EDP lineales de primer orden.

$$a(x,y)\cdot u_x(x,y)+b(x,y)\cdot u_y(x,y)+c(x,y)\cdot u(x,y)=f(x,y) \tag{1}$$

Si $a\neq 0$, se introduce una nueva variable ξ, de forma que $\xi(x,y)=cte$ defina (implícitamente) una solución de la EDO característica

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b(x,y)}{a(x,y)} \tag{2}$$

y la nueva función incógnita $v(\xi,y)=u(x,y)$ (ó $v(\xi,x)=u(x,y)$, según convenga).

EDP lineales de segundo orden con coeficientes constantes.

$$a\cdot u_{xx}(x,y)+b\cdot u_{xy}(x,y)+c\cdot u_{yy}(x,y)+d\cdot u_x(x,y)+e\cdot u_y(x,y)+f\cdot u(x,y)=F(x,y) \tag{3}$$

donde $a,b,c,d,e,f\in\mathbb{R}$. En este caso, si $a\neq 0$, las EDO características vienen dadas por

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \tag{4}$$

Llamaremos λ_1 y λ_2 a los valores obtenidos en (4).
Caso Hiperbólico: $b^2-4ac>0$**.** Como λ_1 y λ_2 son reales, consideramos las nuevas variables $\xi(x,y)=y-\lambda_1 x,\quad \eta(x,y)=y-\lambda_2 x$.
Caso Elíptico: $b^2-4ac<0$**.** Aquí, λ_1 y λ_2 son complejos, por lo que consideramos

$$\xi(x,y)=y-Re(\lambda_1)x,\quad \eta(x,y)=-Im(\lambda_1)x.$$

Caso Parabólico: $b^2-4ac=0$**.** Ahora, $\lambda_1=\lambda_2$, por lo que usamos las variables

$$\xi(x,y)=y-\lambda_1 x,\quad \eta(x,y)=x.$$

También puede servir cualquier otra η independiente de ξ.
En los tres casos, consideramos la nueva función $v(\xi,\eta)=u(x,y)$. En la segunda fase, para eliminar las derivadas parciales de primer orden que sea posible, consideramos el cambio de función $w(\xi,\eta)=v(\xi,\eta)\exp(k\xi+h\eta)$ con k y h constantes por determinar.

Teorema de clasificación. Dada la EDP (3), existen cambios de variable y de función incógnita que la transforman en una de las siguientes formas canónicas:

- Caso Hiperbólico: $w_{\xi\eta}(\xi,\eta)+\hat{f}\cdot w(\xi,\eta)=\hat{F}(\xi,\eta)$.
- Caso Elíptico: $w_{\xi\xi}(\xi,\eta)+w_{\eta\eta}(\xi,\eta)+\hat{f}\cdot w(\xi,\eta)=\hat{F}(\xi,\eta)$.
- En el Caso Parabólico, hay dos posibilidades:

$$w_{\eta\eta}(\xi,\eta)+\hat{d}\cdot w_\xi(\xi,\eta)=\hat{F}(\xi,\eta)\qquad (\text{caso no degenerado, si } \hat{d}\neq 0\ )$$

$$w_{\eta\eta}(\xi,\eta)+\hat{f}\cdot w(\xi,\eta)=\hat{F}(\xi,\eta)\qquad (\text{caso degenerado }) $$

donde $\hat{d},\hat{f}$ son constantes.■

La **Serie de Fourier** asociada a una función f definida en $[-L,L]$ viene dada por

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right),\quad \text{donde}$$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx,\quad n=0,1,2,\ldots,\quad b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx,\quad n=1,2,\ldots$$

Teorema.- Supuesto que f es una función C^1 a trozos en $[-L,L]$, se verifica

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)=\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}\quad \forall x\in(-L,L)$$

Identidad de Parseval. $\displaystyle\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2+b_n^2=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f^2(x)dx.$

Función	Transformada de Fourier
$f(x)$	$\mathcal{F}(f)(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx$
$e^{-\lvert x\rvert}$	$\frac{2}{\xi^2+1}$
e^{-x^2}	$\sqrt{\pi}e^{-\xi^2/4}$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\pi e^{-\lvert\xi\rvert}$
$f'(x)$	$i\xi\mathcal{F}(f)(\xi)$
$xf(x)$	$i\frac{d\mathcal{F}(f)(\xi)}{d\xi}$
$f(x-\alpha)$	$e^{-i\alpha\xi}\mathcal{F}[f(x)](\xi)$
$e^{i\alpha x}f(x)$	$\mathcal{F}[f(x)](\xi-\alpha)$
$f(\alpha x),\quad \alpha\neq 0$	$\frac{1}{\lvert\alpha\rvert}\mathcal{F}[f(x)](\frac{\xi}{\alpha})$
$(f\star g)(x)$	$\mathcal{F}(f)(\xi)\cdot\mathcal{F}(g)(\xi)$

$\mathcal{F}(f)$ existe al menos si $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx<+\infty$. Se define $(f\star g)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-y)g(y)dy$. La transformada inversa de Fourier $\mathcal{F}^{-1}(g)(x)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}g(\xi)e^{i\xi x}d\xi$. Por el teorema de inversión

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)(\xi))(x)=\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2},\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Función	Transformada de Laplace
$f(t)$	$\mathcal{L}(f)(s)=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{\alpha t}\sin(\beta t)$	$\frac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$
$e^{\alpha t}\cos(\beta t)$	$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$
$f'(t)$	$s\mathcal{L}(f)(s)-f(0)$
$e^{\alpha t}f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)](s-\alpha)$
$f(\alpha t),\ \alpha>0$	$\frac{1}{\alpha}\mathcal{L}[f(t)](\frac{s}{\alpha})$
$(f\star g)(t)$	$\mathcal{L}(f)(s)\cdot\mathcal{L}(g)(s)$
$t^nf(t)$	$(-1)^n\frac{d^n\mathcal{L}[f(t)](s)}{ds^n}$
$f(t)$, $w-$periódica	$\frac{1}{1-e^{-sw}}\int_0^w e^{-st}f(t)dt$
$g(t)=0$ si $t\leq a$ y $g(t)=f(t-a)$ si $t>a,\quad a>0$	$e^{-as}\mathcal{L}[f(t)](s)$

$\mathcal{L}(f)$ existe al menos si $f(t)$ es continua a trozos en cualquier intervalo $[0,T]$ y de orden exponencial. Se define $(f\star g)(t)=\int_0^t f(t-y)g(y)dy$. **No se detallan las hipótesis necesarias para que se verifique cada una de las propiedades anteriores, pero hay que tenerlas en cuenta.**

Función Gamma. Dado $z>0$, se define $\Gamma(z)=\displaystyle\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$. Se cumple $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$, por lo que $\Gamma(n+1)=n!$ para cada $n\in\mathbb{N}$. Además, $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$. Dado $z<0$, $z\neq-1,-2,-3,\ldots$, se definen $\Gamma(z)=\dfrac{\Gamma(z+1)}{z}$ y $z!=\Gamma(z+1)$.

Función Beta. Dados $z,w>0$, $B(z,w)=\displaystyle\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt=\dfrac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$.

Funciones de Bessel. Dado $\alpha\geq 0$, se define

$$J_\alpha(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\alpha+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k+\alpha},\quad t>0.$$

Es solución de la EDO $t^2x''(t)+tx'(t)+(t^2-\alpha^2)x(t)=0$. Se cumplen las relaciones $J_0'(t)=-J_1(t)$ y $(t^nJ_n(t))'=t^nJ_{n-1}(t)$ para $n=0,1,2,\ldots$

Series de Fourier-Bessel. Fijado $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ y $\{\mu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ los ceros de $J_n(t)$ en $(0,+\infty)$, dada x una función C^1 a trozos en $[0,1]$, se verifica

$$\frac{x(t^+)+x(t^-)}{2}=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_kJ_n(\mu_kt)\quad\forall\, t\in(0,1),\quad \text{con}\quad \gamma_k=\frac{2\int_0^1 x(t)J_n(\mu_kt)tdt}{(J_{n+1}(\mu_k))^2}\quad k=1,2,3,\ldots$$

Polinomios de Legendre.

$$P_0(t)=1,\quad P_1(t)=t,\quad P_2(t)=\frac{3t^2-1}{2},\quad P_3(t)=\frac{5t^3-3t}{2},\quad P_4(t)=\frac{35t^4-30t^2+3}{8},\ldots$$