rR'(r)}{R(r)} = -\frac{(\sin(\phi)F'(\phi))'}{\sin(\phi)F(\phi)} = \alpha(\alpha + 1) \in \mathbb{R}, \quad r \in [0, 1], \phi \in [0, \pi],$$

donde hemos llamado a la constante $\alpha(\alpha + 1)$, y no $-\lambda$ como otras veces, por conveniencia, como veremos a continuación.

Se obtienen así las EDO siguientes

$$r^2 R''(r) + 2rR'(r) - \alpha(\alpha + 1)R(r) = 0, \quad r \in (0, 1), \quad (\text{Ec. de Euler}) \quad (4.42)$$

$$(\sin(\phi)F'(\phi))' + \alpha(\alpha + 1)\sin(\phi)F(\phi) = 0, \quad \phi \in (0, \pi). \quad (4.43)$$

La solución general de la ec. de Euler (4.42) se obtiene fácilmente, resultando aquí

$$R(r) = c_1 r^\alpha + c_2 r^{-(\alpha+1)}.$$

Sin embargo, la EDO (4.43) no es tan fácil de reconocer. Para ello, hay que realizar un nuevo cambio de variable $s = \cos(\phi)$. Si $F(\phi) = \tilde{F}(s)$ se obtiene entonces

$$F'(\phi) = \frac{d\tilde{F}}{ds}(s) \frac{ds}{d\phi} = -\sin(\phi) \frac{d\tilde{F}}{ds}(s).$$

$$(\sin(\phi)F'(\phi))' = \frac{d}{d\phi} \left(-(\sin(\phi))^2 \frac{d\tilde{F}}{ds}(s) \right) = -2\sin(\phi)\cos(\phi) \frac{d\tilde{F}}{ds}(s) + (\sin(\phi))^3 \frac{d^2\tilde{F}}{ds^2}(s).$$

Sustituyendo en el EDO (4.43), dividiendo por $\sin(\phi)$ y usando que $s = \cos(\phi)$, llegamos a

$$(1 - s^2)\tilde{F}''(s) - 2s\tilde{F}'(s) + \alpha(\alpha + 1)\tilde{F}(s) = 0, \quad s \in (-1, 1). \quad (4.44)$$

Esta es la Ec. de Legendre de orden α . Hemos visto que sus soluciones vienen dadas en forma de serie de potencia alrededor de $s = 0$. El radio de convergencia de dichas series es exactamente igual a 1, divergiendo (en general) si $|s| = 1$, debido a la presencia del término $1 - s^2$ en la EDO. No obstante, y de nuevo desde un punto de vista físico, nos interesan las soluciones acotadas cuando $|s| = 1$, ya que este caso corresponde con la condición $\phi = 0$ y $\phi = \pi$, (es decir, los polos norte y sur de la esfera). Teniendo en cuenta estas consideraciones, podemos asegurar que (al menos) nos aparecen las soluciones $\tilde{F}_n(s) = CP_n(s)$ y $\alpha = n$, donde P_n es el polinomio de Legendre de orden $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Además, para que estén acotadas si $r = 0$, debe ser $R_n(r) = C_1 r^n$. Deshaciendo el cambio, las soluciones básicas se expresan como

$$U_n(r, \phi) = a_n r^n P_n(\cos(\phi))$$

con $a_n \in \mathbb{R}$ y la solución más completa que se obtiene por este método viene dada por

$$U(r, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos(\phi)), \quad (4.45)$$

donde P_n es el polinomio de Legendre de orden $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Para que U satisfaga además la condición de contorno, debe suceder que

$$\tilde{g}(\phi) = U(1, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos(\phi)), \quad \phi \in (0, \pi). \quad (4.46)$$

Volviendo a introducir la variable $s = \cos(\phi)$ y llamando $\varphi(s) = \tilde{g}(\phi)$, podemos re-escribir la relación anterior como

$$\varphi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(s), \quad s \in (-1, 1),$$

expresión que nos conduce de manera natural a las Series de Fourier-Legendre (ver el Teorema 4.4), por lo que ya hemos visto que los coeficientes a_n vienen determinados por

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 \varphi(s) P_n(s) ds = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi \tilde{g}(\phi) P_n(\cos(\phi)) \sin(\phi) d\phi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.47)$$

Deshaciendo el cambio a coordenadas esféricas resulta finalmente que la solución del problema (4.40) (cuando $\tilde{g}(\theta, \phi) = g(\cos(\theta) \sin(\phi), \sin(\theta) \sin(\phi), \cos(\phi))$) sólo depende de ϕ viene dada por

$$u(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x^2 + y^2 + z^2)^{n/2} P_n\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right), \quad (4.48)$$

con a_n dado en (4.47).

EJEMPLO 4.9 Resulta inmediato comprobar que la solución del problema (4.40) con $g(x, y, z) = 1 - z$ viene dada por $u(x, y, z) = 1 - z$ para cada (x, y, z) tal que $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Si aplicamos la fórmula (4.48) llegamos a la misma conclusión, dado que en virtud del cambio a coordenadas esféricas $\tilde{g}(\phi) = 1 - \cos(\phi)$, por lo que $\varphi(s) = 1 - s$ y se verifica

$$\varphi(s) = a_0 P_0(s) + a_1 P_1(s) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n P_n(s) = a_0 + a_1 s + \sum_{n=2}^{\infty} a_n P_n(s), \quad s \in \mathbb{R},$$

de donde (por simple igualdad de términos) tenemos $a_0 = 1$, $a_1 = -1$ y $a_n = 0$, si $n = 2, 3, \dots$. Por lo tanto,

$$u(x, y, z) = a_0 + a_1 (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} P_1\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) = 1 - z.$$

Análogamente, podemos ahora encontrar la solución del problema (4.40) con $g(x, y, z) = 2z^2 - 1$. Aquí, $\tilde{g}(\phi) = 2(\cos(\phi))^2 - 1$, por lo que $\varphi(s) = 2s^2 - 1$ y se verifica

$$\varphi(s) = a_0 P_0(s) + a_1 P_1(s) + a_2 P_2(s) + \sum_{n=3}^{\infty} a_n P_n(s) = a_0 + a_1 s + a_2 \left(\frac{3s^2 - 1}{2}\right) + \sum_{n=3}^{\infty} a_n P_n(s), \quad s \in \mathbb{R},$$

de donde (por simple igualdad de términos) tenemos $a_0 = -\frac{1}{3}$, $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{4}{3}$ y $a_n = 0$, si $n = 3, 4, \dots$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= a_0 + a_1 (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} P_1\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) + a_2 (x^2 + y^2 + z^2) P_2\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) = \\ &= \frac{4z^2 - 2x^2 - 2y^2 - 1}{3}. \end{aligned}$$

4.7. Funciones especiales con Wolfram Alpha

Función Gamma.

La sintaxis para $\Gamma(z)$ es **gamma(z)**. También existe $z!$.

$$\text{gamma}(5) = 24,$$

$$\text{gamma}(2 - 7i) = -0.0006488334052 - 0.0004448653393i,$$

$$(-1/2)! = \sqrt{\pi}.$$

Obviamente, este valor coincide con $\text{gamma}(1/2)$. También existe

$$(5 - 3i)! = 28.38008928 + 47.11834080i.$$

Función Beta.

La sintaxis para $B(z, w)$ es **beta(z, w)**.

$$\text{beta}(32, 5) = \frac{1}{1884960},$$

$$\text{beta}(2, 5 - 3i) = \frac{7 + 11i}{510}.$$

Funciones de Bessel.

La sintaxis para $J_\nu(t)$ e $Y_\nu(t)$ es **J(v, t)** e **Y(v, t)**, respectivamente. También son válidas **besselj(v, t)** y **bessely(v, t)**. La coordenada del m -ésimo cero positivo de $J_\nu(t)$ ó $Y_\nu(t)$ se obtiene mediante **besseljzero(v, m)** ó **besselyzero(v, m)**.

$$J(0, 3) = -0.2600519549,$$

$$\text{besselj}(0, 3) = -0.2600519549,$$

$$Y(0, 4.5) = -0.194705,$$

$$\text{bessely}(0, 4.5) = -0.194705,$$

$$J(1/2, 0.2) = 0.354451,$$

$$J(2, 180) = 0.05876652675,$$

$$\text{besseljzero}(0, 1) = 2.404825558,$$

$$\text{besselyzero}(1, 2) = 5.429681041,$$

$$\text{besselyzero}(0, 4) = 10.22234504,$$

$$\text{besseljzero}(0, 4) = 11.79153444,$$

$$J(1, \text{besseljzero}(1, 4)) = 0,$$

$$J(1, \text{besseljzero}(0, 4)) = -0.2324598313.$$

Veamos cómo aparecen las funciones de Bessel al resolver las ec. de Bessel:

$$t^2 x''(t) + tx'(t) + (t^2 - 7)x(t) = 0 \implies x(t) = c_1 J_{\sqrt{7}}(t) + c_2 Y_{\sqrt{7}}(t).$$

$$t^2 x''(t) + tx'(t) + (t^2 - 16)x(t) = 0 \implies x(t) = c_1 J_4(t) + c_2 Y_4(t).$$

$$t^2 x''(t) + tx'(t) + (2t^2 - 9)x(t) = 0 \implies x(t) = c_1 J_3(\sqrt{2}t) + c_2 Y_3(\sqrt{2}t).$$

Polinomios ortogonales.

La sintaxis para los polinomios de Legendre, Hermite y Laguerre ($P_n(t)$, $H_n(t)$ y $L_n(t)$) es **legendrep**(**n,t**), **hermite**(**n,t**) (ó **hermiteh**(**n,t**)) y **laguerre**(**n,t**) (ó **laguerrel**(**n,t**)), respectivamente.

$$\text{legendrep}(1, t) = t,$$

$$\text{legendrep}(3, 1, 2) = 2.52,$$

$$\text{legendrep}(5, t) = \frac{1}{8}(63t^5 - 70t^3 + 15t),$$

$$\text{hermite}(3, \text{sqrt}(2)) = 4\sqrt{2},$$

$$\text{hermiteh}(3, \text{sqrt}(2)) = 4\sqrt{2},$$

$$\text{hermite}(5, t) = 32t^5 - 160t^3 + 120t,$$

$$\text{hermiteh}(5, t) = 32t^5 - 160t^3 + 120t,$$

$$\text{laguerre}(2, 5/4) = -\frac{23}{32},$$

$$\text{laguerrel}(2, 5/4) = -\frac{23}{32},$$

$$\text{laguerre}(4, t) = \frac{1}{24}(t^4 - 16t^3 + 72t^2 - 96t + 24),$$

$$\text{laguerrel}(4, t) = \frac{1}{24}(t^4 - 16t^3 + 72t^2 - 96t + 24).$$

Para generar algunas de las otras gráficas de este capítulo es conveniente pasar a Wolfram Alpha Open Code. Por ejemplo, para la figura 4.7

$$f[t] := \text{Sum}[\text{LegendreP}[2 * k + 1, t] * (\text{LegendreP}[2 * k, 0] - \text{LegendreP}[2 * k + 2, 0]), \{k, 0, 50\}]$$

$$g[t] := \text{Piecewise}[\{\{-1, t < 0\}, \{1, t > 0\}\}]$$

$$\text{Plot}[\{f[t], g[t]\}, \{t, -1, 1\}]$$

Bibliografía sobre Funciones especiales de la Física Matemática:

1. "Handbook of mathematical functions", M. Abramowitz e I. A. Stegun, Dover, 1965.
2. "Fórmulas y tablas de la matemática aplicada", M. R. Spiegel, J. Liu y L. Abellanas, Mc Graw Hill, 2000.
3. "Matemáticas avanzadas para ingeniería", Peter V. O'Neil, Ed. Thomson, 2004.
4. "Special functions and their applications", N. N. Lebedev, Dover, 1972.
5. "Special functions for scientists and engineers", W. W. Bell, Van Nostrand Reinhold, 1968.
6. "Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas", G. F. Simmons, Mc Graw Hill, 1993.
7. "Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado", D. G. Zill, International Thomson Editores, 1997.
8. "Fourier analysis and its applications", G. B. Folland, Wadsworth and Brooks, 1992.

9. "Mathematical methods for physicists", G. B. Arfken y H. J. Weber, Harcourt-Academic Press, 2001.
10. "Métodos matemáticos avanzados para ciencias e ingenierías", M. Gadella y L.M. Nieto, Univ. de Valladolid, 2000.
11. "An introduction to Ordinary Differential Equations", E. A. Coddington, Dover, 1961.
12. "Linear methods of applied analysis", A. M. Krall, Addison-Wesley, 1973.

Recursos en Internet sobre Funciones especiales de la Física Matemática:

1. <https://personal.math.ubc.ca/~cbm/aands/>
Versión electrónica completa de "Handbook of mathematical functions" de Abramowitz y Stegun.
2. <http://www.sosmath.com/calculus/improper/gamma/gamma.html>
3. <https://mathworld.wolfram.com/GammaFunction.html>
<https://mathworld.wolfram.com/BetaFunction.html>
<https://mathworld.wolfram.com/BesselFunctionoftheFirstKind.html>
<https://mathworld.wolfram.com/BesselFunctionoftheSecondKind.html>
<https://mathworld.wolfram.com/LegendrePolynomial.html>
<https://mathworld.wolfram.com/HermitePolynomial.html>
<https://mathworld.wolfram.com/LaguerrePolynomial.html>
<http://mathworld.wolfram.com/topics/SpecialFunctions.html>

Capítulo 5

Teoría elemental de distribuciones

5.1. La Delta de Dirac

En general, las magnitudes físicas tienen una naturaleza distribuida, es decir, están definidas sobre un cierto dominio espacial y/o en cada instante de un cierto intervalo temporal. No obstante, esta regla tiene excepciones: existen sistemas donde puede haber parámetros, acciones o condiciones iniciales que están localizados en partes muy pequeñas (casi puntuales) del dominio. Por ejemplo, una carga concentrada en una sección muy pequeña de una viga o una fuente térmica localizada en una zona también muy pequeña. Existen también procesos en los que se ejercen acciones con valores significativos únicamente en intervalos de tiempo muy cortos, como fuerzas producidas por impactos y aportaciones de calor u otras magnitudes en forma impulsiva ("chispazos", destellos,...). Surge así la necesidad de representar en un mismo esquema tanto variables distribuidas en el espacio y el tiempo como concentradas únicamente en puntos o instantes de tiempo específicos. Pensemos, por ejemplo, en la acción de una fuerza "instantánea". Supongamos que un cuerpo de masa unidad, en reposo en el instante inicial $t = 0$, experimenta la acción de una fuerza impulsiva en un instante $t_0 > 0$, que le comunica una velocidad $v = 1$, después de lo cual la acción de la fuerza termina. Nos interesa determinar la fuerza $F(t)$ que actúa sobre el cuerpo en el instante t . Según la Segunda Ley de Newton, si $a(t)$ designa la aceleración del cuerpo en el instante t

$$F(t) = a(t) \tag{5.1}$$

En este caso,

$$a(t) = \begin{cases} +\infty & \text{si } t = t_0 \\ 0 & \text{si } t \neq t_0, \end{cases}$$

dado que la velocidad del cuerpo es constante todo el tiempo, salvo en $t = t_0$, donde pasa de valer 0 a valer 1 instantáneamente. Desde el punto de vista clásico, es evidente que la expresión que resulta no tiene sentido matemático, ya que no existe una función de t así definida.

Todavía más, si integramos formalmente la expresión (5.1) entre 0 y $\tau > t_0$, teniendo en cuenta que la aceleración es la derivada de la velocidad, resulta que

$$\int_0^\tau F(t)dt = v(\tau) - v(0) = 1,$$

donde $v(t)$ designa la velocidad del cuerpo en el instante t . De nuevo, es fácil darse cuenta que la igualdad anterior no tiene sentido clásico: como $F(t) = 0$ cuando $t \neq t_0$, la integral que figura en el término de la izquierda es igual a cero, mientras que el segundo miembro no lo es. A partir de los razonamientos físicos, cabría esperar que dichas igualdades tuvieran algún sentido. Estas aparentes contradicciones se pueden superar mediante una nueva noción matemática: las distribuciones o funciones generalizadas.

Sin duda, la distribución más conocida es la Delta de Dirac. Este ente matemático fue manejado con gran habilidad por Oliver Heaviside a finales del siglo XIX y ha sido usado por los físicos desde 1920. En particular, fue utilizado sistemáticamente por el físico teórico inglés Paul A. M. Dirac en su libro "Principios

de Mecánica Cuántica", obteniendo muchas de las propiedades que veremos más adelante. Dirac ganó el Premio Nobel de Física en 1933 (a los treinta y un años !) por su trabajo sobre la formulación teórica de la mecánica cuántica. Pero, para los matemáticos la Delta de Dirac era una monstruosidad: Heaviside fue atacado y muchos de sus trabajos no fueron aceptados para su publicación por los editores de revistas alegando falta de rigor matemático, a lo que él respondía: "¿Debería renunciar a mi cena porque no entiendo completamente el proceso de la digestión?". Entre 1945 y 1948, Laurent Schwartz publicó una serie de artículos exponiendo una teoría matemáticamente coherente y completa de esta nueva herramienta, lo que le valió la Medalla Fields en 1950. De manera independiente, la escuela rusa (I. M. Gelfand, G. E. Shilov, S. L. Sobolev) también trabajó en el mismo campo, por lo cual está considerada igualmente responsable de esta nueva teoría. En la actualidad, el estudio de las Ecuaciones en Derivadas Parciales no puede entenderse fuera del ámbito de las distribuciones, como se puede ver por ejemplo en los libros de Casas, Folland y Renardy-Rogers de la bibliografía.

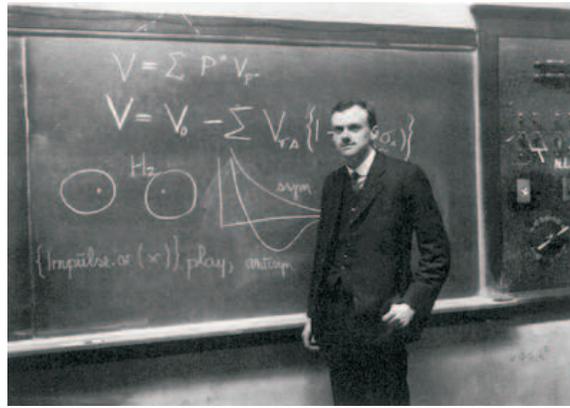


Figura 5.1: Paul A. M. Dirac.

Según acabamos de ver, intuitivamente, la Delta de Dirac en el punto t_0 (que se suele representar por $\delta(t - t_0)$) debe verificar

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} +\infty & \text{si } t = t_0 \\ 0 & \text{si } t \neq t_0 \end{cases}$$

Por supuesto, no existe una tal función entre las clásicas, pero sí es posible definir una "función generalizada ó distribución" como límite de la siguiente familia de funciones clásicas: si $\epsilon > 0$,

$$f_\epsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon} & \text{si } t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \\ 0 & \text{si } t \notin [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]. \end{cases}$$

Notemos que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f_\epsilon(t) = \begin{cases} +\infty & \text{si } t = t_0 \\ 0 & \text{si } t \neq t_0. \end{cases}$$

El uso de este procedimiento no es una novedad en matemáticas: por ejemplo, ha sido utilizado para construir los números reales a partir de los números racionales ("todo número real es límite de una sucesión de números racionales"). Paul Dirac utilizó esta técnica para trabajar con la Delta y definir sobre ella diversas operaciones de interés. Por ejemplo, la integral: teniendo en cuenta que para cada $\epsilon > 0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\epsilon(t) dt = \int_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} \frac{1}{2\epsilon} dt = 1,$$

definió

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) dt \stackrel{def}{=} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} f_\epsilon(t) dt = 1,$$

tal y como precisamos en el caso de la fuerza "instantánea". De la misma forma, para cada función $\psi(t)$ de clase C^∞ en un entorno de t_0

$$\int_a^b \delta(t-t_0)\psi(t)dt \stackrel{def}{=} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^b f_\epsilon(t)\psi(t)dt = 0, \quad \text{si } t_0 \notin [a, b], \quad (5.2)$$

$$\int_a^b \delta(t-t_0)\psi(t)dt \stackrel{def}{=} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^b f_\epsilon(t)\psi(t)dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\epsilon} \int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} \psi(t)dt = \psi(t_0), \quad \text{si } t_0 \in (a, b), \quad (5.3)$$

gracias al Teorema del Valor Medio para el Cálculo Integral.

Existen muchas otras familias de funciones clásicas que pueden ser utilizadas para definir la Delta de Dirac en un punto t_0 , en diferentes situaciones según convenga. Algunos ejemplos son:

- i) $f_\epsilon(t) = \frac{1}{2\epsilon} e^{-\frac{|t-t_0|}{\epsilon}}$.
- ii) $f_\epsilon(t) = \frac{\epsilon}{\pi((t-t_0)^2 + \epsilon^2)}$.
- iii) $f_\epsilon(t) = \frac{1}{\pi(t-t_0)} \sin\left(\frac{t-t_0}{\epsilon}\right)$.
- iv) $f_\epsilon(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\epsilon}} e^{-\frac{(t-t_0)^2}{4\epsilon}}$.

Comprobemos, por ejemplo, la familia i): en primer lugar, se observa que

$$f_\epsilon(t_0) = \frac{1}{2\epsilon} \rightarrow +\infty, \quad \text{cuando } \epsilon \rightarrow 0^+,$$

y si $t \neq t_0$, no es difícil comprobar que

$$f_\epsilon(t) \rightarrow 0, \quad \text{cuando } \epsilon \rightarrow 0^+.$$

Además, haciendo el cambio de variable $y = (t-t_0)/\epsilon$:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} f_\epsilon(t)\psi(t)dt &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\epsilon} e^{-\frac{|t-t_0|}{\epsilon}} \psi(t)dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-|y|}}{2} \psi(t_0 + \epsilon y)dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-|y|}}{2} \psi(t_0)dy = \psi(t_0) \int_0^{+\infty} e^{-y} dy = \psi(t_0). \end{aligned}$$

El resto se comprueban de manera similar.

5.2. Extensión del concepto de derivada

Veamos ahora cómo se puede extender la noción de derivada para que sea aplicable a las distribuciones ó funciones generalizadas como la Delta de Dirac, pero de manera que siga coincidiendo con la noción habitual sobre las funciones conocidas. Para ello se utiliza la siguiente idea: supongamos que tenemos dos funciones regulares f y φ de clase C^1 en el intervalo $[a, b]$. En virtud de la fórmula de integración por partes, sabemos que se verifica

$$\int_a^b f'(t)\varphi(t)dt = f(b)\varphi(b) - f(a)\varphi(a) - \int_a^b f(t)\varphi'(t)dt.$$

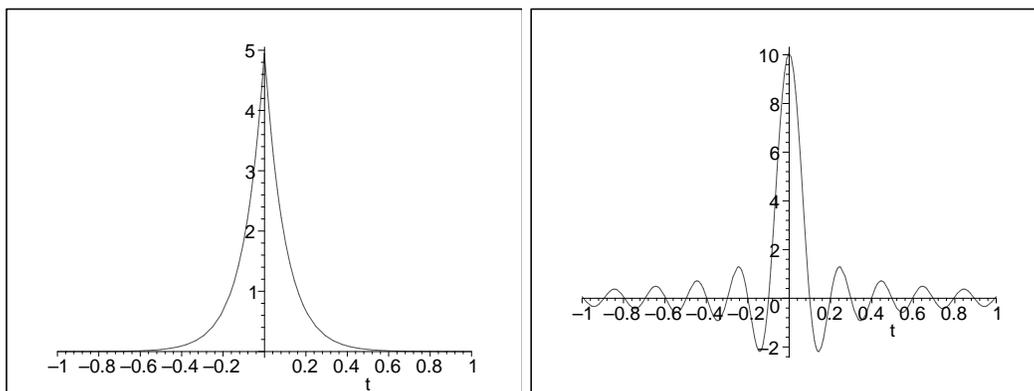


Figura 5.2: *Dos aproximaciones diferentes de la Delta de Dirac en el origen.*

Si la función φ verifica además que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, resulta que

$$\int_a^b f'(t)\varphi(t)dt = - \int_a^b f(t)\varphi'(t)dt. \quad (5.4)$$

Notemos que el término de la izquierda de la expresión (5.4) solamente tiene sentido si f es regular. Sin embargo, el término de la derecha tiene sentido, aunque f no sea derivable en el sentido clásico (por ejemplo, es válido si f es continua a trozos en $[a, b]$). Teniendo este hecho en cuenta, introducimos la siguiente

DEFINICIÓN 5.1 *Dada f una función (clásica o generalizada) en $[a, b]$, se define la derivada primera de f (en el sentido de las distribuciones) como la aplicación lineal*

$$f' : \mathcal{D}(a, b) \longrightarrow \mathbb{R},$$

dada por

$$\int_a^b f'(t)\varphi(t)dt \stackrel{\text{def}}{=} - \int_a^b f(t)\varphi'(t)dt,$$

donde

$$\mathcal{D}(a, b) = \{\varphi \in C^\infty(a, b) : \varphi \equiv 0 \text{ fuera de un subintervalo compacto de } (a, b)\},$$

siempre y cuando la integral de la derecha esté bien definida para cada $\varphi \in \mathcal{D}(a, b)$.

Notemos que en la definición anterior estamos cometiendo un abuso de lenguaje al escribir $\int_a^b f'(t)\varphi(t)dt$, aun cuando esta expresión (en principio) sólo tiene sentido para funciones regulares.

EJEMPLO 5.1 *Para empezar, vamos a calcular la derivada en el sentido de las distribuciones de la función de Heaviside $H(t)$ dada por*

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Eligiendo por ejemplo el intervalo de trabajo $(a, b) = (-1, 1)$, resulta que para cada $\varphi \in \mathcal{D}(-1, 1)$

$$\int_{-1}^1 H'(t)\varphi(t)dt \stackrel{\text{def}}{=} - \int_{-1}^1 H(t)\varphi'(t)dt = - \int_0^1 \varphi'(t)dt = \varphi(0) - \varphi(1) = \varphi(0).$$

Por otro lado, teniendo en cuenta lo que conocemos sobre la Delta de Dirac en el origen ($t_0 = 0$), sabemos que

$$\int_{-1}^1 \delta(t)\varphi(t)dt = \varphi(0),$$

de donde concluimos que

$$\int_{-1}^1 \delta(t)\varphi(t)dt = \int_{-1}^1 H'(t)\varphi(t)dt,$$

para cada $\varphi \in \mathcal{D}(-1, 1)$.

Se dice entonces que la derivada (en el sentido de las distribuciones) de la función de Heaviside coincide con la Delta de Dirac en el origen, es decir, $H'(t) = \delta(t)$.

En el contexto de la teoría de distribuciones, cada f función continua a trozos en $[a, b]$, se identifica con la aplicación lineal

$$f : \mathcal{D}(a, b) \longrightarrow \mathbb{R},$$

definida por

$$\varphi \longrightarrow \int_a^b f(t)\varphi(t)dt.$$

EJEMPLO 5.2 Dada la función

$$f_1(t) = \begin{cases} -t^2 & \text{si } t \in (0, 1) \\ t^2 & \text{si } t \in [1, 2), \end{cases}$$

sabemos que es derivable (en el sentido clásico) en todos los puntos, salvo en $t = 1$ donde es discontinua. Vamos a calcular ahora su derivada en el sentido de las distribuciones. En este caso, tomando $(a, b) = (0, 2)$, por definición, tenemos que para cada $\varphi \in \mathcal{D}(0, 2)$

$$\int_0^2 f_1'(t)\varphi(t)dt \stackrel{\text{def}}{=} - \int_0^2 f_1(t)\varphi'(t)dt = \int_0^1 t^2\varphi'(t)dt - \int_1^2 t^2\varphi'(t)dt.$$

Integrando por partes en cada integral y usando que $\varphi(0) = \varphi(2) = 0$, resulta

$$\begin{aligned} \int_0^2 f_1'(t)\varphi(t)dt &\stackrel{\text{def}}{=} t^2\varphi(t)\Big|_0^1 - \int_0^1 2t\varphi(t)dt - t^2\varphi(t)\Big|_1^2 + \int_1^2 2t\varphi(t)dt = 2\varphi(1) - \int_0^1 2t\varphi(t)dt + \int_1^2 2t\varphi(t)dt = \\ &= 2 \int_0^2 \delta(t-1)\varphi(t)dt + \int_0^2 g_1(t)\varphi(t)dt, \end{aligned}$$

con

$$g_1(t) = \begin{cases} -2t & \text{si } t \in (0, 1) \\ 2t & \text{si } t \in (1, 2). \end{cases}$$

Por ello, tenemos finalmente que

$$f_1'(t) = 2\delta(t-1) + g_1(t).$$

Es decir, la derivada de f_1 en el sentido de las distribuciones viene dada por la suma de g_1 (derivada de f_1 en el sentido clásico en los puntos donde existe) más la Delta de Dirac en $t = 1$ (porque ése es el punto donde f_1 posee una discontinuidad de salto finito) multiplicada por 2 (porque ése es el salto de f_1 en $t = 1$).

COMENTARIOS 5.1 i) En general, es posible utilizar la misma técnica del ejemplo anterior para demostrar que para cada función f de clase C^1 a trozos en un intervalo (a, b) , se verifica que la derivada de f en el sentido de las distribuciones viene dada por

$$f'(t) = (f(t_1^+) - f(t_1^-))\delta(t - t_1) + \dots + (f(t_n^+) - f(t_n^-))\delta(t - t_n) + g(t),$$

siendo t_1, \dots, t_n los puntos de (a, b) donde f presenta discontinuidades de salto finito y

$$g(t) = \begin{cases} f'(t) & \text{si } t \in (a, t_1) \\ f'(t) & \text{si } t \in (t_1, t_2) \\ \dots & \\ f'(t) & \text{si } t \in (t_{n-1}, t_n) \\ f'(t) & \text{si } t \in (t_n, b) \end{cases}$$

donde $f'(t)$ designa la derivada de f en el sentido clásico en los puntos donde existe. Para verlo, basta integrar por partes en cada subintervalo donde la función f es derivable.

- ii) Por supuesto, en los casos en que f es $C^1[a, b]$, su derivada en el sentido de las distribuciones coincide con la derivada clásica, ya que al no tener f discontinuidades las Deltas de Dirac no aparecen.
- iii) Una propiedad interesante de la derivación en el sentido de las distribuciones es que sigue siendo una operación lineal, esto es, la derivada de la suma es la suma de las derivadas y la derivada de una función multiplicada por una constante, viene dada por la constante que multiplica a la derivada de la función. Por ello podemos ahora combinar los ejemplos (5.1)-(5.2) y concluir (por ejemplo) que la derivada en el sentido de las distribuciones de $5H(t)+7f_1(t)$ viene dada por $5\delta(t)+14\delta(t-1)+7g_1(t)$.
- iv) Otra cuestión muy interesante de la nueva noción es que puede aplicarse a funciones generalizadas, como por ejemplo, la propia Delta de Dirac en un punto, obteniéndose que viene dada por

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t-t_0)\varphi(t)dt \stackrel{\text{def}}{=} - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)\varphi'(t)dt = -\varphi'(t_0).$$

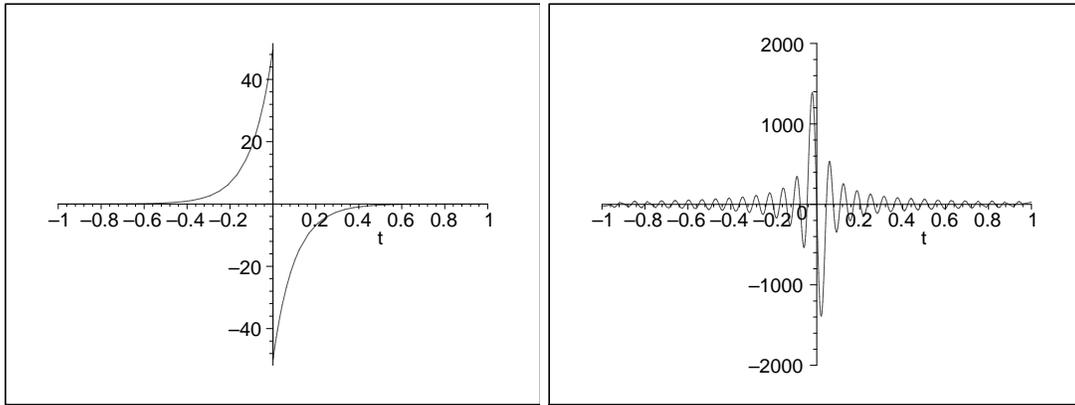


Figura 5.3: Dos aproximaciones diferentes de la derivada de la Delta de Dirac en el origen.

De la misma manera que hemos introducido la derivada primera en el sentido de las distribuciones es evidente que podemos definir la derivada segunda, sin más que tener en cuenta que para funciones f y φ de clase C^2 en el intervalo $[a, b]$, se verifica

$$\begin{aligned} \int_a^b f''(t)\varphi(t)dt &= f'(b)\varphi(b) - f'(a)\varphi(a) - \int_a^b f'(t)\varphi'(t)dt = - \int_a^b f'(t)\varphi'(t)dt = \\ &= -f(b)\varphi'(b) + f(a)\varphi'(a) + \int_a^b f(t)\varphi''(t)dt = \int_a^b f(t)\varphi''(t)dt, \end{aligned}$$

siempre que φ verifique $\varphi(a) = \varphi(b) = \varphi'(a) = \varphi'(b) = 0$.

Teniendo en cuenta esta identidad, planteamos la siguiente

DEFINICIÓN 5.2 Dada f una función (clásica o generalizada) en $[a, b]$, se define la derivada segunda de f (en el sentido de las distribuciones) como la aplicación lineal

$$f'' : \mathcal{D}(a, b) \longrightarrow \mathbb{R},$$

dada por

$$\int_a^b f''(t)\varphi(t)dt \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b f(t)\varphi''(t)dt,$$

siempre y cuando la integral de la derecha esté bien definida para cada $\varphi \in \mathcal{D}(a, b)$.

En general, dada f una función (clásica o generalizada) en $[a, b]$, se define la derivada n -ésima de f (en el sentido de las distribuciones) como la aplicación lineal

$$f^{(n)} : \mathcal{D}(a, b) \longrightarrow \mathbb{R},$$

dada por

$$\int_a^b f^{(n)}(t)\varphi(t)dt \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^n \int_a^b f(t)\varphi^{(n)}(t)dt,$$

siempre y cuando la integral de la derecha esté bien definida para cada $\varphi \in \mathcal{D}(a, b)$.

COMENTARIOS 5.2 *i) Teniendo en cuenta que las funciones φ son de clase C^∞ y, por lo tanto, derivables infinitas veces, una conclusión muy importante de las definiciones anteriores es que las distribuciones (o funciones generalizadas) se pueden derivar infinitas veces en el sentido de las distribuciones.*

ii) Por ejemplo, podemos derivar la Delta de Dirac tantas veces como queramos, obteniendo si $t_0 \in (a, b)$, que

$$\int_a^b \delta''(t - t_0)\varphi(t)dt \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \delta(t - t_0)\varphi''(t)dt = \varphi''(t_0)$$

y sucesivamente

$$\int_a^b \delta^{(n)}(t - t_0)\varphi(t)dt \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^n \int_a^b \delta(t - t_0)\varphi^{(n)}(t)dt = (-1)^n \varphi^{(n)}(t_0)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

En principio, las igualdades anteriores se verifican para $\varphi \in \mathcal{D}(a, b)$, pero usando un argumento de densidad (y paso al límite) se pueden verificar también para toda φ regular sin necesidad de que se anule en a ó b ni ella ni sus derivadas. Este es una cuestión delicada que requiere una demostración matemática rigurosa que excede el nivel técnico de este curso.

iii) Combinando los resultados anteriores y volviendo a los ejemplos (5.1)-(5.2) se pueden comprobar sin mucha dificultad las identidades siguientes:

$$H''(t) = \delta'(t), \dots, H^{(n)}(t) = \delta^{(n-1)}(t),$$

$$f_1''(t) = 2\delta'(t - 1) + 4\delta(t - 1) + g_2(t)$$

con

$$g_2(t) = \begin{cases} -2 & \text{si } t \in (0, 1) \\ 2 & \text{si } t \in (1, 2), \end{cases}$$

$$f_1'''(t) = 2\delta''(t - 1) + 4\delta'(t - 1) + 4\delta(t - 1),$$

y si $n \geq 4$

$$f_1^{(n)}(t) = 2\delta^{(n-1)}(t - 1) + 4\delta^{(n-2)}(t - 1) + 4\delta^{(n-3)}(t - 1).$$

5.3. Transformadas integrales y la Delta de Dirac

Uno de los temas centrales de la teoría de distribuciones desarrollada por Schwartz es ampliar el uso de la Transformada de Fourier a distribuciones y funciones clásicas que no cumplen los requisitos vistos en un capítulo anterior. Veamos cómo hacerlo, a partir de las definiciones vistas allí, entendidas en el sentido generalizado del apartado anterior:

a) $\mathcal{F}(\delta(t - \alpha))(\xi) = e^{-i\xi\alpha}$. Tomando $\alpha = 0$, resulta que $\mathcal{F}(\delta(t))(\xi) = 1$.

$$\mathcal{F}(\delta(t - \alpha))(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \alpha)e^{-i\xi t}dt = e^{-i\xi\alpha}. \tag{5.5}$$

- b) Si $\alpha > 0$, $\mathcal{L}(\delta(t - \alpha))(s) = e^{-s\alpha}$. Por paso al límite cuando $\alpha \rightarrow 0$ en particular tenemos que $\mathcal{L}(\delta(t))(s) = 1$.

$$\mathcal{L}(\delta(t - \alpha))(s) \stackrel{def}{=} \int_0^{+\infty} \delta(t - \alpha)e^{-st} dt = e^{-s\alpha}. \quad (5.6)$$

Notemos que las Transformadas de Fourier y Laplace de $\delta(t)$ no verifican la propiedad de tender hacia 0 cuando $|\xi| \rightarrow +\infty$ (resp. $s \rightarrow +\infty$) que, según vimos en un capítulo anterior, verifican las funciones clásicas.

- c) $\mathcal{F}(\delta'(t - \alpha))(\xi) = i\xi e^{-i\xi\alpha}$. Tomando $\alpha = 0$, resulta que $\mathcal{F}(\delta'(t))(\xi) = i\xi$.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\delta'(t - \alpha))(\xi) &\stackrel{def}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t - \alpha)e^{-i\xi t} dt \stackrel{def}{=} - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \alpha) \frac{d}{dt}(e^{-i\xi t}) dt = \\ &= i\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \alpha)e^{-i\xi t} dt = i\xi e^{-i\xi\alpha}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Análogamente, para cada $n \in \mathbb{N}$, se obtiene la expresión $\mathcal{F}(\delta^{(n)}(t - \alpha))(\xi) = (i\xi)^n e^{-i\xi\alpha}$. Tomando $\alpha = 0$, resulta que $\mathcal{F}(\delta^{(n)}(t))(\xi) = (i\xi)^n$.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\delta^{(n)}(t - \alpha))(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(t - \alpha)e^{-i\xi t} dt = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \alpha) \frac{d^n}{dt^n}(e^{-i\xi t}) dt = \\ &= (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} (-i\xi)^n \delta(t - \alpha)e^{-i\xi t} dt = (i\xi)^n e^{-i\xi\alpha}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

- d) Con la misma filosofía, $\mathcal{F}^{-1}(\delta(\xi - \alpha))(t) = \frac{e^{it\alpha}}{2\pi}$, o equivalentemente, $\mathcal{F}(e^{it\alpha})(\xi) = 2\pi\delta(\xi - \alpha)$.

$$\mathcal{F}^{-1}(\delta(\xi - \alpha))(t) \stackrel{def}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\xi - \alpha)e^{it\xi} d\xi = \frac{e^{it\alpha}}{2\pi}. \quad (5.9)$$

En particular, haciendo $\alpha = 0$, se llega a $\mathcal{F}^{-1}(\delta(\xi))(t) = \frac{1}{2\pi}$ ó $\mathcal{F}(1)(\xi) = 2\pi\delta(\xi)$. Usando la expresión integral de la Transformada de Fourier, estas identidades se pueden expresar como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it(\xi - \alpha)} dt = 2\pi\delta(\xi - \alpha) \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\xi} dt = 2\pi\delta(\xi). \quad (5.10)$$

Concretamente, estas expresiones (5.10) son muy usadas en Física Cuántica en el contexto de ondas de electrones y de vibraciones.

Es bien conocido que para poder calcular la raíz cuadrada de un número real negativo hay que salirse del conjunto de los números reales, porque su valor es un número complejo. De una manera similar, para poder calcular la transformada de Fourier de la función constantemente igual a 1 debemos salirnos del conjunto de las funciones clásicas (ya vimos al principio del Capítulo 3 que ahí no existe) e irnos al espacio de las distribuciones.

- e) $\mathcal{F}^{-1}(\delta'(\xi - \alpha))(t) = -\frac{it}{2\pi}e^{it\alpha}$ ó $\mathcal{F}(te^{it\alpha})(\xi) = 2\pi i\delta'(\xi - \alpha)$. En particular, $\mathcal{F}^{-1}(\delta'(\xi))(t) = \frac{-it}{2\pi}$ ó $\mathcal{F}(t)(\xi) = 2\pi i\delta'(\xi)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}(\delta'(\xi - \alpha))(t) &\stackrel{def}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(\xi - \alpha)e^{it\xi} d\xi = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\xi - \alpha) \frac{d}{d\xi}(e^{it\xi}) d\xi = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\xi - \alpha)ite^{it\xi} d\xi = -\frac{it}{2\pi}e^{it\alpha}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Análogamente, para cada $n \in \mathbb{N}$, se deduce la expresión

$$\mathcal{F}^{-1}(\delta^{(n)}(\xi - \alpha))(t) = \frac{(-it)^n}{2\pi} e^{it\alpha} \quad \text{ó} \quad \mathcal{F}(t^n e^{it\alpha})(\xi) = 2\pi i^n \delta^{(n)}(\xi - \alpha). \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}(\delta^{(n)}(\xi - \alpha))(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(\xi - \alpha) e^{it\xi} d\xi = (-1)^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\xi - \alpha) \frac{d^n}{d\xi^n} (e^{it\xi}) d\xi = \\ &= (-1)^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\xi - \alpha) (it)^n e^{it\xi} d\xi = \frac{(-it)^n}{2\pi} e^{it\alpha} \end{aligned}$$

Nuevamente, considerando el caso particular $\alpha = 0$, llegamos a que

$$\mathcal{F}^{-1}(\delta^{(n)}(\xi))(t) = \frac{(-it)^n}{2\pi} \quad \text{ó} \quad \mathcal{F}(t^n)(\xi) = 2\pi i^n \delta^{(n)}(\xi).$$

Usando la linealidad, podemos obtener entonces la Transformada de Fourier (generalizada) de cualquier polinomio:

$$\mathcal{F}(a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n)(\xi) = 2\pi \sum_{k=0}^n a_k i^k \delta^{(k)}(\xi). \quad (5.13)$$

5.4. Cambio de variables y la Delta de Dirac

Queremos ver ahora cómo podemos aplicar la noción de cambio de variables a otras funciones generalizadas o distribuciones como la Delta de Dirac. Supongamos que tenemos dos funciones regulares g y φ de clase C^1 en el intervalo $[a, b]$, de forma que $g : (a, b) \rightarrow (c, d)$ es estrictamente creciente y otra función f de clase C^1 en el intervalo $[a, b]$. Utilizando el cambio de variables $s = g(t)$, se verifica

$$\int_a^b f(g(t)) \varphi(t) dt = \int_c^d f(s) \varphi(g^{-1}(s)) \frac{ds}{g'(g^{-1}(s))}.$$

Si la función g es estrictamente decreciente, la expresión anterior sólo varía en el signo, por lo que ambas pueden agruparse en la forma

$$\int_a^b f(g(t)) \varphi(t) dt = \int_c^d f(s) \varphi(g^{-1}(s)) \frac{ds}{|g'(g^{-1}(s))|}. \quad (5.14)$$

Teniendo en cuenta esta igualdad, resultan razonables las siguientes “definiciones”:

a) Para cada $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$,

$$\delta(kt - t_0) = \frac{1}{|k|} \delta\left(t - \frac{t_0}{k}\right).$$

Tomando $g(t) = kt - t_0$ en la expresión (5.14), se sigue

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(kt - t_0) \varphi(t) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(s) \varphi\left(\frac{s + t_0}{k}\right) \frac{ds}{|k|} = \frac{1}{|k|} \varphi\left(\frac{t_0}{k}\right) = \\ &= \frac{1}{|k|} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(t - \frac{t_0}{k}\right) \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

En particular, $\delta(-t) = \delta(t)$.

- b) Supongamos que $g(t)$ es una función con un número finito $t_j, j = 1, \dots, N$ de ceros reales y simples. Entonces,

$$\delta(g(t)) = \sum_{j=1}^N \frac{\delta(t - t_j)}{|g'(t_j)|}. \quad (5.15)$$

Notemos que si algún t_j es un cero múltiple de $g(t)$, la expresión anterior no tiene sentido, porque $g'(t_j) = 0$. En particular, si $t_1 \neq t_2$,

$$\delta((t - t_1)(t - t_2)) = \frac{1}{|t_2 - t_1|} (\delta(t - t_1) + \delta(t - t_2)).$$

5.5. Otras propiedades de la Delta de Dirac

1. Para cada función $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$, se verifica $\phi(t)\delta(t - t_0) = \phi(t_0)\delta(t - t_0)$. En particular, $\phi(t)\delta(t) = \phi(0)\delta(t)$ y $(t - t_0)^n \delta(t - t_0) = 0$, si $n > 0$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\delta(t - t_0)\varphi(t)dt = \phi(t_0)\varphi(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t_0)\delta(t - t_0)\varphi(t)dt.$$

Como casos particulares se obtienen por ejemplo

$$t\delta(t) = 0, \quad e^t\delta(t) = \delta(t), \quad (5t^3 + 2t - 3)\delta(t - 1) = 4\delta(t - 1), \quad \cos(t)\delta(t + \pi) = -\delta(t + \pi).$$

2. Para cada función $\phi \in C(\mathbb{R})$, se verifica $\delta(t - t_0) \star \phi(t) = \phi(t) \star \delta(t - t_0) = \phi(t - t_0)$. En particular, $\delta(t) \star \phi(t) = \phi(t) \star \delta(t) = \phi(t)$, es decir, la Delta de Dirac en el origen es el elemento neutro para el producto de convolución según la Definición 3.3:

$$(\delta(t - t_0) \star \phi(t))(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - s - t_0)\phi(s)ds = \phi(t - t_0),$$

$$(\phi(t) \star \delta(t - t_0))(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t - s)\delta(s - t_0)ds = \phi(t - t_0).$$

Notemos además que si $t_0 \geq 0$ y $\phi(t) = 0$ para cada $t < 0$, se verifica

$$\delta(t - t_0) \star \phi(t) = \begin{cases} \phi(t - t_0) & \text{si } t \geq t_0 \\ 0 & \text{si } t < t_0 \end{cases}$$

3. Se verifica la identidad

$$t\delta'(t) = -\delta(t),$$

ya que para cada $\varphi \in \mathcal{D}(-1, 1)$, se satisface

$$\int_{-1}^1 t\delta'(t)\varphi(t)dt = - \int_{-1}^1 \delta(t) (t\varphi(t))' dt = - \int_{-1}^1 \delta(t) (\varphi(t) + t\varphi'(t)) dt = -\varphi(0) = - \int_{-1}^1 \delta(t)\varphi(t)dt.$$

5.6. Series de Fourier y la Delta de Dirac

Para empezar, podemos utilizar las expresiones vistas anteriormente (ver (2.19)-(2.21)) para obtener el desarrollo en serie de Fourier de la Delta de Dirac en un punto $t = t_0 \in (-\pi, \pi)$:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(t - t_0) \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \cos(nt_0), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.16)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(t - t_0) \sin(nt) dt = \frac{1}{\pi} \sin(nt_0) \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5.17)$$

de donde se llega a la identidad

$$\begin{aligned} \delta(t - t_0) &= \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (\cos(nt_0) \cos(nt) + \sin(nt_0) \sin(nt)) = \\ &= \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n(t - t_0)), \quad t \in (-\pi, \pi). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Notemos que los coeficientes a_n y b_n no verifican (en general) la propiedad de tender hacia 0 cuando $n \rightarrow +\infty$, porque la Desigualdad de Bessel deja de tener sentido en este contexto.

Como consecuencia de (5.18) extendida por 2π -periodicidad, se llega a que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - (t_0 + 2k\pi)) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n(t - t_0)), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (5.19)$$

Utilizando las fórmulas análogas a (5.16)-(5.17) para $\delta'(t - t_0)$, obtenemos otras identidades igualmente interesantes

$$\delta'(t - t_0) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} n (\sin(nt_0) \cos(nt) - \cos(nt_0) \sin(nt)), \quad t \in (-\pi, \pi), \quad (5.20)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta'(t - (t_0 + 2k\pi)) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} n (\sin(nt_0) \cos(nt) - \cos(nt_0) \sin(nt)), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (5.21)$$

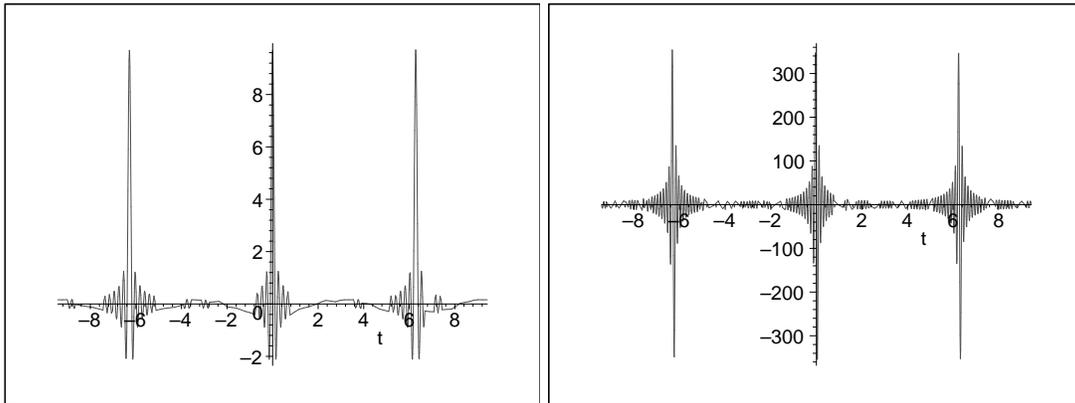


Figura 5.4: *Aproximación de Fourier para la Delta de Dirac y su derivada en el origen.*

La figura 5.4 muestra las sumas parciales (con cincuenta términos cada una) de las series de Fourier asociadas a la Delta de Dirac en el origen y su derivada en $[-\pi, \pi]$, aunque representadas en el intervalo $[-3\pi, 3\pi]$. Por supuesto, se pueden obtener expresiones análogas para la derivadas de orden superior.

Otra cuestión interesante tiene que ver con la relación que existe entre la serie de Fourier de $f'(t)$ y la derivada de la serie de Fourier asociada a $f(t)$. Vamos a ver que en ocasiones coinciden y que en otros casos no. Para fijar ideas, supongamos que $f(t)$ es una función C^1 a trozos en $[-\pi, \pi]$, que tiene eventualmente una discontinuidad de salto finito en un punto t_1 y que existe $f'(t)$ para cada $t \neq t_1$. Como hemos hecho anteriormente, denotamos

$$g(t) = \begin{cases} f'(t) & \text{si } t \in (-\pi, t_1) \\ f'(t) & \text{si } t \in (t_1, \pi) \end{cases}$$

Vamos a estudiar la relación existente entre los coeficientes de Fourier asociados a f y g , que designaremos por (a_n, b_n) y (a'_n, b'_n) , respectivamente. Integrando por partes las expresiones iniciales se sigue que

$$a'_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{t_1} f'(t) dt + \int_{t_1}^{\pi} f'(t) dt \right) = \frac{1}{\pi} (f(t_1^-) - f(-\pi^+) + f(\pi^-) - f(t_1^+)). \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} a'_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{t_1} f'(t) \cos(nt) dt + \int_{t_1}^{\pi} f'(t) \cos(nt) dt \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(f(t) \cos(nt) \Big|_{-\pi}^{t_1} + n \int_{-\pi}^{t_1} f(t) \sin(nt) dt + f(t) \cos(nt) \Big|_{t_1}^{\pi} + n \int_{t_1}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} ((f(t_1^-) - f(t_1^+)) \cos(nt_1) + (f(\pi^-) - f(-\pi^+)) \cos(n\pi)) + nb_n, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} b'_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin(nt) dt = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{t_1} f'(t) \sin(nt) dt + \int_{t_1}^{\pi} f'(t) \sin(nt) dt \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(f(t) \sin(nt) \Big|_{-\pi}^{t_1} - n \int_{-\pi}^{t_1} f(t) \cos(nt) dt + f(t) \sin(nt) \Big|_{t_1}^{\pi} - n \int_{t_1}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \right) = \\ &= \frac{\sin(nt_1)}{\pi} (f(t_1^-) - f(t_1^+)) - na_n, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.24)$$

Teniendo en cuenta las expresiones (5.22)-(5.24), se llega a las siguientes conclusiones:

1. Si f es continua en t_1 y $f(-\pi^+) = f(\pi^-)$, la serie de Fourier de g coincide con la derivada (término a término) de la serie de Fourier asociada a f , ya que

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)), \quad \forall t \in (-\pi, \pi),$$

mientras que

$$g(t) = \frac{a'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a'_n \cos(nt) + b'_n \sin(nt)) = \sum_{n=1}^{\infty} (-na_n \sin(nt) + nb_n \cos(nt)), \quad \forall t \in (-\pi, \pi), t \neq t_1,$$

dado que $a'_0 = 0$, $a'_n = nb_n$ y $b'_n = -na_n$.

2. Si f no es continua en t_1 , pero $f(-\pi^+) = f(\pi^-)$, la serie de Fourier de la derivada de f en el sentido de las distribuciones coincide con la derivada (término a término) de la serie de Fourier asociada a f en $(-\pi, \pi)$, ya que

$$\left. \begin{array}{l} f(t) \\ \frac{f(t_1^+) + f(t_1^-)}{2} \end{array} \right\} \text{ si } t \in [-\pi, \pi], t \neq t_1 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)),$$

mientras que usando (5.18) se tiene

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{a'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a'_n \cos(nt) + b'_n \sin(nt)) = \\ &= (f(t_1^-) - f(t_1^+)) \delta(t - t_1) + \sum_{n=1}^{\infty} (-na_n \sin(nt) + nb_n \cos(nt)), \end{aligned}$$

o equivalentemente,

$$f'(t) = g(t) + (f(t_1^+) - f(t_1^-)) \delta(t - t_1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-na_n \sin(nt) + nb_n \cos(nt)).$$

3. Si f no es continua en t_1 y $f(-\pi^+) \neq f(-\pi^-)$, aparece además otra Delta de Dirac:

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{a'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a'_n \cos(nt) + b'_n \sin(nt)) = \\ &= (f(t_1^-) - f(t_1^+)) \delta(t - t_1) + (f(\pi^-) - f(-\pi^+)) \delta(t - \pi) + \sum_{n=1}^{\infty} (-na_n \sin(nt) + nb_n \cos(nt)), \end{aligned}$$

que se corresponde con la discontinuidad de salto finito que aparece en los múltiplos de π , cuando se extiende la función f por periodicidad.

EJEMPLO 5.3 1. Es sencillo comprobar que

$$\frac{t^2}{2} = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2} \cos(nt), \quad \forall t \in [-\pi, \pi].$$

Como $f(t) = \frac{t^2}{2}$ es de clase C^1 en $[-\pi, \pi]$ y además $f(\pi) = f(-\pi)$, se sigue del desarrollo anterior que podemos obtener el desarrollo en serie de Fourier de la función $f'(t) = t$, sin más que derivar término a término la serie de la derecha, llegando a

$$\left. \begin{array}{l} t \quad \text{si } t \in (-\pi, \pi) \\ 0 \quad \text{si } t \in \{-\pi, \pi\} \end{array} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nt).$$

2. Otro caso similar sería

$$|t| = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2} \cos(nt), \quad \forall t \in [-\pi, \pi].$$

Como $f(t) = |t|$ es continua y de clase C^1 a trozos en $[-\pi, \pi]$ y además $f(\pi) = f(-\pi)$, obtenemos el desarrollo en serie de Fourier de la función $g(t) = \text{signo}(t)$, sin más que derivar término a término la expresión anterior:

$$\left. \begin{array}{l} -1 \quad \text{si } t \in (-\pi, 0) \\ 0 \quad \text{si } t \in \{-\pi, 0, \pi\} \\ 1 \quad \text{si } t \in (0, \pi) \end{array} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1 - (-1)^n)}{\pi n} \sin(nt).$$

A partir de esta identidad extendida por 2π -periodicidad a todo \mathbb{R} , se llega a que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \delta(t - k\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - (-1)^n)}{\pi} \cos(nt), \quad \text{en } \mathbb{R}.$$

Y si seguimos derivando

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \delta'(t - k\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n((-1)^n - 1)}{\pi} \sin(nt), \quad \text{en } \mathbb{R}.$$

5.7. EDO y la Delta de Dirac

En correspondencia con las propiedades que vimos en la sección 5.5, es fácil convencerse que el conjunto de las soluciones de algunas EDO también puede ampliarse con respecto de lo que estamos acostumbrados en el campo clásico. Por ejemplo:

1. la EDO $x'(t) = 0$ admite como soluciones $x(t) = C_1$ para cada $C_1 \in \mathbb{R}$,
2. la EDO $tx'(t) = 0$ admite como soluciones $x(t) = C_1H(t) + C_2$ para cada $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$,
3. la EDO $t^2x'(t) = 0$ admite como soluciones $x(t) = C_1H(t) + C_2\delta(t) + C_3$ para cada $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

Se observa aquí que el número de constantes arbitrarias que aparecen al integrar una EDO lineal en el espacio de las distribuciones puede no coincidir con su orden, como sucede siempre en el caso clásico. Esta discrepancia viene motivada por la presencia de coeficientes de $x'(t)$ que se anulan en algún punto (el origen, en este caso), pero no se produce cuando los coeficientes son constantes (entonces el conjunto de soluciones clásicas y generalizadas coincide).

Vamos a considerar ahora un sistema masa-muelle sobre el que actúa una fuerza externa $f(t)$ que depende del tiempo. La situación se puede modelizar usando la EDO de segundo orden

$$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = f(t),$$

donde $x(t)$ es el desplazamiento de la masa respecto del punto de equilibrio, m es la masa que cuelga del muelle, k es una constante positiva que mide la rigidez del muelle y c es otra constante positiva que mide la amortiguación del sistema y que depende del medio donde se desplaza. Supongamos que en el instante inicial la masa se encuentra en reposo en su posición de equilibrio (es decir, $x(0) = x'(0) = 0$). Si en un instante $t = t_0 > 0$ aplicamos un fuerte martillazo “instantáneo.^a la masa, el modelo matemático del sistema quedaría

$$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = \delta(t - t_0), \quad x(0) = x'(0) = 0. \quad (5.25)$$

Para determinar la solución del problema, vamos a aplicar transformada de Laplace. Teniendo en cuenta las propiedades vistas para la transformada se llega a que

$$(ms^2 + cs + k) \mathcal{L}(x)(s) = \mathcal{L}(\delta(t - t_0))(s), \quad (5.26)$$

de donde

$$\mathcal{L}(x)(s) = \frac{\mathcal{L}(\delta(t - t_0))(s)}{ms^2 + cs + k}, \quad (5.27)$$

Dependiendo ahora de los valores de m , c y k , podemos determinar $x(t)$, invirtiendo la transformada anterior. Por ejemplo, si $m = 1$, $k = 2$ y $c = 3$, se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x)(s) &= \frac{\mathcal{L}(\delta(t - t_0))(s)}{s^2 + 3s + 2} = \mathcal{L}(\delta(t - t_0))(s) \left(\frac{1}{(s+1)(s+2)} \right) = \mathcal{L}(\delta(t - t_0))(s) \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \right) = \\ &= \mathcal{L}(\delta(t - t_0))(s) \mathcal{L}(e^{-t} - e^{-2t})(s) = \mathcal{L}(\delta(t - t_0) \star (e^{-t} - e^{-2t}))(s) = \mathcal{L} \left(\int_0^t \delta(t - t_0 - r)(e^{-r} - e^{-2r}) dr \right) (s). \end{aligned}$$

Usando (5.2)-(5.3) se llega finalmente a que

$$x(t) = \int_0^t \delta(t - t_0 - r)(e^{-r} - e^{-2r}) dr = \begin{cases} e^{-(t-t_0)} - e^{-2(t-t_0)} & \text{si } t \geq t_0 \\ 0 & \text{si } t < t_0 \end{cases}$$

5.8. EDP y la Delta de Dirac

En un capítulo anterior, se estudiaron algunas aplicaciones de la transformada de Fourier a la resolución de distintas EDP, cuando el dominio espacial es \mathbb{R} . Más concretamente, resolvimos el problema de difusión del calor en un alambre “infinito”, supuesta conocida la temperatura inicial en cada punto (ver (3.14))

$$\begin{cases} u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), & x \in \mathbb{R}, t > 0 & \text{Ec. del Calor} \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R} & \text{Condición inicial} \end{cases} \quad (5.28)$$

obteniendo que la solución viene dada por (ver (3.18))

$$u(x, t) = f(x) \star \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)e^{-\frac{y^2}{4t}} dy. \quad (5.29)$$

Como se aprecia, en la expresión anterior tiene un protagonismo destacado la función

$$E(x, t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}},$$

que se denomina **núcleo gaussiano** ó **solución fundamental de la Ec. del Calor**. Considerando que t juega el papel del parámetro que tiende hacia 0, no es difícil identificar la función anterior como una de las familias de la sección 5.1 que definen la Delta de Dirac en $x = 0$ en el sentido de que

$$E(x, t) \rightarrow \delta(x), \quad \text{cuando } t \rightarrow 0^+.$$

Otro tanto puede decirse de la solución del problema elíptico en un semiplano (ver (3.20))

$$\begin{cases} u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0, & x \in \mathbb{R}, y > 0 & \text{Ec. de Laplace} \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R}. & \text{Condición de Contorno} \end{cases} \quad (5.30)$$

cuya solución se puede expresar (ver (3.22)) como

$$u(x, y) = f(x) \star \frac{y}{\pi(x^2 + y^2)} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-z) \frac{y}{\pi(z^2 + y^2)} dz. \quad (5.31)$$

En este caso, la función

$$\tilde{E}(x, y) = \frac{y}{\pi(x^2 + y^2)},$$

es la que juega un papel fundamental en la resolución del problema y de manera similar a lo que pasaba en el caso anterior, considerando ahora que y es el parámetro que tiende hacia 0, se puede identificar esa función como otra de las familias de la sección 5.1 que definen la Delta de Dirac en $x = 0$, en la forma

$$\tilde{E}(x, y) \rightarrow \delta(x), \quad \text{cuando } y \rightarrow 0^+.$$

Para profundizar en la teoría de distribuciones desde un punto de vista riguroso, incluyendo sus aplicaciones al estudio de los problemas de contorno generales asociados a EDP en dimensión mayor o igual que uno, se pueden utilizar los libros de Casas, Folland y Renardy-Rogers citados en la bibliografía.

5.9. Distribuciones con Wolfram Alpha

Es posible operar y calcular derivadas e integrales, en el sentido de las distribuciones, usando la misma sintaxis que para las funciones clásicas e incluso mezcladas con ellas:

$$\text{dirac}(-t) - \text{dirac}(t) = 0,$$

$$\begin{aligned}
t * \text{dirac}(t) &= 0, \\
(t^2 + 3) * \text{dirac}(t) &= 3 * \text{dirac}(t), \\
(t^2 + 3) * \text{dirac}(t) + t &= 3 * \text{dirac}(t) + t, \\
\text{diff}(\text{heaviside}(t), t) &= \text{dirac}(t), \\
\text{diff}(\text{dirac}(t), t) &= \text{dirac}'(t), \\
\text{diff}(\text{dirac}'(t) + \cos(t), t) &= \text{dirac}''(t) - \sin(t), \\
\text{dirac}'(-t) - \text{dirac}'(t) &= -2\text{dirac}'(t), \\
\text{dirac}''(-t) - \text{dirac}''(t) &= 0, \\
\text{int}(\text{dirac}(t - 2) * t^3, t = 0..1) &= 0, \\
\text{int}(\text{dirac}(t - 2) * t^3, t = 0..6) &= 8, \\
\text{int}(t^2 + \text{dirac}(t - 2)t^3, t = 0..6) &= 80, \\
\text{int}(\text{dirac}'(t) * (t - 1), t = -1..1) &= -1, \\
\text{int}(\text{dirac}''(t) * t^2, t = -1..1) &= 2,
\end{aligned}$$

También se pueden calcular transformadas de Fourier y sus inversas.

Por ello, Bajo esta premisa, resulta que

Conviene recordar de nuevo que para obtener en Wolfram Alpha la transformada de Fourier que nosotros estamos manejando (ver el comentario 3.1) **tenemos que elegir el resultado con normalización 1 y factor de oscilación -1** , en el menú desplegable. Bajo esta premisa, resulta

$$\begin{aligned}
\text{fourier}(\text{dirac}(x - 2), x, w) &= e^{-2iw}, \\
\text{fourier}(\text{dirac}(x), x, w) &= 1, \\
\text{fourier}(\text{dirac}'(x - 5), x, w) &= iwe^{-5iw}, \\
\text{fourier}(\text{dirac}'(x), x, w) &= iw, \\
\text{fourier}(\text{dirac}'''(x), x, w) &= -iw^3, \\
\text{fourier}(1 + 3 * x - 5 * x^2, x, w) &= 2\pi (\text{dirac}(w) + 3i\text{dirac}'(w) + 5\text{dirac}''(w)),
\end{aligned}$$

De la misma forma,

$$\text{invfourier}(\text{dirac}(w - 2), w, x) = \frac{e^{-2ix}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Notemos de nuevo que esta transformada inversa es la que corresponde a la implementación por defecto en Wolfram Alpha y que para obtener la correspondiente a nuestro caso hay que dividir la expresión anterior por $\sqrt{2\pi}$ y cambiar x por $-x$. Igualmente

$$\text{invfourier}(\text{dirac}'(w - 3), w, x) = \frac{ixe^{-3ix}}{\sqrt{2\pi}},$$

$$\text{invfourier}(w^4, w, x) = \sqrt{2\pi}\text{dirac}''''(x)$$

En el caso de la Transformada de Laplace no se precisa hacer ningún cambio:

$$\text{laplace}(\text{dirac}(t - 2), t, s) = e^{-2s},$$

$$\text{laplace}(\text{dirac}(t), t, s) = 1,$$

$$\text{invlaplace}(1, s, t) = \text{dirac}(t).$$

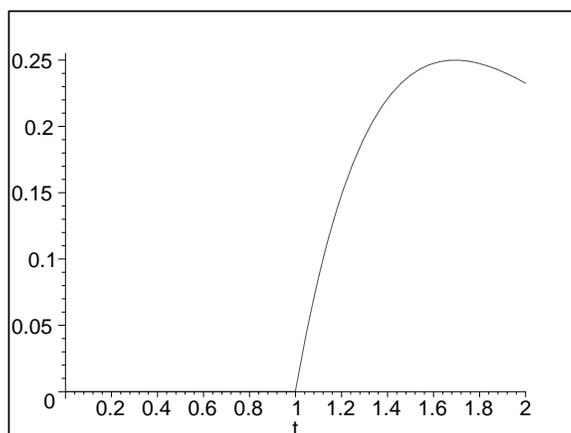


Figura 5.5: *Solución del Problema de Cauchy con la Delta de Dirac.*

Wolfram Alpha permite resolver EDO con Deltas de Dirac, exactamente igual que en el caso de funciones clásicas:

$$y''(t) + 3 * y'(t) + 2 * y(t) = \text{dirac}(t - 1), y(0) = 0, y'(0) = 0,$$

$$y(t) = e^{1-2t} (e^t - e) \text{heaviside}(t - 1).$$

Se observa claramente en la figura 5.5 que la solución del problema es derivable en todos los puntos, en el sentido clásico, salvo en $t = 1$, aunque verifica la EDO en el sentido de las distribuciones.

Bibliografía sobre Distribuciones:

1. "Principios de Mecánica Cuántica", P. A. M. Dirac, Ariel, 1968.
2. "Métodos matemáticos para las ciencias físicas", L. Schwartz, Selecciones Científicas, 1969.
3. "Mathematical methods for physicists", G. B. Arfken y H. J. Weber, Harcourt-Academic Press, 2001.
4. "Generalized functions in Mathematical Physics", V. S. Vladimirov, USSR, 1979.
5. "Distribution theory and transform analysis: an introduction to generalized functions with applications", A. H. Zemanian, Dover, 1987.
6. "Theory of distributions : a non-technical introduction", J. I. Richards, H. K. Youn, Cambridge University Press, 1990.
7. "A Collection of Problems on the Equations of Mathematical Physics", V. S. Vladimirov, Mir, 1986.
8. "Introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales", E. Casas, Universidad de Cantabria, 1992.
9. "Fourier analysis and its applications", G. B. Folland, Wadsworth and Brooks, 1992.
10. "An introduction to Partial Differential Equations", M. Renardy y R. C. Rogers, Springer, 2004.

Recursos en Internet sobre Distribuciones:

1. <http://mathworld.wolfram.com/DeltaFunction.html>
2. http://en.wikipedia.org/wiki/Dirac_delta_function

3. Los orígenes de la Teoría de Distribuciones (Fernando Bombal, UCM)
<http://personales.unican.es/lafernandez/Origenes.de.la.Teoria.de.Distribuciones.pdf>
4. https://en.wikipedia.org/wiki/Paul_Dirac
5. Laurent Schwartz, el matemático que quería cambiar el mundo (Fernando Bombal, UCM)
<http://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=57>

Apéndice A

Método de separación de variables

A.1. Ecuación del Calor (dimensión espacial uno)

	$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t)$
$u(0, t) = u(L, t) = 0$	$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 t}{L^2}\right)$
$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0$	$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 t}{L^2}\right)$

A.2. Ecuación de Ondas (dimensión espacial uno)

	$u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t)$
$u(0, t) = u(L, t) = 0$	$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \right)$
$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0$	$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \frac{b_0}{2}t + \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \right)$

A.3. Ecuación de Laplace

	$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0$
$u(0, y) = u(L, y) = 0$	$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left(a_n \cosh\left(\frac{n\pi y}{L}\right) + b_n \sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \right)$
$u_x(0, y) = u_x(L, y) = 0$	$u(x, y) = \frac{a_0}{2} + \frac{b_0}{2}y + \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left(a_n \cosh\left(\frac{n\pi y}{L}\right) + b_n \sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \right)$

A.4. Ecuación del Calor (dimensión espacial dos)

$$\begin{cases} u_t(x, y, t) = u_{xx}(x, y, t) + u_{yy}(x, y, t), & \text{si } x \in (0, L), y \in (0, K), t > 0, \\ u(0, y, t) = u(L, y, t) = 0, & \text{si } y \in (0, K), t > 0, \\ u(x, 0, t) = u(x, K, t) = 0, & \text{si } x \in (0, L), t > 0, \\ u(x, y, 0) = f(x, y), & \text{si } x \in (0, L), y \in (0, K). \end{cases}$$

La solución general viene dada por

$$u(x, y, t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{K}\right) e^{-\left(\frac{n^2}{L^2} + \frac{m^2}{K^2}\right)\pi^2 t}.$$

Los coeficientes a_{nm} se calculan utilizando el desarrollo en serie de Fourier doble de senos de la función $f(x, y)$ en $(0, L) \times (0, K)$.

A.5. Ecuación de Ondas (dimensión espacial dos)

$$\begin{cases} u_{tt}(x, y, t) = u_{xx}(x, y, t) + u_{yy}(x, y, t), & \text{si } x \in (0, L), y \in (0, K), t > 0, \\ u(0, y, t) = u(L, y, t) = 0, & \text{si } y \in (0, K), t > 0, \\ u(x, 0, t) = u(x, K, t) = 0, & \text{si } x \in (0, L), t > 0, \\ u(x, y, 0) = f(x, y), & \text{si } x \in (0, L), y \in (0, K), \\ u_t(x, y, 0) = g(x, y), & \text{si } x \in (0, L), y \in (0, K). \end{cases}$$

La solución general viene dada por

$$u(x, y, t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{K}\right) \left(a_{nm} \cos\left(t\pi\sqrt{\frac{n^2}{L^2} + \frac{m^2}{K^2}}\right) + b_{nm} \sin\left(t\pi\sqrt{\frac{n^2}{L^2} + \frac{m^2}{K^2}}\right) \right).$$

Los coeficientes a_{nm} y b_{nm} se calculan utilizando el desarrollo en serie de Fourier doble de senos de las funciones $f(x, y)$ y $g(x, y)$ en $(0, L) \times (0, K)$.

A.6. Ecuación del Calor (geometría circular)

$$\begin{cases} u_t(x, y, t) = u_{xx}(x, y, t) + u_{yy}(x, y, t), & \text{si } x^2 + y^2 < 1, t > 0, \\ u(x, y, t) = 0, & \text{si } x^2 + y^2 = 1, t > 0, \\ u(x, y, 0) = f(\sqrt{x^2 + y^2}), & \text{si } x^2 + y^2 < 1. \end{cases}$$

Las soluciones acotadas en el círculo vienen dadas por

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\mu_n \sqrt{x^2 + y^2}) \exp(-\mu_n^2 t),$$

donde $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son los ceros positivos de J_0 y los coeficientes a_n se calculan utilizando el desarrollo en serie de Fourier-Bessel (con J_0) de la función f .

A.7. Ecuación de Ondas (geometría circular)

$$\begin{cases} u_{tt}(x, y, t) = u_{xx}(x, y, t) + u_{yy}(x, y, t), & \text{si } x^2 + y^2 < 1, t > 0, \\ u(x, y, t) = 0, & \text{si } x^2 + y^2 = 1, t > 0, \\ u(x, y, 0) = f(\sqrt{x^2 + y^2}), & \text{si } x^2 + y^2 < 1, \\ u_t(x, y, 0) = g(\sqrt{x^2 + y^2}), & \text{si } x^2 + y^2 < 1. \end{cases}$$

Las soluciones acotadas en el círculo vienen dadas por

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} J_0(\mu_n \sqrt{x^2 + y^2}) (a_n \cos(\mu_n t) + b_n \sin(\mu_n t)),$$

donde $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son los ceros positivos de J_0 y los coeficientes a_n y b_n se calculan utilizando el desarrollo en serie de Fourier-Bessel (con J_0) de las funciones f y g , resp.

A.8. Ecuación de Laplace (geometría circular)

$$\begin{cases} u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0, & \text{si } x^2 + y^2 < 1, \\ u(x, y) = f(x, y), & \text{si } x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Las soluciones acotadas en el círculo vienen dadas por

$$u(x, y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)),$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\theta = \arctan(y/x)$ y los coeficientes a_n y b_n se calculan utilizando el desarrollo en serie de Fourier de la función $\hat{f}(\theta) = f(\cos(\theta), \sin(\theta))$.

Apéndice B

Tablas de Transformadas

B.1. Transformadas de Fourier

$f(x)$	$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\xi x} dx$
$f'(x)$	$i\xi \mathcal{F}(f)(\xi)$
$xf(x)$	$i \frac{d\mathcal{F}(f)(\xi)}{d\xi}$
$f(x - \alpha)$	$e^{-i\alpha\xi} \mathcal{F}[f(x)](\xi)$
$e^{i\alpha x} f(x)$	$\mathcal{F}[f(x)](\xi - \alpha)$
$f(\alpha x), \alpha \neq 0$	$\frac{1}{ \alpha } \mathcal{F}[f(x)](\frac{\xi}{\alpha})$
$(f \star g)(x)$	$\mathcal{F}(f)(\xi) \cdot \mathcal{F}(g)(\xi)$
e^{-x^2}	$\sqrt{\pi} e^{-\xi^2/4}$
$e^{- x }$	$\frac{2}{\xi^2 + 1}$
$\frac{1}{x^2 + 1}$	$\pi e^{- \xi }$
$\delta(x - \alpha), \alpha \in \mathbb{R}$	$e^{-i\xi\alpha}$
$\delta(x)$	1
$\delta^{(n)}(x - \alpha), \alpha \in \mathbb{R}$	$(i\xi)^n e^{-i\xi\alpha}$
$\delta'(x)$	$i\xi$
$\delta^{(n)}(x)$	$(i\xi)^n$
1	$2\pi\delta(\xi)$
$e^{ix\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$	$2\pi\delta(\xi - \alpha)$
$\sin(x\alpha), \alpha \in \mathbb{R}$	$i\pi(\delta(\xi + \alpha) - \delta(\xi - \alpha))$
$\cos(x\alpha), \alpha \in \mathbb{R}$	$\pi(\delta(\xi - \alpha) + \delta(\xi + \alpha))$
$x^n e^{ix\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$	$2\pi i^n \delta^{(n)}(\xi - \alpha)$
x^n	$2\pi i^n \delta^{(n)}(\xi)$
$a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$	$2\pi (a_0 \delta(\xi) + a_1 i \delta'(\xi) + \dots + a_n i^n \delta^{(n)}(\xi))$

B.2. Transformadas de Laplace

$f(t)$	$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$
$f'(t)$	$s\mathcal{L}(f)(s) - f(0)$
$e^{\alpha t} f(t), \alpha \in \mathbb{R}$	$\mathcal{L}[f(t)](s - \alpha)$
$f(\alpha t), \alpha > 0$	$\frac{1}{\alpha} \mathcal{L}[f(t)]\left(\frac{s}{\alpha}\right)$
$(f \star g)(t)$	$\mathcal{L}(f)(s) \cdot \mathcal{L}(g)(s)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n \mathcal{L}[f(t)](s)}{ds^n}$
$f(t), w$ -periódica	$\frac{1}{1-e^{-sw}} \int_0^w e^{-st} f(t) dt$
$g(t) = 0$ si $t \leq \alpha$ y $g(t) = f(t - \alpha)$ si $t > \alpha, \alpha > 0$	$e^{-\alpha s} \mathcal{L}[f(t)](s)$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{\alpha t} \sin(\beta t), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$	$\frac{\beta}{(s-\alpha)^2 + \beta^2}$
$e^{\alpha t} \cos(\beta t), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$	$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2 + \beta^2}$
$\delta(t - \alpha), \alpha > 0$	$e^{-s\alpha}$
$\delta(t)$	1
$\delta(t + \alpha), \alpha > 0$	0
$\delta^{(n)}(t - \alpha), \alpha > 0$	$s^n e^{-s\alpha}$
$\delta'(t)$	s
$\delta^{(n)}(t)$	s^n
$\delta^{(n)}(t + \alpha), \alpha > 0$	0

Apéndice C

Suma de algunas series numéricas notables

Serie	Suma	Función	Intervalo	Punto / Parseval
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$	$-\frac{\pi^2}{12}$	x^2	$[-1, 1]$	$x = 0$
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$	$\frac{\pi^2}{6}$	x^2	$[-1, 1]$	$x = 1$
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$	$\frac{\pi^4}{90}$	x^2	$[-1, 1]$	Parseval
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$	$-\frac{\pi}{4}$	signo(x)	$[-1, 1]$	$x = \frac{1}{2}$
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$	$\frac{\pi^2}{8}$	signo(x)	$[-1, 1]$	Parseval
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$	$\frac{\pi}{2 \sinh(\pi)} - \frac{1}{2}$	e^x	$[-\pi, \pi]$	$x = 0$
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$	$\frac{\pi}{2 \tanh(\pi)} - \frac{1}{2}$	e^x	$[-\pi, \pi]$	$x = \pi$
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$	$\frac{\pi^3}{32}$	$x^3 - x$	$[-1, 1]$	$x = \frac{1}{2}$
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$	$\frac{\pi^6}{945}$	$x^3 - x$	$[-1, 1]$	Parseval
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$	$\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$	$\cos(x/2)$	$[-\pi, \pi]$	$x = 0$
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$	$\frac{1}{2}$	$\cos(x/2)$	$[-\pi, \pi]$	$x = \pi$