Introducción a las EDP
11 de Abril de 2019

Ejercicio 1 [1.4 puntos] Resolver el siguiente problema:

$$u_x(x,y) + x u_y(x,y) = y, \quad u(\varphi(y), y) = g(y),$$

en los casos $\varphi(y) = 0,\ g(y) = y^2$ y $\varphi(y) = 1,\ g(y) = 2y$.

Ejercicio 2 [2.5 puntos] Reducir la siguiente EDP lineal de segundo orden a su forma canónica, <u>haciendo todos los cambios en detalle</u> y resolverla (si es posible):

$$4u_{xx}(x,y) + 5u_{xy}(x,y) + u_{yy}(x,y) + u_x(x,y) + u_y(x,y) = 7 + 3x + y.$$

Ejercicio 3 [1.5 puntos] Resolver el siguiente problema, utilizando el método de separación de variables:

$$\begin{cases} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, & x \in (0,1),\ y \in (0,7), \\ u_x(0,y) = u_x(1,y) = 0, & y \in (0,7), \\ u(x,0) = x^2,\ u(x,7) = 8, & x \in (0,1). \end{cases}$$

Ejercicio 4 [2 puntos] Determinar <u>justificadamente</u> las sumas de las series numéricas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{81n^2 - 4} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(81n^2 - 4)^2},$$

utilizando el desarrollo en serie de Fourier de la función $f(x) = \sin\left(\frac{4x+9\pi}{18}\right)$ en $[-\pi, \pi]$.

Ejercicio 5 [1.2 puntos] Determinar (si es posible) una EDP lineal de segundo orden para la cual la expresión

$$u(x,y) = K_1(y+6x)e^y + K_2(y-3x)e^{-3x} + 3xe^y,$$

defina su solución general, donde K_1 y K_2 son funciones arbitrarias dos veces derivables.

Ejercicio 6 [1.4 puntos] Resolver el siguiente problema, utilizando el método de separación de variables:

$$\begin{cases} u_t(x,y,t) = u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t), & x \in (0,3),\ y \in (0,2),\ t > 0, \\ u(0,y,t) = u(3,y,t) = 0, \quad y \in (0,2),\ t > 0, \\ u(x,0,t) = u(x,2,t) = 0, \quad x \in (0,3),\ t > 0, \\ u(x,y,0) = (x-3)(y-2), \quad x \in (0,3),\ y \in (0,2). \end{cases}$$

<u>Observación:</u> NO ES NECESARIO VOLVER A DEMOSTRAR LAS FÓRMULAS O LOS RESULTADOS VISTOS EN CLASE. <u>El resto de los pasos se deben justificar convenientemente.</u> Se valorará si las expresiones finales de los resultados están simplificadas.

<u>Tiempo: Dos horas y media</u>

Introducción a las EDP

EDP – Series de Fourier

15 de Junio de 2019

Ejercicio 1 [1.4 puntos] Resolver el siguiente problema:

$$yu_x(x,y) + xu_y(x,y) + yu(x,y) = 0, \quad u(x,\varphi(x)) = (x^4 + 6x^2)e^{-x},$$

en los casos $\varphi(x) = 0$ y $\varphi(x) = x$.

Ejercicio 2 [2.5 puntos] Reducir la siguiente EDP lineal de segundo orden a su forma canónica, haciendo todos los cambios en detalle y resolverla (si es posible):

$$u_{xx}(x,y) + 3u_{xy}(x,y) + 2u_{yy}(x,y) - u_x(x,y) + u_y(x,y) - 6u(x,y) = e^{2x+y} + 8x - y.$$

Ejercicio 3 [1.4 puntos] Resolver el siguiente problema, utilizando el método de separación de variables:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), & x \in (0,1),\ t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = \sin(9x), & x \in (0,1). \end{cases}$$

Ejercicio 4 [2 puntos] Determinar justificadamente la suma de la serie numérica

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k+1)}{(2k+1)^2 + 4},$$

utilizando el desarrollo en serie de Fourier de la función $f(x) = \sinh(2x)$ en $[-\pi, \pi]$. ¿Qué información se obtiene en este caso al aplicar la identidad de Parseval?

Ejercicio 5 [1.5 puntos] Determinar razonadamente la solución general del siguiente problema, utilizando el método de separación de variables:

$$\begin{cases} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, & x \in (0,2),\ y \in (0,6), \\ u_y(x,0) = u(x,6) = 0, & x \in (0,2), \\ u(0,y) = 0,\ u(2,y) = f(y), & y \in (0,6), \end{cases}$$

donde se supone que la función f es conocida. Resolverlo cuando $f(y) = 3\cos\left(\frac{5\pi y}{12}\right)$.

Ejercicio 6 [1.2 puntos] Resolver el siguiente problema, utilizando el método de separación de variables:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,y,t) = u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t), & x,y \in (0,1),\ t > 0, \\ u(0,y,t) = u(1,y,t) = 0, \quad y \in (0,1),\ t > 0, & \\ u(x,0,t) = u(x,1,t) = 0, \quad x \in (0,1),\ t > 0, & \\ u(x,y,0) = x(y-1), \quad x,y \in (0,1), & \\ u_t(x,y,0) = (x-1)y, \quad x,y \in (0,1). & \end{cases}$$

Observación: NO ES NECESARIO VOLVER A DEMOSTRAR LAS FÓRMULAS O LOS RESULTADOS VISTOS EN CLASE. El resto de los pasos se deben justificar convenientemente. Se valorará si las expresiones finales de los resultados están simplificadas.

Tiempo: Dos horas y media

Introducción a las EDP

Transformadas Integrales – Funciones Especiales – Distribuciones

15 de Junio de 2019

Ejercicio 1 [1.2 puntos] Establecer razonadamente si la siguiente deducción es correcta o no, justificando cada paso:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t^3}}dt \overset{①}{=} \Gamma(-1/2) \overset{②}{=} -2\Gamma(1/2) \overset{③}{=} -2\sqrt{\pi}.$$

Ejercicio 2 [1.2 puntos] Determinar razonadamente el valor de la integral

$$\int_0^{+\infty} x^{23} e^{-x^6} dx.$$

Ejercicio 3 [1.6 puntos] Determinar la transformada de Fourier de

$$f(x) = e^{-4|x-9|} + \delta(x+7).$$

Ejercicio 4 [1.5 puntos] Determinar la transformada de Laplace de la solución del siguiente problema

$$x''(t) - 4x'(t) + 3x(t) = \begin{cases} t^2, & \text{si } t \in [0,1], \\ \\ 0, & \text{si } t > 1, \end{cases} \qquad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$$

Ejercicio 5 [1.6 puntos] Resolver el siguiente problema, utilizando el método de separación de variables:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,y,t) = u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t), & \text{si } x^2+y^2 \le 1, \ t > 0, \\ u(x,y,t) = 0, & \text{si } x^2+y^2 = 1, \ t > 0, \\ u(x,y,0) = 3, & \text{si } x^2+y^2 < 1, \\ u_t(x,y,0) = 4(x^2+y^2), & \text{si } x^2+y^2 < 1. \end{cases}$$

Ejercicio 6 [1.5 puntos] Demostrar que se cumple la siguiente identidad para cada $\alpha \ge 0$ y $t > 0$:

$$2J'_\alpha(t) = J_{\alpha-1}(t) - J_{\alpha+1}(t),$$

donde J_α denota la función de Bessel de primera clase y orden α.

Ejercicio 7 [1.4 puntos] Calcular justificadamente las derivadas primera y segunda (en el sentido de las distribuciones) de la función

$$x(t) = |t^2 + t - 6|,$$

en el intervalo $(-7, 7)$ haciendo los cálculos en detalle.

Observación: NO ES NECESARIO VOLVER A DEMOSTRAR LAS FÓRMULAS O LOS RESULTADOS VISTOS EN CLASE. El resto de los pasos se deben justificar convenientemente. Se valorará si las expresiones finales de los resultados están simplificadas.

Tiempo: Dos horas y cuarto

Introducción a las EDP

EDP – Series de Fourier

5 de Septiembre de 2019

Ejercicio 1 [1.4 puntos] Resolver el siguiente problema

$$xu_x(x,y) + 6yu_y(x,y) - 12u(x,y) = 2x + y, \quad u(\alpha(y), y) = 0, \text{ si } x > 0, y > 0,$$

en los casos $a)$ $\alpha(y) = \sqrt[6]{y}$, $b)$ $\alpha(y) = 1$.

Ejercicio 2 [2.5 puntos] Reducir la siguiente EDP lineal de segundo orden a su forma canónica, <u>haciendo todos los cambios en detalle</u> y resolverla (si es posible):

$$2u_{xx}(x,y) + 4u_{xy}(x,y) + 2u_{yy}(x,y) + u_x(x,y) + u_y(x,y) + 4u(x,y) = x + 5y + 1 + 7e^{x-3y}.$$

Ejercicio 3 [1.5 puntos] Resolver el siguiente problema utilizando el método de separación de variables

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t), & x \in (0,3),\ t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(3,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = 3 - x, & x \in (0,3), \\ u_t(x,0) = 1 + 5x, & x \in (0,3). \end{cases}$$

Ejercicio 4 [2 puntos] Calcular el desarrollo en serie de Fourier de la función $f(x) = \frac{|x|-x}{2}$ en $[-4,4]$. Determinar <u>justificadamente</u> las series numéricas (<u>y sus sumas</u>) que se obtienen 1) al tomar $x = 0$ en la serie de Fourier y 2) al utilizar la identidad de Parseval.

Ejercicio 5 [1.4 puntos] Determinar razonadamente la solución general del siguiente problema, utilizando el método de separación de variables

$$\begin{cases} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) - u(x,y) = 0, & x \in (0,3),\ y \in (0,2), \\ u(0,y) = 0, u_x(3,y) = 0, & y \in (0,2), \\ u(x,0) = f(x),\ u(x,2) = 7f(x), & x \in (0,3). \end{cases}$$

donde se supone que la función f es conocida. Resolverlo cuando $f(x) = x$.

Ejercicio 6 [1.2 puntos] Resolver el siguiente problema, utilizando el método de separación de variables

$$\begin{cases} u_t(x,y,t) = u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t), & x \in (0,3),\ y \in (0,7),\ t > 0, \\ u(0,y,t) = u(3,y,t) = 0, & y \in (0,7),\ t > 0, \\ u(x,0,t) = u(x,7,t) = 0, & x \in (0,3),\ t > 0, \\ u(x,y,0) = (x-3)y^2, & x \in (0,3),\ y \in (0,7). \end{cases}$$

<u>Tiempo: Dos horas y media.</u> En la calificación se tendrá en cuenta si se realizan los cálculos explícitamente, salvo cuando sean los mismos que los hechos en clase, en cuyo caso bastará con indicarlo.

Introducción a las EDP

Transformadas Integrales – Funciones Especiales – Distribuciones

5 de Septiembre de 2019

Ejercicio 1 [1.2 puntos + 1 punto] Determinar razonadamente los siguientes valores:

$$a) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|x|} \sin(5|x|)dx \qquad\qquad b) \quad \left(\frac{-3}{2}\right)! \left(\frac{1}{2}\right)! \left(\frac{3}{2}\right)!$$

Ejercicio 2 [1.8 puntos] Determinar la transformada de Fourier de la función

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x + 2} + \begin{cases} \cos(x), & \text{si } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \\ \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ejercicio 3 [1.6 puntos] Dada una función f de clase C^1 en $[0, t_0) \cup (t_0, +\infty)$, teniendo una discontinuidad de salto finito en t_0 y de orden exponencial cuando $t \to +\infty$, determinar y demostrar la relación que existe entre $\mathcal{L}(f)$ y $\mathcal{L}(f')$, siendo f' la derivada de f en el sentido de las distribuciones. Aplicarlo al caso

$$f(t) = \begin{cases} 1 - t, & \text{si } t \in [0, 1], \\ \\ e^t, & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

Ejercicio 4 [1.6 puntos] Calcular la transformada inversa de Laplace de la función

$$F(s) = \frac{s - 3}{(s^2 + 3s + 2)(s^2 - 4s + 8)}.$$

Ejercicio 5 [1.4 puntos] Suponiendo que $\{\mu_k\}_{k=1}^{+\infty}$ son los ceros positivos de $J_1(t)$, desarrollar la función

$$f(t) = \begin{cases} 2t, & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \\ t^3, & \text{si } t \in (\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

en serie de Fourier-Bessel del tipo $\sum_{k=1}^{+\infty} \gamma_k J_1(\mu_k t)$ en el intervalo $[0, 1]$.

Ejercicio 6 [1.4 puntos] Sabiendo que para cada $n \in \mathbb{N}$, $Q_n(t)$ es un polinomio de grado n solución de la EDO

$$(1 - t^2)x''(t) - 6tx'(t) + n(n + 5)x(t) = 0,$$

determinar justificadamente la condición de ortogonalidad que verifica la familia $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Tiempo: Dos horas y cuarto. En la calificación se tendrá en cuenta si se realizan los cálculos explícitamente, salvo cuando sean los mismos que los hechos en clase, en cuyo caso bastará con indicarlo. Todas las respuestas deben estar justificadas.